

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЗ „ЛУГАНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА”



Навчально-науковий інститут математики та інформаційних технологій
Кафедра математики та інформатики

Ю. Г. Козуб, Г. О. Козуб

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РІШЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
методичні рекомендації до вивчення теми освітнього компоненту
«Чисельні методи»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
спеціальності F3 – «Комп'ютерні науки»

Лубни - 2026

УДК 004.272:37

Рекомендовано до друку вченою радою
ДЗ «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»,
(протокол № 7 від 30.01.2026 р.)

Укладачі:

Козуб Ю. Г. – доктор технічних наук, професор;

Козуб Г. О. – кандидат технічних наук, доцент.

Рецензенти:

Гоменюк С. І. – доктор технічних наук, професор, декан математичного факультету Запорізького національного університету;

Могильний Г. А. – кандидат технічних наук, доцент, директор навчально-наукового інституту математики та інформаційних технологій ДЗ „Луганський національний університет імені Тараса Шевченка”.

Козуб Ю. Г., Козуб Г. О. Чисельні методи рішення диференціальних рівнянь: методичні рекомендації до вивчення теми освітнього компоненту «Чисельні методи» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня спеціальності F3 – «Комп'ютерні науки». Лубни: ДЗ „ЛНУ імені Тараса Шевченка”, 2026. 113 с.

Методичні рекомендації містять навчальні та навчально-методичні матеріали, завдання для самостійної роботи, які стануть в нагоді здобувачам першого (бакалаврського) рівня освіти в рамках освітнього компоненту «чисельні методи».

© Козуб Ю.Г., Козуб Г.О., 2026
© ДЗ „ЛНУ імені Тараса Шевченка”, 2026

ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ 1. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РІШЕННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ	5
1.1. Загальні зауваження. Постановка задачі.....	5
1.2. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів.....	6
1.3. Метод послідовних наближень.....	10
1.4. Метод Ейлера	16
1.5. Метод «предиктор-коректор»	19
1.6. Удосконалений метод Ейлера.....	22
1.7. Метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності.....	24
1.8. Розв'язання задачі Коші для системи диференціальних рівнянь та для диференціального рівняння n-го порядку.....	31
Завдання для самостійної роботи	33
РОЗДІЛ 2. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	36
2.1. Загальна постановка крайової задачі	36
2.2. Редукція до задачі Коші крайової задачі для лінійного рівняння другого порядку	37
2.3. Метод колокації	40
2.4. Метод Гальоркіна.....	42
2.5. Різницевий метод. Основні поняття теорії різницевих схем	45
2.6. Метод Рітца	51
2.7. Метод скінченних елементів.....	59
2.10. Поняття про чисельні методи вирішення крайового завдання для диференціального рівняння n-го порядку.....	81
Завдання для самостійної роботи	83
РОЗДІЛ 3. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РІШЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТКОВИМИ ПОХІДНИМИ	86
3.1. Класифікація диференціальних рівнянь із частковими похідними	86
3.2. Початкові та крайові умови. Задача Коші. Змішана задача. Коректність постановки змішаного завдання	88
3.3. Різницеві схеми змішаної задачі для рівняння теплопровідності .	92
3.4. Рішення задачі Діріхле для рівняння Пуассона методом сіток ...	101
3.5. Методи Релєя–Рітца и Бубнова–Гальоркіна.....	105

ВСТУП

При практичному вирішенні завдань у більшості випадків отримати точне рішення поставленої математичної задачі не вдається. Основною причиною цього є неможливість висловити шукане рішення в елементарних або інших відомих функціях. Тому важливого значення набувають чисельні методи вирішення складних завдань, що виникають на практиці, особливо у зв'язку зі зростанням ролі математичних методів у різних галузях науки і техніки.

Рішення, отримані в результаті застосування чисельних методів, в більшості випадків виявляються наближеними. Однак, їх перевагою є та обставина, що математична модель, побудована для одного будь-якого явища, може бути використана при вивченні інших явищ, а процедура чисельного рішення залишається незмінною.

Серед усього різноманіття похибок як неусунутих (наприклад, вибір ідеалізованого об'єкта), так і усунутих похибка методу рішення є одним із фундаментальних понять чисельних методів.

Зауважимо також, що наближене число, отримане тим чи іншим чисельним методом, без знання його похибки сенсу немає.

У цих методичні рекомендаціях розглянуті основні методи розв'язування диференціальних рівнянь. Матеріал ґрунтується на знанні курсу вищої математики для університетів та відповідає програмі курсу «Чисельні методи» спеціальності F3 – «комп'ютерні науки».

РОЗДІЛ 1. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РІШЕННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ

1.1. Загальні зауваження. Постановка задачі

Найпростішим звичайним диференціальним рівнянням є рівняння першого порядку:

$$y' = f(x, y), \quad (1.1)$$

де $f(x, y)$ – задана функція, $y = y(x)$ – шукана функція.

Задача Коші для цього рівняння полягає в наступному: знайти рішення, яке задовольняє рівнянню (1.1) і початковій умові $y(x_0) = y_0$, тобто потрібно знайти інтегральну криву $y = y(x)$ з сімейства інтегральних кривих $y = y(x) + C$, що є рішенням рівняння (1.1) і проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$.

Якщо вимагати, щоб права частина $f(x, y)$ рівняння (1.1) була безперервна в області

$$R\{(x, y): |x - x_0| < a; |y - y_0| < b\},$$

то існує, принаймні, одне рішення поставленого завдання Коші і воно буде єдиним, якщо в області R виконано умову Липшиця

$$|f(x, \tilde{y}) - f(x, y)| \leq N|\tilde{y} - y|, \quad (1.2)$$

де N – константа Липшиця, $\tilde{y}$ – одне з рішень $y = y(x) + C$. Якщо $f(x, y)$ має обмежену похідну $f'_y(x, y)$ в R , то можна покласти

$$N = \max_R |f'_y(x, y)|.$$

Для диференціального рівняння n -го порядку

$$y^n = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.3)$$

задача Коші полягає в знаходженні рішення $y = y(x)$ цього рівняння, яке задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (1.4)$$

де $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – задані числа.

Навіть для найпростішого диференціального рівняння (1.1) знаходження рішення в загальному випадку, що відповідає заданим умовам, взагалі нездійсненне за допомогою кінцевого числа математичних операцій. Ця обставина призвела до розвитку методів наближеного розв'язання диференціальних рівнянь.

Всі ці методи можна поділити на три групи:

- 1) аналітичні методи - знаходження наближеного рішення диференціального рівняння у вигляді аналітичного виразу;
- 2) графічні методи – побудова наближеного рішення як графіка;
- 3) чисельні методи, що дають наближене рішення у дискретному вигляді.

