Міністерство освіти і науки України

Державний заклад
«Луганський національний університет
імені Тараса Шевченка»

Дудник О. М., Коваленко Т. В.

ОСНОВИ ПОЧАТКОВОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Навчально-методичний посібник
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності 013 Початкова освіта
денної та заочної форм навчання

ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка»
2021

УДК 510(075.8)

Рецензенти:

Караман О. Л. – доктор педагогічних наук, професор, директор навчально-наукового інституту педагогіки і психології ДЗ «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка».

Жучок А. В. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри алгебри і системного аналізу ДЗ «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка».

Ліннік О. О. – доктор педагогічних наук, доцент, професор кафедри початкової освіти Київського університету імені Бориса Грінченка.

Дудник О. М., Коваленко Т. В.
Основи початкового курсу математики : навчально-методичний посібник для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 013 Початкова освіта денної та заочної форм навчання / О. М. Дудник, Т. В. Коваленко; ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка», К. : ТАЛКОМ, 2021. – 142 с.

Навчально-методичний посібник висвітлює провідні питання основ початкового курсу математики. Посібник складається з теоретичного й практичного блоків, що сприяє якісному засвоєнню майбутніми вчителями початкової школи теоретичного матеріалу та формуванню певних професійних умінь.

Посібник призначений для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 013 Початкова освіта денної та заочної форм навчання.

УДК 510(075.8)

Рекомендовано до друку вченою радою ДЗ «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка» (протокол № 10 від 25.06.2021 р.)

ЗМІСТ

Передмова

Курс математики початкових класів є основою для осмисленого засвоєння молодшими школярами системи математичних знань, формування математичних умінь та навичок, що стануть запорукою отримання математичної освіти вцілому.

Як зазначено у Державному стандарті початкової освіти (2018 р.) вимоги до обов’язкових результатів навчання визначаються з урахуванням компетентнісного підходу до навчання, в основу якого покладено ключові компетентності. Для досягнення поставленої мети перед учителем початкових класів постають такі завдання: сформувати в учнів розуміння ролі математики в пізнанні явищ і закономірностей навколишнього світу; досвіду використання математичних знань та способів дій для розв’язування навчальних і практичних задач; здатності міркувати логічно, оцінювати коректність і достатність даних для розв’язування навчальних і практичних задач; розвити математичне мовлення учнів, необхідного для опису математичних фактів, відношень і закономірностей.

Реалізація мети і завдань початкового курсу математики здійснюється за змістовими лініями: «Числа, дії з числами. Величини», «Геометричні фігури», «Вирази, рівності, нерівності», «Робота з даними», «Математичні задачі і дослідження».

Учні за допомогою засобів наочності та з опорою на конкретні життєві приклади знайомляться з такими важливими математичними поняттями, як натуральне число і число нуль, при чому уявлення про них формується на основі оперування групами об'єктів, тобто множинами; опановують операції над цими числами; вивчають властивості операцій (комутативність, асоціативність, дистрибутивність); опановують вміннями застосовувати їх в обчисленнях. Ознайомлення з арифметичними діями будується на основі множинної і порядкової теорії чисел. Наприклад, з опорою на поняття операції об'єднання двох множин, які не мають спільних елементів, вводиться поняття додавання натуральних чисел. Вивчаються десяткова система числення, принципи її побудови як позиційної системи; відношення, числові вирази, рівності та нерівності, рівняння; геометричні фігури та їх властивості. Ознайомлення з величинами розглядається як пропедевтична основа для побудови моделей навколишнього світу, важливою ланкою, що пов'язує математику з іншими науками. У процесі формування обчислювальних навичок, у тісному зв'язку з формуванням умінь розв'язувати різні види сюжетних задач, відбувається засвоєння початкових уявлень про бінарні відношення. До того ж у сучасному початковому курсі математики використовуються елементи математичної логіки, комбінаторики та багато інших питань.

Правильне навчання математики багато в чому залежить від математичної підготовки майбутнього вчителя початкових класів, який повинен отримати чіткі уявлення про основні поняття і операції теорії множин, математичної логіки, про число і геометричної фігури, про величини та їх вимірювання. Крім цього, майбутні вчителі повинні отримати уявлення про сучасну математику, розуміти вагоме значення застосування її методів у різних сферах людської діяльності.

У цьому посібнику ми спробували представити всі питання математичної підготовки майбутнього вчителя початкових класів згідно з чинною навчальною програмою.

І. ТЕОРЕТИЧНИЙ БЛОК

РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

1.1. Поняття множини. Елементи множини

Із різноманітних об’єктів навколишнього світу людина часто виділяє лише деякі, в яких у даний час вона зацікавлена. Наприклад, учні першого класу, студенти, викладачі навчально-наукового інституту педагогіки і психології ДЗ «ЛНУ ім. Т. Шевченка», фото на першому поверсі тощо. Вибрані об’єкти об’єднуються під загальною назвою *множина.* У побуті частіше замість терміну *множина* використовують слова-синоніми. Наприклад, множина студентів – *група*, викладачів – *педагогічний склад*, фото на першому поверсі – *фотогалерея.* Але згадані синоніми можна використовувати лише відповідно до певної сукупності об’єктів. Сукупність марок природно називати колекцією, але недопустимим є колекція учнів першого класу, бо в зазначеному випадку правильно говорити перший клас.

Термін *множина* не викликає асоціацій з якимись конкретними об’єктами, тому його можна використовувати до будь-яких сукупностей предметів: множина учнів першого класу, множина викладачів, множина картин у музеї тощо.

У математиці поняття множини відносять до найпростіших понять, яким не даються чіткі визначення. Так, наприклад, не дається визначення прямій лінії. Множину можна уявити собі як з’єднання, сукупність, добір деяких предметів, об’єднаних за будь-якою ознакою.

Множини позначають великими латинськими буквами: A, B, C, D, F,…. Але для деяких множин використовують інші позначення. Наприклад, пряму як множину точок площини або простору позначають малими латинськими буквами (a, b, c).

Найважливіші числові множини мають загальноприйняті назви і позначення:

N – множина натуральних чисел;

N_0 – множина цілих невід'ємних чисел;

Z – множина цілих чисел;

Q – множина раціональних чисел;

R – множина дійсних чисел;

P – множина простих чисел;

[a, b] – числовий проміжок, у якому перше і останнє числа йому належать;

(a, b] – числовий проміжок, у якому перше число не належить йому, а останнє число належить;

[a, b) – числовий проміжок, у якому перше число належить йому, а останнє число не належить;

(a, b) – числовий проміжок, у якому перше та останнє числа йому не належать.

Визначення: *Предмети будь-якої природи, наприклад, люди, числа, геометричні фігури, предмети меблів, космічні тіла і т. ін., що складають множину, називаються* ***елементами множини***. Наприклад, буква «к» – елемент множини букв українського алфавіту. Елементи множин позначають малими латинськими буквами у фігурних дужках: N = {a, b, c}. Читають: множина *N* складається з елементів *a, b, c*.

Відношення належності елемента до множини записують за допомогою символу: ∈ – елемент належить множині, або ∉ – елемент не належить множині. У математичній літературі іноді неналежність до множини позначають символом $\overleftarrow{\in}$. Запис «a ∈ M» читають: «*a* є елементом множини *M*, або «елемент *a* належить множині *M*», або «елемент *a* входить до множини *M*». Запис 4 ∉ {1, 5, 6}, або 4 $\overleftarrow{\in}$ {1, 5, 6} означає, що елемент 4 не належить множині {1, 5, 6}. Якщо a ∈ D, b ∈ D, c ∈ D, … , k ∈ D, то для скорочення пишуть: a, b, c, … , k ∈ D.

Різні елементи однієї величини позначають різними символами (буквами, числами тощо), але один і той же елемент може позначатися різними символами (назвами).

Наприклад, дана множина *A*, яка складається із елементів: *a* – найменше двоцифрове натуральне число, яке ділиться на 3, *b* – найменше двоцифрове число, яке ділиться на 4. Таким чином елемент *a* та елемент *b* позначають один і той же об'єкт: число 12. Тобто *a* і *b* рівні (тотожні) елементи: $a = b$.

Розглянемо приклад: нехай *K* – множина учнів-першокласників школи, *A* – множина першокласників одного із класів, *B* – множина учнів іншого першого класу, *C* – множина учнів-першокласників наступного класу. Отже, елементами множини *K* є множини *A, B, C*. Таким чином, $K = \{A, B, C\}$.

Множини бувають скінченними, тобто містять певну кількість елементів (множина будинків на вулиці), та нескінченними, які містять нескінченну кількість елементів (множина точок прямої).

Визначення: *Множини A і B називаються* ***рівними****, якщо вони містять одні й ті самі елементи.*

Наприклад, елементами множини *A* є натуральні числа, які діляться на 3, а множина *B* складається із натуральних чисел, сума цифр яких ділиться на 3. У даному випадку множини A і B мають одні й ті ж елементи: $A = B$.

Властивості рівних множин

1) $A = A$;

2) якщо $A = B$, *то* $B = A$;

3) якщо $A = B$, $B = C$, *то* $A = C$.

4) запис $A \neq B$ *означає, що принаймні одна із множин містить елемент, який не належить іншій.*

1.2. Способи задання та запису множин. Порожня множина

Визначення: *Множина вважається* ***заданою****, тобто* ***відомою****, якщо про будь-який її елемент можна сказати, належить він цій множині чи не належить.*

Найпростіше множину можна задати, якщо виписати всі її елементи або певним чином перелічити їх. Наприклад:

• множину студентів певної групи можна задати списком, який складається з переліку прізвищ кожного з студентів цієї групи. Причому порядок прізвищ для множини не має значення;

• множину, яка складається з елементів a, b, c, d, k записують так: $\{a, c, d, b, k\}$ (порядок не має значення).

Але в деяких випадках множина може мати багато елементів, наприклад, множина натуральних чисел від 1 до 25. Щоб не записувати всі числа, можна скористатися таким записом: {1, 2, 3, … , 25}. Множину **N** записують: {1, 2, 3, … , n, …}. Такий запис можливий, якщо нам достовірно відомо, що знаходиться за крапками із записаної частини множини.

Зауважимо: ***кожен предмет (елемент) входить у множину тільки один раз!***

Наприклад, множину різних цифр, із яких складається число 2974397 записують: $\{2,9,7,4,3\}$.

Але не завжди можна перелічити елементи множини. Наприклад, не можливо перелічити множину всіх чисел, які діляться націло на 5. У даному випадку необхідно знайти умову, за якою можна визначити, чи належить будь-яке число до даної множини, чи не належить.

Розглянемо такі умови:

1) нехай ми розглядаємо тільки натуральні числа, тоді умова запишеться так: $x \in N, x \vdots 5$;

2) нехай ми розглядаємо тільки цілі числа, тоді умова запишеться так: $x \in Z, x \vdots 5$;

3) нехай ми розглядаємо дійсні числа, тоді умова запишеться так: $x \in \mathrm{R}, x \vdots 5$.

У теорії множин такі умови називають характеристичною властивістю. У загальному вигляді характеристичні властивості 1, 2, 3 записують:

1) $\mathrm{M} = \{x \mid x \in N, x \vdots 5\}$;

2) $\mathrm{K} = \{x \mid x \in Z, x \vdots 5\}$;

3) $\mathrm{L} = \{x \mid x \in R, x \vdots 5\}$.

Читають так: наприклад, для першого випадку, множина M складається з таких елементів x, кожен з яких належить до множини натуральних чисел та без остачі ділиться на 5.

Також числові множини можна зображати графічно.

Наприклад, маємо множину натуральних чисел від 2 до 8. Розглянемо можливі варіанти характеристичної властивості та графічного зображення:

а) крайні числа входять до множини:

$A_1 = \{x \mid x \in N, 2 \leq x \leq 8\}$

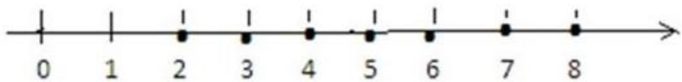


Рис. 1

б) перше число не входить до множини:

$A_2 = \{x \mid x \in N, 2 < x \leq 8\}$

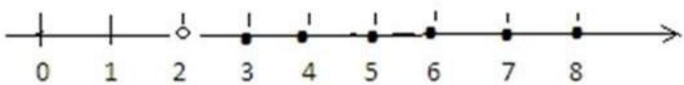


Рис. 2

в) останнє число не входить до множини:

$A_3 = \{x \mid x \in N, 2 \leq x < 8\}$

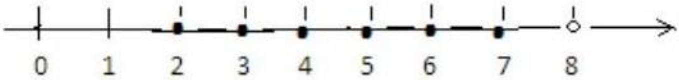


Рис. 3

г) перше і останнє число не належать множині:

$A_4 = \{x \mid x \in N, 2 < x < 8\}$

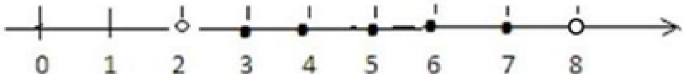


Рис. 4

Множина натуральних чисел дискретна, тобто між двома натуральними числами, що стоять поруч, не міститься жодного натурального числа. Тому на числовій прямій натуральні числа позначаються точками.

Маємо множину цілих чисел від – 3 до 2. У даному випадку можливі варіанти та графічні зображення аналогічні.

Маємо множину дійсних чисел від – 2 до 2. Можливі варіанти аналогічні попереднім. Розглянемо їх:

а) $B_1 = \{x \mid x \in R, -2 \leq x \leq 2\}$

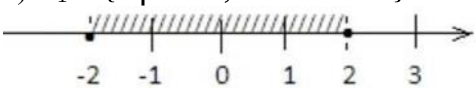


Рис. 5

б) $B_2 = \{x \mid x \in R, -2 < x \leq 2\}$

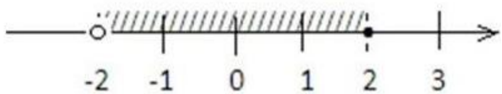


Рис. 6

в) $B_3 = \{x \mid x \in R, -2 \leq x < 2\}$

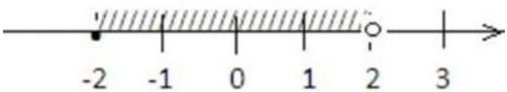


Рис. 7

г) $B_4 = \{x \mid x \in R, -2 < x < 2\}$

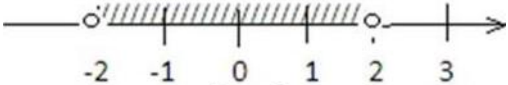


Рис. 8

Між будь-якими двома дійсними числа міститься безліч інших дійсних чисел. Тому кожній точці числової прямої відповідає конкретне дійсне число, і навпаки – кожному дійсному числу відповідає конкретна точка.

У підручниках для початкових класів міститься багато завдань, у яких необхідно вказати множини, елементи яких відповідають конкретним властивостям, тобто за характеристичною властивістю. Наприклад:

- завдання з математики: «Запишіть всі двоцифрові числа, які складаються з цифр 1, 2, причому, цифри у числі можуть повторюватися»; «Запишіть числа, які більше за 95, і менші за 105»; «Запишіть всі одноцифрові числа»;
- завдання з мови: «Підкресліть у даному слові всі голосні звуки»; «Підкресліть у тесті всі розповідні речення»;
- завдання з природознавства: «Із тварин, які зображені на малюнку, назвіть свійських»; «На малюнку обведіть об’єкти живої природи».

Розглянемо приклад: «У школі проводиться олімпіада з математики серед трьох четвертих класів». Позначимо передбачуваних призерів олімпіади одного з класів через множину *A*, призерів іншого класу через множину *B*, призерів третього – через множину *C*. За підсумками олімпіади сталося так, що у класі А – 1 призер, у класі В – немає призерів, у класі С – 2 призери. Таким чином: множина А містить тільки один елемент, у множині В елементи відсутні, в множині С – два елементи. Отже множина В називається ***порожньою.*** Довільні порожні множини рівні. Порожню множину позначають символом: $\varnothing$. Порожня множина не містить жодного елемента.

На уроках математики в початкових класах поняття «порожня множина» використовується при вивченні числа 0, тобто число 0 позначає ***відсутність*** предметів (елементів) у певній множині (наприклад, цукерок у коробці, пелюсток на квітці тощо). Багато вчителів роблять помилку, коли говорять, що число 0 – це нічого, порожнє місце.

1.3. Підмножини. Рівні множини

Розглянемо приклад. Нехай *А* – множина студентів 1 курсу нашого інституту, а *В* – множина студентів вашої групи. Очевидно, що множина *В* входить у множину *А*. У математиці кажуть, що множина *В включена* у множину *А*. У даному випадку множину *В* називають підмножиною множини *А*. Відносно елементів даних множин можна сказати, що кожен елемент множини *В* є елементом множини *А*.

Визначення: *Множина* ***В*** *називається* ***підмножиною*** *множини* ***А****, якщо кожний елемент множини* ***В*** *належить множині* ***А***. За допомогою символів це записується так: $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, або $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$. Читають так: «Множина В є підмножиною множини А», або «Множина В є частиною множини А», або «Множина А містить множину В».

Розглянемо наступні випадки:

- нехай усі елементи множини *А* є елементами множини *В*, і всі елементи множини *В* є елементами множини *А*, тобто множини рівні: **А = В.** У цьому випадку можна дати інше *визначення рівним множинам: Множини А і В називаються* ***рівними****, тоді і тільки тоді, якщо А є підмножиною В, і одночасно В є підмножиною А*;

• нехай усі елементи множини *B* є елементами множини *A*, але не всі елементи множини *A* є елементами множини *B*: **B** $\subseteq$ **A**, але **B** $\neq$ **A.** У даному випадку говорять, що множина **B** – *правильна частина множини* **A.**

Прийнято вважати*, що будь-яка множина є підмножиною самій собі:* **A** $\subseteq$ **A, B** $\subseteq$ **B, M** $\subseteq$ **M,** … . *Порожня множина є підмножиною будь-якої множини:* $\varnothing \subseteq$ **A,** $\varnothing \subseteq$ **B,** $\varnothing \subseteq$ **M,** … .

Визначення: *Будь-яка непорожня підмножина* ***B*** *множини* ***A****, яка не співпадає з* ***A*** *називається* ***власною підмножиною****. Підмножини A і* $\varnothing$ *називають* ***невласними підмножинами****.*

Розглянемо приклад: *A* – множина чотирикутників, *B* – множина прямокутників, *C* – множина квадратів. У даному прикладі маємо: ***C*** $\subseteq$ ***B, B*** $\subseteq$ ***A,*** але ж і ***C*** $\subseteq$ ***A.*** Кожний квадрат є прямокутником, а прямокутник є чотирикутником, отже квадрат є чотирикутником: якщо ***C*** $\subseteq$ ***B, B*** $\subseteq$ ***A,*** то ***C*** $\subseteq$ ***A.***

1.4. Поняття геометричної фігури

Геометрична фігура – це найважливіше поняття геометрії, яке визначається через поняття **«*точка*»** та «***множина*».**

Визначення: ***Геометричною фігурою*** *називають будь-яку непорожню множину точок.*

Із визначення випливає, що окремо взята точка, скінченна множина точок, нескінченна множина точок – це геометричні фігури. Приклади:

• відрізок, трикутник, куля – геометричні фігури, які являють собою скінченну множину точок;

• пряма, промінь – геометричні фігури, які являють собою нескінченну множину точок.

Частіше за все довільну геометричну фігуру позначають літерою F. Із рис. 9 випливає, що точка C належить геометричній фігурі, записують: $C \in F$. Точка D не належить фігурі F, позначають: $D \notin F$.

Якщо множина фігури F_1 є підмножиною множини точок фігури F_2, то фігура F_1 називається частиною фігури F_2. Записують: $F_1 \subset F_2$. На рис. 10 трикутник F_1 є частиною круга F_2, а овал F_1 є частиною ромба F_2 (рис. 11).

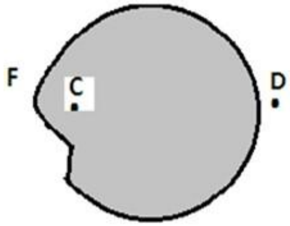


Рис. 9

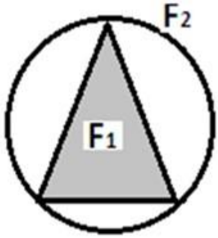


Рис. 10

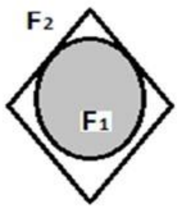


Рис. 11

Поняття «частина фігури» використовується при визначенні інших геометричних фігур. Наприклад, відрізком BC називається частина прямої, що складається з усіх точок прямої, які лежать між точками B і C, включаючи самі точки (рис. 12).

Рис. 12

1.5. Графічна ілюстрація множин. Діаграми Ейлера-Венна

Математичні поняття частіше за все відображають графічно, а саме: рисунками, кресленнями, які допомагають краще засвоїти ці поняття. Щоб наочно зображати множини, англійський математик Джон Венн (1834 – 1923) запропонував використовувати замкнуті фігури на площині. Набагато раніше Ейлер (1707 – 1783) для зображення відношень між множинами використовував круги. Пізніше такі зображення отримали назви діаграми Ейлера-Венна, або круги Ейлера-Венна.

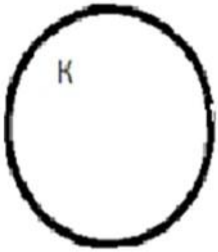


Рис. 13

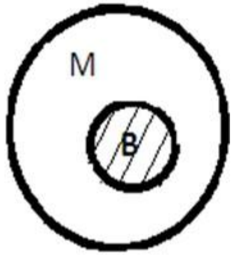


Рис. 14

Якщо якусь множину представити у вигляді круга, а її елементи у вигляді точок, які належать цьому кругу, то зображення множини буде виглядати так, як на рис. 13 (точки не показують). Рис. 14 показує, що множина B міститься у множині M, інакше кажучи, множина B є підмножиною множини M: $B \subseteq M$.

1.6. Універсальна множина

Позначимо через I множину всіх студентів – майбутніх учителів початкових класів нашого інституту, множину студентів 1 курсу – через A, множину студентів 2 курсу – через B, множину студентів третього курсу – через C, множину студентів четвертого курсу – через D. На 1 курсі – дві групи: ПО – A_1, і ПОУ – A_2; на другому: ПО – B_1, ПОУ – B_2; на третьому: ПО – C_1, ПОУ – C_2. Використовуючи поняття «підмножина», за допомогою символів поетапно запишемо та зобразимо за допомогою кругів Ейлера-Венна відношення між названими множинами.

) $A \subseteq I$; $A_1 \subseteq A$; $A_2 \subseteq A$ (рис. 15);

б) $B \subseteq I$; $B_1 \subseteq B$; $B_2 \subseteq B$ (рис. 16);

в) $C \subseteq I$; $C_1 \subseteq C$; $C_2 \subseteq C$ (рис. 17);

г) $D \subseteq I$.

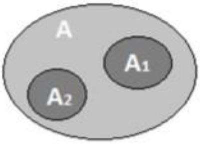


Рис. 15

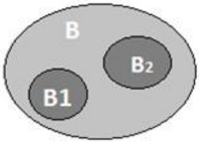


Рис. 16

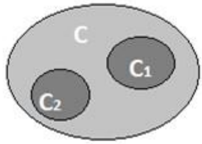


Рис. 17

Як бачимо, всі множини є підмножинами однієї й тієї множини *I*. Такі ситуації зустрічаються досить часто.

Визначення: *Множина, для якої всі множини, які розглядаються, є її підмножинами, називається* ***універсальною множиною*** *і частіше за все позначається буквами* ***I*** *або* ***T***. Зображується за допомогою прямокутника.

Зробимо узагальнюючий рисунок для нашого прикладу, який ілюструє відношення між розглянутими множинами (рис. 18).

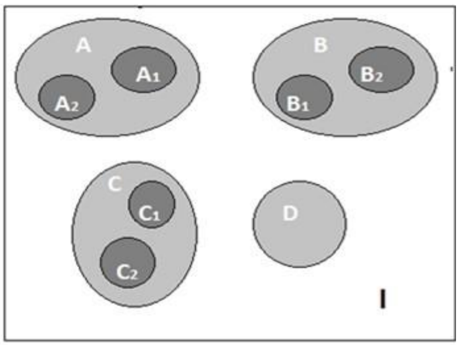


Рис. 18

Приклад. Представити за допомогою кругової схеми відношення між такими поняттями: іграшка (А), іграшка на батарейках (D), лялька (С), автомобіль на батарейках (В), пістолет (Е). На рис. 19 бачимо, що всі поняття входять у поняття «іграшка», якщо пістолет теж іграшковий. Але може бути випадок, коли пістолет не є іграшкою, тому частина поняття «пістолет» виходить за

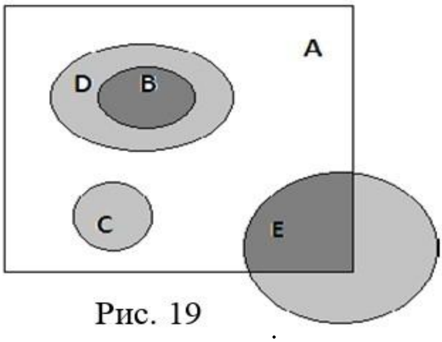


Рис. 19

межі поняття «іграшка». Окрім того, «автомобіль на батарейках» входить у поняття «іграшка на батарейках».

1.7. Перетин множин

У математиці часто доводиться вирішувати такі завдання, які пов'язані з пошуком елементів двох і більше множин, які належать одночасно всім даним множинам; об'єднанням декількох множин; або видаленням частини елементів з множин. Такі дії можна виконати за допомогою певних операцій.

Розглянемо приклад: A = {– 3, 0, 2, 8, 7, 3}, B = {– 4, 0, 3, 8, – 2, 10}.

Знайдемо множину, яка складається з елементів, що одночасно належать і множині A, і множині B: C = {0, 3, 8}. Очевидно, що множина C є одночасно підмножиною і A, і B. Щоб відобразити дану ситуацію, необхідно, щоб круги Ейлера перетиналися. Це дає можливість показати загальні елемент: 0, 3, 8 (рис. 20). Множина ***C*** в даному випадку називається ***перетином множин A і B***.

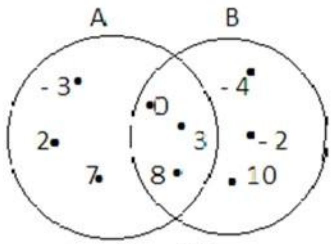


Рис. 20

Визначення: Перетином множин A і B *називається множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які одночасно належать і множині* ***A****, і множині* ***B.***

Перетин множин позначають за допомогою символу **A $\cap$ B.** Визначення перетину множин A і B можна записати за допомогою характеристичної властивості:

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}$.

У загальному вигляді перетин множин представлений на рис. 21.

Якщо множини не перетинаються, записують:

$A \cap B = \varnothing$

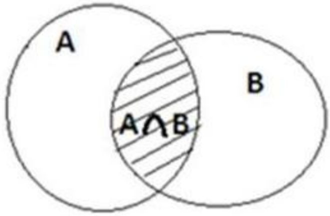


Рис. 21

Властивості перетину множин

1. *Для будь-яких двох множин* A і B *має місце комутативний закон:*

$$A \cap B = B \cap A.$$

Дійсно, множина $A \cap B$ містить всі елементи множини $B \cap A$.

