

ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



Международная научная конференция

## Дискретная математика, алгебра и их приложения

14–18 сентября 2015 г.,  
г. Минск, Республика Беларусь

*Посвящается столетию со  
дня рождения академика  
Д. А. Супруненко*

**Тезисы докладов**

МИНСК 2015

УДК 519.1, 512  
ББК 22.174 + 22.14  
Д 44

Редакторы:

*И. Д. Супруненко, В. В. Лепин, О. И. Дугинов*

**Дискретная математика, алгебра и их приложения:** Тез. докл. Междунар. Д44 науч. конф. Минск, 14–18 сентября 2015 г. — Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2015. — 172 с.

**ISBN 978-986-6499-86-2**

Сборник содержит тезисы докладов, представленных на международной научной конференции «Дискретная математика, алгебра и их приложения».

**ISBN 978-986-6499-86-2**

© Коллектив авторов, 2015  
© Институт математики НАН Беларуси, 2015

## НАИМЕНЬШАЯ ТРИПРЯМОУГОЛЬНАЯ КОНГРУЭНЦИЯ НА СВОБОДНОМ ТРИОИДЕ

Юл. В. Жучок

Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко  
площадь Гоголя, 1, Старобельск, 92703, Украина yulia.mih@mail.ru

Ж.-Л. Лодэ и М.О. Ронко [1] ввели понятие триоида. Непустое множество  $T$ , снабженное тремя бинарными ассоциативными операциями  $\dashv$ ,  $\vdash$  и  $\perp$ , удовлетворяющими следующие аксиомы:  $(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z)$ ,  $(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z)$ ,  $(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z)$ ,  $(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z)$ ,  $(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z)$ ,  $(x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z)$ ,  $(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z)$ ,  $(x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z)$  для всех  $x, y, z \in T$ , называется триоидом. Если операции  $\vdash$  и  $\perp$  совпадают, то триоид превращается в димоноид [2, 3]. Если же операции  $\dashv$ ,  $\vdash$  и  $\perp$  совпадают, то триоид превращается в полугруппу. Таким образом, каждый димоноид и каждая полугруппа могут рассматриваться как триоиды. Примеры триоидов можно найти в [4, 5].

Триоид  $(T, \dashv, \vdash, \perp)$  будем называть прямоугольным триоидом или прямоугольной трисвязкой, если полугруппы  $(T, \dashv)$ ,  $(T, \vdash)$  и  $(T, \perp)$  являются прямоугольными связками. Класс всех прямоугольных триоидов является подмножеством многообразия триоидов. Если  $\rho$  — конгруэнция на триоиде  $(T, \dashv, \vdash, \perp)$  такая, что  $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$  есть прямоугольный триоид, то будем говорить, что  $\rho$  — трипрямоугольная конгруэнция.

Рассмотрим конструкцию свободного триоида.

Пусть  $Y$  — произвольное непустое множество,  $\bar{Y} = \{\bar{x} \mid x \in Y\}$ ,  $X = Y \cup \bar{Y}$  и  $F[X]$  — свободная полугруппа на  $X$ . Пусть далее  $P \subset F[X]$  — подполугруппа, которая содержит слова  $w$ , в запись которых элемент  $\bar{x}$  ( $x \in Y$ ) входит как минимум один раз. Для каждого  $w \in P$  через  $\tilde{w}$  обозначим слово, полученное из  $w$  заменой всех букв  $\bar{x}$  ( $x \in Y$ ) на  $x$ .

На множестве  $P$  определим операции  $\dashv$ ,  $\vdash$  и  $\perp$  по правилам:

$$w \dashv u = w\tilde{u}, \quad w \vdash u = \tilde{w}u, \quad w \perp u = wu$$

для всех  $w, u \in P$ . Алгебру  $(P, \dashv, \vdash, \perp)$  обозначим через  $Frt(Y)$ .

**Предложение.**  $Frt(Y)$  — свободный триоид.

Доказательство этого предложения совпадает с доказательством предложения 1.9 из [1], полученным для свободного триоида ранга 1.

Пусть далее  $\omega \in F[X]$  и  $w \in Frt(Y)$ . Через  $\omega^{(0)}$  (соответственно,  $\omega^{(1)}$ ) обозначим первую (соответственно, последнюю) букву слова  $\omega$ . Положим  $u$  — начальное (соответственно, конечное) подслово слова  $w$  минимальной длины такое, что  $u^{(1)} \in \bar{Y}$  (соответственно,  $u^{(0)} \in \bar{Y}$ ). В этом случае  $\widetilde{u^{(1)}}$  (соответственно,  $\widetilde{u^{(0)}}$ ) будем обозначать через  $w^{[0]}$  (соответственно,  $w^{[1]}$ ).

Определим отношение  $\gamma$  на множестве  $Frt(Y)$ , полагая

$$w_1 \gamma w_2 \Leftrightarrow (\widetilde{w_1^{(0)}}, w_1^{[0]}, w_1^{[1]}, \widetilde{w_1^{(1)}}) = (\widetilde{w_2^{(0)}}, w_2^{[0]}, w_2^{[1]}, \widetilde{w_2^{(1)}})$$

для всех  $w_1, w_2 \in Frt(Y)$ .