Зазначимо, що наведена класифікація методів є певною мірою умовною. Так, графічний метод ламаних Ейлера дає одночасно спосіб чисельного вирішення завдання Коші.

Припускаємо, що для аналізованих нижче диференціальних рівнянь виконані зазначені вище умови існування та єдиності рішень. Для застосування деяких методів потрібні більш жорсткі умови, які будуть вказані нижче.

1.2. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів

Розглянемо диференціальне рівняння n -го порядку

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.5)$$

за початкових умов

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (1.6)$$

За умови, що права частина рівняння (1.5) є аналітичною функцією (під аналітичною будемо розуміти функцію, яка може бути представлена степеневим рядом в околиці кожної внутрішньої точки своєї області визначення) в початковій точці $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, отримаємо

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = \\ = \sum_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} C_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} (x - x_0)^{\alpha_0} (y - y_0)^{\alpha_1} \dots (y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)})^{\alpha_n},$$

де $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ – цілі невід'ємні числа, $C_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}$ – деякі постійні коефіцієнти.

Тоді, як відомо, інтеграл рівняння (1.5), що відповідає початковим умовам (1.6), є аналітичним у точці x_0 і виконується рівність

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad (1.7)$$

де $|x - x_0| < h$.

Перші $n + 1$ коефіцієнтів ряду (1.7) визначаються безпосередньо з допомогою початкових умов (1.6) і диференціального рівняння (1.5). Для знаходження наступного $(n + 2)$ коефіцієнта $\frac{y^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}$ продиференціюємо рівняння (1.5)

$$y^{(n+1)} = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \cdot \frac{dy^{(k)}}{dx},$$

де $y^{(0)} = y$.

Звідси $y^{(n+1)}(x_0) = [f'_x]_0 + \sum_{k=0}^{n-1} [f'_{y^{(k)}}]_0 y^{(k+1)}(x_0)$,

де індекс "0" означає, що значення відповідних похідних обчислені в точці $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$. Повторюючи цей прийом, знаходимо наступні похідні $y^{(n+2)}(x_0), y^{(n+3)}(x_0), \dots$

Слід зазначити, що отримавши розв'язання задачі Коші як ряду, необхідно оцінити радіус збіжності h ряду (1.7). Зауважимо, що й рівняння (1.5) лінійне, тобто. має вигляд

$$y^{(n)} = p_0(x) + p_1(x)y + p_2(x)y' + \dots + p_n(x)y^{(n-1)},$$

де $p_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) – цілі щодо x аналітичні функції, можна покласти $h = \infty$, тобто. у цьому випадку степеневий ряд (1.7) сходиться для будь-якого значення.

Приклад. Використовуючи диференціальне рівняння руху матеріальної точки

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1 + 0,1t)x + 0,1 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0 \quad (1.8)$$

і розкладаючи рішення в степеневий ряд, знайти швидкість $\frac{dx}{dt}$ і прискорення $\frac{d^2x}{dt^2}$ точки, якщо

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$$

Отримати кілька перших членів ряду.

Рішення. З рівняння (1.8) маємо

$$x'' = -x - 0,1tx - 0,1x'^2.$$

Звідси послідовно отримуємо

$$x''' = -x' - 0,1(tx' + x) - 0,2x'x'';$$

$$x^{IV} = -x'' - 0,1(tx'' + 2x') - 0,2(x'x''' + x''^2);$$

$$x^V = -x''' - 0,1(tx''' + 3x'') - 0,2(x'x^{IV} + 3x''x''');$$

$$x^{VI} = -x^{IV} - 0,1(tx^{IV} + 4x''') - 0,2(x'x^{IV} + 4x''x^{IV} + 3x'''^2) \text{ і}$$

т.д.

Використовуючи початкові умови $x_0 = 1$, $x'_0 = 2$ при $t = 0$, знаходимо

$$x''_0 = -1,4; \quad x'''_0 = -1,54; \quad x^{IV}_0 = 1,224;$$

$$x^V_0 = 0,1768; \quad x^{VI}_0 = -0,7308.$$

Розкладаючи рішення в ряд Тейлора з точністю до t^6 , отримуємо

$$x = x_0 + x'_0 t + \frac{x''_0 t^2}{2!} + \frac{x'''_0 t^3}{3!} + \frac{x^{IV}_0 t^4}{4!} + \frac{x^V_0 t^5}{5!} + \frac{x^{VI}_0 t^6}{6!},$$

тоді

$$x = 1 + 2t - 0,7t^2 - 0,2567t^3 + 0,051t^4 + 0,00147t^5 - 0,00101t^6.$$

Застосовуючи останню рівність, знаходимо

$$x' = 2 - 1,4t - 0,77t^2 + 0,204t^3 + 0,00735t^4 - 0,00606t^5,$$

$$x'' = -1,4 - 1,54t + 0,612t^2 + 0,00294t^3 - 0,0303t^4.$$

Розглянемо задачу Коші для системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1.9)$$

$$y(x_0) = y^0, \quad (1.10)$$

де

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad y^0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Припустимо, праві частини f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) системи рівнянь (1.9) є аналітичними функціями у точці $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$, тобто. в деякій околиці цієї точки розкладаються в степеневі ряди виду $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} C_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}^{(i)} (x - x_0)^{\alpha_0} (y_1 - y_1^0)^{\alpha_1} \dots (y_n - y_n^0)^{\alpha_n}$,

де константи $C_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}^{(i)}$

$$C_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}^{(i)} = \frac{1}{\alpha_0! \alpha_1! \dots \alpha_n!} \times$$

$$\cdot x \left[\frac{\partial^{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x^{\alpha_0} \partial y_1^{\alpha_1} \dots \partial y_n^{\alpha_n}} f_i(x, y_1, \dots, y_n) \right]_{x=0}, \quad (i$$

$$= 1, 2, \dots, n).$$

Тоді рішення рівняння (1.9), що задовольняє умовам (1.10), є аналітичним x і може бути представлене у вигляді

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad (1.11)$$

де $y(x_0) = y^0, y'(x_0) = f(x_0, y^0)$.

Для знаходження інших коефіцієнтів $y_{(x_0)}^{(k)}$ ($k = 2, 3, \dots$) можна послідовно диференціювати рівняння (1.9), використовуючи правило диференціювання складної функції.

Справді,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y),$$

де

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}.$$

Таким чином, $y^{(2)}(x_0) = f'_x(x_0, y^0) + f'_y(x_0, y^0)f(x_0, y^0)$.

Аналогічно є похідні $y^{(k)}(x_0)$ ($k = 3, 4, \dots$).

Таким чином, отримавши рішення у вигляді ряду (1.11) досліджуємо його на збіжність. Зауважимо, що й система (1.9) лінійна, тобто. має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + q(x),$$

причому матриця $P(x)$ і вектор-функція $q(x)$ складаються з цілих аналітичних функцій щодо x , відповідний ряд (1.11) сходиться для будь-якого значення x .