2. *Для будь-яких множин* A, B і C *має місце асоціативний закон:*

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Доведемо дану властивість за допомогою діаграм Ейлера-Венна:

1) зобразимо ліву частину рівності:

а) зобразимо спочатку множини A, B, C, які взаємно перетинаються (рис. 22 а);

б) за законом дужок зобразимо спочатку перетин $B \cap C$. Отримали множину, яка зображена штрихами (рис. 22 б);

в) знайдемо, яку множину отримаємо у результаті перетину A з утвореним перетином $B \cap C$; отримали множину, яка заштрихована двійною штриховкою – це і є результат (рис. 22 в).

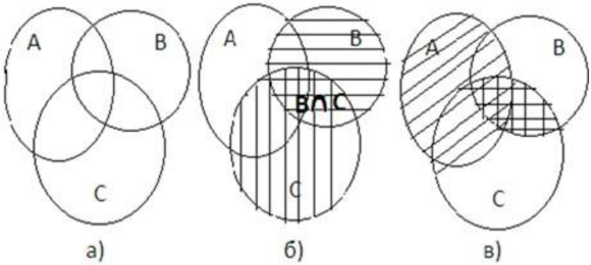


Рис. 22

2) аналогічно виконаємо операції для знаходження результату правої частини (рис. 23).

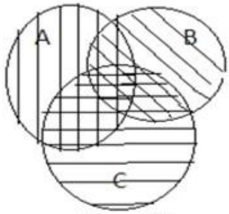


Рис. 23

Порівняння діаграм на рис. 22 в та рис. 23 дає можливість зробити висновок, що множини А $\cap$ (В $\cap$ С) і (А $\cap$ В) $\cap$ С складаються з одних і тих же елементів, тобто вони рівні.

3. *Якщо* **В $\subseteq$ А**, *то* **А $\cap$ В = В.** *Якщо множина* **В** *є підмножиною множини* **А**, *то перетин множин* **А** і **В** *дорівнює* множині **В** (рис. 24).

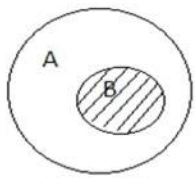


Рис. 24

4. *Для будь-якої множини* **А** *перетен її з порожньою множиною дорівнює порожній множині*:

$$\mathbf{A} \cap \varnothing = \varnothing.$$

5. *Для будь-якої множини* **А** *перетен її з самою собою є сама множина* **А:**

$$\mathbf{A \cap A = A.}$$

6. *Для будь-якої множини* **А** *перетен її з унівесальною множиною* **I** *дорівнює множині* **А**:

$$\mathbf{A \cap I = A.}$$

Якщо роглядаються числові множини, то операцію перетин множин краще зображувати на числовій прямій.

Наприклад: знайдіть перетин множин А і В, якщо А = $\{x \mid x \in R, -4\frac{1}{2} < x \leq 3\}$ і В = $\{x \mid x \in R, -3{,}7 < x \leq 1{,}7\}$ (рис. 25).

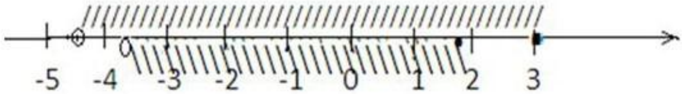


Рис. 25

Як бачимо, А $\cap$ В = В.

Задача. У класі 30 учнів, які займаються хореографією та малюванням. Відомо, що 10 дітей займаються одночасно і хореографією, і малюванням, а малюванням займаються 25 учнів. Скільки учнів займається тільки хореографією?

Розв'яжемо задачу за допомогою діаграм Ейлера-Венна.

Позначимо учнів, які займаються хореографією через А, а які займаються малюванням через В. З умови задачі відомо, що перетин множин А і В містить 10 учнів, а також, що малюванням займаються 25 учнів. З цього випливає, що тільки малюванням займаються 15 учнів (25 – 10).

Таким чином, тільки хореографією займаються: 5 учнів (30 – 10 – 15) (рис. 26).

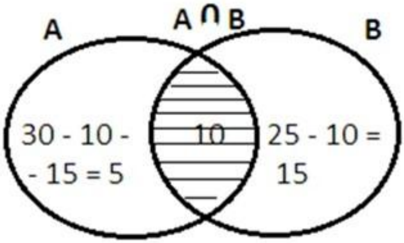


Рис. 26

1.8. Об’єднання множин

У початковому курсі математики при розкритті математичної сутності дії додавання вчитель зазвичай користується роздатковим матеріалом або малюнками із зображенням двох множин предметів. Наприклад, необхідно до числа 6 додати число 3 (рис.27).

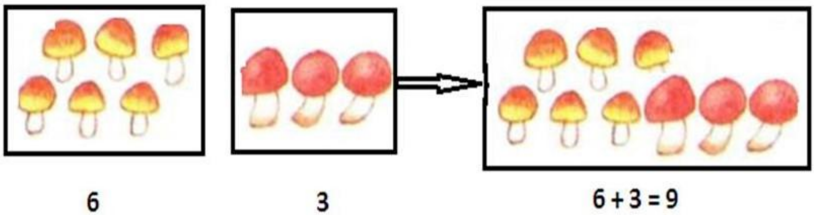


Рис. 27

У ході міркувань учні роблять висновок, що грибочки необхідно об’єднати в одну групу, щоб показати, що їх всього 9.

З точки зору математики така дія відповідає операції з множинами, яка називається *об’єднання множин*; позначається символом $\cup$ (щоб не плутати з символом перетину, символ $\cup$ називають «чашка»). Позначимо ліву множину грибочків А, праву – В. У даному прикладі множини А і В не перетинаються, тому об’єднання множин $A \cup B$ містить елементів: 6 + 3 = 9 (рис.28).

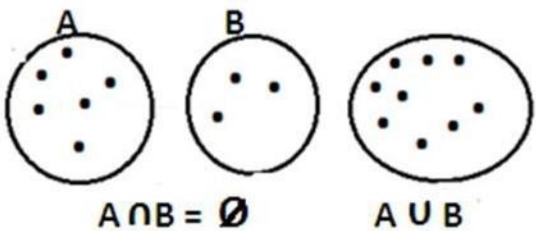


Рис. 28

Розглянемо інший приклад:

A = $\{x \mid x \in \mathrm{N}, 1 \le x \le 12, x \,\vdots\, 2\}$, B = $\{x \mid x \in \mathrm{N}, 1 \le x \le 12, x \,\vdots\, 3\}$.

Запишемо числа, що належать множині A і множині B: A = {2, 4, 6, 8, 10, 12}, B = {3, 6, 9, 12}. У даному прикладі множини A і B перетинаються, тобто мають однакові елементи. Проте за визначенням будь-яка множина не може мати однакові елементи, тобто в множині, яка буде представляти об'єднання множин A і B не повинні двічі зустрічатися числа 6 і 12: A $\cup$ B = {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12}. Проілюструємо наш приклад за допомогою діаграм Ейлера-Венна (рис. 29). Розглянутий приклад відповідає загальному визначенню об'єднання множин.

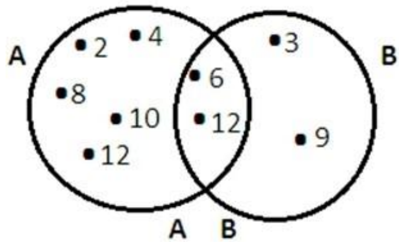


Рис. 29

Визначення: Об'єднанням множин A і B *називається множина* ***A $\cup$ B****, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать принаймні одній із цих множин.*

A $\cup$ B = $\{x \mid x \in A$ або $x \in B\}$

Дане визначення можна трактувати інакше: об'єднанням множин A і B є множина, яка складається з всіх елементів множини A і тих елементів множини B, які не належать множині A. Загальна ілюстрація об'єднання множин представлена на рис. 30.

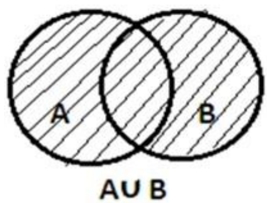


Рис. 30

Властивості об'єднання множин

1. Для будь-яких двох множин A і B *має місце комутативний закон:*

$$\mathbf{A \cup B = B \cup A.}$$

Дійсно, множина A ∪ B містить всі елементи множини B ∪ A.

2. Для будь-яких множин A, B і C *має місце асоціативний закон:*

$$\mathbf{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.}$$

3. *Якщо* B ⊂ A*, то* A ∪ B = A. *Якщо множина* B *є підмножиною множини* A*, то об'єднання множин* A і B *дорівнює множині* A

4. *Для будь-якої множини* A *її об'єднання з порожньою множиною дорівнює самій множині*:

$$\mathbf{A \cup \varnothing = A.}$$

5. *Для будь-якої множини* A *її об'єднання з самою собою є сама множина* A:

$$\mathbf{A \cup A = A.}$$

6. *Для будь-якої множини* A *її об'єднання з унівесальною множиною* I *дорівнює множині* I:

$$\mathbf{A \cup I = I.}$$

7. Для будь-яких множин A, B і C *має місце закон дистрибутивності перетину відносно об'єднання:*

$$\mathbf{(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).}$$

8. Для будь-яких множин A, B і C *має місце закон дистрибутивності об'єднання відносно перетину:*

$$\mathbf{(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).}$$

Приклади.

1. Маємо множини $A = \{x \mid x \in R, -1 \le x \le 3\}$; $B = \{x \mid x \in R, 0 \le x \le 4\}$; $C = \{x \mid x \in R, -2 < x < 0\}$.

Знайти і відобразити на числовій прямій.

1) $A \cup B$; 2) $A \cap B \cup C$; 3) $(A \cup C) \cap B$

1) $A \cup B = \{x \mid x \in R, -1 \le x \le 4\}$ (рис. 31);

2) Скористаємося рис. 31, з якого знайдемо перетин множин A і B.

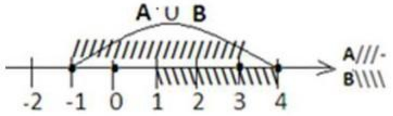


Рис. 31

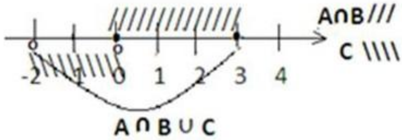


Рис. 32

$A \cap B = \{x \mid x \in R,\ 0 \le x \le 3\}$, побудуємо множину C, яка не містить кінцеві числа. Разом із тим число 0 належить множині $A \cap B$, отже воно входить в обєднання $A \cap B \cup C$:

$A \cap B \cup C = \{x \mid x \in R,\ -2 < x \le 3\}$ (рис. 32);

3) Спочатку виконаємо операцію $A \cup C$: $A \cup C = \{x \mid x \in R,\ -2 < x \le 3\}$ (рис. 33 а). Потім знайдемо відповідь $(A \cup C) \cap B$:

$(A \cup C) \cap B = \{x \mid x \in R,\ 0 \le x \le 3\}$ (рис. 33 б).

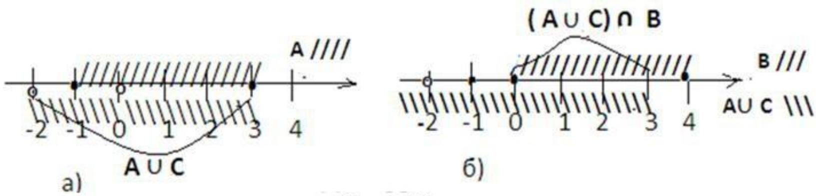


Рис. 33

1.9. Різниця множин. Різниця геометричних фігур

У групі деякі студенти вивчають англійську мову (множина A), деякі – китайську мову (множина B), а деякі – обидві мови (рис. 34). Розглянемо два можливі приклади:

а) усіх студентів, які вивчають китайську мову, запросили на конференцію. Тобто з об’єднання множин A і B необхідно відняти всі елементи, які належать множині B (рис. 35).

Така операція називається різницею множин й позначається символом «\», або «/» в залежності від того, яка величина стоїть на першому місці.

б) усіх студентів, які вивчають англійську мову, запросили на зустріч із гостями. Тобто з об'єднання множин A і B необхідно відняти всі елементи, які належать множині A (рис. 36).

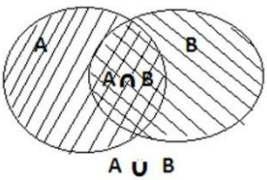


Рис. 34

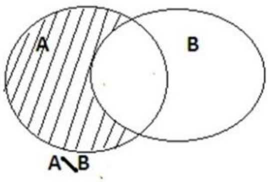


Рис. 35

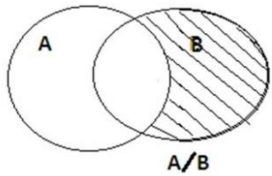


Рис. 36

Зробимо аналіз рисунків і на їх основі дамо узагальнене визначення різниці множин.

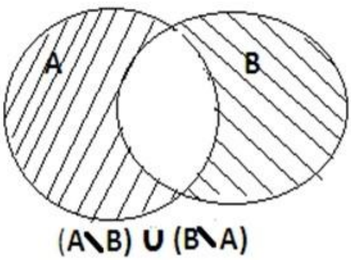


Рис. 37

Визначення:* *Різницею множин **A** *і* **B** *називається множина* **A \ B**, *яка складається з усіх тих елементів множини* **A**, *які не належать множині* **B:**

$$\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \{x \mid x \in \mathrm{A},\ x \notin \mathrm{B}\}.$$

Множина **(A \ B) ∪ (B \ A)** *називається* ***симетричною множиною*** (рис. 37).

Приклад. Знайти та зобразити на числовій прямій різницю множин:

а) C \ D;

б) D \ C,

якщо $C = \{x \mid x \in R,\ 12 \le x \le 20\}$,

$D = \ x \mid x \in R,\ 11 \le x \le 21\}$.

а) C $\setminus$ D = $\varnothing$ (рис. 38 а);

б) D $\setminus$ C = $\{x \mid x \in R, 11 \le x < 12$ і $20 < x \le 21\}$ (рис. 38 б).

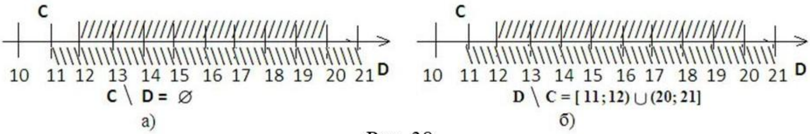


Рис. 38

У геометрії поняття «різниця множин» набуває назву «різниця геометричних фігур».

Визначення: Різницею двох фігур F_1 і F_2 *називається множина всіх точок множини F_1, які не належать фігурі F_2.*

Так, різницею фігур круга і трикутника є фігура, якій не належать точки трикутника у тому числі точки контурних відрізків сторін AB і CB трикутника (рис. 39).

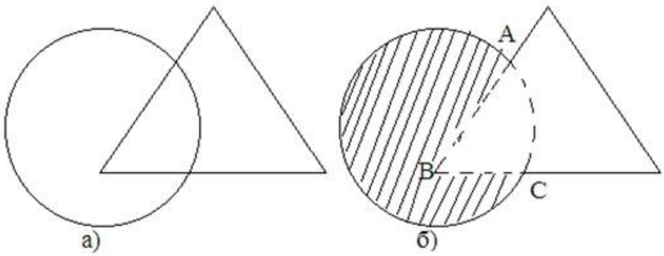


Рис. 39

Властивості різниці множин

1. Різниця множин не комутативна: $A \setminus B \neq B \setminus A$;

2. Різниця множин не асоціативна: $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$;

3. Для різниці множин має місце дистрибутивний закон різниці відносно об'єднання: $(A \cup B) \setminus C = A \setminus C \cup B \setminus C$;

4. Для різниці множин має місце дистрибутивний закон різниці відносно перетину: $(A \cap B) \setminus C = A \setminus C \cap B \setminus C$.

У початкових класах широко використовується поняття різниці двох фігур при вивченні теми «Площа», однак сам термін «різниця фігур» не використовується.

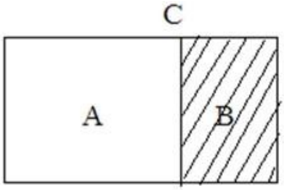


Рис. 40

Наприклад, задача: Маємо прямокутник С, який складається із прямокутників А і В. Площа прямокутника С дорівнює 32 см^2, знайти площу прямокутника В, якщо довжина прямокутника А – 6 см, а ширина – 4 см. Задачу можна розв'язати спираючись на поняття різниці фігур: із прямокутника С необхідно видалити його частину – прямокутник А, залишиться прямокутник В (рис. 40).

Інакше: із площі прямокутника С відняти площу прямокутника А, яку можна знайти:

$S_A = 6 \cdot 4 = 24$ (см^2).

Наступною дією знайдемо площу прямокутника В:

$32 - 24 = 8$ (см^2).

1.10. Доповнення до множини

Розглянемо ситуацію. Для групи студентів (множина А) призначена консультація до екзамену, на яку з'явилася частина студентів (множина В). Викладач не погодився проводить консультацію доки не з'явиться вся група. У даному випадку множина В є підмножиною множини А. Виділимо за допомогою штрихів множину студентів, які не з'явилися на консультацію (рис. 41). Заштрихована множина доповнює множину В до множини А, називається доповненням множини В до множини А, позначається так: $\overleftarrow{B}_A$.

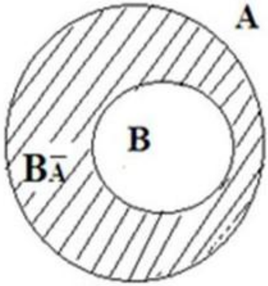


Рис. 41

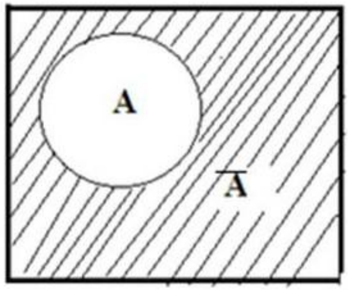


Рис. 42

Зауваження: риска, «$\overline{\quad}$», яка ставиться над якимось символом читається як «не», тобто заперечує. Наприклад: $x \ \overline{\vdots}\ 2$ читається «x не ділиться націло на 2», або «неправильно, що x націло ділиться на 2».

Визначення: *Якщо $B \subset A$ (множина B є підмножиною множини A), то множина всіх елементів із A, які не належать B, називається* ***доповненням*** *до множини A, позначається*: $\overline{B}_A$ (рис. 41). За своєю суттю доповнення $\overline{B}_A = A \setminus B$.

Якщо $A \subset I$ (множина A є підмножиною універсальної множини I), то множина із всіх елементів I, які не належать A, називається доповненням до універсальної множини, позначається: $\overline{A}$ (рис. 42).

Приклад. Множина $A \subset I$, $B \subset I$, $A \cap B \neq \varnothing$, I – універсальна множина. За допомогою діаграм Ейлера-Венна довести, що $\overline{A} \cap \overline{B} = (\overline{A \cup B})$.

1. Спочатку виконаємо операції лівої частини рівності:

• відобразимо доповнення множини A до множини I (рис. 43 а);

• відобразимо доповнення множини B до множини I (рис. 43 б).

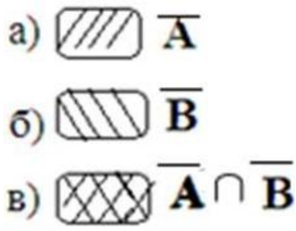


Рис. 43

Множина, яка позначена подвійними штрихами і є перетином доповнень $\overline{A}$ і $\overline{B}$: $\overline{A} \cap \overline{B}$ (рис. 43 в), (рис. 45 а).

2. Виконаємо операції правої частини:

- відобразимо об'єднання множин A і B (рис. 44 а);
- відобразимо доповнення отриманої множини після операції об'єднання множин до множини I (рис. 44 б).

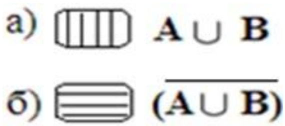


Рис. 44

Множина, яка позначена горизонтальними штрихами є доповненням $A \cup B$ до I (рис. 45 б).

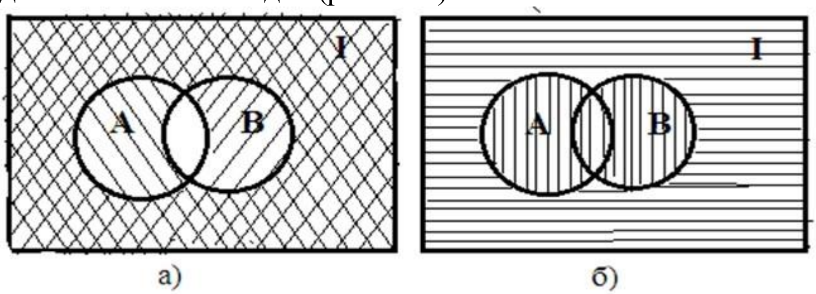


Рис. 45

Порівнюючи області, які позначені подвійною штриховкою на *рис. 45 а* і горизонтальною штриховкою на *рис. 45 б*, приходимо до висновку, що множини $\overline{A} \cap \overline{B}$ і $\overline{(A \cup B)}$ рівні, що і потрібно було довести.

Приклад. Нехай універсальна множина **I** дорівнює множині раціональних чисел **R**: **I = R.** Знайти доповнення $\overline{A}$, якщо:

а) $A = [2, \infty)$;

б) $A = R+$;

в) $A = (1, 2)$.

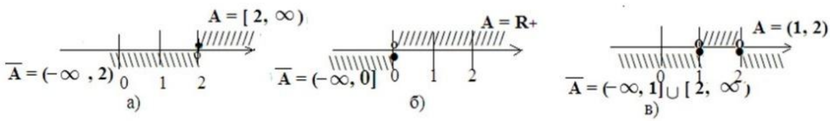


Рис. 46

1.11. Відношення між двома множинами

На основі понять про підмножини, доповнення до множин і операцій з множинами можна прийти до висновку, що дві довільні множини А і В можуть знаходитися в одному з п'яти відношень. Побудуємо схему, яка допоможе нам виявити ці відношення.

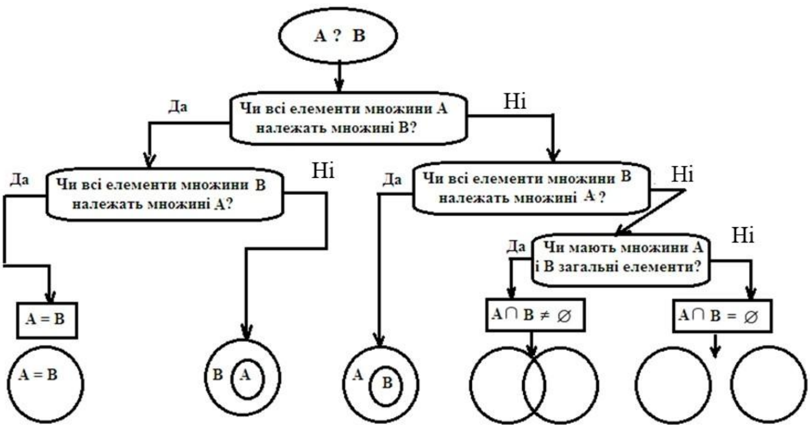


Схема 1

Виявлення правильних відношень між множинами предметів, які оточують нас, є складовою частиною розвитку математичного мислення, що пов'язане з моделюванням та дослідженням різних математичних конструкцій, сприяє розвитку алгоритмічної культури учнів.

1.12. Кортеж. Поняття пари

Розглянемо завдання з математики для молодших школярів: використовуючи цифри 5, 6, 7 записати всі трицифрові числа, причому цифри в числі можуть повторюватися (рис. 47).

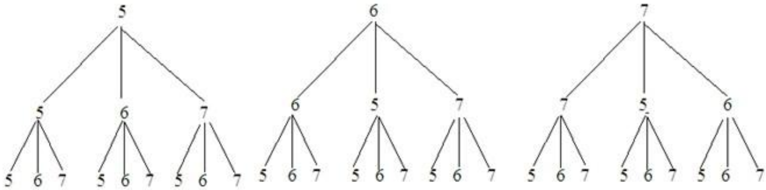


Рис. 47

Візьмемо декілька чисел, наприклад, а) 555, б) 665, в) 566, г) 567. Запишемо множину цифр у кожному з чисел. Пам'ятаємо, що множина не може містити однакові елементи. Тому маємо такі множини:

а) для числа 555 – $A_1 = \{5\}$;

б) для числа 665 – $A_2 = \{6, 5\}$;

в) для числа 566 – $A_3 = \{5, 6\}$;

г) для числа 567 – $A_4 = \{5, 6, 7\}$.

За визначенням множини A_2 і A_3 дорівнюють одна одній, тому що складаються з одних і тих же елементів, а порядок їх розташування не має значення. Тобто множину A_4 можна було б записати інакше: $A_4 = \{5, 6, 7\}= \{6, 5, 7\}= \{7, 6, 5\}$. Але для самих чисел порядок їх розташування дуже суттєвий, тому що 567, 657, 765 – це різні числа. Окрім того, якщо ми записуємо трицифрові числа, то необхідно записати всі три цифри у строгому порядку, тобто повний набір цифр. У математиці такі набори називають *кортежами.*

Визначення: Кортеж *(у математиці) – впорядкована та скінченна сукупність елементів.*

Кожен предмет кортежу називають *компонентою* або *координатою.*

Приклад. Кортеж цифр числа 567 записують через кому у круглих або фігурних дужках: (5, 6, 7). 5 – перша компонента кортежу, 6 – друга компонента, 7 – третя компонента. Кортеж цифр числа 665 записується: (6, 6, 5), де першою компонентою є цифра 6, другою – теж 6, третьою – 5. Кількість компонентів кортежу називається *довжиною кортежу*.

Визначення: Два кортежі $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ ***і*** $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ***рівні***, *якщо вони мають однакову довжину, тобто* $m = n$, *і кожна компонента першого кортежу дорівнює компоненті другого кортежу з тим же номером, тобто* $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_m = a_n$.

Наприклад, кортеж (5, 7, 9, 0) дорівнює кортежу (5, 7, 9, 0), але не дорівнює кортежу (7, 5, 9, 0).

Ми часто вживаємо поняття «кортеж» у різних ситуаціях. Наприклад, «кортеж машин», «весільний кортеж», «урядовий кортеж».

Кортежі довжиною 2 називають упорядкованими парами, довжиною 3 – упорядкованими трійками і т. д. Особливо цікавими для нас є упорядковані пари. Якщо компонентами пари є a і b, запишемо так: (a, b), причому $(a, b) \neq (b, a)$. Окрім пар, у яких $a \neq b$ розглядаються також пари (a, a).

Упорядковані пари можна зображувати на прямокутній системі координат, яку ще називають «декартова система координат». Елемент *a називається лівою (першою) координатою (компонентою), b – правою (другою) координатою (компонентою) упорядкованої пари (a, b)*.

Упорядковані пари, компонентами яких є числа, можна зображувати на прямокутній системі координат.

Наприклад, упорядкована пара (– 4; 3) представлена точкою A (– 4; 3), упорядкована пара (– 2; 2) – точкою B (– 2; 2); упорядкована пара (2; 2) – точкою C (2; 2); пара (–2; – 3) представлена точкою D (– 2; – 3) (рис. 48).