Следующая теорема характеризует наименьшую трипрямоугольную конгруэнцию на свободном триоиде  $Frt(Y)$ .

**Теорема.** Отношение  $\gamma$  является наименьшей трипрямоугольной конгруэнцией на свободном триоиде  $Frt(Y)$ .

Кроме этого, в терминах трисвязок подтриоидов [5] описано строение свободных триоидов.

## Литература

1. Loday J.-L., Ronco M. O. *Trialgebras and families of polytopes* // *Contemp. Math.* 2004. V. 346. P. 369–398.
2. Loday J.-L. *Dialgebras* // In: *Dialgebras and related operads. Lect. Notes Math.* Springer-Verlag, Berlin. 2001. V. 1763. P. 7–66.
3. Zhuchok A. V. *Dimonoids* // *Algebra and Logic.* 2011. V. 50, № 4. P. 323–340.
4. Zhuchok A. V. *Semiretractions of trioids* // *Ukr. Math. J.* 2014. V. 66, № 2. P. 218–231.
5. Zhuchok A. V. *Tribands of subtrioids* // *Proc. Inst. Applied Math. and Mech.* 2010. V. 21. P. 98–106.

## О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ АБЕЛЕВОЙ И НИЛЬПОТЕНТНОЙ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

В.И. Зенков

Институт математики и механики УрО РАН  
С.Ковалевской 16, 620990 Екатеринбург, Россия  
v1i9z52@mail.ru

Пусть  $G$  — конечная группа,  $A$  — абелева подгруппа и  $B$  — нильпотентная подгруппа из  $G$ . Ранее автором [1, теорема 1] было доказано, что для любых абелевых подгрупп  $A$  и  $B$  из  $G$  минимальные по включению пересечения вида  $A \cap B^g$ , где  $g \in G$ , лежат в  $F(G)$ , где  $F(G)$  — подгруппа Фиттинга группы  $G$ . Но уже пример симметрической группы  $G = S_4$ , где  $A$  — абелева подгруппа порядка 4, не лежащая в  $F(G)$ , а  $B \in \text{Syl}_2(G)$ , показывает, что минимальные по включению пересечения вида  $A \cap B^g$  лежат в  $F(G)$ , а если рассмотреть минимальные по включению пересечения вида  $B \cap A^g$ , то не все они лежат в  $F(G)$ . Этот пример показывает, что для рассмотрения минимальных по включению пересечений абелевой и нильпотентной подгрупп важен порядок, в котором записаны подгруппы. Но существует более сложный пример (см. пример 5) группы  $G$ , в котором даже в случае записи минимальных по включению пересечений в виде  $A \cap B^g$  не все они лежат в  $F(G)$ . Однако во всех указанных примерах существует некоторое минимальное по включению пересечение вида  $A \cap B^g$ , которое лежит в  $F(G)$ . Как показывает следующая теорема, это явление имеет место в любой разрешимой конечной группе.

**Теорема.** Пусть  $G$  — разрешимая конечная группа,  $A$  — абелева и  $B$  — нильпотентная подгруппы из  $G$ . Тогда в группе  $G$  существует элемент  $g$  такой, что  $A \cap B^g \leq F(G)$ .

**Пример 1.**  $G = E_9 \rtimes D_8$  с точным действием  $D_8$  на  $E_9$ . Пример показывает, что ослабить условие абелевости группы  $A$  в теореме до нильпотентности невозможно с сохранением заключения, так как при  $A = B \simeq D_8$  имеем  $A \cap B^g \neq 1$  для любого элемента  $g$  из  $G$ .

**Пример 2.**  $G = \text{Aut}(L_3(2))$ . В этой группе при  $A = B \in \text{Syl}_2(G)$  имеем  $A \cap B^g \neq 1$  для любого элемента  $g$  из  $G$ . Таким образом, и в неразрешимых группах условие абелевости  $A$  нельзя ослабить до нильпотентности с сохранением заключения теоремы.

Покажем, что условие нильпотентности подгруппы  $B$  также невозможно ослабить до сверхразрешимости с сохранением заключения теоремы.

**Пример 3.** Группа  $G = S_3$  сверхразрешима. Пусть  $A \simeq S_2 \in \text{Syl}_2(G)$ ,  $B = G$ . Тогда  $A \cap B^g = A \not\leq F(G)$  для любого элемента  $g$  из  $G$ .

**Пример 4.**  $G = A_5$ ,  $A \in \text{Syl}_2(G)$ ,  $B \simeq Z_5 \rtimes Z_2$ . Тогда  $A \cap B^g \neq 1$  для любого элемента  $g$  из  $G$ .

Эти примеры показывают, что условия, наложенные в теореме на подгруппы  $A$  и  $B$  невозможно существенно ослабить как в разрешимом, так и в неразрешимом случае с сохранением заключения теоремы.

Следующий пример показывает, что в некоторых случаях, рассматриваемых в условиях теоремы, для абелевой подгруппы  $A$  существует подгруппа  $B^g$  такая, что  $A \cap B^g \neq 1$  — минимальное по включению пересечение и  $A \cap B^g \not\leq F(G)$ .