Приклад. Для системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \cos t - y \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = x \sin t + y \cos t \end{cases} \quad (1.12)$$

побудувати рішення у вигляді статежного ряду, що задовольняє початковим умовам

$$x(0) = 1; \quad y(0) = 0.$$

Рішення. Покладемо

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \frac{x''(0)}{2!}t^2 + \frac{x'''(0)}{3!}t^3 + \dots \quad (1.13)$$

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + \frac{y''(0)}{2!}t^2 + \frac{y'''(0)}{3!}t^3 + \dots \quad (1.14)$$

У системі (1.12) вважаючи $t=0$ і використовуючи початкові умови, отримуємо $x'(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

Диференціюючи по t систему (1.12), маємо

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -x \sin t - y \cos t + \frac{dx}{dt} \cos t - \frac{dy}{dt} \sin t, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = x \cos t - y \sin t + \frac{dx}{dt} \sin t + \frac{dy}{dt} \cos t. \end{cases}$$

Тоді

$$x''(0) = 1, \quad y''(0) = 1.$$

Диференціюючи останню систему, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{d^3 x}{dt^3} &= -x \cos t + y \sin t + 2 \left(-\frac{dx}{dt} \sin t - \frac{dy}{dt} \cos t \right) + \\ &\quad + \frac{d^2 x}{dt^2} \cos t - \frac{d^2 y}{dt^2} \sin t, \\ \frac{d^3 y}{dt^3} &= -x \sin t - y \cos t + 2 \left(\frac{dx}{dt} \cos t - \frac{dy}{dt} \sin t \right) + \\ &\quad + \frac{d^2 x}{dt^2} \sin t + \frac{d^2 y}{dt^2} \cos t. \end{aligned}$$

Отже,

$$x'''(0) = -1 + 1 = 0, \quad y'''(0) = 3.$$

Аналогічно можуть бути знайдені наступні похідні.

Використовуючи формули (1.13), (1.14), маємо остаточно

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \dots, \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \dots \end{cases}$$

Метод представлення рішення диференціального рівняння у вигляді степеневих рядів часто використовується як складова частина інших методів наближеного інтегрування диференціальних рівнянь.

1.3. Метод послідовних наближень

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка [8]

$$y' = f(x, y) \tag{1.15}$$

з початковою умовою

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.16}$$

Будуватимемо шукане рішення для значень (для випадку методика аналогічна). Інтегруючи праву та ліву частини рівняння (1.15) в межах від x_0 до x , отримуємо

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(x, y) dx$$

або, враховуючи початкову умову (1.16), маємо

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \quad (1.17)$$

Внаслідок того, що потрібна функція знаходиться під знаком інтеграла, рівняння (1.17) є інтегральним. Очевидно, рішення інтегрального рівняння (1.17) задовольняє диференціального рівняння (1.15) і початковій умові (1.16).

Знайдемо це рішення шляхом послідовних наближень. Замінюючи в рівності (1.17) невідому функцію y під знаком інтеграла заданим значенням, отримуємо перше наближення:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx.$$

Далі, підставивши рівності (1.17) замість невідомої функції y знайдену функцію $y_1(x)$, маємо друге наближення

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx.$$

Загалом розрахункова формула має вигляд

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.18)$$

Геометрично послідовні наближення є криві $y_n = y_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$), що мають спільну точку $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 1.1).

З курсу диференціальних рівнянь відомо, що під час виконання умови Липшиця

$$|f(x, \tilde{y}) - f(x, y)| \leq N|\tilde{y} - y| \quad (1.19)$$

послідовні наближення $y_n = y_n(x)$ на деякому досить малому відрізку $[x_0, x_0 + h]$ рівномірно сходяться, оскільки (1.18) є стислим відображенням, причому гранична функція

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) \quad (1.20)$$

задовольняє диференціальному рівнянню (1.15) та початковій умові (1.16).

Якщо права частина рівняння (1.15) визначена та безперервна в області

$$R\{0 \leq x - x_0 \leq a, \quad |y - y_0| \leq b\},$$

причому $\max_R |f(x, y)| \leq M$, то за величину h можна прийняти

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}. \quad (1.21)$$

Для оцінки похибки

$$\varepsilon_n(x) = |y(x) - y_n(x)|$$

з (1.17) віднімаючи (1.18), маємо

$$y(x) - y_n(x) = \int_{x_0}^x [f(x, y) - f(x, y_{n-1})] dx.$$

Звідси отримаємо

$$\varepsilon_n(x) = |y(x) - y_n(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(x, y) - f(x, y_{n-1})| dx.$$

Враховуючи умову Липшиця (1.19), знаходимо

$$|f(x, y) - f(x, y_{n-1})| \leq N|y(x) - y_{n-1}(x)| \leq N\varepsilon_{n-1}(x).$$

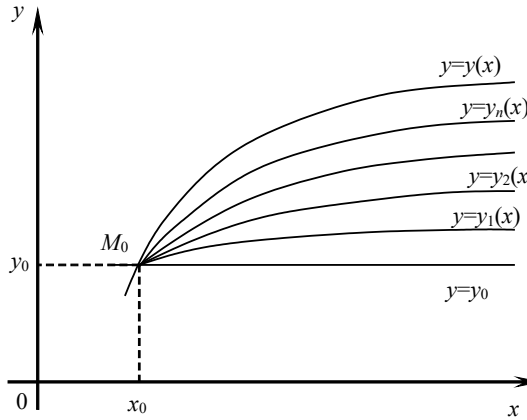


Рис.1.1. Геометричне представлення
послідовних наближень

Для оцінки похибки

$$\varepsilon_n(x) = |y(x) - y_n(x)|$$

з (1.17) віднімаючи (1.18), маємо

$$y(x) - y_n(x) = \int_{x_0}^x [f(x, y) - f(x, y_{n-1})] dx.$$

Звідси отримаємо

$$\varepsilon_n(x) = |y(x) - y_n(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(x, y) - f(x, y_{n-1})| dx.$$

Враховуючи умову Липшиця (1.19), знаходимо

$$|f(x, y) - f(x, y_{n-1})| \leq N|y(x) - y_{n-1}(x)| \leq N\varepsilon_{n-1}(x).$$

Отже,

$$\varepsilon_n(x) \leq \int_{x_0}^x N\varepsilon_{n-1}(x) dx \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1.22)$$

де $\varepsilon_0(x) = |y(x) - y_0|$.

Застосовуючи формулу скінченних прирощень Лагранжа, маємо

$$\varepsilon_0(x) = |y(x) - y(x_0)| = (x - x_0)|y'(\xi)|,$$

де $x_0 < \xi < x$.