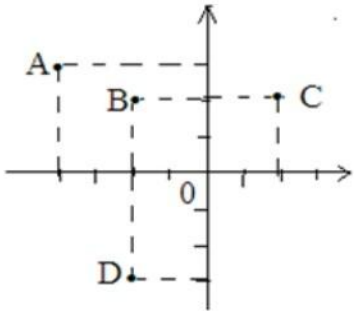


Рис. 48

1.13. Декартів добуток. Графічне зображення декартового добутку

Розглянемо множини, елементами яких є міста A = {Старобільськ, Лисичанськ} і B = {Кремінна, Рубіжне, Новоайдар}. Складемо можливі автобусні маршрути зі Старобільська та Лисичанська в інші міста. Для простоти скористаємося рис. 49 (*направлені стрілки називаються графами*). Позначені нами маршрути представляють собою всі можливі пари, у яких на першому місті стоять компоненти множини A, тобто міста Старобільськ і Лисичанськ, а на другому місці – множини B, тобто міста Кремінна, Рубіжне, Новоайдар. Отримали множину пар: (Старобільськ, Кремінна), (Старобільськ, Рубіжне), (Старобільськ, Новоайдар), (Лисичанськ, Кремінна), (Лисичанськ, Рубіжне), (Лисичанськ, Новоайдар).

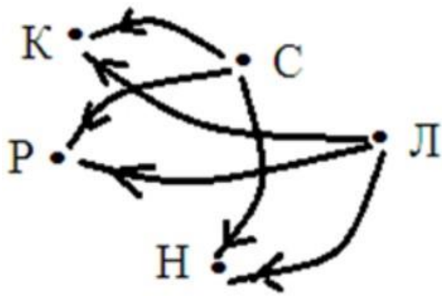


Рис. 49

Сконструйовані таким чином пари називають ***декартовим добутком*** множин А і В, позначають А × В, читають: «А хрест В».

Визначення: Декартовим добутком множин Х і У *називається множина всіх упорядкованих пар (х, у), де* $x \in X$, $y \in У$*; позначається* $X \times У$.

Запис даного визначення виглядає так:

$X \times У = \{(x, y) \mid x \in X, y \in У\}$.

Приклад. Знайти декартів добуток множин А = {2, 4, 6} і В = {– 2, – 4, – 6}:

• записати у вигляді множини упорядкованих пар:

А × В = {(2, – 2), (2, – 4), (2, – 6), (4, – 2), (4, – 4), (4, –6), (6, –2), (6, – 4), (6, – 6)};

• зобразити за допомогою графів: рис. 50;

• зобразити у вигляді таблиці (табл. 1);

Рис. 50

Табл. 1

B / A	-2	-4	-6
2	(2, - 2)	(2, - 4)	(2, - 6)
4	(4, - 2)	(4, - 4)	(4, - 6)
6	(6, - 2)	(6, - 4)	(6, - 6)

• зобразити в прямокутній системі координат: рис. 51.

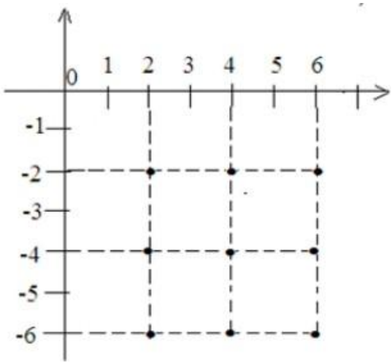


Рис. 51

• знайти декартів добуток множин В і А, записати у вигляді упорядкованих пар:

$B \times A = \{(-2, 2), (-2, 4), (-2, 6), (-4, 2), (-4, 4), (-4, 6), (-6, 2), (-6, 4), (-6, 6)\}$.

Порівняємо декартові добутки $A \times B$ і $B \times A$. Як бачимо, вони нерівні: $A \times B \neq B \times A$.

Приклад. Знайти декартові добутки множин Х і У, якщо:

а) $X = \{x \mid x \in Z, -1 \leq x \leq 3\}$,
$У = \{y \mid y \in Z, -2 \leq y \leq 4\}$;
б) $X = \{x \mid x \in Z, -1 \leq x \leq 3\}$,
$У = \{y \mid y \in R, -2 \leq y \leq 4\}$;
в) $X = \{x \mid x \in R, -1 \leq x \leq 3\}$,
$У = \{y \mid y \in Z, -2 \leq y \leq 4\}$;
г) $X = \{x \mid x \in R, -1 \leq x \leq 3\}$,
$У = \{y \mid y \in R, -2 \leq y \leq 4\}$;
д) $X = \{x \mid x \in R, -1 < x < 3\}$,
$У = \{y \mid y \in R, -2 < y < 4\}$.

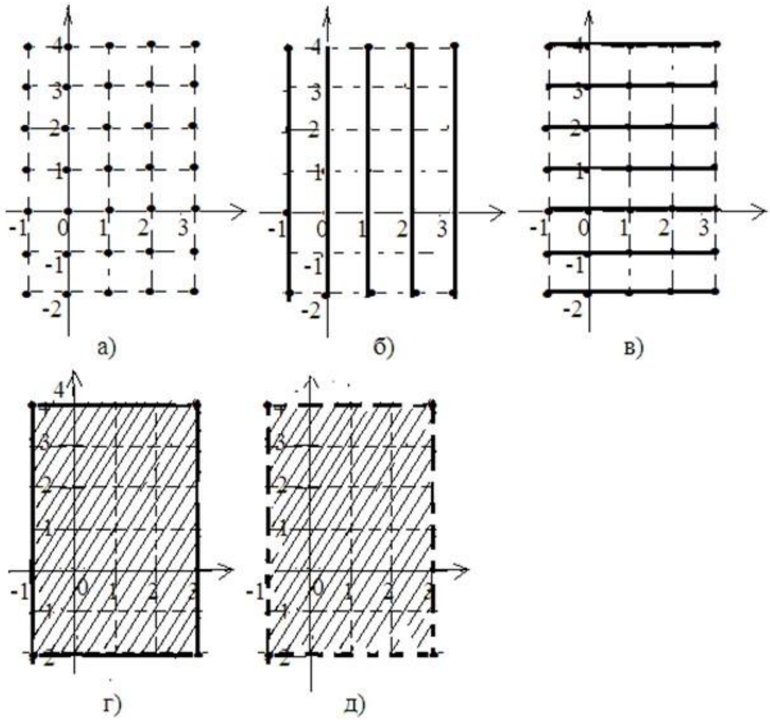


Рис. 52

Можна знаходити декартів добуток співпадаючих множин A × A, його називають *декартовим квадратом*. Цей добуток складається з упорядкованих пар (*a, b*), де $a \in A, b \in A$.

Наприклад, дана множина M = {6, 7, 8}. Знайти M × M.

M × M = {(6; 6), (6; 7), (6; 8), (7; 6), (7; 7), (7; 8), (8; 6), (8; 7), (8; 8)}.

Властивості декартового добутку

- *якщо $A \neq B$, $A \times B \neq B \times A$, тобто декартів добуток множин не володіє властивістю комутативності;*
- *декартів добуток множин не володіє властивістю асоціативності:*

$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ для будь-яких множин А, В, С;

• *якщо хоча б одна з множин А або В порожня, то і декартів добуток цих множин є порожня множина:*

$$A \times \varnothing = \varnothing \times B = \varnothing \times \varnothing = \varnothing.$$

Ця властивість випливає з поняття декартового добутку і поняття порожньої множини;

• *для будь-яких трьох множин А, В, С має місце дистрибутивна властивість декартового добутку відносно:*

а) перетину множин: $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

б) об'єднання множин: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

в) різниці множин: $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Теорема *(без доведення): Число елементів у декартовому добутку двох (трьох, чотирьох, ...) скінченних множин А, В (С, D, ...) дорівнює добутку чисел елементів у кожній із них.*

Контрольні запитання

1. Сформулюйте визначення множини.
2. Як називається об'єкт будь-якої множини?
3. У яких випадках множина вважається заданою?
4. Як називається операція над множинами, у результаті якої отримуємо множину, яка складається із усіх тих елементів, які належать хоча б одній із даних множин?
5. Які множини називаються скінченними / нескінченними? Наведіть конкретні приклади.
6. Дати визначення поняттю «рівні множини».
7. Яку множину називають порожньою? Наведіть конкретні приклади.
8. Як називається операція над множинами, у результаті якої отримуємо множину, яка складається із усіх тих елементів, які належать кожній з даних множин?

9. Дати визначення поняттю «різниця множин».

10. Яку множину називають універсальною?

11. Як називається операція над двома множинами, що позначається символом $\cup$?

12. Як називається операція над двома множинами, що позначається символом $\cap$?

13. Як називається упорядкована n-ка?

14. За яких умов два кортежі вважаються рівними?

15. Як визначається довжина кортежу?

16. Що являє собою декартовий добуток множин?

17. Який декартовий добуток називають декартовим квадратом?

18. Які існують способи графічного зображення декартового добутку?

19. Дати визначення поняттю «доповнення до множини».

20. Які числа належать до множини Р? Наведіть декілька прикладів таких чисел.

РОЗДІЛ 2. КОМБІНАТОРИКА

У житті кожному з нас доводилось вибирати з деякої кількості предметів декілька, тобто з множини виділяти підмножину. Наприклад, складати комплект одягу з юбок, блуз, брюк тощо. Розглянемо задачу: Тетяна збирається на день народження до подруги. Їй необхідно підібрати костюм із юбки та блузки, або із брюк і блузки. Скільки можливостей має Тетяна, щоб скласти комплект одягу, якщо в неї є одна юбка, одні брюки і блузи: біла, червона і синя?

Подібну задачу ми вирішували раніше, коли складали числа із цифр. Використаємо метод «дерева» (рис. 53).

Рис. 53

Таким чином у Тетяни є шість можливих варіантів скласти костюм.

Дана задача та попередні з числами і цифрами називаються комбінаторними, і відносяться до окремого розділу математики, який так і називається – **комбінаторика.**

Визначення: Комбінаторика *– це розділ математики, який розглядає розв'язання задач вибору і розташування деякої множини у відповідності з правилами, які задані умовою.* Комбінаторика вивчає комбінації та перестановки предметів, розміщення елементів, які володіють заданими властивостями. Традиційним питання в комбінаторних задачах є: скількома способами … ?

Комбінаторика походить від латинського слова *combinare – «поєднувати, сполучати».*

Народження комбінаторики як розділу математики пов'язане з працями великих французьких математиків XVII століття ***Блеза Поскаля і Пьєра Ферма*** з теорії азартних ігор.

2.1. Методи вирішення комбінаторних задач

Розглянемо методи, які можна використовувати в початкових класах при розв'язанні комбінаторних задач.

Метод перебору

Метод перебору полягає в тому, що необхідно зробити повний перебір усіх можливих варіантів. Покажемо цей метод на прикладі розв'язання задачі: «У гурток бального танцю записалися Тетяна, Оля, Наталка, Світланка, Петро, Микола, Вітя, Олег. Які танцювальні пари з дівчинки та хлопчика можуть утворитися?».

У задачі розглядаються дві множини: множина дівчаток (4 елементи) і множина хлопчиків (4 елементи).

Розв'язання

Робимо простий перебір.

1 крок. Добираємо пару з кожного із хлопчиків до першої дівчинки на ім'я Тетяна: 1) Тетяна – Петро, 2) Тетяна – Микола, 3) Тетяна – Вітя, 4) Тетяна – Олег.

2 крок. Продовжуємо варіанти перебору утворюючи пари, в яких добираємо до другої дівчинки Олі кожного із хлопчиків: 5) Оля – Петро, 6) Оля – Микола, 7) Оля – Вітя, 8) Оля – Олег.

Кроки 3 і 4 виконуємо аналогічно:

3 крок: 9) Наталка – Петро, 10) Наталка – Микола, 11) Наталка – Вітя, 12) Наталка – Олег.

4 крок: 13) Світланка – Петро, 14) Світланка – Микола, 15) Світланка – Вітя, 16) Світланка – Олег.

Таким чином отримали 16 можливих танцювальних пар.

Не важко здогадатися, що ми отримали всі можливі упорядковані пари, в яких першою компонентою є елемент першої множини, а другою – елемент другої множини, тобто ми виконували операцію декартового добутку двох множин.

Табличний метод

Табличний метод полягає у тому, що всі умови вносяться в таблицю і в ній же виконується рішення. Такий метод більш наглядно, ніж простий перебір, представляє рішення задачі.

Задача. У шкільній їдальні приготували на сніданок: плов (П), кашу (К), рагу (Р), а з напоїв – сік (С), чай (Ч) і молоко (М), йогурт (Й). Скільки різних варіантів сніданку можна скласти?

Розв'язання

Побудуємо таблицю із стовпчиків і рядків, у клітинки будемо вносити дані (табл. 2). У рядки запишемо елементи першої множини – страви, у стовпчиках запишемо елементи другої множини – напої.

Табл.2

	П	**К**	**Р**
С	**ПС**	**КС**	**РС**
Ч	**ПЧ**	**КЧ**	**РЧ**
М	**ПМ**	**КМ**	**РМ**
Й	**ПЙ**	**КЙ**	**РЙ**

Як бачимо, отримали 12 варіантів сніданку.

У даній задачі ми також, як і у попередній знайшли добуток двох множин.

Метод побудови «дерева» можливих варіантів

Підбираючи різні комбінації, можна заплутатися. У цьому випадку приходить на допомогу метод побудови «дерева» можливих варіантів рішень. Зовні така схема нагадує дерево, звідси і назва. Ми вже використовували такий метод (див. рис. 47, 53).

Задача. Із кружечків мозаїки синього (С), жовтого (Ж), червоного (Ч) і зеленого (З) кольорів необхідно скласти перший рядок. Скількома способами можна це зробити?

Якщо не користуватися методом побудови дерева, то при розв'язанні даної задачі нам потрібно було б поступово подумки пересувати кружечки мозаїки і підраховувати різні комбінації. Комбінаторне дерево (рис. 54) полегшує виконання нашого завдання.

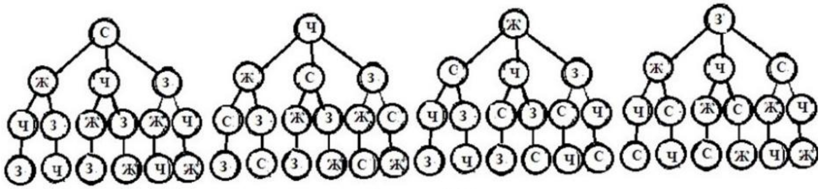


Рис. 54

Дерево показує, що є 24 можливих способів скласти тільки один рядок мозаїки.

Дана задача відрізняється від попередніх тим, що в ній присутня тільки одна множина, але ми знову-таки виконували операцію декартового добутку з однією множиною.

Метод побудови графа

З таким методом ми вже зустрічалися (див. рис. 49, 50, 53).

Граф можна уявити як геометричну фігуру, що складається з точок (вершини графа) і ліній, які їх з'єднують (ребра графа). За допомогою вершин зображують елементи деякої множини (предметів, людей і т. д.), а за допомогою ребер – зв'язки, які визначені між елементами. Для більшої конкретності зв'язків ребра графів представляють стрілками.

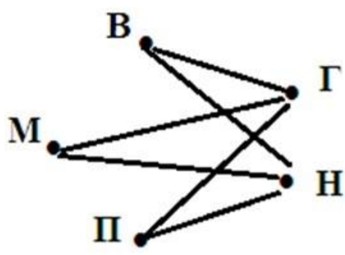


Рис. 55

Задача. Василь (В), Микола (М), Петро (П), Ганна (Г) і Наталка (Н) – кращі шахісти в групі. Для участі в змаганнях необхідно вибрати з них одного хлопця і одну дівчину. Скількома способами це можна зробити?

Представимо рішення задачі у вигляді графу (рис. 55). Під зв'язком між елементами множин (множина хлопців А і множина дівчат В) слід розуміти правило побудови впорядкованої пари, за яким першою компонентою повинен бути елемент із А, а другою – елемент із В, так зазначено в умові задачі. Число стрілок указує на число можливих способів – їх 6.

2.2. Правила суми і добутку

Якщо розглянути математичну сутність поняття комбінаторики, то можна зробити висновок, що в даному розділі математики вивчають скінченні множини, їх підмножини, а також кортежі, які складені зі скінченних множин.

Основою для розв'язання більшості комбінаторних задач є два правила: *правило суми і правило добутку.*

Правило суми дозволяє знайти кількість елементів в об'єднанні двох скінченних множин, а правило добутку – кількість елементів їх декартового добутку.

Позначимо число елементів скінченної множини А символом n (A). Наприклад, якщо А = {а, с, к, е}, то можна записати n (A) = 4 і сказати, що у множині А чотири елементи.

Правило суми

Визначення 1: *Якщо множина А містить т елементів, а множина В – п елементів, і ці множини не перетинаються, то* $A \cup B$ *містить (т + п) елементів. Отже, якщо* $n(A) = m$, $n(B) = n$, $A \cap B = \varnothing$, *то:*

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = (m + n)$ (формула 1) (рис. 56).

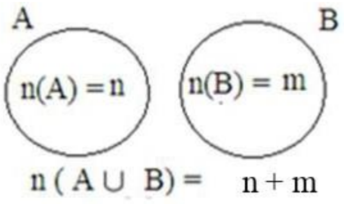


Рис. 56

Дане правило має інше визначення.

Визначення 2: *Якщо елемент x можна вибрати m способами, а елемент y можна вибрати n способами, причому ні один із способів вибору елемента x не співпадає зі способом вибору елемента y, то вибір x або y можна здійснити m + n способами.*

Приклад. Є 5 різних варіантів контрольної роботи звичайної складності і 4 різних варіантів підвищеної складності. Скількома способами можна вибрати тільки один варіант?

Як бачимо, у задачі мова йде про вибір «варіант звичайної складності або варіант підвищеної складності». Якщо взяти варіант звичайної складності, то існує 5 способів, якщо взяти варіант підвищеної складності, то додається ще 4 способи. Таким чином вибір можна здійснити 5 + 4 = 9 способами:

$n(A)=5$, $n(B) = 4$, $A \cap B = \varnothing$.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 5 + 4 = 9$.

Правило додавання використовують тоді, коли потрібно вибрати тільки один елемент. Щоб використовувати правило додавання необхідно:

- усвідомити, з яких саме груп (множин) вибирається один елемент;
- з’ясувати кількість елементів у кожній групі;
- переконатися, що в різних групах, з яких проводиться вибір, немає однакових елементів.

Зауваження: *Правила суми мають місце для більш, ніж двох множин.*

Якщо n(A) = a, n(B) = b, n(C) = c, …, n(F) = f, то вибір тільки одного елементу з цих множин можна здійснити a + b + c ·+ … + f способами, причому способи не повинні збігатися.

Розглянемо ситуацію, в якій множини перетинаються. Перетин множин розділив множини на три частини: I, II, III.

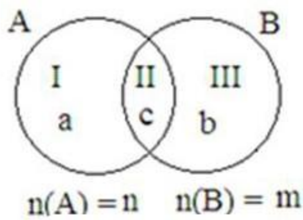


Рис. 57

Позначимо n(A) = n, n(B) = m. Нехай число a – кількість елементів у частині I, число c – кількість елементів у частині II ($n(A \cap B) = c$), число b – кількість елементів у частині III (рис. 57).

Знайдемо кількість елементів об’єднання множин A і B:

$n(A \cup B) = a + c + b$; $a = n - c$, $b = m - c$.

$n(A \cup B) = n - c + c + m - c = n + m - c$.

Таким чином, якщо множини A і B перетинаються, тобто $(A \cap B) \neq \varnothing$*, то отримаємо формулу:*

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (формула 2).

Зауваження: *Правила суми мають місце для більш, ніж двох множин.*

Формули правила суми широко використовуються при розв’язанні комбінаторних задач.

Задача. Із 32 учнів 4 класу 12 учнів займаються плаванням, 15 – стрибками у воду, а 8 школярів займаються в обох секціях. Скільки учнів не займаються ні плаванням, ні стрибками у воду.

Позначимо множину учнів класу буквою **I,** множину учнів, які займаються плаванням – буквою **А,** множину учнів, які займаються стрибками у воду – буквою **В,** множину учнів, які не займаються в названих секціях – буквою **С** (рис. 58). Для рішення задачі необхідно з числа учнів усього класу відняти число, яке вказує на кількість елементів об'єднання множин А і В: n (I) – n (А ⋃ В). За формулою знаходження числа елементів об'єднання множин, які перетинаються маємо:

N (А ⋃ В) = n (А) + n (В) – n (А ⋂ В).

Таким чином, n (С) = 32 – (12 + 15 – 8) = 13 (учнів).

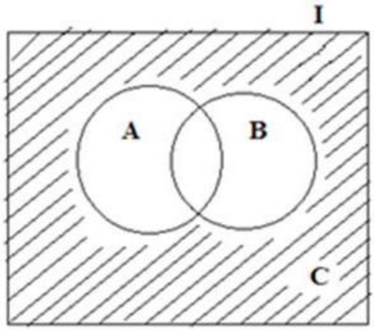


Рис. 58

Правило добутку

Визначення 1: *Кількість упорядкованих пар, що можна скласти з елементів m-елементної множини A та n-елементної множини B, дорівнює m · n, тобто кількість елементів декартового добутку множин A та B дорівнює добутку кількості елементів кожної з множин. Якщо множина A містить m елементів, а множина B n елементів , то A × B містить m · n елементів:*

n(A × B)= n(A) · n(B) (формула 3)

Зауваження: *Дана формула дійсна не тільки для упорядкованих пар, але й для упорядкованих трійок, четвірок і т. д.*

Визначення 2: *Якщо елемент x можна вибрати m способами та після кожного такого вибору елемент y можна вибрати n способами, то вибір упорядкованої пари (x, y) можна здійснити m · n способами.*

Задача. Скільки трицифрових чисел можна утворити із цифр 0, 4, 5, 6, якщо:

1) цифри в числі повторюються;

2) цифри у числі не повторюються.

Рішення 1

Запис трицифрового числа є упорядкована трійка. Першу цифру, яка позначає у числі сотні, можна вибрати 3 рази, тому що число не може починатися з 0, другу цифру – цифру десятків можна вибрати 4 рази, цифру одиниць – теж 4 рази. Тож відповідно до правила добутку вибір упорядкованої трійки (трицифрового числа) можна здійснити $(3 \cdot 4 \cdot 4) = 48$ способами, тобто можна скласти 48 чисел.

Рішення 2

Першу цифру, як і в попередній задачі, можна вибрати 3 рази, другу цифру – цифру десятків можна вибрати 3 рази, тому що одна із цифр, крім нуля, вже була вибрана. Цифру одиниць можна обрати два рази, тому що невибраних цифр залишилося дві. Таким чином, із цифр 0, 4, 5, 6 можна скласти $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ чисел.

2.3. Комбінації без повторень і з повтореннями

Розглянемо ситуацію.

Є урна (ящик), що містить пронумерованих ***n*** об'єктів (куль). Ми вибираємо з цієї урни ***k*** куль; результатом вибору є набір з ***k*** куль. Нас цікавить, скількома способами можна вибрати ***k*** куль з ***n*** або скільки різних результатів може вийти. На це питання не можна дати однозначну відповідь, доки ми не визначимося з тим, як організований вибір:

а) чи можна кулі повертати в урну,

б) що розуміється під різними результатами вибору.

Розглянемо наступні можливі способи вибору.

1. Вибір з повторенням: кожна вийнята куля повертається в урну, кожна наступна куля вибирається з повної урни. В отриманому наборі з номерів куль можуть зустрічатися одні й ті ж номери.

2. Вибір без повторень: вийняті кулі в урну не повертаються, і в отриманому наборі не можуть зустрічатися одні й ті ж номери.

Домовимося, які результати вибору без повторень і вибору з повтореннями (набори з номерів куль) ми будемо вважати різними. Є рівно дві можливості для кожного з указаних виборів:

1. Вибір з урахуванням порядку: два набори номерів куль вважаються різними, якщо вони відрізняються складом або порядком номерів. Так, при виборі трьох куль з урни, що містить 5 куль, набори (1, 5, 2), (2, 5, 1) і (4, 4, 5) різні, якщо порядок враховується.

2. Вибір без урахування порядку: два набори номерів куль вважаються різними, якщо вони відрізняються складом. Набори, що відрізняються лише порядком слідування номерів, вважаються однаковими. Так, набори (1, 5, 2) і (2, 5, 1) не відрізняються і утворюють один і той же результат вибору, тому що порядок не враховується.

Таким чином, при виборі без повторень в умові повинно бути вказано, чи враховується порядок елементів у виборі чи не враховується. Аналогічно і для вибору з повтореннями.

2.4. Перестановки (вибір без повторень з урахуванням порядку)

Задача. Скільки різних чотирицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4 так, щоб цифри у числі не повторювалися.

Розв'язання

На перше місце можна поставити чотири цифри, на друге (4 – 1) = 3 цифри, на третє – (3 – 1) = 2 цифри, на четверте місце можна поставити тільки одну цифру. За правилом множення маємо: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, або $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.

Зауваження. *Добуток виду $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ скорочено записується* ***n!****, читається: «n факторіал».*

Таким чином, можна утворити 4! чисел: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ числа.

Якщо проаналізувати рішення задачі, то можна побачити, що переставляючи цифри, ми утворювали впорядковані набори (числа) таким чином, щоб ні один набір не повторювався. У математиці такі набори називаються *перестановками.*

Розв'яжемо задачу у загальному вигляді. Маємо множину з n елементів. Необхідно скласти різні впорядковані набори з цих же n елементів.

Розмірковуємо як у попередній задачі. Знайдемо кількість способів утворення різних упорядкованих наборів з n елементів. На перше місце у кожному наборі можна поставити n елементів, на друге – $(n – 1)$ елементів, на третє – $(n – 2)$, ..., на останні три місця можна поставити відповідно 3 елемента, 2 елемента і 1 елемент.

За правилом добутку маємо: $n \cdot (n – 1) \cdot (n – 2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Визначення: Перестановкою множини з n елементів *називається будь-який упорядкований набір з усіх елементів цієї множини, серед яких немає однакових.*

Кількість усіх перестановок (упорядкованих наборів) із n елементів позначається символом: P_n і дорівнює n!

$P_n = n!$ (формула 4).

Наприклад, маємо множину А = {1, 2, 3, 4, 5}. З елементів даної множини можна утворити упорядковані набори, або кортежі: (1, 2, 3, 4, 5), (5, 2, 1, 4, 3), (2, 5, 4, 1, 3). У кожному наборі немає однакових цифр (компонентів) і кожний набір відрізняється хоча б тим, що на першому місці не стоять однакові цифри. Приклади наборів, які ми навели, є перестановками. А всього таких перестановок з 5 елементів: $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Характеристичні ознаки перестановок

1) елементи у кожній перестановці різні;

2) усі місця у кожній перестановці зайняті;

3) порядок елементів важливий.