## СОДЕРЖАНИЕ

## Алгебра и алгебраическая геометрия

<b>Алексеева О.А., Кондратьев А.С.</b> О конечных неразрешимых группах, графы Грюнберга–Кегеля которых не содержат треугольников .....	3
<b>Белоконь Л.М.</b> О пересечениях максимальных $\theta$ -подгрупп конечных групп .....	4
<b>Бондаренко А.А.</b> О бирациональной композиции квадратичных форм над полем алгебраических чисел .....	5
<b>Буриченко В.П.</b> Симметрии алгоритмов матричного умножения .....	7
<b>Буртыка Ф.Б.</b> Диагонализуемые корни матричных полиномов над конечными полями ...	9
<b>Васильев А.Ф., Васильева Т.И., Симоненко Д.Н.</b> Насыщенные формации и взаимно перестановочные произведения конечных групп .....	11
<b>Вегера А.С.</b> Парно перестановочные произведения и $K$ - $\mathbb{P}$ -субнормальные подгруппы конечных групп .....	13
<b>Витько Е.А.</b> О свойстве решеточного объединения $\pi$ -разрешимых фиттинговых функторов	14
<b>Воробьев Н.Н., Кузнецова А.Р.</b> Об алгебраических решетках формаций конечных групп	15
<b>Воробьев Н.Т., Семёнов М.Г.</b> Инъекторы конечных групп .....	16
<b>Горшков И.Б.</b> Об одной гипотезе Томпсона для знакопеременных групп .....	17
<b>Ефимов Д.Б.</b> О верхней оценке перманентов .....	18
<b>Жучок Юл.В.</b> Наименьшая трипрямоугольная конгруэнция на свободном триоиде .....	20
<b>Зенков В.И.</b> О пересечениях абелевой и нильпотентной подгрупп в конечных группах ...	21
<b>Зиновьева М.Р.</b> Некоторые арифметические следствия равенства графов Гюнберга–Кегеля двух конечных простых классических групп над полями разных характеристик .....	22
<b>Княгина В.Н.</b> О перестановочности $n$ -максимальных подгрупп с $p$ -нильпотентными подгруппами Шмидта .....	24
<b>Ковалева В.А.</b> Конечные группы с обобщенно субнормальными $n$ -максимальными подгруппами .....	25
<b>Ковалевская Э.И., Кемеш О.Н., Рыкова О.В.</b> Значения целочисленных многочленов без общих корней в полях комплексных и $p$ -адических чисел .....	27
<b>Кожухов И.Б., Халиуллина А.Р.</b> О полигонах над сингулярными полугруппами .....	28
<b>Колпакова В.А.</b> О конечных группах $G$ с несвязным графом простых чисел и ограничениями на $\pi_1(G)$ .....	29
<b>Кухарев А.В., Пунинский Г.Е.</b> Полуцепные групповые кольца конечных линейных групп и простых групп Ри .....	31
<b>Луневич А.В., Кудин А.С., Шамукова Н.В.</b> Теорема типа Хинчина для случая расходимости в трехмерном евклидовом пространстве .....	32
<b>Милованов М.В., Медведева О.Г.</b> Об интегральных кривых обобщенных цепочек Тоды с двумя экспонентами .....	33
<b>Монахов В.С.</b> Конечные группы с $\mathcal{U}$ -абнормальными и $\mathcal{U}$ -субнормальными нильпотентными подгруппами .....	34
<b>Мурашко В.И., Васильев А.Ф.</b> Влияние обобщенно субнормальных подгрупп на произведения конечных групп .....	36
<b>Мысловец Е.Н.</b> Композиционные формации $sa$ - $\mathfrak{F}$ -групп и произведения взаимно перестановочных подгрупп .....	38
<b>Наумик М.И.</b> О конгруэнциях на полугруппе линейных отношений .....	40
<b>Нестеров М.Н.</b> О пронормальности и сильной пронормальности холловых подгрупп .....	40
<b>Пальчик Э.М.</b> О Силловских системах конечных групп .....	41
<b>Пальчик Э.М., Башун С.Ю.</b> Конечные простые группы, в которых нормализатор силовой $s$ -подгруппы имеет бипримарный индекс .....	43
<b>Селькин В.М.</b> О собственных подформациях однопорожденной наследственной $\omega$ -насыщенной формации .....	44

Научное издание

**Дискретная математика, алгебра и их приложения**

**Тезисы докладов**

Редакторы *И. Д. Супруненко, В. В. Лепин, О. И. Дугинов*  
Компьютерная верстка *О. И. Дугинов*

Подписано в печать 26.8.2015 г.

Формат  $60 \times 84 \frac{1}{8}$ . Усл. печ. л. 20,46. Уч.-изд. л. 18,32. Тираж 110 экз. Заказ № 3.

Отпечатано на ризографе Института математики НАН Беларуси.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Институт математики НАН Беларуси.

Свидетельство о государственной регистрации  
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/257 от 2 апреля 2014 г.

200072, Минск, ул. Сурганова, 11.