Оскільки $|y'(\xi)| \leq |f(\xi, y(\xi))| \leq M$, з останньої рівності отримуємо

$$\varepsilon_0(x) \leq M(x - x_0).$$

Далі, використовуючи формулу (1.22), послідовно знаходимо

$$\varepsilon_1(x) \leq N \int_{x_0}^x \varepsilon_0(x) dx \leq NM \int_{x_0}^x (x - x_0) dx = MN \frac{(x - x_0)^2}{2!};$$

$$\varepsilon_2(x) \leq N \int_{x_0}^x \varepsilon_1(x) dx \leq NM^2 \int_{x_0}^x \frac{(x - x_0)^2}{2!} dx = MN^2 \frac{(x - x_0)^3}{3!} \text{ і т.д.}$$

Тоді загальний член набуде вигляду

$$\varepsilon_n(x) \leq MN^n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.23)$$

З (1.23) витікає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(x) = 0$, причому збіжність на відріжку $[x_0; x_0 + h]$ рівномірна.

У методі послідовних наближень як початкове наближення можна y_0 вибирати будь-яку функцію, досить близьку до точного рішення y_0 . Наприклад, в якості y_0 як можна прийняти відрізок ряду Тейлора шуканого рішення.

Приклад. Методом послідовних наближень знайти рішення задачі Коші

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1. \quad (1.24)$$

Рішення. Як початкове наближення приймаємо. $y_0(x) = 1$.
Оскільки

$$y(x) = 1 + \int_0^x (x - y) dx,$$

маємо

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (x - 1) dx = 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

Аналогічно

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(x - 1 + x - \frac{x^2}{2} \right) dx = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6};$$

$$y_3(x) = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24};$$

$$y_4(x) = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{120} \text{ і т.д.}$$

Оцінімо похибку четвертого наближення $y_4 = y_4(x)$. Розглянемо область $\{0 \leq x \leq a, |y| \leq b\}$, де права частина диференціального рівняння (1.24)

$$f(x, y) = x - y \quad (1.25)$$

визначена та безперервна.

Оскільки функція (1.25) безперервна у всій площині Oxy , то a і b можуть бути прийняті будь-які позитивні числа.

При $(x, y) \in R$ маємо

$$|f(x, y)| \leq |x - y| \leq |x| + |y| \leq a + b = M.$$

Тому, припускаючи $a \geq 1$, з (1.21) отримуємо

$$h = \min \left\{ a; \frac{b}{M} \right\} = \min \left\{ a; \frac{b}{a+b} \right\} = \frac{b}{a+b}.$$

Вибравши для визначеності $a = 1$ і $b = 1$ і маємо $h = 1/2$.

Константа Ліпшиця для області R у цьому випадку така:

$$N = \max_R |f'_y(x, y)| = 1.$$

Використовуючи (1.23) при $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, остаточно отримуємо

$$\varepsilon_4(x) = |y(x) - y_4(x)| \leq 2 \cdot 1^4 \cdot \frac{x^5}{5!} = \frac{x^5}{60}$$

і, отже,,

$$\varepsilon_4(x) = \max_R \varepsilon_4(x) \leq \frac{1}{60 \cdot 32} = \frac{1}{1920}.$$

Зауважимо також, що для рівняння (1.24) можна в даному випадку отримати точне рішення, якщо написати загальний член ряду в наближенні $y_n = y_n(x)$. Справді, неважко бачити, що

$$y_n(x) = 1 - x + \left[\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right] + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$(n = 3, 4, 5, \dots)$.

Тоді

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = 1 - x + 2[e^{-x} - (1 - x)] = 2e^{-x} - (1 - x),$$

причому збіжність рівномірна на будь-якому відрізку $[0; a]$.

Неважко також поширити метод послідовних наближень на завачу

Коші для системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1.26)$$

$$y(x_0) = y^0. \quad (1.27)$$

Записуючи векторне рівняння (1.26) в інтегральній формі, отримуємо

$$y(x) = y^0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx, \quad (1.28)$$

де

$$\int_{x_0}^x f(x, y) dx = \begin{bmatrix} \int_{x_0}^x f_1(x, y) dx \\ \vdots \\ \int_{x_0}^x f_n(x, y) dx \end{bmatrix}.$$

Послідовні наближення $y^p(x)$ ($p = 1, 2, \dots$) будуються за формулою

$$y^p(x) = y^0 + \int_{x_0}^x f(x, y^{p-1}) dx. \quad (1.29)$$

Цей метод придатний також для диференціального рівняння n -го порядку, якщо його призвести до нормальної системи диференціальних рівнянь.

Приклад. Побудувати кілька послідовних наближень для вирішення системи

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = x + y_1 y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = x^2 - y_1^2, \end{cases}$$

що задовольняє початковим умовам

$$y_1(0) = 1; \quad y_2(0) = 0.$$

Рішення. Використовуючи (1.28) та рівняння вихідної системи, маємо:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + \int_0^x (x + y_1 y_2) dx; \\ y_2(x) &= \int_0^x (x^2 - y_1^2) dx. \end{aligned}$$

Звідси, вважаючи

$$y_1^0 = 1, \quad y_2^0 = 0,$$

отримаємо

$$\begin{aligned} y_1^1(x) &= 1 + \int_0^x (x + 0) dx = 1 + \frac{x^2}{2}; \\ y_2^1(x) &= \int_0^x (x^2 - 1) dx = -x + \frac{x^3}{3}; \\ y_1^2(x) &= 1 + \int_0^x \left[x + \left(1 + \frac{x^2}{2} \right) \left(-x + \frac{x^3}{3} \right) \right] dx = 1 - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{36}; \\ y_2^2(x) &= \int_0^x \left[x^2 - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{4} \right) \right] dx = -x - \frac{x^5}{20} \text{ і т.д.} \end{aligned}$$

1.4. Метод Ейлера

Нехай дано диференціальне рівняння

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (1.30)$$

з початковою умовою

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0. \quad (1.31)$$

Наближене розв'язання задачі Коші (1.30), (1.31) шукатимемо на кінцевій множині точок відрізка $[\mathbf{x}_0; \mathbf{x}_0 + l]$, яку назвемо сіткою.

Виберемо сітку $\omega_h = \{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^N$, где $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0 + i\mathbf{h}$, $\mathbf{h} = l/N$, N – натуральне, l – довжина відрізка, у якому шукається рішення.

Найпростішим чисельним методом розв'язання задачі Коші (1.30), (1.31) є метод Ейлера. Він заснований на розкладанні шуканої функції $y = y(x)$ в ряд Тейлора на околицях вузлів $x = x_i$ ($i=0,1,\dots,N$) сітки ω_h з утриманням перших трьох членів ряду, а саме:

$$y(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}) = y(\mathbf{x}_i) + \mathbf{h}y'(\mathbf{x}_i) + \frac{\mathbf{h}^2}{2}y''(\xi_i),$$

де $\mathbf{x}_i < \xi_i < \mathbf{x}_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, N - 1$.