2.5. Розміщення (вибір без повторень з урахуванням порядку)

Нехай маємо якусь множину, яка складається з n елементів. Наприклад, з цифр 1, 2, 3, 4, 6 (п'ять елементів). З даних цифр необхідно утворити двоцифрові числа так, щоб цифри в числі не повторювалися. Будемо брати по дві цифри і будемо утворювати впорядковані пари, причому різні пари, тому що розташування компонентів у парах має значення. Із цифр 1 і 2, можна утворити пари (1, 2) і (2, 1), тобто два числа 12 і 21. Дані пари відрізняються розташуванням компонентів. З цифр 1 і 3 теж можна утворити дві нерівних між собою пари (1, 3) і (3, 1) і т. д. Пари (1, 2) і (1, 3) відрізняються компонентами, які стоять на другому місці. Таким чином при утворенні двоцифрових чисел ми отримуємо різні пари.

У наведеному прикладі з п'ятиелементної множини вибираємо по два елементи, причому в кожному виборі отримуємо по дві різні упорядковані пари (двокомпонентні кортежі). Кожну з пар можна розглядати як підмножину множини цифр, як двохелементну підмножину п'ятиелементної множини.

Якщо б із тих же цифр утворювали трицифрові числа, то з п'ятиелементної множини вибирали б по три цифри й утворювали різні упорядковані трійки (трьохкомпонентні кортежі). З п'ятиелементної множини утворювали триелементні підмножини. У таких завданнях головним питанням є: «Скільки таких підмножин (упорядкованих пар, трійок і т. д. (кортежів) можна утворити?»

Перейдемо до загальних визначень. Нехай маємо якусь n-елементну множину, з її елементів необхідно утворити підмножини з k-упорядкованих елементів, причому кожна з підмножин відрізняється від іншої принаймні розташуванням компонентів або компонентами.

Визначення: *Упорядковані k-елементні підмножини даної n-елементної множини називаються* ***розміщеннями з n елементів по k****, позначається символом* A_n^k**, (*k* < *n*).**

Задача. Розклад на день містить 6 уроків. Визначити кількість всіх можливих розкладів з 9 предметів, за умови, що жоден предмет не стоїть у розкладі двічі.

Розв'язання

Перший предмет можна обрати 9 способами, другий – 8 способами, третій – 7 способами, четвертий – 6 способами, п'ятий – 5 способами, шостий предмет можна обрати 4 способами. За правилом добутку знайдемо кількість варіантів: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60480$ (можливих розкладів).

А якщо нам треба підрахувати кількість розміщень з n елементів по k елементам, тобто в умовах попередньої задачі з n-елементної множини треба обрати k-елементні підмножини. Будемо розмірковувати аналогічно.

На перше місце в упорядкованій підмножині n-елементної множини можна поставити будь-який з n елементів. Після того, як перший елемент вибрано, для вибору другого маємо $(n-1)$ можливостей, для вибору третього – $(n-2)$ можливостей і т. д. Нарешті, на k місце можна поставити будь-який з решти $n-(k-1) = n-k+1$ елементів.

За правилом добутку $A^k_n = n\,(n-1)\,(n-2)...(n-k+1)$.

Помножимо і поділимо праву частину на $(n - k)!$

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} =$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\dots2\cdot1}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Отримали формулу знаходження розміщення з n по k:

$\mathbf{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$ **(формула 5).**

Якщо k = 0, то $A^0_n = 1$.

Якщо $n = 0$, k = 0, то розглядають порожню множину, яка має лише одну підмножину (саму себе).

Але перестановка – це теж упорядкована підмножина, тільки кількість елементів така сама, як і в самій множині. Тобто перестановки – це теж розміщення з n елементів по n елементам. Перестановки є окремим випадком розміщень. $\boldsymbol{A^n_n = P_n = n!}$

Характеристичні ознаки розміщень

1) елементи і місця різні;

2) 0 < k < n;

3) усі k місць зайняті;

4) порядок елементів важливий.

2.6. Сполучення (вибір без повторень, порядок не враховується)

Нехай дана множина A = {a, b, c, d}, з якої можна утворити підмножини: одноелементні, двохелементні, трьохелементні. В комбінаториці їх називають *сполученнями*.

Визначення: Сполученням із n елементів по k *називається будь-яка k-елементна підмножина множини, що містить n елементів. Позначається так:* C_n^k. *Читають: сполучення з n елементів по k.*

Порівняємо визначення розміщення і визначення сполучення. У розміщенні розглядаються упорядковані підмножини, у сполученні – будь-які множини.

Приклад. Утворимо різні трьохелементні підмножини з елементів множини А. Пам'ятаємо, що різними множинами (підмножинами) є множини, які не складаються з однакових елементів. Таких підмножин буде 4: (a, b, c), (a, b, d), (a, c, d), (b, c, d). Утворили $C_4^3 = 4$.

У свою чергу з кожної трійки можна утворити різні кортежі довжиною 3 (P_3). Таких кортежів з кожної трійки буде 3! (6). Всього способів буде: $\mathbf{C_4^3 \cdot 3!} = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$.

З іншого боку кожний кортеж представляє собою розміщення із 4 елементі по 3: A_4^3, кількість яких знаходиться за формулою 5: $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$.

Маємо: $C_4^3 \cdot 3! = A_4^3$, звідси випливає: $C_4^3 = \frac{A_4^3}{3!} = \frac{24}{6} = 4$.

Якщо у прикладі, який ми розв'язували, змінити конкретні дані на дані в загальному вигляді, то умова виглядає так.

Дана довільна множина X, яка складається з n елементів. Утворимо з них сполучення по k елементів, кожне сполучення являє собою k-елементні підмножини множини X. Всього таких підмножин C_n^k. Із елементів кожної k-елементної підмножини можна утворити k! кортежів довжини k!, які утворені з n елементів множини X. Їх кількість дорівнює A_n^k. Отже, $A_n^k = k! \cdot C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Таким чином отримали формулу знаходження кількості сполучень з n елементів по k:

$$\mathbf{C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$$ **(формула 6).**

Характеристичні ознака сполучення

1) елементи різні;

2) $0 < k < n$;

3) порядок вибору елементів не має значення.

Задача. У класі 16 хлопчиків і 12 дівчаток. Для прибирання території біля школи потрібно 4 хлопчика і 3 дівчинки. Скількома способами можна їх вибрати зі всіх учнів класу?

Розв'язання

Спочатку окремо виберемо 4 хлопчика з 16 і 3 дівчинки з 12. Так, як порядок розміщення не враховується, то відповідні з'єднання є сполученнями без повторень, що обчислюються за формулою 6. З огляду на необхідність одночасного вибору і хлопчиків, і дівчаток, використовуємо правило добутку. У результаті число способів буде обчислюватися таким чином:

1) Знайдемо можливу кількість варіантів вибору хлопчиків:

$$C_{16}^{4} = \frac{16\,!}{(16-4)!\cdot 4!} = \frac{16!}{12!\cdot 4!} = \frac{13\cdot 14\cdot 15\ \cdot 16}{2\cdot 3\cdot 4} = 13\cdot 14\cdot 5\cdot 2 = 1820;$$

2) Знайдемо можливу кількість варіантів вибору дівчаток:

$$C_{12}^{3} = \frac{12\,!}{(12-3)!\cdot 3!} = \frac{12!}{9!\cdot 3!} = \frac{10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3} = 10\ \cdot\ 11\ \cdot\ 2 = 220;$$

3) Знайдемо кількість усіх варіантів вибору:

$$C_{16}^{4}\ \cdot\ \ C_{12}^{3} = 1820\cdot 220 = 400400.$$

Для успішного вирішення комбінаторних задач необхідно правильно вибрати формулу, за якою будуть виконуватися обчислення. Схема 2 вказує на алгоритм обрання формули для задач, у яких розглядаються комбінації без повторень.

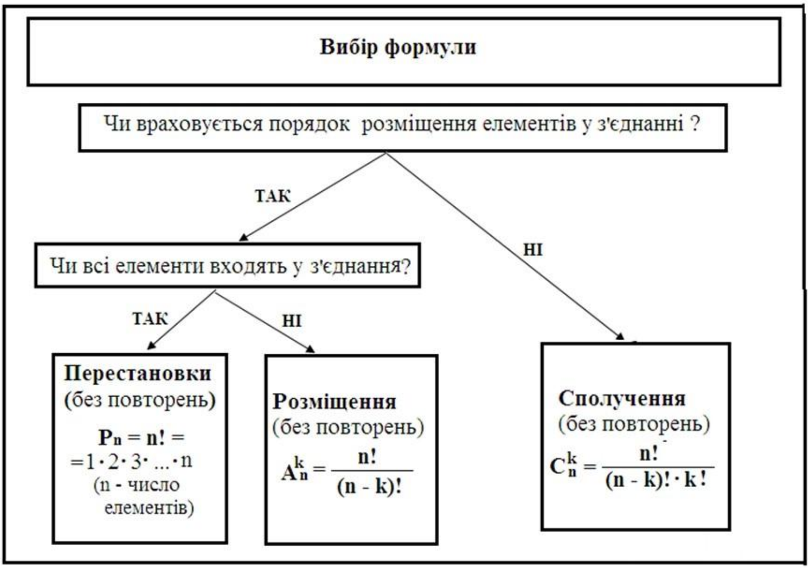


Схема 2

2.7. Перестановки з повтореннями

Якщо в основній множині *k* елементів: a_1, a_2, ... a_k; і вибірка *n* елементів складається так: елемент a_1 повторюється n_1 разів, елемент a_2 повторюється n_2 разів, ..., елемент a_k повторюється n_k разів, ***такі вибірки називаються перестановками з повтореннями.***

Їх можлива кількість обчислюється за формулою:

$$\overline{P_n} = P_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$ **(формула 7).**

Приклад. Скільки різних слів з п’яти букв можна скласти з букв слова «манна»?

Розв'язання

У слові букви «а» та «н» повторюються 2 рази, а буква м – один раз, таким чином маємо перестановки з повторенням. Використаємо формулу **7**.

$$\overline{P_5} = P_{2,2,1} = \frac{5!}{2!2!1!} = \frac{2\cdot3\cdot4\cdot5}{2\cdot2\cdot1} = 30$$

2.8. Розміщення з повтореннями

Маємо множину А = {1, 2, 3, 4}. Скільки трицифрових чисел можна скласти, якщо цифри в числі можуть повторюватися. Таку задачу ми вже розв'язували. Розмірковуємо: першу цифру – цифру сотень можна вибрати 4 рази, другу цифру – цифру десятків теж можна вибрати 4 рази, тому що цифри в числі повторюються і вибір знову проводиться з чотирьох цифр, аналогічно третю цифру – цифру одиниць, теж можна обрати 4 рази. Такими виборами ми утворюємо кортежі довжиною 3. Вибори, які ми проводили, за ознаками схожі на розміщення з повтореннями. Кількість таких виборів, тобто кількість кортежів, за правилом множення буде: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Зауважимо, що число 4 означає кількість елементів множини А, а кількість повторів по 4 указує на довжину кортежів (трицифрові числа), тому інакше можна записати: кількість виборів дорівнює $4^3 = 64$.

Розміщення з повтореннями *із n елементів по k позначаються символом:* $\overline{\mathbf{A}_n^k}$. *Загальна кількість різних наборів при виборі k елементів із n з повтореннями і з урахуванням порядку дорівнює* n^k*:*

$\overline{\mathbf{A}_n^k} = \mathbf{n}^\mathbf{k}$ **(формула 8).**

Приклад. У ліфт восьмиповерхового будинку увійшли 5 пасажирів. Скількома способами можуть вийти пасажири на кожному поверсі, починаючи з другого?

Розв'язання

Завдання зводиться до розподілу 5 пасажирів по 7 поверхах (набір упорядкований), причому можливі повторення (тобто кілька пасажирів можуть вийти на одному поверсі). Таким чином, завдання зводиться до знаходження числа розміщень з повтореннями:

$$\overline{A}_7^5 = 7^5 = 16807$$

Приклад. Букви азбуки Морзе складаються з символів: точка і тире. Скільки букв отримаємо за умови, що кожна буква складатиметься не більше ніж з п'яти зазначених символів?

Розв'язання

Число всіх букв, кожна з яких записується одним символом, дорівнює:

$$\overline{A}_2^1 = 2^1 = 2$$

Число всіх букв, кожна з яких записується двома символами, дорівнює:

$$\overline{A}_2^2 = 2^2 = 4$$

Число всіх букв, кожна з яких записується трьома символами, дорівнює:

$$\overline{A}_2^3 = 2^3 = 8$$

Число всіх букв, кожна з яких записується чотирма символами, дорівнює:

$$\overline{A}_2^4 = 2^4 = 16$$

Число всіх букв, кожна з яких записується п'ятьма символами, дорівнює:

$$\overline{A}_2^5 = 2^5 = 32$$

Число всіх зазначених букв дорівнюватиме 64.

2.9. Сполучення з повторенням

Нехай є предмети $\boldsymbol{n}$ різних типів. Скількома способами можна скласти з них комбінацію з $\boldsymbol{k}$ елементів, якщо не брати до уваги порядок елементів в комбінації, та при цьому предмети одного і того ж типу можуть повторюватися? Іншими словами, різні комбінації повинні відрізнятися кількістю предметів хоча б одного типу. Такі комбінації називаються сполученнями з повтореннями, а їх загальне число будемо позначати $\overline{\mathrm{C}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}}$.

Пояснимо це на такому прикладі. Нехай є три елементи: a, b і c. Тоді з цих трьох елементів можна скласти шість сполучень з повтореннями по два елементи: ab, ac, bc, aa, bb, cc.

Таким чином, поєднання з повтореннями з n елементів по k елементів може містити будь-який елемент скільки завгодно разів від 1 до k включно або не містити його зовсім. Отже, кожне поєднання з повтореннями з n елементів по k елементів може складатися не тільки з k різних елементів, але і k яких завгодно і як завгодно повторюваних елементів.

Слід зазначити, що, якщо, наприклад, дві комбінації з k елементів відрізняються одна від одної тільки порядком розташування елементів, то вони не вважаються різними поєднаннями.

Існує спеціальна формули для обчислення числа сполучень з повтореннями:

$\overline{\mathrm{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{k}}} = \frac{(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}-\mathbf{1})!}{\boldsymbol{k}!(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})!}$ **(формула 9).**

Приклад. У кондитерській є 3 види тістечок. Скількома способами можна купити 9 тістечок?

Розв’язання

У задачі потрібно знайти число всіх груп по 9 елементів, які можна скласти з даних трьох різних елементів, причому зазначені елементи в кожній групі можуть повторюватися, а самі групи відрізняються одна від одної хоча б одним елементом. Це завдання на відшукання числа сполучень з повтореннями з трьох елементів по дев'ять. Скористаємося формулою 9:

$$\overline{C_3^9} = \frac{(3+9-1)!}{9!(3-1)!} = \frac{11!}{9!2!} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55.$$

Контрольні запитання

1. Дати визначення поняттю «комбінаторика».

2. Які існують методи розв'язання комбінаторних задач?

3. Сформулюйте правило знаходження суми (обидва визначення).

4. Як називається будь-який упорядкований набір з усіх елементів множини, серед яких немає однакових?

5. Як читається запис «n!»?

6. Сформулюйте правило знаходження добутку (обидва визначення).

7. Для скількох множин має місце правило знаходження суми / добутку?

8. Дати визначення поняттю «розміщення».

9. Як називається будь-яка k-елементна підмножина множини, що містить n елементів?

10. Які вибірки називаються перестановками з повтореннями?

11. Яка комбінація позначається символом: $\overline{A_n^k}$?

12. Яка комбінація обчислюється за формулою $\overline{C_n^k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$?

13. Назвіть формулу перестановок з повтореннями.

14. У чому полягає сутність методу побудови «дерева» можливих варіантів?

15. Назвіть формулу знаходження суми елементів двох множинах, що перетинаються між собою.

16. Які існують можливі варіанти комбінацій?

17. Кого із учених прийнято вважати засновниками комбінаторики?

18. У чому полягає сутність методу перебору?

19. Яка комбінація позначається символом A_n^k?

20. Чому перестановки є окремим випадком розміщень?

РОЗДІЛ 3. ВІДПОВІДНОСТІ ТА ВІДНОШЕННЯ

3.1. Відповідність між множинами. Графік відповідності

У мові слово «відповідність» є досить вживаним. Нам часто доводиться чути: «Цей підручник відповідає даній програмі, а цей – не відповідає (але може відповідати іншій програмі); це яблуко відповідає вищому ґатунку, а це – тільки першому ґатунку». Ми говоримо, що цій відповіді на іспиті відповідає оцінка «відмінно», а іншій – «добре»; цій людині відповідає (в сенсі підходить) одяг 42 розміру, а іншій – 46 розміру. Відповідно до інструкції слід чинити так, а не інакше. Спостерігається відповідність між кількістю сонячних днів у році та врожайністю культури.

У початковому курсі математики вивчаються різні взаємозв’язки між елементами однієї, двох і більше множин. Розглянемо приклад. У школі працюють гуртки та спортивні секції за розкладом: математичний – у вівторок; драматичний – у понеділок і п’ятницю; хоровий – у вівторок і неділю; секція футболу – у п’ятницю волейболу – у четвер; гімнастики – у середу і неділю. Для зручності розклад гуртків і секцій представлено у вигляді таблиці (табл. 3):

Табл. 3

Дні тижня / Назви гуртків секцій	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт	Сб	Нд
Математичний **(М)**							
Драматичний **(Д)**							
Хоровий **(Х)**							
Секція футболу **(Ф)**							
Секція волейболу **(В)**							
Секція гімнастики **(Г)**							

У даному прикладі ми розглядаємо дві множини: множина X, яка складається з назв гуртків і секцій, та множина Y, елементами якої є дні тижня: X = {М, Д, Х, Ф, В, Г}, Y = {Пн., Вт., Ср., Чт., Пт., Сб., Нд.}. За допомогою слів «працюють гуртки та секції» між елементами цих множин установлено деякий зв'язок. У математиці такий зв'язок називається *відповідністю.* Відповідність у нашому прикладі виділена заштрихованими клітинками.

Усі клітинки таблиці відповідають множині всіх пар виду: (x, y), де $x \in$ X, $y \in$ Y, тобто декартів добуток X × Y. У свою чергу кожна заштрихована клітинка належить декартовому добутку X × Y, а всі заштриховані клітинки представляють підмножину декартового добутку. Таким чином за допомогою трьох множин, а саме: множині X, множині Y та підмножині декартового добутку X × Y, ми установили відповідність між елементами множин X і Y. Позначимо отриману підмножину буквою *G*.

G = {(М, Вт.), (Д, Пн.), (Д, Пт.), (Х, Вт.), (Х, Нд.), (Ф, Пт.), (В, Чт.), (Г, Ср.), (Г, Нд.)}.

Визначення: Відповідністю між множинами X і Y *називається трійка множин: множина X, множина Y і деяка підмножина G декартового* добутку *X × Y*.

Множина X називається множиною визначення або відправлення відповідності, множина Y називається множиною значення або прибуття відповідності, а множина $G \subseteq X \times Y$ називається графіком даної відповідності.

Відповідності позначаються буквами R, P, Q, S, T.

У нашому прикладі між множиною X гуртків-секцій (множина відправлення) і множиною Y днів тижня (множина прибуття) установлена відповідність R: «гурток $x \in$ X працює в день тижня $y \in$ Y».

Графік відповідності R можна представити в декартовій системі координат, якщо на горизонтальній осі визначити перші компоненти пар графіку, а на вертикальній осі – другі компоненти пар графіку R (рис. 59).

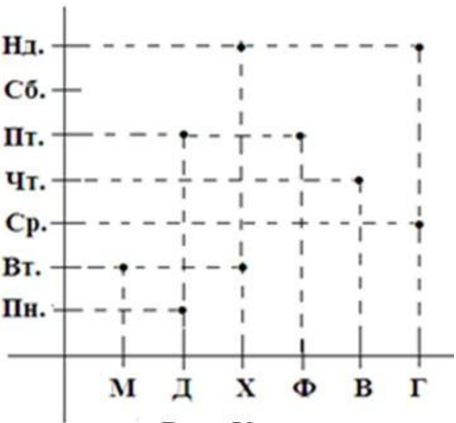


Рис. 59

Якщо R – відповідність між двома числовими множинами X і Y, то, зобразивши всі пари чисел, що знаходяться у відповідності R на координатній площині, одержимо фігуру, яка називається *графіком відповідності R.* Навпаки, будь-яка підмножина точок координатної площини вважають графіком деякої відповідності між числовими множинами X і Y.

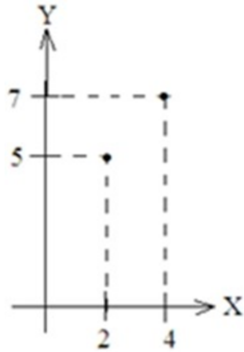


Рис. 60

Приклад. Множина X = {2, 4}, множина Y = {5, 6, 7, 8}, R: «x менше y на 3», $x \in$ X, $y \in$ Y. Графіком G є множина пар: G = {(2, 5), (4, 7)} (рис. 60).

3.2. Граф відповідності. Способи задання відповідності

Для наочного зображення відповідностей між скінченними множинами, окрім графіка, застосовуються графи.

Розглянемо приклад: множина X = {1, 3, 5, 7}, Y = {2, 4, 6, 8, 10}, G = {(3, 2), (5, 2), (5, 4), (7, 2), (7, 4), (7, 6)}. Якщо проаналізувати елементи множини G, то можна зробити висновок, що в кожній парі елементу x, який належить множині X, відповідає елемент y, який належить множині У, причому x > y. Таким чином можна сформулювати відповідність R: «*число*

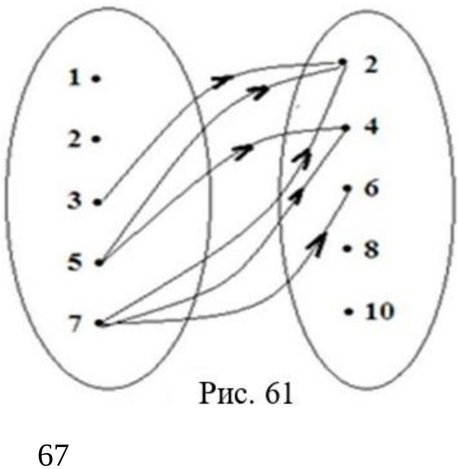


Рис. 61

x ∈ *X більше числа y* ∈ *Y*».

Зобразимо за допомогою кругів Ейлера-Венна і графів дану відповідність (рис. 61). Отримане креслення називають *графом відповідності R*.

Розглянемо елемент 2, що належить множині Y. До нього направлені стрілки з елементів 3, 5, 7, які належать множині X. *Елемент 2 ∈ Y називається образом елементів 3, 5 і 7, що належать множині X при відповідності R. Запис 3 R 2 читається так: «елементу 3 ∈ X відповідає елемент 2 ∈ Y* , або простіше: «числу 3 відповідає число 2».

Граф дозволяє зробити записи: 3 R 2; 5 R 2; 5 R 4; 7 R 2; 7 R 4; 7 R 6.

Загалом, якщо декартів добуток X × Y складається з різноманітних пар (x, y), таких що *x* ∈ X, *y* ∈ Y, R деяка відповідність між множинами X і Y, G – її графік, і відомо, що (x, y) ∈ G, то кажуть, що елемент *y* відповідає елементу *x* при відповідності R, записується так: ***x R y.***

Якщо між множинами X і Y установлена якась відповідність, то елементу множини відправлення X може відповідати:

1) декілька елементів множини прибуття Y;

2) тільки один елемент множини Y;

3) не відповідати жоден елемент множини Y.

У нашому прикладі (рис. 61) елементу 3 відповідає тільки один елемент 2; елементу 7 відповідає три елементи: 2, 4, 6; елементам 1 і 2 не відповідає жоден елемент із множини Y.

Якщо відповідністю між множинами X і Y є всяка підмножина декартового добутку X × Y, тобто множина впорядкованих пар, то способи задання відповідностей за своєю сутністю є такими ж, як і способи задання множин. Отже, відповідність R між множинами X і Y можна задати:

а) перерахуванням всіх пар елементів (x, y) множини G;

б) зазначенням характеристичної властивості, якою володіють всі пари (x, y) множини G і не володіє ні одна пара, яка не є її елементом.

Приклад. 1) Відповідність R між множинами X = {20, 25} і Y = {4, 5, 6} задана характеристичною властивістю: «x кратне y», x $\in$ X, y $\in$ Y. Тоді можна знайти всі пари множини G = {(20, 4), (20, 5), (25, 5)}.

2) Відповідність R між множинами X = {1, 3, 5} і Y = {2, 4, 6, 8, 10} задана множиною пар G = {(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 10), (3, 6), (5, 10)}. На основі множини пар G можна сформулювати характеристичну властивість відповідності R: «x є дільником y», де x $\in$ X, y $\in$ Y.

3.3. Зворотна відповідність

Розглянемо приклад: множина X = {1, 2, 3}, множина Y = {a, b, c}. Між множинами установлена відповідність R така, що 1 R *a,* 1 R *b,* 2 R *a,* 2 R *b,* 2 R *c*. Побудуємо граф відповідності R (рис. 62). З даного рисунку можна також з'ясувати, що елемент *a* $\in$ Y відповідає двом елементам множини X: числам 1 і 2. Іншими словами за елементом *a* $\in$ Y можна зворотно знайти ті елементи множини X, яким *a* відповідає. Здійснюючи такий процес, ми будемо «відправлятися» з множини Y і «прибувати» у множину X (рис. 63). Елемент *a,* як ми вже зазначали, називають образом елементів 1 і 2. У свою чергу елементи 1 і 2 називають *прообразами* елемента *a.*

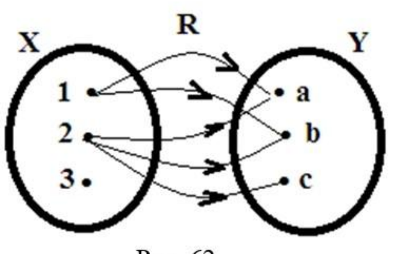


Рис. 62

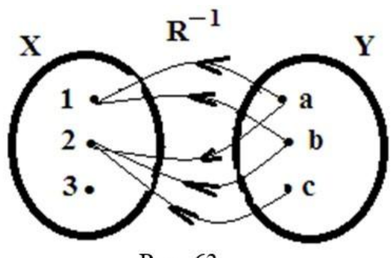


Рис. 63

Щодо нашого прикладу говорять, *для відповідності R між множинами X і Y має місце зворотна відповідність між множинами Y і X. Відповідність, яка є зворотною R позначають* $\boldsymbol{R^{-1}}$***,*** *читають:* ***R у мінус першому ступені.***

Графік відповідності R має вигляд: (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (2, c), а графік зворотної щодо R відповідності R^{-1} має вигляд: (a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2).

Таким чином, щоб отримати графік відповідності R^{-1} із графіка відповідності R, необхідно у кожній парі переставити місцями компоненти.

Розглянемо на прикладі, як пов'язані між собою графіки відповідностей R і R^{-1} при зображенні їх у прямокутній системі координат. Нехай між множинами X = {– 3, – 2, – 1, 0} і Y = {0, 1, – 2} має місце відповідність R: «число $x \in X$ менше за число $y \in$ Y». Графік відповідності R представляє собою множину пар: G = {(– 3, 0), (– 3, 1), (– 3, – 2), (– 2, 0), (– 2, 1), (– 1, 0), (– 1, 1), (0, 1)}, які відображені точками на рис. 64.