Якщо ввести позначення $y_i = y(\mathbf{x}_i)$, $y'_i = y'(\mathbf{x}_i)$, то вказане розкладання набуде вигляду

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \mathbf{h}\mathbf{y}'_i + \frac{\mathbf{h}^2}{2}\mathbf{y}''(\xi_i). \quad (1.32)$$

Відкидаючи останній член у виразі (1.32) і враховуючи, що згідно з (1.30) $y'_i = f(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$, приходимо до розрахункової формули методу Ейлера:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \mathbf{h}\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (1.33)$$

За рекурентними співвідношеннями (1.33) значення $\mathbf{y}_{i+1}$ у будь-якому вузлі $\mathbf{x}_{i+1}$ в обчислюються за її значенням $\mathbf{y}_i$ у попередньому вузлі $\mathbf{x}_i$. Для початку розрахунків необхідно мати $\mathbf{y}_0$, яке береться із (1.31).

Похибка даного методу обумовлена відкинутими членами у розкладанні до ряду Тейлора (1.32). На кожному кроці при переході від $\mathbf{x}_i$ до $\mathbf{x}_{i+1}$, ця похибка (локальна похибка) має порядок $O(h^2)$, оскільки саме члени такого порядку і вище відкинуті (1.32). При знаходженні рішення в точці $\mathbf{x}_N$, що знаходиться на кінцевій відстані l від точки $\mathbf{x}_0$, похибки, що виникають на кожному кроці, підсумовуються, в чому легко переконатися, керуючись елементарними правилами поводження з наближеними числами. Тоді сумарна похибка (глобальна похибка) дорівнює $N \cdot O(h^2)$. Якщо врахувати, що $\mathbf{h} = l/N$, то глобальної похибки отримуємо таке вираз:

$$N \cdot O(h^2) = \frac{1}{h} O(h^2) = O(h). \quad (1.34)$$

Таким чином, ми показали, що метод Ейлер має перший порядок точності. Основний недолік методу Ейлера - невисока відносно точність h .

При виведенні формули (1.33) та оцінці похибки передбачалося, що розв'язання задачі Коші (1.30)-(1.31) двічі безперервно диференційовано на тій ділянці, на якій воно знаходиться.

На рис. 1.2 представлено геометричну інтерпретацію методу Ейлера. Зображено перші два кроки, тобто проілюстровано обчислення наближеного рішення в точках x_1, x_2 .

. Інтегральні криві 0, 1, 2 є точними рішеннями рівняння (1.30) з сімейства інтегральних кривих $y = y(x) + C$. При цьому крива 0 відповідає точному рішенню задачі Коші (1.30), (1.31), так як вона проходить через початкову точку $A(x_0, y_0)$.

Точки B, C отримані внаслідок чисельного розв'язання задачі Коші методом Ейлера. Їхні відхилення від кривої 0 характеризують похибку методу. При виконанні кожного кроку ми фактично потрапляємо на іншу інтегральну криву із сімейства. Відрізок AB – відрізок дотичної до кривої 0 у точці A , та її нахил характеризується значенням похідної $y'_0 = f(x_0, y_0)$. По зазначеній дотичній ми переміщаємося крок h у бік осі (Ox), тобто. точка B утворюється як точка перетину дотичної до кривої 0 у точці A з прямою $x = x_1$. Дотична BC вже приводиться до іншої інтегральної кривої 1 і т.д. В результаті отримуємо так звану ламану Ейлера, дві перші ланки яких і зображені на рис. 1.2 (ланки AB та BC).

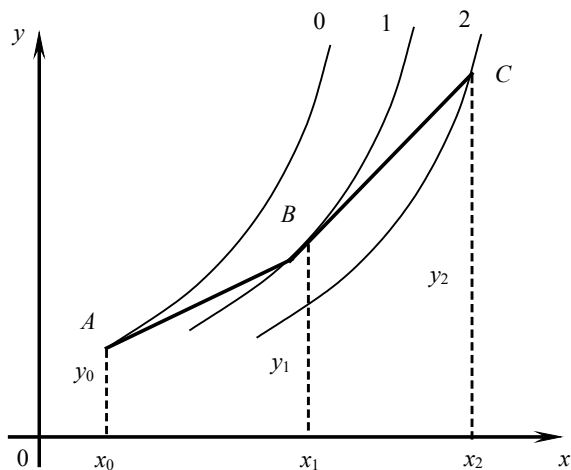


Рис.1.2. Геометрична інтерпретація методу Ейлера

Приклад. Методом Ейлера знайти на відрізку $[0; 1]$ з кроком $h = 0,1$ рішення задачі Коші

$$y' = \frac{xy}{2}; \quad y(0) = 1.$$

Рішення. Результати обчислень за формулою (1.33) наведено у табл. 1.1. Для порівняння в останньому стовпці вміщено значення точного рішення $y = e^{x^2/4}$.

З таблиці видно, що абсолютна похибка значення y_{10} становить $\varepsilon_{10} = 0,0361$. Звідси відносна похибка приблизно дорівнює 3%.

Таблиця 1.1

i	x	y	$hf(x, y)$	$y = e^{\frac{x^2}{4}}$
0	0	1	0	1
1	0,1	1	0,0050	1,0025
2	0,2	1,0050	0,0101	1,0100
3	0,3	1,0151	0,1052	1,0227
4	0,4	1,0303	1,0206	1,0408
5	0,5	1,0509	0,0263	1,0645
6	0,6	1,0772	0,0323	1,0942
7	0,7	1,1095	0,0388	1,1303
8	0,8	1,1483	0,0459	1,1735
9	0,9	1,1942	0,0537	1,2244
10	1	1,2479		1,2840

1.5. Метод «предиктор-корректор»

Точнішими, ніж метод Ейлера, є його модифікації, які є методами другого порядку точності. Розглянемо їх.

Нехай дане завдання Коші

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (1.35)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0. \quad (1.36)$$

Наближене рішення знову будемо шукати на сітці $\omega_h = \{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^N$, $h = l/N$, де l – довжина відрізка, на якому знаходиться, N – натуральне.

Розрахункові формули методу «предиктор-корректор» мають вигляд

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}^*)}{2}, \quad (1.37)$$

$$\mathbf{y}_{i+1}^* = \mathbf{y}_i + h \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \quad (1.38)$$

де $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}(\mathbf{x}_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$), а $\mathbf{y}_0$ береться з (1.36).

За формулою (1.37) визначається «грубе» значення $\mathbf{y}_{i+1}^*$, а формула (1.38) уточнює (корегує) значення наближеного рішення в точці $\mathbf{x}_{i+1}$.

Покажемо, що локальна похибка цього є величина $O(h^3)$.

Підставивши $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + h$ в (1.38), а замість $\mathbf{y}_{i+1}^*$ його вираз (1.37), отримаємо

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_i + h, \mathbf{y}_i + h \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i))}{2}.$$

Вважаючи $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i + h, \mathbf{y}_i + h \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i))$ функцією тільки від h ($\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$, фіксовані) і розкладаючи її в ряд Тейлора, отримуємо

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}(\mathbf{x}_i + h, \mathbf{y}_i + h \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) + h \left(\mathbf{f}'_x(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) + \mathbf{f}'_y(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \right) + O(h^2). \end{aligned}$$

Підставивши останній вираз в (1.38), перетворимо його на вигляд

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) + \frac{h^2}{2} \left(\mathbf{f}'_x(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) + \mathbf{f}'_y(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \right) + O(h^3). \quad (1.39)$$

Припускаючи, що розв'язання задачі Коші (1.35), (1.36) $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ тричі безперервно і диференційовано в околиці точки $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$, за формулою Тейлора отримуємо

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}(\mathbf{x}_i) + h \mathbf{y}'(\mathbf{x}_i) + \frac{h^2}{2} \mathbf{y}''(\mathbf{x}_i) + O(h^3).$$

Враховуючи, що за умовою

$$y' = f(x, y)$$

та за правилом диференціювання складної функції

$$y'' = f'_x(x, y) + f'_y(x, y)f(x, y),$$

остаточно отримуємо

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} (f'_x(x_i, y_i) + f'_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i)) + O(h^3), \quad (1.40)$$

причому величини $O(h^3)$ в (1.39) и (1.40) не тотожні.

З (1.39), (1.40) локальна похибка цього методу є $O(h^3)$. Отже, глобальна похибка, тобто. максимальна похибка на всій сітці ω_h , дорівнює $O(h^2)$, , що доводиться аналогічно, як і в методі Ейлера.

Результати, отримані методом «предиктор-коректор», можна ще більше уточнити, застосовуючи ітераційну обробку кожного значення. А саме, виходячи з «грубого» наближення

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i),$$

побудуємо ітераційний процес

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i^{(k-1)})], \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (1.41)$$

Ітерації продовжуємо доти, доки два послідовні наближення $y_{i+1}^{(m)}$ і $y_{i+1}^{(m+1)}$ не співпадуть між собою із заданою точністю. Після цього вважаємо $y_{i+1} \approx \bar{y}_{i+1}^{(m)}$,

де $\bar{y}_{i+1}^{(m)}$ – загальна частина наближень $y_{i+1}^{(m)}$ та $y_{i+1}^{(m+1)}$.

Якщо алгоритм уточнення чисельного значення рішення після трьох-чотирьох ітерацій не призводить до збігу необхідного числа десяткових знаків, то необхідно зменшити крок h .

На рис. 1.4 дана геометрична інтерпретація першого кроку обчислень під час вирішення завдання Коші методом «предиктор–коректор».

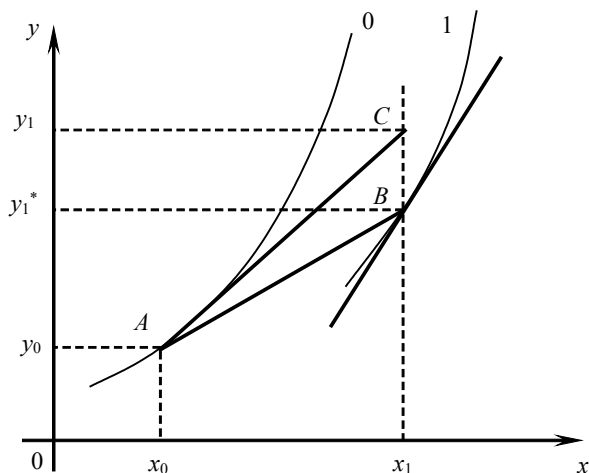


Рис.1.4. Геометрична інтерпретація першого кроку методу «предиктор–корректор»

Визначаємо $k_i = f(x_0, y_0)$ – напрямок дотичної до інтегральної кривої у точці $A(x_0, y_0)$ і точку перетину прямих $y - y_0 = k_1(x - x_0)$ і $x = x_1$, тобто точку $B(x_1, y_1^*)$. Знаходимо напрямок дотичної у точці B : $k_2 = f(x_1, y_1^*)$. Остаточню напрямок відрізка AC ламаємо, що є наближеним розв'язанням задачі (1.35), (1.36), вважаємо рівним $k = (k_1 + k_2)/2$ і проводимо з точки A пряму до перетину з прямою $x = x_1$ в точці $C(x_1, y_1)$.

Криві 0, 1 на рис. 1.4 є інтегральні криві з сімейства, причому крива 0 є точним рішенням завдання Коші (1.35), (1.36).

Приклад. Методом «предиктор-корректор» вирішити задачу Коші

$$y' = y - \frac{2x}{y}, \quad y(0) = 1 \quad (1.42)$$

на відріжку $[0; 1]$.

Рішення. Прийнемо крок $h = 0,2$, $f(x, y) = y - \frac{2x}{y}$, $f_i = f(x_i, y_i)$.

Наближені значення шуканого рішення наведено у табл. 1.2.

Таблиця 1.2

i	x_i	y_i	$\frac{h}{2}f_i$	x_{i+1}	y_{i+1}^*	$\frac{h}{2}f_{i+1}$	$\Delta y_i = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$
0	0	1	0,1	0,2	1,2	0,0867	0,1867
1	0,2	1,1867	0,0850	0,4	1,3566	0,0767	0,1617
2	0,4	1,3484	0,0755	0,6	1,4993	0,0699	0,1454
3	0,6	1,4938	0,0690	0,8	1,6180	0,0651	0,1341

4	0,8	1,6279	0,0645	1,0	1,7569	0,0618	0,1263
5	1,0	1,7542					

Приклад. За допомогою методу ітераційної обробки уточнити значення y_i ($i = 0, 1, \dots, 10$) інтеграла рівняння

$$y' = \frac{xy}{2}, \quad y(0) = 1$$

Рішення. Після трьох-чотирьох підрахунків за формулами (1.41) при $h = 0,1$, приходимо до збігу четвертого знаку після коми у значеннях ординат $y_i^{(k)}$ и $y_i^{(k+1)}$. Результати цих обчислень наведено у табл. 1.3. З таблиці видно, гранична абсолютна похибка наближеного рішення на відрізку $[0; 1]$ менше $3 \cdot 10^{-3}$, тобто. гранична відносна похибка становить приблизно 0,2%.