Графік відповідності R^{-1} представляє множину пар: {0, – 3), (1, – 3), (– 2, – 3), (0, – 2), (1, – 2), (0, – 1), (1, – 1), (1, 0)}. У прямокутній системі координат графік відображений на рис. 65.

Побудуємо графіки відповідностей R і R^{-1} на одному кресленні (рис. 66).

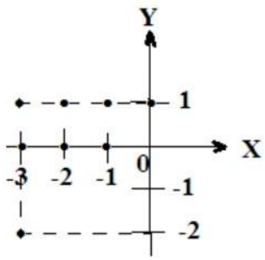


Рис. 64

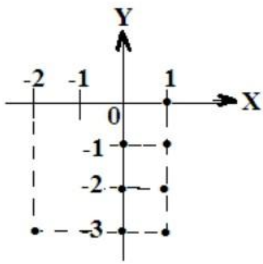


Рис. 65

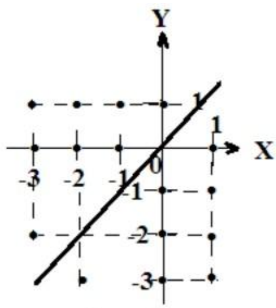


Рис. 66

Із рис. 66 можна зробити висновок, що *графіки відповідностей R та її зворотній R^{-1} симетричні відносно бісектриси першого та третього координатних кутів.*

Визначення: *Якщо R – відповідність між множинами X і Y, то **зворотною їй є така відповідність R^{-1} між множинами Y і X**, що **y R^{-1}** x, y $\in$ Y, x $\in$ X, тоді й тільки тоді, коли **x R y.***

Визначення можна розтлумачити так: «*Якщо R – відповідність між множинами X і Y, то **зворотною їй є така відповідність R^{-1} між множинами Y і X**, при якій **y** є образом для **x**, де y $\in$ Y, x $\in$ X, тоді й тільки тоді, коли **x** є прообразом для **y**».*

3.4. Взаємно однозначні відповідності

Визначення: *Відповідність між множинами X і Y називають **взаємно однозначною**, якщо кожен елемент множини X має єдиний образ у множині Y і кожен елемент множини Y є образом тільки одного елемента множини X.*

Приклад. На рис. 67 зображений трикутник. *X* = {a, b, c} – множина його сторін. *Y* = {A, B, C} – множина його кутів.

R (відповідність): «напроти кожної сторони трикутника лежить тільки один кут». R^{-1} (зворотна відповідність): «кожний кут трикутника відповідає тільки одній його стороні» (рис. 68).

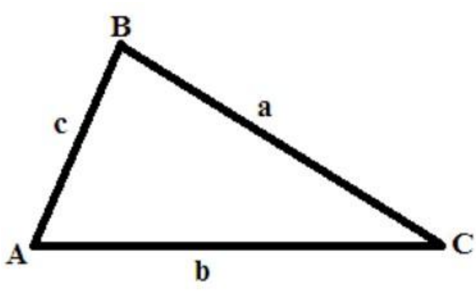


Рис. 67

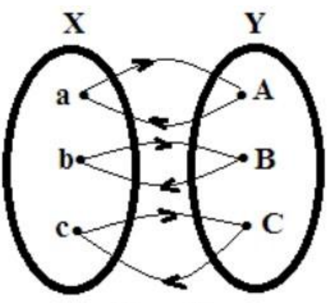


Рис. 68

Таким чином, відповідність R = {(a, A), (b, B), (c, C)} є взаємно однозначною.

Приклад. Нехай N – множина натуральних чисел: N = 1, 2, 3, … . B – множина парних натуральних чисел: 2, 4, 6, … . Відповідність між ними встановимо так: кожному натуральному числу n відповідає парне натуральне число 2 n; та зворотно: кожному натуральному числу 2 n відповідає число n. Числу 1 відповідає число 1 · 2 = 2, числу 2 – число 2 · 2 = 4, числу 3 – число 3 · 2 = 6 і т. д. (рис. 69).

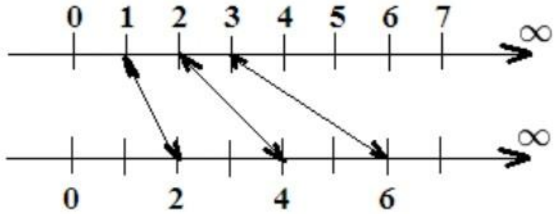


Рис. 69

Так як множина N і множина парних чисел нескінченні, то завжди будь-якому натуральному числу n відповідатиме тільки одне парне число 2 n, і навпаки. Зрозуміло, що ця відповідність є взаємно однозначною.

Поняття взаємно однозначної відповідності дозволяє визначити поняття «рівнопотужні множини».

Визначення: Множини X і Y називають рівнопотужними, *якщо між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність. Потужність визначається кількістю елементів у множині. Рівнопотужні множини мають однакову кількість елементів.*

Розглянемо приклад, який досить часто практикується вчителями початкових класів на уроках математики. На дошці ліворуч записані приклади для самостійної роботи, а праворуч – відповіді у довільному порядку (рис. 70). Після обчислень учням пропонується поєднати відрізками приклади і правильні відповіді.

25 • (242 - 112) + 58 =	1000
(890 + 145) : 45 + 77 =	3308
450 + 28 • 55 - 990 =	10
586 - 928 : 58 - 560 =	100

Рис. 70

З точки зору математики учні встановлюють відповідність R між множинами X (множина прикладів) та Y (множина відповідей). R: «кожному прикладу відповідає правильна відповідь». Відповідність R між множинами X і Y взаємно однозначна, тому що кожному прикладу відповідає тільки одна правильна відповідь (один образ) і навпаки, кожна правильна відповідь має тільки однин прообраз (приклад). На рис. 71 відображений граф відповідності R. Множина X (приклади) та множина Y (відповіді) – рівнопотужні.

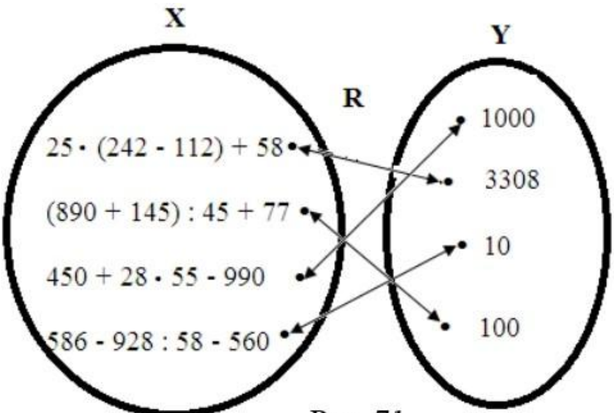


Рис. 71

5. Протилежна відповідність

Для визначення протилежної відповідності розглянемо приклад. Нехай множина X = {5, 6, 7, 8}, множина Y = {4, 5, 9}.

1. Знайдемо декартів добуток цих множин шляхом перерахування пар: X × Y = {(5, 4), (5, 5), (5, 9), (6, 4), (6, 5), (6, 9), (7, 4), (7, 5), (7, 9), (8, 4), (8, 5), (8, 9)}.

2. Встановимо відповідність R між множинами X і Y. R: «*x більше y*», де *x* ∈ X, *y* ∈ Y. R = {(5, 4), (6, 4), (6, 5), (7, 4), (7, 5), (8, 4), (8, 5)}.

Відповідність R є підмножиною декартового добутку X × Y. Випишемо з множини X × Y пари (елементи), які не входять у множину R: {(5, 5), (5, 9), (6, 9), (7, 9), (8, 9)}. Ця множина теж є підмножиною X × Y. *За визначенням відповідності будь-яка підмножина декартового добутку називається відповідністю,* тобто отримали множину, яка є доповненням множини R до декартового добутку, вона називається протилежною відносно R і позначається $\overleftarrow{\boldsymbol{R}}$ (рис. 72).

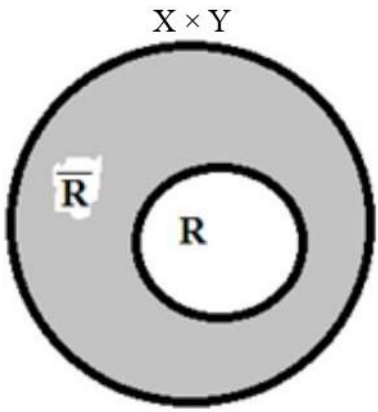


Рис. 72

Визначення: *Якщо R відповідність між множинами X і Y, то* ***протилежну їй називають таку відповідність*** $\overleftarrow{\boldsymbol{R}}$ *між множинами X і Y, яка є доповненням відповідності R до множини* X × Y. *Таким чином,* $\boldsymbol{x}\,\overleftarrow{\boldsymbol{R}}\,\boldsymbol{y}$ *в тому і тільки в тому випадку, коли не має місце відповідність x R y, де x ∈ X, y ∈ Y.*

3.6. Поняття відношення на множині

Поняття відповідності між двома множинами будувалося на понятті взаємозв'язків між компонентами цих множин, які дозволяли конструювати відповідні упорядковані пари, перша компонента яких належала до першої множини, а друга – до другої множини. Такі взаємозв'язки, які представляють собою упорядковані пари називають *бінарними відношеннями*, тобто відношеннями між двома об'єктами в парі. Однак взаємозв'язки встановлюються не тільки між елементами двох множин, але часто і між елементами однієї множини.

Наведемо **приклади.** 1. Розглянемо множину А – множина членів родини: Віра Андріївна – мати, Микола Олексійович – батько, діти: Наталка, Сашко, Володя, Ольга. Між членами родини встановлюються декілька відношень: «бути матір'ю», «бути батьком», «бути батьками», «бути братом», «бути сестрою», «бути сином», «бути донькою». Можна побудувати графи даних відношень. Наприклад, побудуємо граф відношень R: «бути сестрою», S: «бути батьками» (рис. 73 а, 73 б).

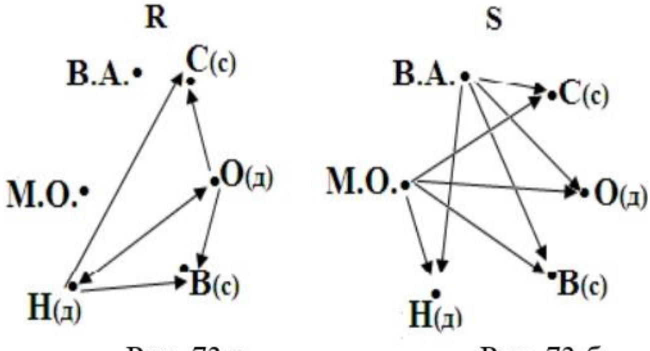


Рис. 73 а Рис. 73 б

2. Нехай на множині Х = {2, 4, 6, 8} задано відношення «менше». Це означає, що для будь-яких двох чисел з множини Х можна сказати, яке з них менше: 2 < 4,

2 < 6, 2 < 8, 4 < 6, 4 < 8, 6 < 8. Отримані нерівності можна записати інакше, а саме у вигляді впорядкованих пар: (2, 4), (2, 6), (2, 8), (4, 6), (4, 8), (6, 8). Але всі ці пари є елементами декартового добутку X x X, тому про відношення «менше», що задане на множині X, можна сказати, що воно є підмножиною множини X x X.

Визначення: Бінарним відношенням на множині X *називається всяка підмножина декартового добутку X × X.*

Так, як у подальшому ми будемо розглядати тільки бінарні відношення, то слово «бінарні», як правило, не вживатимемо. Відношення, як і відповідності, позначатимемо буквами R, S, T, P.

Якщо R – відношення на множині X, то, згідно з визначенням, R є підмножиною декартового добутку: R $\subset$ X × X. З іншого боку, якщо задано деяку підмножину A декартового добутку X × X, то ця підмножина визначає на множині X деяке відношення R.

Наведемо приклад щодо другого твердження. Нехай A = {(3, 2), (7, 6), (8, 7)} є підмножиною X = {2, 3, 6, 7, 8}. Знайдемо декартів добуток X × X і виділимо у ньому пари підмножини A.

X × X = {(2, 2), (2, 3), (2, 6), (2, 7), (2, 8), **(3, 2),** (3, 3), (3, 6), (3, 7) (3, 8), (6, 2), (6, 3), (6, 6), (6, 7) (6, 8), (7, 2), (7, 3), **(7, 6),** (7, 7) (7, 8), (8, 2), (8, 3), (8, 6), **(8, 7)** (8, 8)}. Зробимо висновок, що в кожній виділеній парі перша компонента менше за другу на 1. Таких пар у множині X × X більше немає. Тобто на множині X задане відношення R: «*x* більше за *y* на 1, де x, y $\in$ X».

Твердження про те, що елементи *x* і *y* знаходяться у відношенні R, можна записувати так: (x, y) $\in$ R або *x* R *y*. Останній запис читається аналогічно запису у відповідності: «Елемент *x* знаходиться у відношенні R з елементом *y*».

Відношення задають так само, як і відповідності. Відношення можна задати, перерахувавши пари елементів множини X, що знаходяться в цьому відношенні. Форми подання таких пар аналогічні формам задання відповідностей (граф, графік). Деякі відмінності стосуються задання відношень за допомогою графа.

Якщо у відповідності між множинами для побудови графа необхідно було зображувати дві множини, то для відображення відношення елементи множини X, на якій воно задане, зображуємо точками довільно; а саме відношення стрілкою, так як на рис. 73 а, 72 б.

Побудуємо граф відношення R: «*x* більше за *y* на 1» на множині X, де x, y ∈ X; X = {2, 3, 6, 7, 8} (рис. 74 а).

На цій же множині X розглянемо відношення S: «*x* ⋮ *y*». Граф цього відношення буде в кожній вершині мати петлю (стрілку, початок і кінець якої збігаються), тому що кожне число кратне самому собі (рис. 74 б).

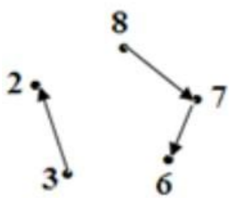


Рис. 74 а

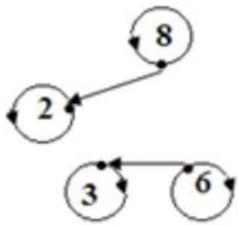


Рис. 74 б

Для відношення R, заданого на множині X, завжди можна задати йому зворотне відношення R^{-1}. Воно визначається так само, як і відповідність зворотна даній. Наприклад, якщо R – відношення «x менше y», то зворотним йому буде відношення R^{-1}: «y більше x».

Поняття «відношення зворотне даному» часто використовується у процесі вивчення початкового курсу математики. **Наприклад,** щоб попередити помилку у виборі дії, за допомогою якої вирішується задача: «У Петра 7 олівців, що на 2 менше, ніж у Бориса. Скільки олівців у Бориса?» Її переформульовують: «У Петра 7 олівців, а у Бориса на 2 більше. Скільки олівців у Бориса?» Бачимо, що переформулювання звелося до заміни відношення «менше на 2» зворотним йому відношенням «більше на 2».

3.7. Властивості відношень

Відношення, як і багато інших математичних понять, володіють певними властивостями. Ми будемо розглядати деякі з них на конкретних прикладах.

1. Нехай на множині X = {2, 3, 6, 7, 8} задано відношення «кратне», тобто R: «*x* ⋮ *y; x, y* $\in$ X». Повернемося до рисунка 74 б. Ми вже говорили про те, що граф даного відношення має петлі, тому що кожне число кратне самому собі. Відношення «кратне» володіє властивістю рефлексивност. Тобто відношення кратне – рефлексивне.

Визначення: Відношення R на множині X називається рефлексивним*, якщо про кожен елемент множини X можна сказати, що він знаходиться у відношенні R з самим собою.*

Використовуючи символи, це відношення можна записати таким чином: ***R рефлексивно на X <=> x R x для будь-якого x*** $\in$ ***X.*** (Символ «<=>» читається так: «тоді і тільки тоді».)

2. Розглянемо відношення перпендикулярності на множині прямих. Якщо пряма *a* перпендикулярна прямій *b*, то обов’язково пряма *b* буде перпендикулярна прямій *a*. Таке відношення називається *симетричним.*

Визначення: Відношення R на множині X називається симетричним, *якщо виконується умова: з того, що елемент* ***x*** *знаходиться у відношенні R з елементом* ***y****, слідує, що і елемент* ***y*** *знаходиться у відношенні R з елементом* ***x****.*

Використовуючи символи, це відношення можна записати таким чином: ***R симетричне на X <=> (x R y => y R x).*** Читається: відношення R симетричне на множині X тоді і тільки тоді, коли з того, що елемент *x* знаходиться у відношенні R з елементом *y* випливає те, що і елемент *y* знаходиться у відношенні R з елементом *x*.

Розглянемо ще приклад. Нехай на множині X = $\{2, 3, \frac{4}{2}, \frac{12}{4}\}$ задане відношення R: «дорівнює», R: «*x = y; x, y* $\in$ X». Граф відношення представлений на рис. 75. Можна сказати, що відношення «дорівнює» рефлексивне.

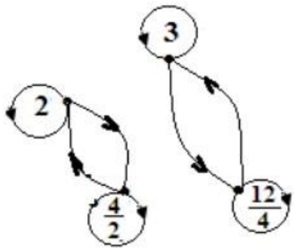


Рис. 75

Але граф відношення «кратне» (рис. 74 б) має відмінності порівняно з графом відношення «дорівнює», в якому є зворотні стрілки. Вони з'явилися тому, що 2 = $\frac{4}{2}$, у свою чергу $\frac{4}{2}$ = 2, аналогічно 3 = $\frac{12}{4}$, а $\frac{12}{4}$ = 3.

Відношення «дорівнює» є не тільки рефлексивним, а й симетричним.

Відношення паралельності на множині прямих, подібності на множині трикутників – це симетричні відношення.

3. Розглянемо відношення «більше» на множині А = {2, 4, 5, 7}.

Побудуємо граф цього відношення (рис. 76).

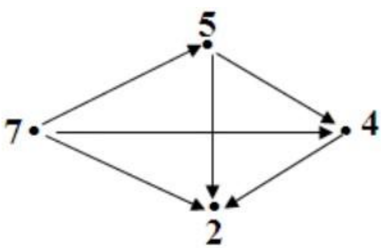


Рис. 76

Розглянемо трійку елементів: 7, 5, 4. Стрілки йдуть від 7 до 5, далі від 5 до 4, а потім від 7 до 4. Дійсно, якщо 7 більше за 5, а 5 більше за 4, то зрозуміло, що

7 буде більше за 4. Аналогічний висновок можна зробити відносно трійки елементів: 7, 4, 2; також відносно трійки елементів: 5, 4, 2. Така закономірність простежується відносно всіх елементів множини А. Ця особливість графа відображає важливу властивість відношення «більше»: якщо перший елемент більше ніж другий, а другий – більше третього, то перший – більше третього. Кажуть, що це відношення має *властивість транзитивності* або *транзитивне.*

Визначення: Відношення R на множині X називається транзитивним, *якщо виконується умова: з того, що елемент* ***x*** *знаходиться у відношенні R з елементом* ***y*** *і елемент* ***y*** *знаходиться у відношенні R з елементом* ***z****, випливає, що елемент* ***x*** *знаходиться у відношенні R з елементом* ***z.***

Використовуючи символи, це визначення можна записати таким чином: ***R транзитивне на X <=> (x R y і y R z => x R z)***.

Транзитивними відношеннями є відношення «паралельність» на множині прямих, «кратне» і «бути дільником» на множині чисел.

Зробимо висновок щодо відношень, які ми розглядали.

1. Якщо відношення R рефлексивне на множині X, то в кожній вершині графа даного відношення є петля. Справедливе і зворотне твердження: граф, кожна вершина якого має петлю, задає відношення, що володіє властивістю рефлексивності (рис. 77).

2. Граф симетричного відношення має особливість: разом з кожною стрілкою, що йде від x до y, граф містить і стрілку, що йде від y до x. Справедливе і зворотне твердження: граф, що містить разом з кожною стрілкою, що йде від x до y, і стрілку, що йде від y до x, є графом симетричного відношення (рис. 78).

3. Граф транзитивного відношення з кожною парою стрілок, що йдуть від x до y і від y до z, містить стрілку, яка йде від x до z. Справедливе і зворотне твердження: граф, який містить з кожною парою стрілок, що йдуть від x до y і від y до z, містить стрілку, яка йде від x до z, є графом транзитивного відношення (рис. 79).

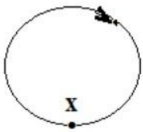


Рис. 77

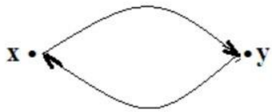


Рис. 78

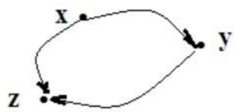


Рис. 79

Розглянемо ще дві властивості відношень: *властивість антисиметричності та властивість зв'язності.*

Визначення: Відношення R на множині X називається антисиметричним, *якщо для різних елементів **x** і **y** з множини X виконана умова: з того, що **x** знаходиться у відношенні R з елементом **y**, слідує, що елемент **y** не знаходиться у відношенні R з елементом **x**.*

Використовуючи символи, це визначення можна записати таким чином: ***R антисиметричне на X <=> (x R y і x ≠ y => $\overline{y\ R\ x}$).***

Граф антисиметричного відношення має особливість: якщо дві вершини графа з'єднані стрілкою, то ця стрілка тільки одна. Справедливе і зворотне твердження: граф, вершини якого з'єднані тільки однією стрілкою, є графом антисиметричного відношення.

Розглянемо відношення «довше» на множині відрізків А = {a, b, c} (рис. 80 а). Побудуємо граф цього відношення (рис. 80 б). Пари елементів: (b, a), (b, c) і (a, c) з’єднані тільки однією стрілкою. Дійсно, якщо відрізок **b** довше відрізка **a**, то не можливо, щоб у той же час відрізок **a** був довше відрізка **b**. У загальному вигляді граф антисиметричного відношення зображений на рис. 80 в.

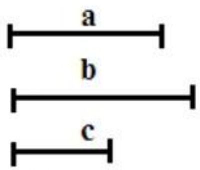


Рис. 80 а

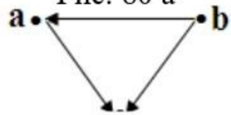


Рис. 80 б

Рис. 80 в

Визначення: Відношення R на множині X називається зв’язним, *якщо для будь-яких елементів* ***x*** *і* ***y*** *з множини X виконується умова: з того, що* ***x*** *і* ***y*** *різні, слідує, що або* ***x*** *знаходиться у відношенні R з елементом* ***y****, або елемент* ***y*** *знаходиться у відношенні R з елементом* ***x*****.**

Використовуючи символи, це визначення можна записати таким чином: ***R зв’язне на множині X <=> (x ≠ y; x R y або y R x).***

Наприклад, властивістю зв’язності володіє відношення «більше» для натуральних чисел: для будь-яких різних чисел x і y можна стверджувати, що або x > y, або y > x.

На графі зв’язного відношення будь-які дві вершини з’єднані стрілкою, тобто «порожніх» вершин не може бути. Справедливе і зворотне твердження.

З рис. 80 б можна стверджувати, що відношення «довше» зв’язне, тому що в його графі всі вершини з’єднані стрілками.

Розглянемо відношення «бути дільником» на множині А = {2, 4, 5, 7, 8, 10} та побудуємо його графік (рис. 81). З

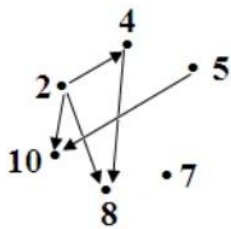


Рис. 81

графіка видно, що вершини 4 і 5 не зв'язні, 5 і 7 не зв'язні, 7 і 8 не зв'язні, 8 і 10 не зв'язні, тобто відношення «бути дільником» не володіє властивістю зв'язності.

3.8. Розбиття множини на підмножини, які попарно не перетинаються. Класифікація

У процесі вивчення об'єктів і явищ навколишнього світу ми постійно стикаємося з класифікацією. Класифікація широко використовується в біології, хімії, математиці, мові та багатьох інших науках. Вона полегшує процес засвоєння знань. Наприклад, у біології є класифікація тварин, що охоплює до 1,5 млн. різних видів, у ботаніці – класифікація рослин, що включає 500 тис. видів. Класифікація дає можливість розглянути це різноманіття в певній системі, виділити цікаві для нас види рослин та тварин.

Класифікація широко застосовується і в математиці. Наприклад, натуральні числа діляться на парні та непарні, кути (менше розгорнутого) бувають гострі, прямі та тупі.

Визначення: Класифікація *– це дія розподілу об'єктів за класами на підставі подібності об'єктів всередині класу та їх відмінності від об'єктів інших класів.*

Класифікація в будь-якій області людської діяльності пов'язана з розбиттям множини на підмножини (класи). Наприклад, класифікація частин мови, чисел, геометричних фігур і т.д.

Якщо при цьому кожен елемент даної множини потрапляє в одну і тільки одну підмножину, а об'єднання всіх виділених підмножин співпадає з усією множиною, то кажуть, що дана множина розбита на непересічні підмножини або класи.

Визначення: *Вважають, що множина X розбита на класи $X_1, X_2, ..., X_n$, якщо:*

1) підмножини X_1, X_2, ..., X_n попарно не перетинаються;

2) об'єднання підмножин X_1, X_2, ..., X_n співпадає з множиною X;

3) якщо не виконана хоча б одна з цих умов, класифікацію вважають неправильною.

Розглянемо множину натуральних чисел N, на ній задамо відношення R: «прості числа». У даному випадку множина N розбивається на дві підмножини, які не перетинаються між собою: A_1 – множина простих чисел, A_2 – множина складених чисел; кожна з них є підмножиною натуральних чисел N. $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Об'єднання множин A_1 і A_2 дорівнює множині всіх натуральних чисел N (рис. 82). Таким чином, за допомогою відношення R: «прості числа» множина N розбилася на два класи.

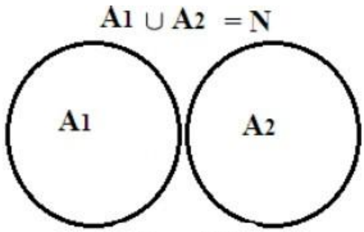


Рис. 82

Однак не всяка система підмножин множини натуральних чисел N є розбиттям цієї множини на класи.

Наприклад, якщо з множини N виділити підмножину $B = \{b \mid b \in N, b \vdots 3\}$ (відношення R: «кратне 3») і множину $C = \{c \mid c \in N, b \vdots 9\}$ (відношення S: «кратне 9»), то розбиття множини N на класи неможливо отримати, оскільки множини чисел, що діляться на 3, і чисел, що діляться на 9, перетинаються. Усі числа, що діляться на 9 обов'язково діляться і на 3, тобто множина B є підмножиною множини C. З іншого боку є числа, які діляться на 3, але не діляться на 9.

Розглянемо інший приклад: введемо на множині натуральних чисел N відношення R: «кратне 2» і S:

«кратне 7». Дані відношення множину N поділили на дві підмножини:
$M = \{m \mid m \in N,\ m \vdots 2\}$ і $K = \{k \mid k \in N,\ k \vdots 7\}$. Ці підмножини перетинаються, але жодна з них не є підмножиною іншої (рис. 83).

Проаналізуємо рисунок. Прямокутник, що зображує множину N натуральних чисел, розбився на 4 області, які не перетинаються між собою:

- I підмножина – це натуральні числа, які не є кратними 2 і 7;
- II підмножина – це натуральні числа, які кратні 2, але не кратні 7;
- III підмножина – це натуральні числа, які кратні 7, але не кратні 2;
- IV підмножина – це натуральні числа, які одночасно діляться на 2 і на 7.

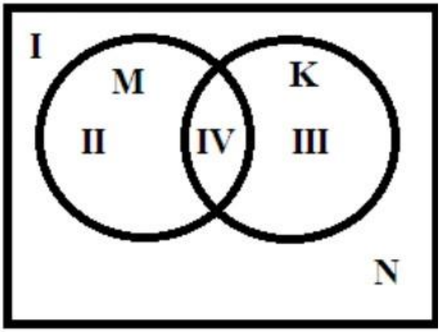


Рис. 83

Об'єднання цих чотирьох підмножин є множина N. Усі умови для розбиття множини натуральних чисел N на класи виконані. Таким чином, відношення R: «кратне 2» і S: «кратне 7» розбили множину N на чотири класи.

Розглянемо задачу і прокоментуємо її рішення з точки зору розбиття множини на класи.

Задача. З 100 студентів англійську мову вивчають 28 осіб, німецьку – 30, французьку – 42, англійську та німецьку – 8, англійську та французьку – 10, німецьку та французьку – 15. Усі три мови вивчають 3 студента. Скільки студентів вивчають тільки одну мову? Скільки студентів не вивчають жодної іноземної мови?

Позначимо буквами: I – множина всіх студентів; A – множина студентів, які вивчають англійську мову; B –

множина студентів, які вивчають німецьку мову; С – множина студентів, які вивчають французьку мову.

За допомогою діаграм Ейлера-Венна відобразимо всі множини, числові дані й обчислення на рис. 84. Множина всіх студентів розбилася на 8 класі – 8 підмножин, що не перетинаються:

I клас – студенти, які вивчають тільки англійську мову (13);

II клас – студенти, які вивчають тільки німецьку мову (10);

III клас – студенти, які вивчають тільки французьку мову (20);

IV клас – студенти, які вивчають тільки англійську та німецьку мови (5);

V клас – студенти, які вивчають тільки німецьку та французьку мови (12);

VI клас – студенти, які вивчають тільки англійську та французьку мови (7);

VII клас – студенти, які вивчають усі три мови (3);

VIII клас – студенти, які не вивчають жодної іноземної мови.

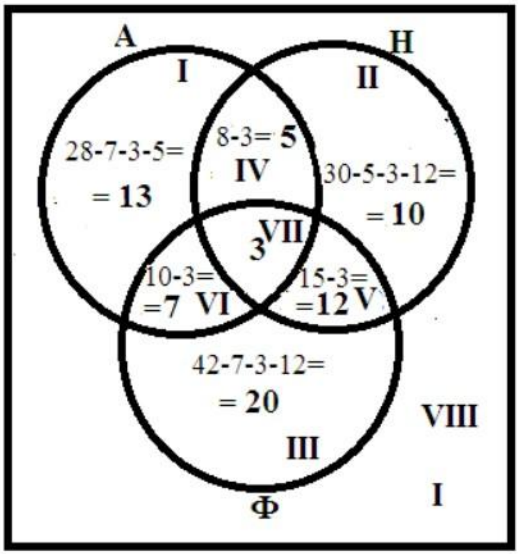


Рис. 84

Таким чином можна дати відповідь на питання задачі:

1. Тільки одну мову вивчають: 13 + 10 + 20 = **43 студента**.

2. Не вивчають жодної іноземної мови: 100 – 43 – 5 – 7 – 12 – 3 = **30 студентів**.

3.9. Відношення еквівалентності

Нехай задане відношення R: «дорівнює» на множині M = $\{\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{2}{10}, \frac{2}{12}, \frac{2}{14}, \frac{3}{15}\}$. Перевіримо, якими властивостями воно володіє.

1. Відношення «дорівнює» рефлексивне, тому що кожен дріб дорівнює самому собі: $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$. Перевіримо на множині M: $\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$, $\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$, … , $\frac{2}{14} = \frac{2}{14}$.

2. Відношення «дорівнює» симетричне: з того що дріб $\frac{a}{b}$ дорівнює дробу $\frac{c}{d}$ випливає, що дріб $\frac{c}{d}$ дорівнює дробу $\frac{a}{b}$.

$(\frac{1}{5} = \frac{2}{10}) \Rightarrow (\frac{2}{10} = \frac{1}{5})$. Читається: ***«якщо** $\boldsymbol{(\frac{1}{5} = \frac{2}{10})}$**, то** $\boldsymbol{(\frac{2}{10} = \frac{1}{5})}$»;*

$(\frac{1}{6} = \frac{2}{12}) \Rightarrow (\frac{2}{12} = \frac{1}{6})$;

$(\frac{1}{7} = \frac{2}{14}) \Rightarrow (\frac{2}{14} = \frac{1}{7})$.

3. Відношення дорівнює транзитивне: з того що дріб $\frac{a}{b}$ дорівнює дробу $\frac{c}{d}$ і дріб $\frac{c}{d}$ дорівнює дробу $\frac{k}{l}$ випливає, що дріб $\frac{a}{b}$ дорівнює дробу $\frac{k}{l}$.

$(\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ і $\frac{2}{10} = \frac{3}{15}) \Rightarrow (\frac{1}{5} = \frac{3}{15})$.

Про відношення рівності дробів, говорять, що воно є *еквівалентним.*

Визначення: Відношення R на множині X називається відношенням еквівалентності, *якщо воно* *одночасно має властивості рефлексивності, симетричності та транзитивності.*

Еквівалентними відношеннями є, наприклад, такі: відношення паралельності прямих, відношення подібності фігур та ін..

Розглянемо за допомогою графів відношення «дорівнює» на множині М = $\{\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{2}{10}, \frac{2}{12}, \frac{2}{14}, \frac{3}{15}\}$ (рис. 85). На рисунку видно, що множина М розбилася на три підмножини: $\{\frac{1}{5}, \frac{2}{10}, \frac{3}{15}\}$; $\{\frac{1}{6}, \frac{2}{12}\}$; $\{\frac{1}{9}\}$.

Ці підмножини не перетинаються між собою, а їх

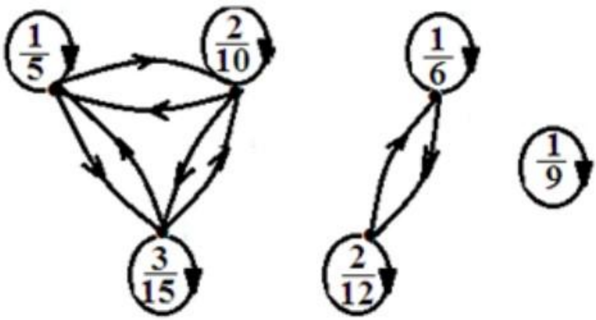


Рис. 85

об'єднання співпадає з множиною М. Таким чином, можна стверджувати, що множина М розбилася на класи. Такі класи називаються *класами еквівалентності.*

Визначення: *Якщо на множині Х задано відношення еквівалентності, то воно породжує розбиття цієї множини на підмножини, що попарно не перетинаються* ***(класи еквівалентності).***

Наведемо приклади із початкового курсу математики.

1. Учитель показує предмети, наприклад, тарілку, виделку з ножем, каструлю та просить назвати ці предмети по одинці, а потім одним словом (посуд). Інший варіант: учитель пропонує учням назвати предмети, які належать до меблів, шкільного приладдя, іграшок. З точку зору математики учням пропонується множину предметів, що представлені на рис. 86, розбити на три класи за відношеннями еквівалентності: «бути меблями», «бути шкільним приладдям», «бути іграшками».

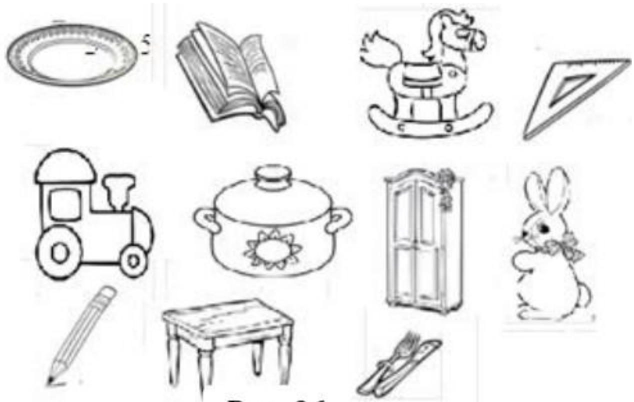


Рис. 86

2. При вивченні теми: «Ділення з остачею» учням дається завдання:

• числа від одного до 12 поділити на 3;

• дізнатися, які остачі вийдуть при діленні;

• записати числа, що мають однакові остачі в окремі групи.

За своєю суттю це завдання на розбиття множини чисел A = {3, 4, 5, 6, …, 12} на класи еквівалентності завдяки заданому відношенню еквівалентності «мати одну й ту саму остачу при діленні на 3»: I клас – підмножина чисел, що при діленні на 3 мають остачу 0: {3, 6, 9, 12}; II клас – підмножина чисел, що при діленні на 3 мають остачу 1: {4, 7, 10}; III клас – підмножина чисел, що при діленні на 3 мають остачу 2: {5, 8, 11}. Об’єднання цих підмножин співпадає з множиною даних чисел: {3, 6, 9, 12} $\cup$ {4, 7, 10} $\cup$ {5, 8, 11} = A.

3.10. Відношення порядку

Розглянемо відношення «менше» на множині M = {5, 10, 8, 14}. Побудуємо граф відношення «менше» на множині M (рис. 87).

Перевіримо відношення на властивості:

1) властивістю «рефлексивність» не володіє: у вершинах графа немає петель;

2) властивістю «симетричність» не володіє: тому що, якщо будь-яке натуральне число a менше будь-якого числа b, то число b одночасно не може бути менше числа a, тобто відношення «менше» **антисиметричне**;

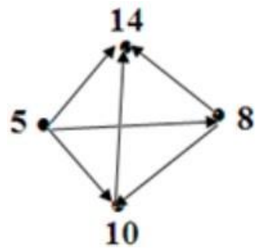


Рис. 87

3) властивістю «транзитивність» володіє. Наприклад, з того, що 5 < 8 < 14 випливає, що 5 < 14;

4) властивістю зв’язності володіє. Наприклад, для пари чисел 5 і 14 можливий тільки один варіант: 5 < 14.

Визначення: Відношення R на множині X називається відношенням порядку, *якщо воно одночасно має властивість антисиметричності та властивість транзитивності. Множина X називається* ***впорядкованою,*** *якщо на ній задано відношення порядку.*

Визначення: *Якщо відношення порядку, яке задано на множині X, має властивість зв’язності, то кажуть, що воно лінійно впорядковує множину X.*

На рис. 87 видно, що найменше число 5 (від нього виходять три стрілки), далі йде число 8, далі – 10 і останнє число – 14. Тобто за відношенням «менше» ми лінійно впорядкували множину M: M = {5, 8, 10, 14}.

Контрольні запитання

1. Сформулювати визначення відповідності між множинами X і Y.

2. Яку множину у відповідності між множинами X і Y називають множиною визначення?

3. Яку множину у відповідності між множинами X і Y називають множиною значення?

4. Які символи використовують для позначення відповідностей?

5. Які існують способи графічного зображення відповідності?

6. Як читається запис 6 R 3?

7. Яка відповідність позначається за допомогою символу R^{-1}.

8. Дати визначення взаємно однозначній відповідності.

9. Які множини називаються рівнопотужними?

10. Дати визначення протилежній відповідності.

11. Як називається всяка підмножина декартового добутку $X \times X$?

12. Сформулювати визначення рефлексивного відношення.

13. Як називається відношення, за якого виконується умова: з того, що елемент x знаходиться у відношенні R з елементом y, слідує, що і елемент y знаходиться у відношенні R з елементом x?

14. Граф якого відношення з кожною парою стрілок, що йдуть від x до y і від y до z, містить стрілку, яка йде від x до z?

15. Яке відношення володіє антисиметричною властивістю?

16. Сформулювати визначення зв’язного відношення.

17. За яких умов можна стверджувати, що множина розбита на класи?

18. Яке відношення на множині X називається відношенням еквівалентності?

19. Якими властивостями має володіти відношення порядку?

20. Які властивості характерні для відношення «дорівнює» на множині дробових чисел?

РОЗДІЛ 4. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Термін «логіка» походить від грецького слова логос, що означає «думка», «розум», «слово», «поняття». Як самостійна наука логіка сформувалася в працях грецького філософа Аристотеля (384 – 322 до н.е.). Уперше в історії ідеї про побудову логіки на математичній основі були висловлені німецьким математиком Г. Лейбніцем (1646 – 1716) в кінці XVII століття. Він вважав, що основні поняття логіки повинні бути позначені символами, які поєднуються за особливими правилами. Це дозволить будь-яке міркування замінити обчисленням.

Математична логіка – різновид формальної логіки, тобто науки, яка вивчає умовиводи з точки зору їх формальної будови. Як наука математична логіка містить багато розділів. Розділ математичної логіки, який представлений у даному посібнику, присвячений вивченню логіки висловлювань.

4.1. Поняття висловлювання

Основним поняттям математичної логіки є поняття «простого висловлювання». Поняття висловлювання, як і поняття множини, не має чіткого визначення, а описується за допомогою характеристик, відповідних прикладів.

Під ***висловлюванням*** *розуміють розповідні речення, що представляють собою такі твердження, про які* *можна сказати істинні вони або хибні. Логічними значеннями висловлювань є «істина» та «хибність». Висловлювання вважається істинним, якщо в ньому описується реальна ситуація, та хибним – якщо ситуація не відповідає реальності.*

Істину будемо позначати одиницею **(1)**, а хибність – нулем **(0).**

Для визначення істинності або хибності висловлювання будують таблицю істинності.

У навчальній літературі висловлювання прийнято позначати першими великими буквами латинського алфавіту: A, B, C, D, … .

Приклади речень.

1. A: «Т. Г. Шевченко – український поет»;
2. B: «25 > 35»;
3. C: «На місяці живуть люди»;
4. D: «Поему «Русалка» написав І. Франко»;
5. E: «Який сьогодні день?»;
6. F: «Київ – столиця України»;
7. G: «На далеких планетах живуть розумні істоти»;
8. H: «$3 \cdot 4 = 12$»;
9. I: «Яка сьогодні чудова погода!»
10. J: «$x + 8 = 20$»

Проаналізуємо кожне речення:

• перше, шосте і восьме – дійсно висловлювання; про них можна сказати, що вони стверджують істину;

• друге, третє і четверте – теж висловлювання; про них можна сказати, що вони стверджують хибність;

• п’яте – не є висловлюванням; тому що, по-перше, не зрозуміло про який день йде мова; по-друге, це речення не розповідне;

• сьоме – не є висловлюванням: наука не досягла таких висот, щоб можна було стверджувати: істина це чи хибність;

• дев'яте – не є висловлюванням: кожний сприймає погоду по-різному (для когось погода дійсно чудова, а для іншого – навпаки);

• десяте – не є висловлюванням: не можна сказати істина чи хибність, доки не знайдемо значення x.

Із окремих висловлювань різними способами можна будувати нові висловлювання.

Визначення: *Висловлювання, що представляє собою одне твердження, називають* ***простим або елементарним.***

З елементарних висловлювань за допомогою логічних зв'язків можна побудувати висловлювання, яке називається складеним. Утворення складеного висловлювання за допомогою логічних зв'язків називають *логічною операцією.*

Визначення: *Висловлювання називається* ***складеним****, якщо воно отримано за допомогою логічних зв'язків і декількох простих висловлювань.*

До основних логічних зв'язків відносяться такі як: «... і ...», «... або ...», «...або ... , або...», «якщо... , то ...», «тоді й тільки тоді, коли ...», «ні ... , ні ...», «не ... , а...», «... , але не ...» і таке інше. Решта логічних зв'язків або близькі за змістом до будь-яких зазначених, або можуть бути замінені їх комбінацією.

Розглянемо два простих висловлювань: А: «Викладач зайшов до аудиторії», В: «Студенти слухають лекцію». Побудуємо складені висловлення:

1. Викладач зайшов до аудиторії **І** студенти слухають лекцію;
2. Викладач **НЕ** зайшов до аудиторії **І** студенти слухають лекцію;
3. Якщо викладач зайшов до аудиторії, то студенти слухають лекцію;

4. Студенти слухають лекцію тоді і тільки тоді, якщо викладач зайшов до аудиторії;
5. Неправильно, що студенти слухають лекцію, коли викладач зайшов до аудиторії.

У нашому прикладі самі висловлювання та конструкції з них мають сенс. В залежності від ситуації деякі з них істинні, а деякі хибні. Але для математичної логіки (для умовиводів) важлива формальна побудова висловлювань, а не сенс висловлювань. Наприклад, складене висловлювання: «**Якщо** Київ – не столиця України, **то** Місяць – супутник Землі». З точки зору побутової логіки висловлювань «Київ – не столиця України» та «Місяць – супутник Землі» не пов'язані за смисловим значенням і, крім цього, перше висловлювання хибне; але в цілому складене висловлювання, яке побудовано за допомогою зв'язки «якщо, …, то» – істинне.

4.2. Операція заперечення висловлювання (інверсія)

Визначення: Запереченням висловлювання А *називається висловлювання «не А», яке хибне, якщо А – істинне, та істинне, якщо А – хибне.*

Позначається $\overline{A}$**.** (У деяких посібниках використовують позначення: **¬А.**) Для заперечення висловлювань використовують також інші слова: «неправильно, що».

Наприклад:

1) маємо висловлювання В: «число 8 ділиться на 4», запереченням висловлювання В буде висловлювання $\overline{B}$: «число 8 **не** ділиться на 4», або можна сказати «неправильно, що число 8 ділиться на 4». Висловлювання В – істинне, його заперечення $\overline{B}$ – хибне;

2) маємо висловлювання С: «6 < 5», воно хибне. Запереченням висловлювання С є істинне висловлення $\overline{C}$: «неправильнно, що 6 < 5».

Визначенню заперечення можна надати форму таблиці істинності:

A	$\overline{\mathbf{A}}$
1	**0**
0	**1**

4.3. Кон'юнкція висловлювань (логічне множення)

Ми вже говорили про те, що з декількох простих висловлювань можна побудувати складене. Наприклад, властивостями паралелограма є висловлювання: А: «у паралелограма протилежні сторони попарно рівні між собою», В: «у паралелограма протилежні сторони попарно паралельні». За допомогою сполучника **і** побудуємо складене висловлювання: «У паралелограма протилежні сторони попарно рівні між собою **і** протилежні сторони попарно паралельні». У спрощеному вигляді наше складене висловлювання трактується так: «У паралелограма протилежні сторони попарно рівні **і** паралельні».

У даному прикладі за допомогою сполучника **і** ми виконали логічну операцію, яка називається ***кон'юнкцією.*** Кон'юнкція позначається символом: $\wedge$ (від латинського слова «*conjunction*» – союз, зв'язок).

Побудуємо таблицю істинності для нашого прикладу:

висловлювання А: «у паралелограма протилежні сторони попарно рівні між собою»;

висловлювання В: «у паралелограма протилежні сторони попарно паралельні».

A	B	A ∧ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Перший рядок: якщо висловлювання А істинне, а також висловлювання В істинне, то чотирикутник дійсно паралелограм, тому складене висловлювання А ∧ В істинне.

Другий рядок: якщо висловлювання А істинне, а висловлювання В хибне, то чотирикутник не може бути паралелограмом, тому складене висловлювання А ∧ В хибне.

Третій рядок: якщо висловлювання А хибне, а висловлювання В істинне, то чотирикутник не може бути паралелограмом, тому складене висловлювання А ∧ В хибне.

Четвертий рядок: жодне висловлювання не є істинним, тому чотирикутник не може бути паралелограмом; отже, складене висловлювання А ∧ В хибне.

Таким чином, у нашому прикладі кон'юнкція істина тільки в одному випадку, коли обидва висловлювання істинні, що відповідає визначенню кон'юнкції.

Визначення: Кон'юнкцією двох висловлювань А і В *називається нове висловлювання* ***А /\ В*** *(читається А і В), яке істинне тоді й тільки тоді, коли обидва вихідні прості висловлювання істинні.* Висловлювання А та висловлювання В називаються членами кон'юнкції.

Визначення кон'юнкції, як і визначення інших логічних зв'язок, які служать для утворення складених висловлювань, ґрунтується на наступних двох положеннях:

1) кожне висловлювання (як просте, так і складене) має одне і тільки одне з двох значень істинності: воно є або істинним, або хибним;

2) істинне значення складеного висловлювання залежить тільки від значень істинності висловлювань, з яких воно складається, та способу їх логічної зв'язки між собою.

Логічні значення висловлювання $A \wedge B$, що пов'язані з логічними значеннями висловлювань A і B, описуються таблицею істинності операції кон'юнкції, яка співпадає з побудованою нами таблицею.

Основні закони кон'юнкції:

1) $A \wedge \overline{A} = 0$ (хибність) – закон суперечності;

2) $A \wedge A = 1$ (істина) – закон імпотентності;

3) $A \wedge B = B \wedge A$ – закон комутативності;

4) $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ – закон асоціативності.

Приклади.

1. Для висловлювань «Число 6 парне» і «Число 6 ділиться на 3» їх кон'юнкція «Число 6 парне і число 6 ділиться на 3» буде істинною, тому що обидва прості висловлювання істинні.

2. Для висловлювань «Київ – столиця України» і «число 9 кратне 3» їх кон'юнкція «Київ – столиця України і число 9 кратне 3», як і у першому прикладі, буде істинною, тому що обидва прості висловлювання істинні.

3. Для висловлювань «Квадрат – це прямокутник» і «Квадрат – не паралелограм» їх кон'юнкція буде хибною, тому що хибне друге висловлювання: «Квадрат – не паралелограм». Насправді квадрат – паралелограм.

4. Довести закон асоціативності: $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$.

Для доведення закону побудуємо таблицю істинності для кожної складової даної рівності та порівняємо результати, які отримаємо у лівій та правій частині.

$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**
A	**B**	**C**	**$B \wedge C$**	**$A \wedge (B \wedge C)$**	**$A \wedge B$**	**$(A \wedge B) \wedge C$**
1	1	1	1	**1**	1	**1**
1	1	0	0	**0**	1	**0**
1	0	1	0	**0**	0	**0**
1	0	0	0	**0**	0	**0**
0	1	1	1	**0**	0	**0**
0	1	0	0	**0**	0	**0**
0	0	1	0	**0**	0	**0**
0	0	0	0	**0**	0	**0**

Як бачимо, значення істинності у п'ятому і сьомому стовпчиках співпадають, тож ліва і права частини рівності дорівнюють одна одній.

4.4. Диз'юнкція висловлювань (логічне додавання)

Поєднання двох висловлювань за допомогою слова «або» утворює складене висловлювання, яке називається *диз'юнкцією цих висловлювань* (від латинського слова «disjunctio» – роз'єднання, відмінність).

Слово «або» у повсякденній мові має два різних значення. Інколи воно означає «одне або інше, або обидва», а інколи «одне або інше, але не обидва разом». Наприклад, речення: «З усіх учнів класу вибрати або дівчинку, або хлопчика» допускає можливість вибору і дівчинки, і хлопчика. Інший підхід до такого речення «Студенти слухають лекцію або в аудиторії, або в бібліотеці» допускає тільки щось одне. Неможливо, щоб одні й ті ж студенти знаходилися одночасно у різних місцях.

Перше значення «або» – *такий, що не виключає:* у даному випадку диз'юнкція двох висловлювань означає, *що принаймні одне з цих висловлювань істинне, незалежно від того, істинні вони обидва чи ні.*

У другому випадку значення «або» – *такий, що виключає:* у цьому випадку диз'юнкція двох висловлювань стверджує, що одне з них істинне, а друге – обов'язково повинно бути хибним.

У математичній логіці слово «або» використовується тільки у значенні «такий, що не виключає».

Диз'юнкція позначається символом **«∨»: «A ∨ B».**

Визначення: Диз'юнкцією двох висловлювань A і B називається нове висловлювання A ∨ B *(читається A або B), яке істинне тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з простих висловлювань істинне.*

Висловлювання A та висловлювання B називаються членами диз'юнкції.

Логічні значення висловлювання A ∨ B, що пов'язані з логічними значеннями висловлень A і B, описуються в таблиці істинності операції диз'юнкції:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Основні закони диз'юнкції:

1) $A \vee \overline{A} = I$ – закон виключеного третього;

2) $A \vee A = A$ – закон імпотентності;

3) $A \vee B = B \vee A$ – закон комутативності;

4) $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ – закон асоціативності;

5) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ – закон дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції;

6) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ – закон дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції;

$$\left.\begin{array}{l} 7)\ A \vee (A \wedge B) = A \\ 8)\ A \wedge (A \vee B) = A \end{array}\right\} \text{закони поглинання;}$$

$$\left.\begin{array}{l} 9)\ (A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) = A \\ 10)\ (A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) = A \end{array}\right\} \text{закони склеювання;}$$

Теореми де Моргана:

$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$

Приклад. Довести, що ліва і права частини рівності $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$ дійсно дорівнюють одна одній.

Для доведення побудуємо таблицю істинності для кожної складової даної рівності та порівняємо результати, які отримаємо у лівій та правій частині.

$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
A	**B**	**$A \wedge B$**	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	0	**1**	0	1	**1**
0	1	0	**1**	1	0	**1**
0	0	0	**1**	1	1	**1**

Як бачимо, значення істинності у четвертому і сьомому стовпчиках співпадають, тож ліва і права частини рівності дорівнюють одна одній.

4.5. Імплікація висловлювань

Два висловлювання можуть бути «зв'язані» за допомогою сполучника «якщо…, то …». Висловлювання, що йде після слова «якщо» до слова «то» називається *умовою* (*гіпотезою або посилкою*). Висловлювання, яке слідує за словом «то» називається *висновком (наслідком).* Можна сказати, що гіпотеза (або умова) це основа, на якій будується висновок.

Розглянемо приклади:

1) Якщо йде дощ, то ця квіткова клумба полита.

2) Якщо число $x = 2$, то $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Сполучник «якщо…, то …» відповідає логічній операції, яка називається *імплікацією* (від латинського слова «implicio» – тісно пов'язую).

Визначення: Імплікацією двох висловлювань А і В *називається таке висловлювання A $\Rightarrow$ B (читається «із А випливає В» або «А імплікує В»), яке хибне тоді й тільки тоді, коли А істинне, а В хибне*.

Згідно визначення імплікації побудуємо таблицю істинності:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Повернемося до прикладу 1.

Висловлювання «Якщо йде дощ, то ця квіткова клумба полита» є імплікацією наступних висловлень: А: «йде дощ»; В: «ця квіткова клумба полита».

Розглянемо таблицю істинності з точки зору «здорового глузду».

Перший рядок таблиці: йде дощ – істина, у цьому випадку клумба дійсно полита, тобто маємо істину.

Другий рядок: йде дощ – істина, а клумба неполита; це неможливий варіант, тобто маємо хибність.