Таблиця 1.3

i	x	y	$hf(x, y)$	Точний розв'язок $y = e^{x^2/4}$
0	0	1	0	1
1	0,1	1,0025	0,0050	1,0025
2	0,2	1,0100	0,0101	1,0100
3	0,3	1,0227	0,0153	1,0227
4	0,4	1,0408	0,0208	1,0408
5	0,5	1,0646	0,0266	1,0645
6	0,6	1,0943	0,0328	1,0942
7	0,7	1,1305	0,0396	1,1303
8	0,8	1,1738	0,0470	1,1735
9	0,9	1,2248	0,0551	1,2244
10	1,0	1,2812		1,2840

1.6. Удосконалений метод Ейлера

Цей метод є також методом другого порядку точності, тобто. Його глобальна похибка є величиною $O(h^2)$. Розрахункові формули методу мають вигляд:

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{i+1/2}\right) \quad (1.43)$$

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i), \quad (i = 0, 1, \dots, N). \quad (1.44)$$

Його локальна та глобальна похибки досліджуються так само, як і в попередньому методі.

На рис. 1.5 показано геометрична інтерпретація першого кроку вдосконаленого методу Ейлера.

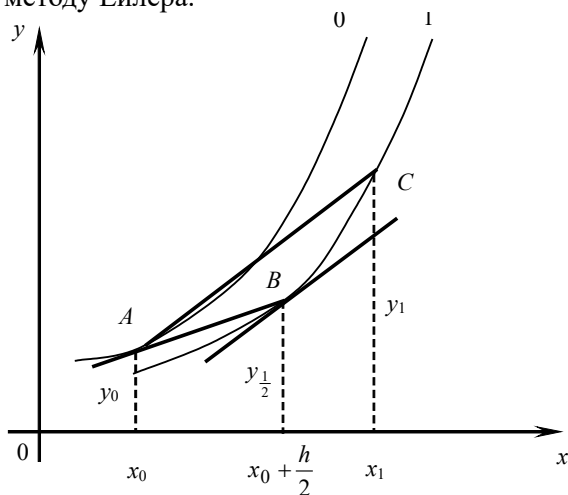


Рис.1.5. Геометрична інтерпретація першого кроку удосконаленого методу Ейлера

Дотична до кривої 0 у точці $A(x_0, y_0)$ проводиться з кутовим коефіцієнтом $y'_0 = f(x_0, y_0)$ крок $\frac{h}{2}$ у бік осі Ох, тобто. до перетину з прямою $x = x_0 + \frac{h}{2}$ при цьому отримуємо точку $B\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_{\frac{1}{2}}\right)$. Знаходимо напрям дотичної до кривої 1 у точці B : $y'_{\frac{1}{2}} = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_{\frac{1}{2}}\right)$. Будуємо відрізок AC ламаної Ейлера з кутовим коефіцієнтом дотичної, знайденим у точці B , тобто. проводимо пряму $y - y_0 = k(x - x_0)$ (де $k = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_{\frac{1}{2}}\right)$) до перетину з прямою $x = x_1$ в точці $C(x_1, y_1)$.

Приклад. Удосконаленим методом Ейлера вирішити завдання Коші (1.42) на відрізку $[0; 1]$

Рішення. Приймаючи, як і раніше, крок $h = 0,2$ і $f(x, y) = y - \frac{2x}{y}$ отримаємо наступне наближене рішення, яке представлено в табл.1.4. У цьому прийнятті позначення: $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$, $f_i = f(x_i, y_i)$, $f_{i+\frac{1}{2}} = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right)$.

Таблиця 1.4

i	x_i	y_i	$\frac{h}{2}f_i$	$x_{i+\frac{1}{2}}$	$y_{i+\frac{1}{2}}$	$\Delta y_i = hf_{i+\frac{1}{2}}$
0	0	1	0,1	0,1	1,1	0,1836
1	0,2	1,1836	0,0846	0,3	1,2682	0,1590
2	0,4	1,3426	0,0747	0,5	1,4173	0,1424
3	0,6	1,4850	0,0677	0,7	1,5527	0,1302
4	0,8	1,6152	0,0625	0,9	1,6777	0,1210
5	1,0	1,7362				

Для порівняння можна навести точне рішення $y = \sqrt{2x+1}$, звідки останнє значення наближеного рішення, в якому накопичується найбільша похибка, дорівнюватиме $y(1) = \sqrt{3} \approx 1,73205$.

1.7. Метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності

Нехай дано диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y) \quad (1.45)$$

з початковою умовою $y(x_0) = y_0$.

Розрахункові формули методу Рунге-Кутта четвертого порядку точності мають вигляд

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

де

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} \left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)} \right) \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i), \\ k_2^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right), \\ k_3^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right), \\ k_4^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}), \end{aligned} \quad (1.47)$$

$x_i = x_0 + ih$, $y_i = y(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), h – крок.

Покажемо, що похибка цього методу кожному кроці є величина порядку h^5 , за умови, що

$f(x, y) \in C_5(G)$ де G – область, де розв'язується завдання Коши.

$$\Delta y = y(x + h) - y(x). \quad (1.48)$$

Приріст Δy представимо у вигляді деякої комбінації величин k_1, k_2, k_3, k_4 , визначених формулами (1.47) (індекс «i» з метою спрощення викладок опустимо)::

$$\Delta y = \alpha k_1 + \beta k_2 + \gamma k_3 + \delta k_4. \quad (1.49)$$

Постійні $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ визначимо з умови, щоб збільшення Δy , обчислене за формулою Тейлора:

$$\Delta y = h y'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{6} y'''(x) + \frac{h^4}{24} y^{IV}(x) + \dots \quad (1.50)$$

збігалося до членів порядку h^4 включно, з величиною Δy , що обчислюється за формулою (1.49) включно, з величиною Δy , що обчислюється за формулою (1.49).

Покажемо, що коефіцієнти у формулі (1.46) є найкращими.

Похідні $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$, ... послідовно визначаються з рівняння (1.45). Для зручності викладок введемо оператори

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y},$$

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2f \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + f^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$D^3 = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3f \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 3f^2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + f^3 \frac{\partial^3}{\partial y^3},$$

де $f = f(x, y)$ – права частина рівняння (1.45).