Третій рядок: йде дощ – хибність, тобто дощ не йде, а клумба полита; це істина, бо можливий варіант, що клумбу полили зі шланги.

Четвертий рядок – дощ не йде, клумба неполита; це істина, тому що це можливий варіант.

Даний приклад співпадає з можливими варіантами, але сенс імплікації, як однієї з логічних зв'язок, повністю визначається тільки таблицею істинності, та нічого іншого імплікація не має на увазі. Імплікація, зокрема, не передбачає, що висловлювання А і В якось пов'язані між собою за змістом. У разі істинності В висловлювання «якщо А, то В» істинне незалежно від того, є А істинним або хибним і пов'язане воно за змістом з В чи ні. Істинними вважаються, наприклад, висловлювання: «Якщо на Сонці є життя, то два помножити на два дорівнює чотири» (перше висловлювання – хибне, друге – істинне; за таблицею імплікації – істина) і т.п. Деяке висловлювання істинне також тоді, коли А хибне, і при цьому знову ж таки неважливо істинне В чи ні і пов'язане воно за змістом з А чи ні. До істинних відносяться, наприклад, висловлювання: «Якщо два помножити на два дорівнює п'ять, то Київ маленьке місто» (перше висловлювання – хибне, друге – хибне, за таблицею імплікації – істина) і т.п. У звичайному міркуванні всі ці висловлювання навряд чи будуть розглядатися як такі, що мають сенс і ще в меншому ступені як істинні.

4.6. Еквівалентність висловлювань

Дуже часто різні твердження конструюються за допомогою сполучників «якщо і тільки якщо», «те і тільки те», «тоді і тільки тоді», «необхідно і достатньо».

Складене висловлювання, яке утворене за допомогою вище названих сполучників, називається *еквівалентністю* (від латинського слова «aequivalens» – рівноцінне, рівнозначуще), позначається $A \Leftrightarrow B$.

Визначення: Еквівалентністю висловлювань А і В називається таке висловлювання $A \Leftrightarrow B$, *яке істинне тоді і тільки тоді, коли обидва висловлювання А і В одночасно істинні або хибні.*

За визначенням побудуємо таблицю істинності еквівалентності:

A	B	A $\Leftrightarrow$ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Приклади еквівалентності висловлювань: «Трикутник є рівностороннім, якщо і тільки якщо він є рівнокутний», «Число ділитися на 3 тоді і тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 3», «Петро вивчає англійську мову тоді і тільки тоді, коли знаходиться у бібліотеці».

Пріоритети (послідовність виконання) логічних операцій

1. Обчислюються значення виразів у дужках.

2. Виконуються операції заперечення над окремими змінними.

3. Обчислюються кон’юнкції ($\wedge$, $\overleftarrow{\wedge}$).

4. Обчислюються диз’юнкції ($\vee$, $\overleftarrow{\vee}$).

5. Обчислюється імплікація.

6. Обчислюється еквівалентність.

Алгоритм побудови таблиці істинності

1. Перелічити кількість змінних (n) у логічному виразі.

2. Визначити число рядків (m) у таблиці за формулою: $m = 2^n$, де n – кількість змінних.

3. Підрахувати кількість логічних операцій у формулі.

4. Встановити послідовність виконання логічних операцій з урахуванням дужок і пріоритетів.

5. Визначити кількість стовпчиків: число змінних + число операцій.

6. Виписати набори вхідних змінних.

7. Провести заповнення таблиці істинності за стовпчиками, виконуючи логічні операції у відповідності з встановленою послідовністю (пріоритети логічних операцій).

Заповнення таблиці

1. Розділити колонку значень першої змінної навпіл і заповнити верхню частину значенням «0», а нижню – значенням «1».

2. Розділити колонку значень другої змінної на чотири частини і заповнити кожну чверть групами «0» і «1», які чергуються, починаючи з групи «0».

3. Продовжити ділення колонок значень наступних змінних на 8, 16 і т. д. частин та заповнити групами «0» і «1» доти, поки групи «0» і «1» не будуть складатися з одного символу.

Наведемо приклад

Побудувати таблицю істинності для формули:

$A \wedge (B \vee \overline{B} \wedge \overline{C})$.

Кількість логічних змінних – 3 (A, B, C), таким чином, кількість рядків у таблиці $2^3 = 8$ (плюс один рядок для позначень).

Кількість логічних операцій у формулі – 5 (дві кон'юнкції, одна диз'юнкція і два заперечення), кількість змінних – 3, таким чином кількість стовпчиків: 3 + 5 = 8.

$A \wedge (B \vee \overline{B} \wedge \overline{C})$

A	B	C	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{B} \wedge \overline{C}$	$(B \vee \overline{B} \wedge \overline{C})$	$A \wedge (B \vee \overline{B} \wedge \overline{C})$
0	0	0	1	1	1	1	**0**
0	0	1	1	0	0	0	**0**
0	1	0	0	1	0	1	**0**
0	1	1	0	0	0	1	**0**
1	0	0	1	1	1	1	**1**
1	0	1	1	0	0	0	**0**
1	1	0	0	1	0	1	**1**
1	1	1	0	0	0	1	**1**

Приклад застосування логіки висловлювань

Розглянемо задачу: «Три брата (Іван, Дмитро і Сергій) викладають різні дисципліни (хімію, біологію, історію) в університетах Миколаєва, Львова та Києва.

1. Іван працює не у Миколаєві, а Дмитро не у Львові.
2. Той, хто живе в Миколаєві викладає не історію.
3. Той, який працює у Львові, викладає хімію.
4. Дмитро викладає не біологію.

Яку дисципліну та в якому місці викладає Сергій?».

Розв'язання задачі.

Спочатку побудуємо таблицю за тими даними, які вже є в задачі:

Миколаїв	Львів	Київ		Хімія	Біологія	Історія
0			Іван			
			Сергій			
	0		Дмитро		0	

Розмірковуючи далі, будемо поступово заповнювати цю таблицю: Дмитро викладає не у Львові (за умовою 1), за умовою 3 він не може викладати хімію, а за умовою 4 він не викладає біологію. Таким чином, Дмитро викладає історію.

Далі: з умови 2 випливає, що Дмитро не мешкає у Миколаєві, тоді він мешкає у Києві.

Заповнимо таблицю далі:

Миколаїв	Львів	Київ		Хімія	Біологія	Історія
0	1	0	Іван	1	0	0
1	0	0	Сергій	0	1	0
0	**0**	**1**	**Дмитро**	**0**	**0**	**1**

4.7. Предикати та квантори

Розглянемо твердження: «У місті N мешкає більше 2 мільйонів осіб». Про нього не можна сказати істинне воно чи хибне, тобто його не можна вважати висловлюванням, оскільки незрозуміло, про яке місто йде мова. У цьому реченні міститься деяке твердження, що залежить від N. Якщо замість N підставити назву міста, твердження стане висловлюванням і можна буде визначити істинне воно чи хибне.

Розглянемо ще приклад твердження: «Число a є корінь рівняння $x + 8 = 12$». Знову-таки ми не зможемо визначити істинність, тому що не знаємо значення числа a.

Твердження, які містять змінну та залежать від неї, в математиці називаються *логічними функціями або предикатами*.

***Визначення: Предикат** – це речення зі змінними, яке після заміни змінних певними їхніми значеннями перетворюється у висловлювання, позначається **P (x)**, де x – змінна, яку містить предикат.*

Перше твердження буде позначатися так: P (N): «У місті N мешкає більше 2 мільйонів осіб». Підставимо замість N місто Київ і Старобільськ, отримаємо два речення: «У місті Києві мешкає більше 2 мільйонів осіб» і «У місті Старобільськ мешкає більше 2 мільйонів осіб». Кожне з цих тверджень – висловлювання, тому що про кожне можна сказати істинне воно чи хибне.

Перше висловлювання – істинне (на 1 грудня 2019 року населення Києва склало 29663000 осіб).

Друге висловлювання – хибне (на 2019 р. населення Старобільська склало більше 23200 осіб).

P (x): «Число *a* є корінь рівняння $x + 8 = 12$». Замість *a* підставимо число 4, отримаємо істинне висловлювання: «Число 4 є корінь рівняння $x + 8 = 12$» ($4 + 8 = 12$).

Предикат, який залежить від однієї змінної, називається одномісним предикатом і позначає властивість об'єкту. Наприклад, тільки що розглянутий предикат P (N) характеризує властивість міста. Ось ще приклади предикатів-властивостей:

P_1 (x) = «x – парне число»;

P_2 (x) = «студент x майбутній учитель початкових класів»;

P_3 (x) = «учень x завжди запізнюється на урок».

Існують предикати, які залежать від декількох змінних, позначаються **P (x, y)**; якщо є дві змінні, то це двомісний предикат. Наприклад:

P_1 (x, y): «x більше y»;

P_2 (x, y): «x подруга y».

Двомісні предикати – це предикати-відношення, вони визначають зв'язки між двома об'єктами.

Предикати нерідко використовуються для того, щоб задати множину, наприклад, чисел, не перераховуючи всіх її елементів. З такими випадками ми вже зустрічалися при вивченні розділу «Теорія множин»:

P_1 (x): «$x \in$ N». Зрозуміло, що при підстановці будь-якого натурального числа предикат P_1 (x) приймає істинне значення і хибне при підстановці інших чисел;

P_2 (x, y): «$x \vdots y = 3$». У даному випадку ми будемо обирати тільки ті числа, які при ділені першого числа на друге дадуть ціле число 3.

Існують предикати, які істинні для всіх допустимих значень змінних, наприклад, предикат на множині натуральних чисел P (x): «($x \cdot 2$) – парне число». Але, якщо ми прочитаємо предикат, як він записаний: «*x помножити на 2 – парне число*», то існує якась невизначеність. Не вистачає слів **для всякого натурального *x* істинно твердження:** «*x помножити на 2 – парне число*». У такому випадку використовують наступний запис: ∀ x P (x), який читається так: «Для будь-якого натурального *x* виконується предикат P (*x*)», або «Для кожного натурального *x* P (*x*)».

Символ ∀ позначається квантором загальності, він означає «будь-який», «усякий», «для будь-якого», «для всіх». Символ ∀ походить від перевернутої букви A (від англійського слова *«all»* – всі). Операція підстановки квантора до предиката називається *«навішування квантору»*.

Наведемо ще приклад: нехай *a* невизначений відрізок, запис ∀ *a* P (*a*): «*a* = *a*» читається: **всякий** відрізок дорівнює самому собі.

Розглянемо такий предикат: P (*x*): «*x* ⋮ 3». Щоб цей предикат став висловлюванням необхідно підставляти значення *x.* Спробуємо навісити квантор загальності: ∀ *x* P (*x*): «*x* ⋮ 3» (читається: «будь-яке число *x* націло ділиться на 3»); отримали висловлювання, яке хибне. Тобто квантор допоміг утворити з предиката висловлювання.

Додамо до нашого предикату P (*x*): «*x* ⋮ 3» речення: **«Існує таке число *x*»**. Разом із предикатом отримаємо наступне істинне висловлювання: «Існує таке число *x,* яке націло ділиться на 3». У даному випадку теж був застосований квантор – **квантор існування,** позначається символом ∃ (зворотне E, від англійського слова *exist* – існувати), читається: «існує», «знайдеться», «хоча б один».

∃ *x* P (*x*): «*x* > 8» – читається: «Знайдеться таке число *x*, яке більше 3». Отримали істинне висловлювання.

Якщо побудувати заперечення для висловлювання з квантором $\forall$ чи з квантором $\exists$, то побачимо, що один квантор замінює другий. Наприклад, нехай маємо предикат Р (x). Навісимо на нього квантор існування: $\forall$ x Р (x); читається: для будь-якого x виконується Р (x), тобто виконується умова, яка визначена предикатом. Побудуємо заперечення: $\overline{\forall x P(x)}$; читається: «неправильно, що для будь-якого x виконується Р (x)» або «існує хоча б один x, для якого не виконується Р (x)», тобто отримали висловлювання: $\exists$ x Р (x). Таким чином маємо рівність $\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$.

Аналогічно можна отримати рівність:

$\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$.

Узагалі для будь-якого предикату мають місце рівносильності:

$\overline{\forall x P(x)} \Leftrightarrow \exists x \overline{P(x)}$;

$\overline{\exists x P(x)} \Leftrightarrow \forall x \overline{P(x)}$.

Побудувати заперечення для речення: «Деякі студенти нашої групи не склали сесію».

Розв'язання.

Р (x): «студент х нашої групи не склав сесію», тоді вихідне речення можна записати за допомогою квантора існування: $\exists$ x Р (x), а його заперечення має такий запис: $\overline{\exists x P(x)} \Leftrightarrow \forall x \overline{P(x)}$; читається: всі студенти нашої групи склали сесію.

Контрольні запитання

1. Сформулювати визначення поняття «висловлювання».

2. За допомогою яких символів позначається істинність / хибність висловлювання?

3. Яке висловлювання називається елементарним?

4. Яке висловлювання називається складеним?

5. Назвати основні логічні зв'язки.

6. Як називається операція заперечення висловлювання?

7. За допомогою якого символу позначається заперечення висловлювання?

8. Сформулювати визначення кон'юнкції двох висловлювань А і В.

9. Сформулювати визначення диз'юнкції двох висловлювань А і В.

10. Як читається запис А   В?

11. Яке висловлювання називається еквівалентністю висловлювань А і В?

12. Яка послідовність виконання логічних операцій?

13. Сформулювати визначення поняття «предикат».

14. У чому полягає сутність операції навішування квантору?

15. За допомогою якого символу позначається квантор загальності?

16. За допомогою якого символу позначається квантор існування?

17. Що відбувається, коли побудувати заперечення для висловлювання з квантором $\forall$ / з квантором $\exists$?

18. Назвати алгоритм побудови таблиці істинності.

19. У якому значенні в математичній логіці використовується слово «або»?

20. Дати визначення двомісному предикату.

II. ПРАКТИЧНИЙ БЛОК

РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

Завдання для практичного виконання

Завдання 1.

1.1. За нашим містом знаходиться великий масив дерев: сосни, ялини, піхти, ялівці, кедри. Як можна назвати множину цих дерев?

1.2. Як називають множину музикантів, які грають під керівництвом диригента?

1.3. Як можна назвати множину таких фруктів: лимон, мандарин, лайм, грейпфрукт, помело?

1.4. Запропонувати 3-5 власних прикладів.

1.5. Назвати не менше п'яти елементів із множини P: «дитячі українські письменники».

1.6. Назвати не менше п'яти елементів із множини L: «об'ємні геометричні фігури».

Завдання 2.

2.1. Множина S складається з чисел – 2, – 3, – 4, – 5. Записати цю множину за допомогою характеристичної властивості. Назвати числа протилежні даним і записати множину отриманих чисел.

2.2. Визначити чи правильні записи?

а) $15 \in N$, б) $25 \notin R$, в) $\frac{2}{4} \in N$, г) $\frac{2}{4} \in R$, д) $0 \in N$, е) $23{,}5 \notin N$?

2.3. Дані множини: A = {1, 3, 5, 7, 9}, B = {12, 11, 10, 9}, C = {11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99}. Сформулювати характеристичну властивість елементів кожної з них.

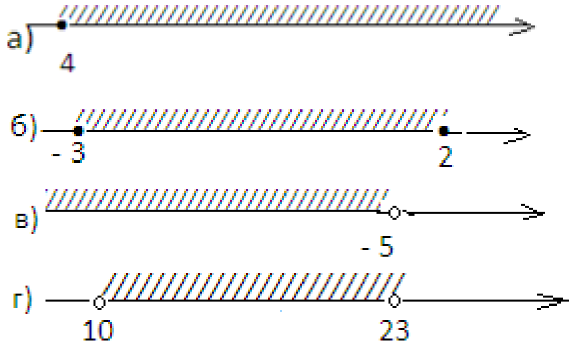
2.4. Записати, як читаються наступні записи, та зобразити на числовій прямій множини:

1) $A = \{x \mid x \in R, -3 \le x \le 2\}$

2) $B = \{x \mid x \in R, -3{,}5 < x < 2{,}6\}$

3) C = $\{x \mid x \in R, x < 7\}$
4) D = $\{x \mid x \in R, x \leq 5\}$

2.5. Записати символами у вигляді характеристичної властивості множини, що зображені на числовій прямій:



Завдання 3.

3.1. Дана множина A = {213, 45, 324, 732, 136}. Записати підмножини множини A, які складаються з чисел, таких що:

а) діляться на 3: ______________________________
б) діляться на 9: ______________________________
в) не діляться на 4: ____________________________
г) не діляться на 5: ____________________________
д) не діляться на 3: ____________________________

3.2. На множині чотирикутників I дані множини: A – паралелограми, B – ромби, C – трапеції, D – прямокутники, E – квадрати. Записати словами, спираючись на поняття «підмножина», характеристичні властивості, якими можна задати ці множини. Наприклад, множина B складається з паралелограмів, у яких всі сторони рівні: B $\subset$ A.

Множина A складається з … .
Множина C складається з … .
Множина D складається з … .
Множина E складається з … .

3.3. Визначити, які з наступних пар множин пов'язані між собою відношенням включення?

Зразок:

A = $\{x \mid x \in N, x > 2\}$, B = $\{y \mid y \in N, y > 2\}$. A = B, таким чином отримуємо: A $\subseteq$ B, або B $\subseteq$ A.

а) A = $\{x \mid x \in R, x > 0\}$, B = $\{y \mid y \in N, y > 0\}$

б) A = $\{x \mid x \in N, x^2 > 4\}$, B = $\{y \mid y \in N, y^2 > 5\}$

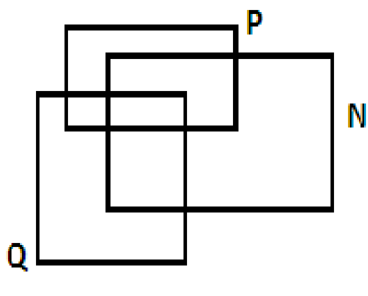
в) A – множина багатокутників з периметром 4 од., B – множина квадратів з площею 1 кв. од.

3.4. Надані множини, елементи яких належать множині натуральних чисел, причому B – множина парних натуральних чисел; C – множина непарних натуральних чисел; D – множина чисел, що кратні 2 і 3 одночасно; E – множина чисел, десятковий запис яких закінчується нулем; F – множина чисел, що кратні 6; К – множина чисел, що кратні 3; M – множина чисел, що кратні 2 і 5 одночасно. Записати за допомогою символу включення $\subseteq$, які з даних множин є підмножинами інших зазначених множин. Записати, які з даних множин рівні, якщо такі є.

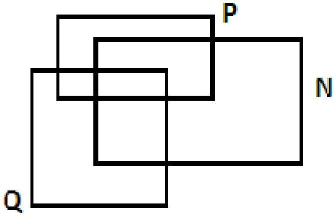
3.5. За допомогою понять «підмножина», «універсальна множина» і кругів Ейлера представити відношення між наступними множинами: A – множина планет; B – планети Сонячної системи; C – Земля; D – супутники; E – штучні супутники; F – Луна; G – небесні тіла.

Завдання 4.

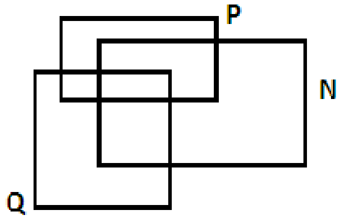
4.1. Три множини P, N, Q зображені трьома прямокутниками, які мають загальні частини Зобразити штриховкою області, які відповідають наступним множинам:



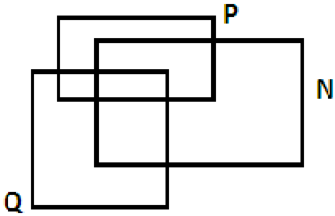
а) $N \cap Q$



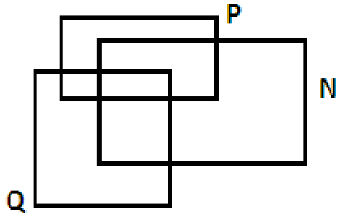
б) $N \cup Q$



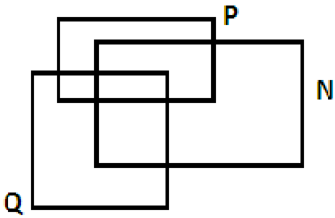
в) $P \cap N$



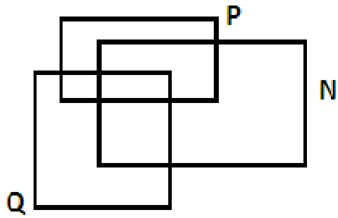
г) $P \cup N$



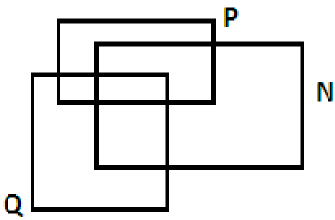
д) $P \cap Q$



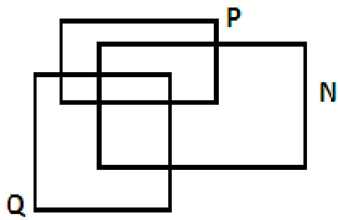
е) $P \cup Q$



є) $P \cap N \cap Q$



ж) $P \cap N \cup Q$



4.2. Із 100 студентів, які вивчають англійську та німецьку мови, 85 вивчають англійську, 45 – німецьку.

Скільки студентів вивчають обидві мови. Розв'язати задачу за допомогою діаграм Ейлера-Венна та записати коментар.

4.3. Знайти перетин множин А і В, якщо А = $\{x \mid \in R,$ $-7 < x < 5\}$ і В = $\{x \mid \in R, -6{,}8 \le x \le 2{,}3\}$. Використати числову пряму. Записати вираз: $A \cap B =$

4.4. І – множина учнів усього класу, які вивчають різні мови, К – множина учнів, які вивчають англійську мову, М – множина учнів, які вивчають китайську мову. Зобразити за допомогою діаграм Ейлера-Венна множини та словесно описати їх:

а) I, M, K

б) $I \cup K$

в) $I \cap M$

г) $K \cup M$

д) $K \cap M$

4.5. Знайти та відобразити на числовій прямій перетин та об'єднання множин А= $(-\infty, -5]$ і В = $[-8, +\infty)$.

4.6. Знайти об'єднання та перетин множин та зробити ілюстрацію за допомогою діаграм Ейлера-Венна, якщо А = $\{x \mid x = 2n, n \in N\}$, В = $\{x \mid x = 5n, n \in N\}$.

4.7. Знайти та зобразити на числовій прямій різницю множин:

а) $C \setminus D$;

б) $D \setminus C$,

якщо $C = \{x \mid x \in R, x \le -5\}$, $D = \{x \mid x \in R, x \ge -8\}$.

Записати характеристичну властивість $C \setminus D$ та $D \setminus C$.

4.8. Відомо, що множини А, В, С належать універсальній множині І. За допомогою діаграм Ейлера-Венна довести рівність:

а) $\overleftarrow{A} \cup \overleftarrow{B} = (\overleftarrow{A \cap B})$;

б) знайти $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ та записати відповідь формулою.

4.9. Множина $A = \{x \mid x \in R,\ -2 < x \le 5\}$. Знайти та зобразити на числовій прямій доповнення до множини A.

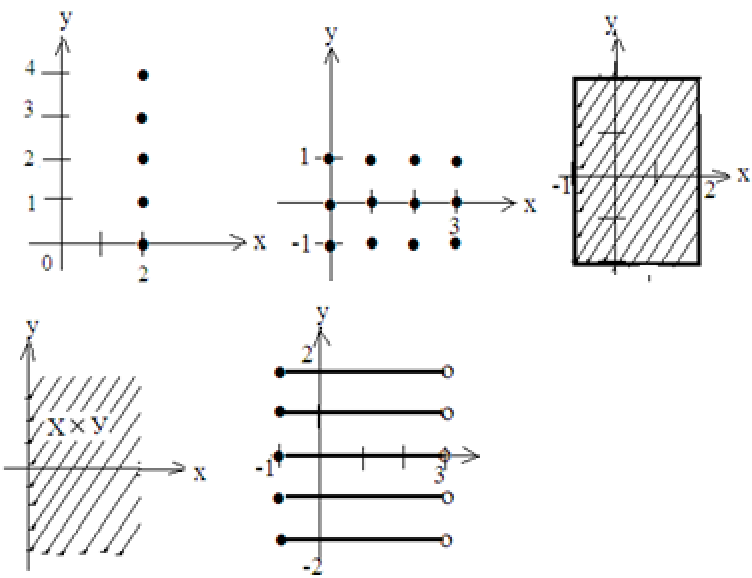
Завдання 5.

5.1. Множина X = {2, 1}, множина У = {m, n, p}. Записати елементи множини X × У.

5.2. Зобразити елементи A × B у прямокутній системі координат, якщо:

1) A = {2, 4, 6}, B = {0, 1};
2) A = {– 1, 0, 1}, B = {– 2, – 3, – 4};
3) $A = \{x \mid x \in N,\ 3 \le x \le 7\}$, $B = \{y \mid y \in N,\ 4 \le y \le 9\}$;
4) $A = \{x \mid x \in R,\ 3 \le x \le 7\}$, $B = \{y \mid y \in R,\ 4 < y < 9\}$;
5) $A = \{x \mid x \in R,\ -1 \le x \le 3\}$, $B = \{y \mid y \in R,\ 4 < y \le 9\}$;
6) $A = \{x \mid x \in N,\ 1 \le x \le 3\}$, $B = \{y \mid y \in R,\ 3 \le y \le 6\}$;

5.3. Усі елементи декартового добутку X × У зображені на рисунку. Визначити множини X і У.



Додаткові завдання

Завдання 1.

Записати за допомогою характеристичної властивості наступні множини:

а) двоцифрові додатні парні числа;

б) двоцифрові цілі числа;

в) одноцифрові додатні непарні числа;

г) цілі додатні числа, що діляться на 4.

Завдання 2.

Дано множини: $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, $C = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$, $D = \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

Знайти та записати елементи, що належать множині:

а) $A \cup B \cup C \cup D$;

б) $A \cap B \cap C \cap D$;

в) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$;

г) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$.

Завдання 3.

Дано пари множин:

а) A = {а; б; в; г; д; е}, B = {а; в; д; ж};

б) $A = \{8; 10; 12; \ldots\}$, $B = \{2; 4; 6; 8; \ldots\}$;

в) $A = \{x \mid x \in N, x = 2n, x \le 30\}$, $B = \{x \mid x \in N, x = 3n, x \le 20\}$;

г) A – множина квадратів, B – множина прямокутників.

Знайти для кожної пари множин:

а) універсальну множину;

б) перетин множин;

в) об'єднання множин;

г) різницю першої та другої множини.

Зобразити кожну пару множин за допомогою діаграм Ейлера-Венна.

Завдання 4.

Навести декілька прикладів таких множин C і D, що $C \in D$ і $C \subseteq D$.

Завдання 5.

Які з наведених тверджень істинні:

а) якщо $A \notin B$ і $B \notin C$, то $A \notin C$;

б) якщо $A \neq B$ і $B \neq C$, то $A \neq C$;

в) якщо $A \in B$ і не виконується умова, що $B \subseteq C$, то $A \notin C$;

г) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то неправильно, що $C \subseteq A$;

д) якщо $A \subseteq B$ і $B \notin C$, то $A \notin C$.

Завдання 6.

Знайти $K \cap L$, $K \cup L$, $K \setminus L$, $L \setminus K$, якщо:

$K = [-10, 0)$, $L = (-5, 10]$.

Завдання 7.

Нехай A – множина цифр числа 675389121, B – множина цифр числа 334024699. Знайти та зобразити за допомогою діаграм Ейлера-Венна елементи множин:

$A \cap B$, $B \cup A$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Завдання 8.

Знайти декартові добутки множин та зобразити їх елементи на координатній площині:

а) $A = \{x \mid x \in R, x \geq 1\}$, $B = \{y \mid y \in R, y \geq 1\}$;

б) $A = \{x \mid x \in N, 5 \leq x \leq 12\}$, $B = \{y \mid y \in N, 2 \leq y \leq 9\}$;

в) $X = \{x \mid x \in Z, -4 < x \leq 4\}$, $У = \{y \mid y \in R, 0 \leq y < 7\}$;

г) $X = \{x \mid x \in Z, 2 < x < 6\}$, $У = \{y \mid y \in N, -3 < y < 8\}$.

Завдання 9.

Розв’язати задачу.

У академічній групі 35 здобувачів освіти, які займаються різними видами спорту: 25 – волейболом, 15 – баскетболом, 19 – футболом. Одночасно волейболом та футболом займаються 10 здобувачів освіти; баскетболом та футболом – 7, волейболом та футболом – 11. Усі три секції відвідують 4 особи. Скільки здобувачів освіти займаються тільки одним видом спорту та яким?

Завдання 10.

Розв'язати задачу.

У класі 21 учень. Казки люблять читати 9 учнів, оповідання – 5, детективи – 7. Казки й оповідання до вподоби 2 дітям, оповідання й детективи – 3, казки й детективи – 4. Усі три жанри залюбки читає 1 учень. Решта дітей читають лише вірші. Скільки таких учнів?

РОЗДІЛ 2. КОМБІНАТОРИКА

Завдання для практичного виконання

Завдання 1.

1.1.Обчислити:

$\frac{7!-5!}{5!}$; $\frac{149!}{148!}-\frac{36!}{35!}$; $\frac{4!\cdot 8!}{6!\cdot 7!}$; $\frac{39!}{36!}+\frac{42!}{38!}$; $\frac{12!-9!}{2!}$; $\frac{23!\cdot 9!}{10!\cdot 19!}$; $\frac{26!-24!}{3!}$.

1.2.Спростити:

$\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$; $\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}\right)\cdot n!$; $\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)\cdot (n+1)!$.

1.3. Розв'язати вирази:

$\frac{A_7^4}{P_5}$; $\left(\frac{C_{11}^7}{10}-\frac{C_7^2}{5}\right)\cdot\frac{P_5}{A_6^4}$.

Завдання 2.

Розв'язати задачі з докладним поясненням.

Зразок оформлення розв'язання задач.

Задача. Петру на день народження подарували 7 нових дисків з іграми, а Миколі батько привіз 9 дисків. Скількома способами можна обміняти 4 будь-яких диска Петрика на 4 будь-яких диска Миколи?

Розв'язання

1. Спочатку знайдемо кількість четвірок із 7 дисків, які можна скласти у Петра. Вибір без повторень і порядок

не має значення. Таким чином маємо сполучення із 7 елементів по 4.

Формула: $\mathbf{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}}$

$$C_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!\cdot 4!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 5\cdot 7 = 35 \text{ (спосіб)}$$

2. Аналогічно знайдемо кількість четвірок із 9 дисків, які можна скласти у Миколи, тобто знайдемо сполучення із 9 по 4:

$$C_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!\cdot 4!} = \frac{9!}{5!\cdot 4!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4} = 7\cdot 2\cdot 9 = 126$$
(способів)

3. Останній крок. Скористуємося правилом добутку:

$35 \cdot 126 = 4410$ (способів обміну)

Задачі для розв'язання

Задача 2.1. П'ятеро друзів вирішили піти на виставу до театру при цьому домовилися сидіти в різних рядах, щоб не заважати один одному. Скількома способами вони можуть сісти у різні ряди, якщо в театрі 12 рядів (ряди пронумеровані).

Задача 2.2. Скільки різних чисел можна отримати переставляючи місцями цифри 29635?

Задача 2.3. Дитяча спортивна школа проводить додатковий конкурс: у секцію художньої гімнастики – 4 місця для дівчинок, у секцію боксу – 6 місць для хлопчиків, у секцію плавання – 3 місця незалежно від статі. Скількома способами можна здійснити набор на вільні місця, якщо бажаючих дівчаток 6, а хлопчиків – 8?

Задача 2.4.

Ім’я вождя племені ХОА Великий **Кокикари**. Скільки слів є в мові племені, якщо для побудови нового слова вони переставляли букви в імені вождя?

Задача 2.5.

Скільки існує пін-кодів із чотирьох цифр?

Задача 2.6.

У студентській їдальні продають хотдоги, пиріжки та пончики. Скількома способами можна купити п’ять виробів?

Задача 2.7.

Скількома способами можна вибрати зі слова «автомобіль» два звуки, один з яких голосний, а інший приголосний?

Задача 2.8.

Серед трьоцифрових чисел, що можна скласти за допомогою цифр: 0, 1, 2, 8, 4, 9, 6, знайдіть кількість таких, що:

а) починаються з 2 або 9;

б) закінчуються 8 або 9;

в) починаються з 4 та закінчуються 1.

Задача 2.9.

Скільки семицифрових чисел, кратних п’яти, можна скласти за допомогою цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; за умови що цифри у числі можуть повторюватися?

Задача 2.10.

Розклад занять одного дня містить 4 різних освітніх дисциплін. Визначте кількість таких розкладів при виборі з 9 освітніх дисциплін.

Задача 2.11.

Під час зустрічі друзі потиснули один одному руки. Скільки можливих варіантів рукостискань, якщо зустрілися 6 друзів?

Задача 2.12.

На залізничній дорозі 30 станцій. На кожному квитку зазначається станція відправлення та станція прибуття. Скільки різних видів квитків треба надрукувати:

а) якщо кожний квиток дійсний тільки в указаному напряму?

б) якщо кожний квиток дійсний на подорож в будь-якому напрямку (тобто в два кінці)?

Задача 2.13.

Скільки існує варіантів розташування за столом:

а) 9 гостей на 9 стільцях?

б) 7 гостей на 10 стільцях?

Задача 2.14.

На зборах студентського самоврядування різних навчально-наукових інститутів та факультетів з 18 осіб необхідно обрати:

а) трьох відповідальних представників до вченої ради університету;

б) голову студентського самоврядування та секретаря;

в) голову студентського самоврядування, секретаря та трьох відповідальних представників до вченої ради університету;

г) голову студентського самоврядування, секретаря та чотирьох представників різних сектрів.

Скількома способами у кожному із зазначених випадків це можна зробити?

Задача 2.15.

Скількома способами можна обрати до спортивної команди:

а) чотирьох хлопчиків та трьох дівчаток, якщо є 7 хлопчиків та 5 дівчаток;

б) 7 учасників, якщо є 9 хлопчиків та 3 дівчинки.

Задача 2.16.

Чемпіонат, у якому змагаються 14 команд, проводиться у два кола (тобто кожна команда двічі зустрічається з кожною з решти команд). Визначити, скільки можливих зустрічей має бути проведено.

Задача 2.17.

Скількома способами можна купити 25 листівок та 17 марок, якщо на пошті є 7 видів листівок та 5 видів марок?

Задача 2.18.

Скількома способами з колоди в 52 карти можна вибрати 6 різних карт, серед яких є туз і король однієї масті?

Задача 2.19.

У кухара є 9 різних овочів. Відвідувач замовив салат з 5 інгредієнтів. Скільки варіантів салатів можна приготувати?

Задача 2.20.

В оранжереї є квіти 15 різних сортів. Скількома способами можна скласти букет з 21 квітки?

Додаткові завдання

Розв'язати задачі

Задача 1.

З групи, що складається з 7 хлопчиків та 4 дівчаток, треба скласти команду з 6 осіб так, щоб вона містила не менше двох дівчаток. Скількома способами можна скласти таку команду?

Задача 2.

Скільки можливих варіантів розігрування золотої, срібної та бронзової медалей між 12 футбольними командами?

Задача 3.

Абонент пам'ятає, що номер його мобільного телефону (окрім коду оператора) починається з 51 та містить три семірки й дві дев'ятки. Проте розміщення цих цифр він забув. Яку максимальну кількість спроб необхідно зробити, щоб набрати потрібний номер?

Задача 4.

Скільки різних варіантів складання неправильних дробів, чисельниками і знаменниками яких є числа 3, 5, 7, 13 та 17?

Задача 5.

Скількома способами четверо юнаків можуть запросити на повільний танець дівчат, якщо їх шестеро?

Задача 6.

Скількома способами можна розмістити на полиці 4 книжки з казками та 3 книжки з віршами, щоб усі книжки з віршами стояли поряд?

Задача 7.

Скільки існує варіантів призначення з 25 учнів класу:

а) двох чергових?

б) старости та активу класу з чотирьох учнів?

в) старости, його заступника та активу класу з трьох учнів?

Задача 8.

Поїзд метро робить 10 зупинок, не враховуючи початкової, під час яких виходять усі пасажири та не заходять нові. Скількома способами можуть розподілитися між цими зупинками 200 пасажирів, що ввійшли в поїзд на початковій зупинці?

Задача 9.

У магазині продаються блокноти 9 видів, ручки 7 видів та олівці 5 видів. Скількома способами можна здійснити покупку:

а) 3 різних блокнотів та 2 ручки, які можуть бути однаковими;

б) 5 блокнотів, які можуть бути однаковими, 3 різних ручки та 4 олівці, які можуть бути однаковими;

в) 2 блокноти, 4 ручки та 3 олівці (усі придбані речі мають бути різними).

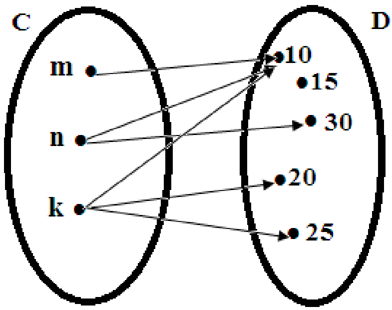
Задача 10.

Усі букви українського алфавіту зображені на картках. Скільки різних слів з п’яти букв можна скласти так, щоб букви у слові не повтрювались? Словами будемо рахувати будь-яку послідовність п’яти букв.

РОЗДІЛ 3. ВІДПОВІДНОСТІ ТА ВІДНОШЕННЯ

Завдання для практичного виконання

Завдання 1.



На рисунку зображений граф відповідності між множинами C і D.

1. Указати область визначення (відправлення) і область значення (прибуття) цієї відповідності?

2. Записати множину пар, які належать графіку даної відповідності.

3. Записати множину пар, які належать протилежній відповідності та зобразити її граф.

4. Записати множину пар зворотної відповідності та зобразити її граф.

Завдання 2.

Дано множини $X = \{x \mid x \in Z, -3 \leq x < 0\}$, $Y = Z$. Кожному значенню $x \in X$ поставимо у відповідність таке значення $y \in Y$, яке на 3 більше цього x.

1. Записати елементи, що належать графіку відповідності.

2. Зобразити граф відповідності.

3. Зобразити графік відповідності у прямокутній системі координат.

Завдання 3.

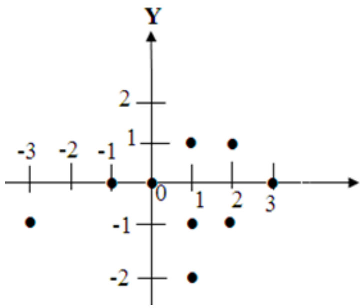
На рисунку зображений графік відповідності R між множинами X і Y.

1. Записати область визначення і множину значень цієї відповідності.

2. Записати всі елементи, які належать графіку відповідності R та побудувати граф.

3. Побудувати в прямокутній системі координат графік R^{-1}.

4. Побудувати в прямокутній системі координат графік $\overleftarrow{R}$.



Завдання 4.

Дана множина A = {4, 2, 6, 3, 5, – 3, – 8, – 6, 0}. Записати підмножини, які відповідають наступним відношенням:

1. R: «$x < y$; $x, y \in A$»;

2. S: «$x \vdots y$»;

3. P: «число x протилежне числу y»;

4. T: «число x вдвічі більше числа y»;

5. Q: «число x на 2 менше числа y».

Завдання 5.

Дана множина У = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21} та задано відношення R: «x дільник y».

1. Записати всі елементи, які належать графіку цього відношення.

2. Знайти обернене відношення та побудувати його графік.

3. Знайти протилежне відношення та побудувати його граф.

Завдання 6.

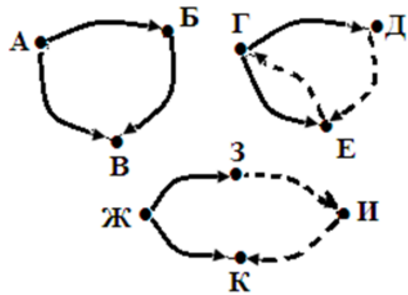
Визначити властивості відношення R: «число x менше числа y на 5» на множині натуральних чисел.

Завдання 7.

Дана множина прямих A = {a, b, c, d} та задано відношення R: «x паралельна y». Покажіть, що це відношення є еквівалентним.

Завдання 8.

На рисунку суцільними стрілками зображений граф відношення R: «a брат b», пунктирними стрілками – граф T: «бути сестрою» у множині дітей нашого двору. Діти позначені



точками А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К. Деякі стрілки пропущені. Необхідно зобразити їх. Хто з дітей є хлопчиком, хто – дівчинкою? Чи є такі діти, про яких не можна нічого сказати?

Завдання 9.

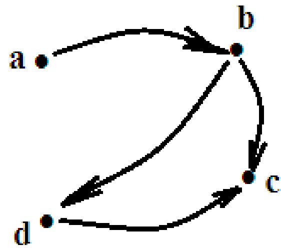
Множина родини Бондаренко складається з батька І.М., матері Є.А. і чотирьох дітей: Михайла, Тетяни, Василя, Ольги. Між членами родини існують відношення: «бути чоловіком», «бути братом» і т. д..

Побудувати графи відношень:

1. Відношення «бути дочкою».

2. Відношення «бути братом» і «бути сестрою» на одному рисунку. Бути братом позначити суцільною стрілкою, а бути сестрою – пунктирною.

Завдання 10.



На рисунку зображений спрощений граф відношення R. Доповнити цей рисунок, якщо відомо, що відношення R рефлексивне і симетричне.

Завдання 11.

Розв’язати задачу

На нашій вулиці п’ять багатоповерхових будинків з номерами: 10, 11, 12, 13, 14. Один з них п’ятиповерховий, другий – шестиповерховий, третій – семиповерховий, четвертий – восьмиповерховий, п’ятий – дев’ятиповерховий. Відомо, що у будинку №14 більше поверхів, ніж у будинку №10; у будинку №11 більше поверхів, ніж у будинку №13, і менше, ніж у будинку №10; у будинку №14 поверхів менше, ніж у будинку №12. Скільки поверхів у кожному будинку?

Зробити граф і докладно пояснити рішення. Яке відношення обрали? Побудувати граф обраного відношення.

Завдання 12.

Розв’язати задачу

У нашому лісі кожний займається своєю справою і цій справі навчає інших: одні плетуть кошики, інші ловлять рибу. Ремеслу ми навчилися один від одного. Кіт навчався у Видри, Їжак – у Зайця, Лисиця – у Вовка, Мишка у Їжака. Бобер вчив Вовка і Видру, Заєць – Білку, а Борсук – Зайця. Бобер був учнем у Ведмедя, а Їжак учителем Дятла. Краще за всіх плів кошики Їжак. Чим займаються Заєць, Дятел, Вовк та Лисиця? Хто із звірів раніше за всіх навчився ловити рибу, а хто плести кошики?

Додаткові завдання

Завдання 1.

Дана множина X = {0, 5, 10, 15, 20, 25}. Самостійно сформулювати будь-яке відношення між елементами цієї множини та задати його різними способами.

Завдання 2.

На множині A = {2, 4, 6, 8, 10} задано відношення R: «х дільник у». Покажіть, що це відношення упорядковує множину А.

Завдання 3.

Навести конкретні приклади класифікацій таких множин:

а) множина геометричних фігур;

б) множина натуральних чисел;

в) множина задач, що вивчаються у початковій школі;

г) множина виразів, що вивчаються у початковій школі.

Завдання 4.

Навести конкретні приклади задач із підручників для початкової школи, у яких розглядаються відношення «більше в … разів», «важче», «старше», «молодше». Які властивості мають ці відношення?

Завдання 5.

Дано множини X = {4, 16, 25, 36, 49} та Z. Задано відповідність R: «корінь квадратний x дорівнює z», де $x \in X$, $z \in Z$.

1. Виписати сукупність пар (x, z), де $x \in X$, $z \in Z$, для яких виконується x R z, та побудувати графік цієї відповідності.

2. Побудувати граф відповідності R.

3. Знайти область значення і визначення відповідності R.

4. Сформулювати обернену відповідність та побудувати її граф.

Завдання 6.

Дано множину A = {2, 17, 105, 98, 15, 43} та задано відношення R: «x більше y». Покажіть, що це відношення є зв’язним.

Завдання 7.

Дано множину A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} та задано відношення R: «x менше y». Покажіть, що це відношення є відношенням порядку.

Завдання 8.

Дано множину D = {99, 11, 44, 77, 22}. Сформулювати відношення, за якого множина буде лінійно впорядкованою. Відобразити дане відношення за допомогою графу.

Завдання 9.

У родині п'ятеро дітей: Оленка, Максим, Данило, Артем та Надійка. Відомо, що Данило старший за Артема; Оленка старша ніж Данило, але молодша за Максима; а Надійка менша ніж Артем. Визначити, кому з дітей найбільше, а кому найменше років?

Задача 10.

Марійка, Вероніка та Іринка готували свою найулюбленішу піцу: мисливську, гавайську або овочеву. Хто яку піцу готував, якщо Вероніка не любить овочеву та мисливську піцу, а Іринка – мисливську.

РОЗДІЛ 4. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Завдання для практичного виконання

Завдання 1.

Визначити, які з наступних тверджень є висловлюваннями.

а) A: «У тижні 9 днів»;

б) B: «Дніпро – найбільша річка України»

в) C: «Множина натуральних чисел скінченна»

г) D: «У квадрата всі сторони рівні, а кути прямі»

д) E: «До якої множини належать дробові числа?»

е) F: «Данило – найкрасивіше ім'я для хлопчика»

є) G: «206 + 99 : 3 – 109 = 131»

ж) H: «$x^2 = 25$».

Завдання 2.

Побудувати за допомогою різних логічних зв'язок із простих висловлювань декілька складених.

а) А: «У рівнобедреного трикутника всі кути 60°»;

б) В: «У рівнобедреного трикутника всі сторони рівні»;

в) С: «Квадрат – це чотирикутник»;

г) D: «Конус є площинною геометричною фігурою»;

д) Е: «2 + 2 = 5».

Завдання 3.

Виокремити у наступних висловлюваннях прості, позначити їх буквами та записати складені висловлювання за допомогою введених позначень та кванторних операцій.

а) «Якщо діагоналі паралелограма взаємно перпендикулярні, то даний паралелограм є ромб»;

б) «Якщо один доданок суми ділиться на 3 та сума ділиться на 3, то і другий доданок ділиться на 3»;

в) «Якщо даний чотирикутник не є квадратом, то в ньому не всі кути прямі або є пара нерівних сторін».

Завдання 4.

Записати у вигляді речень наступні висловлювання:

а) $(P \wedge \neg T) \Rightarrow \neg Q$;

б) $(\neg P \wedge Q) \Rightarrow (\neg S \wedge \neg R)$;

якщо:

P = «Дане число ціле»;

Q = «Дане число додатнє»;

R = «Дане число просте»;

S = «Дане число ділиться на 3»;

T = «Дане число натуральне».

Завдання 5.

Визначити істинність або хибність наступних висловлювань, якщо: P – 0, R – 1, S – 0.

а) $R \Rightarrow (S \wedge P)$;

б) (P ∨ R) <=> (R ∧ ¬ S).

Завдання 6.

За допомогою таблиці істинності довести, що висловлення $A \Leftrightarrow B$ рівносильне висловленню $(A \vee \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee B)$.

Завдання 7.

Виразити наступні висловлювання за допомогою предикатів та логічних операцій:

а) «Якщо x – просте число і ділиться на 2, то x = 2»;

б) «Якщо x ділиться на 3 і x не дорівнює 3, то x – не просте число»;

якщо:

P(x) = «x – просте число»;

Q(x) = x – парне число»;

P(x, y) = «x ділиться на y»;

Q(x, y) = «x = y»;

R(x, y) = «x > y».

Завдання 8.

Записати у вигляді звичайних речень (позначення анологічні завданню 7):

а) P (1,1);

б) $\exists\, x \in N\ (Q(x) \wedge P(x, 6))$;

в) $\forall\, x \in N\ (\neg\, Q(x) \Rightarrow \neg\, P(x, 2))$.

Завдання 9.

Розв’язати задачу методом розмірковувань: «Вадим, Сергій і Михайло вивчають різні іноземні мови: китайську, японську і арабську. На питання, яку мову вивчає кожний з них, один відповів: «Вадим вивчає китайську, Сергій не вивчає китайську, а Михайло не вивчає арабську». Згодом з’ясувалося, що в цієї відповіді тільки одне твердження істинне, а два інших хибні. Яку мову вивчає кожний з хлопців?»

Завдання 10.

Розв’язати задачу: «Мама прибігла на дзвін вази, яка розбилася, і застала всіх трьох своїх синів в абсолютно безневинних позах: Сашко, Іван і Микола вдавали, що ця подія до них не відноситься. Однак футбольний м’яч серед уламків вази вказував на зворотнє».

– Хто це зробив? – запитала мама.

– Микола не бив по м’ячу, – сказав Саша. – Це зробив Іван.

Іван відповів: – Розбив Микола, Сашко не грав у футбол вдома.

– Так я і зала, що ви один на одного перекладатимете провину, розсердилася мама.

– Ну, а ти що скажеш? – запитала вона Миколу.

– Не гнівайся матуся! Я знаю, що Іван не міг це зробити. А я сьогодні ще не виконав уроки, – сказав Микола.

Виявилося, що один із хлопчиків обидва рази сказав неправду, а двоє – кожного разу говорили правду.

Хто розбив вазу?»

Самостійно обрати спосіб розв’язання задачі та докладно прокоментувати його.

Додаткові завдання

Завдання 1.

Виразити наступні висловлювання за допомогою предикатів та логічних операцій:

а) «Якщо x ділиться на 5, то x – просте число»;

б) «x не дорівнює 2 тоді і тільки тоді, коли x ділиться на 2»;

якщо:

P(x) = «x – просте число»;

Q(x) = x – парне число»;

P(x, y) = «x ділиться на y»;

Q(x, y) = «x = y»;

R(x, y) = «x > y».

Завдання 2.

Записати у вигляді звичайних речень (позначення анологічні завданню 1):

а) $\forall$ x ∈ N (P(x, 2) $\Rightarrow$ Q(x));

б) $\forall$ x ∈ N (Q(x) $\Rightarrow \forall$ y ∈ N (P(x, y) $\Rightarrow$ Q(x, y)));

в) $\exists$ x ∈ N (P(x) ∧ Q(x)).

Завдання 3.

Словесно описати кожний із зазначених нижче виразів і вказати, який логічний вираз із чотирьох рівносильний виразу $\mathbf{A} \wedge \overline{(\overline{\mathbf{B}} \vee \mathbf{C})}$**:**

1) $\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}$;

2) $A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$;

3) $A \wedge B \wedge \overline{C}$;

4) $A \wedge \overline{B} \wedge C$.

Завдання 4.

Побудувати таблицю істинності для логічного виразу:

$A <=> B <=> (\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee A)$.

Завдання 5.

Визначити істинність наступних висловлення: «Діти сміялися, шуткували і не розходилися до дому».

Завдання 6.

Визначте істинність складеного висловлення:

«$(2 \cdot 2 = 4 \wedge 3 \cdot 3 = 10) \vee (2 \cdot 2 = 5 \wedge 3 \cdot 3 = 9)$».

Завдання 7.

Розв'язати задачу табличним методом: «У симфонічний оркестр прийняли на роботу трьох музикантів: Бориса, Сергія та Василя, які можуть грати на скрипці, флейті, альті, кларнеті, гобої, трубі.

Відомо, що:

– Сергій найвищий за зростом;

– той, хто грає на скрипці, менший за зростом від того, хто грає на флейті;

– ті, хто грають на скрипці та флейті й Борис люблять піцу;

– коли між альтистом і трубачем виникає суперечка, Сергій мирить їх;

– Борис не уміє грати ні на трубі, ні на гобої.

На яких інструментах грає кожний із музикантів, якщо кожен володіє двома інструментами?»

Завдання 8.

Побудувати таблиці істинності для таких формул:

а) $P \Rightarrow (\neg Q \wedge R \vee P)$;

б) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$;

в) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \wedge \neg Q$.

Завдання 9.

Дано висловлювання Т: «Будь-яке двоцифрове число ділиться на 2».

а) визначити істинність данного висловлювання;

б) виконати операцію інверсії;

в) сформулювати ще одне просте висловлювання та виконати операції кон'юнкції й диз'юнкції.

Завдання 10.

Дано висловлювання «Існує натуральнее число, що є розв'язком рівняння $x^2 = 1$».

а) визначити істинність данного висловлювання;

б) вибрати в ньому предикат та позначити його;

в) побудувати заперечення двома способами.

Використана література

1. Божко В. Г. Математика : навч.-метод. посіб. Луганськ : Вид-во ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка», 2010. 141 с.

2. Боровик В. Н., Вивальнюк Л. М., Мурач М. М., Соколенко О. І. Курс Математики. К. : Вища школа, 1995. 392 с.

3. Вивальнюк Л. М., Григоренко В. К., Левищенко С. С. Числові системи. К. : Вища школа, 1988. 272 с.

4. Кужель О. В. Елементи теорії множин і математичної логіки. К. : Рад. шк., 1977. 160 с.

5. Кухар В. М., Білий Б. М. Теоретичні основи початкового курсу математики. – К. : Вища школа, 1987. 319 с.

6. Основи початкового курсу математики : навч.-метод. посіб.; укл. Л. М. Голець, О. О. Кислякова, І. А. Ляшенко, О. Г. Онуфрієнко. Запоріжжя, 2010. 165 с.

7. Стойлова Л. П., Пышкало А. М. Основы начального курса математики. М.: «Просвещение», 1988. 320 с.

Навчально-методичне видання

ДУДНИК Оксана Миколаївна
КОВАЛЕНКО Тамара Василівна

ОСНОВИ ПОЧАТКОВОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Навчально-методичний посібник
для студентів спеціальності 013 Початкова освіта

Підписано до друку 30.06.2021
Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 7,2
Наклад 100 пр. Зам. № 09.01-21.

Видавець і виготовлювач ТОВ «Талком»
03115, м. Київ, вул. Львівська, 23, тел./факс (044) 424-40-69, 424-56-26
E-mail: ukraina.vdk@email.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4538 від 07.05.2013