Зауважимо, що

$$D(u + v) = Du + Dv,$$

$$D(uv) = \frac{\partial}{\partial x}(uv) + f \frac{\partial}{\partial y}(uv) = vDu + uDv,$$

$$\begin{aligned} D(Du) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + f \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + f \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2f \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + f^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \\ &= D^2 u + \frac{\partial u}{\partial y} Df, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(D^2 u) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2f \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + f^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &\quad + f \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2f \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + f^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3f \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 3f^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + f^3 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right) + 2f \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right) = D^3 u + 2Df \cdot D \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Застосовуючи правило диференціювання складної функції, з рівняння (1.45) послідовно знаходимо

$$\begin{aligned} y' &= f, \\ y'' &= \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} = Df, \\ y''' &= D(Df) = D^2 f + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot Df, \\ y^{IV} &= D \left(D^2 f + \frac{\partial f}{\partial y} Df \right) = D(D^2 f) + D \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot Df + \frac{\partial f}{\partial y} D(Df) = \\ &= D^3 f + 2Df \cdot D \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + Df \cdot D \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(D^2 f + \frac{\partial f}{\partial y} Df \right) = \\ &= D^3 f + \frac{\partial f}{\partial y} D^2 f + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 Df + 3Df \cdot D \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Використовуючи розкладання у ряд Тейлора для функції двох змінних:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y) + \dots, \end{aligned}$$

з точністю до h^4 , знаходимо

$$\begin{aligned} k_1 &= hf, \\ k_2 &= hf \left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{hf}{2} \right) = \\ &= h \left[f + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right) f + \frac{h^2}{8} \left(\frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f + \frac{h^3}{48} \left(\frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f \right] = \\ &= hf + \frac{h^2}{2} Df + \frac{h^3}{8} D^2 f + \frac{h^4}{48} D^3 f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= hf \left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f + \frac{h^2}{4}Df + \frac{h^3}{16}D^2f \right) = \\
&= h \left\{ f + \left[\frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{h}{2}f + \frac{h^2}{4}Df + \frac{h^3}{16}D^2f \right) \frac{\partial}{\partial y} \right] f + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left[\frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{h}{2}f + \frac{h^2}{4}Df \right) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 f + \frac{1}{6} \left(\frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{h}{2}f \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f \right\} = \\
&= hf + \frac{h^2}{2}Df + \frac{h^3}{8} \left(D^2f + 2 \frac{\partial f}{\partial y} Df \right) + \\
&\quad + \frac{h^4}{48} \left[D^3f + 3 \frac{\partial f}{\partial y} D^2f + 6DfD \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right], \\
k_4 &= hf \left(x + h, y + hf + \frac{h^2}{2}Df + \frac{h^3}{8}D^2f + 2 \frac{\partial f}{\partial y} Df \right) = \\
&= h \left\{ f + \left[h \frac{\partial}{\partial x} + \left(hf + \frac{h^2}{2}Df + \frac{h^3}{8}D^2f + 2 \frac{\partial f}{\partial y} Df \right) \frac{\partial}{\partial y} \right] f + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left[h \frac{\partial}{\partial x} + \left(hf + \frac{h^2}{2}Df \right) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 f + \frac{1}{6} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + hf \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f \right\} = \\
&= hf + h^2Df + \frac{h^3}{2} \left(D^2f + \frac{\partial f}{\partial y} Df \right) + \frac{h^4}{48} \left[8D^3f + 6 \frac{\partial f}{\partial y} D^2f + \right. \\
&\quad \left. + 12 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 Df + 24DfD \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right].
\end{aligned}$$

Підставляючи ці вирази у формулу (1.49), отримуємо

$$\begin{aligned}
\Delta y &= hf(\alpha + \beta + \gamma + \delta) + \frac{h^2}{2}Df(\beta + \gamma + 2\delta) + \frac{h^3}{8}D^2f(\beta + \gamma + 4\delta) + \\
&+ \frac{h^3}{4} \frac{\partial f}{\partial y} Df(\gamma + 2\delta) + \frac{h^4}{48}D^3f(\beta + \gamma + 8\delta) + \frac{h^4}{16} \frac{\partial f}{\partial y} D^2f(\gamma + 2\delta) + \\
&+ \frac{h^4}{4} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 Df\delta + \frac{h^4}{8}DfD \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (\gamma + 4\delta) + O(h^5).
\end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти цього виразу до відповідних коефіцієнтів у формулі (1.51), для визначення постійних $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ отримуємо систему з восьми рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1, & \beta + \gamma + 8\delta = 2, \\ \beta + \gamma + 2\delta = 1, & \gamma + 2\delta = \frac{2}{3}, \\ \beta + \gamma + 4\delta = \frac{4}{3}, & \delta = \frac{1}{6}, \\ \gamma + 2\delta = \frac{2}{3}, & \gamma + 4\delta = 1. \end{cases} \quad (1.52)$$

Неважко показати, що система (1.52) є сумісною і має єдине рішення:

$$\alpha = \frac{1}{6}; \quad \beta = \frac{1}{3}; \quad \gamma = \frac{1}{3}; \quad \delta = \frac{1}{6}.$$

Таким чином,

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5) \quad (1.53)$$

що й потрібно було довести.

Глобальна похибка цього методу є величина $O(h^4)$. Доводиться це так, як було зроблено при розгляді методу Ейлера (див. § 1.4).

Обчислення за формулою (1.46) зручно здійснювати за схемою наведеною в табл. 1.5.

Таблиця 1.5

i	x	y	$k = hf(x, y)$	Δy
0	x_0	y_0	$k_1^{(0)}$	$\left. \begin{matrix} k_1^{(0)} \\ 2k_2^{(0)} \\ 2k_3^{(0)} \\ k_4^{(0)} \end{matrix} \right\}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}$	$k_2^{(0)}$	
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}$	$k_3^{(0)}$	
	$x_0 + h$	$y_0 + k_3^{(0)}$	$k_4^{(0)}$	
				$\frac{1}{6} \sum = \Delta y_0$
1	x_1	y_1	...	...

На рис. 1.7 представлена геометрична інтерпретація метода Рунге–Кутта.

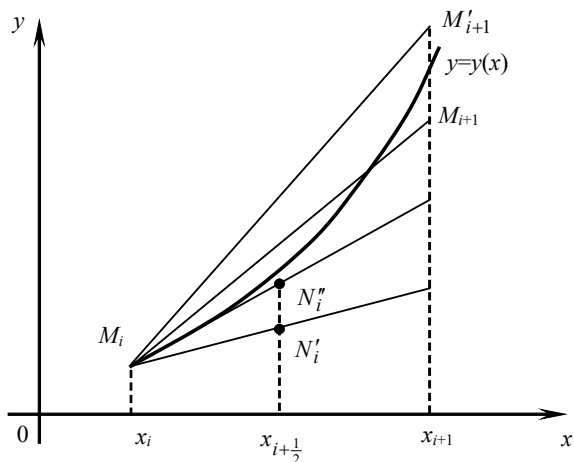


Рис.1.7. Геометрична інтерпретація методу Рунге–Кутта

Нехай відрізок $[x_0; x_0 + l]$ розділений на N рівних частин точками $x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N = x_0 + l$ ($x_{i+1} - x_i = h$) і визначені наближені значення $y_0, y_1, \dots, y_i$ рішення диференціального рівняння відповідно в точках $x_0, x_1, \dots, x_i$. Переходимо до відрізка $[x_i; x_{i+1}]$ та знаходження y_{i+1} (рис. 1.7). Визначаємо $k_1^{(i)} = f(x_i, y_i)$ – напрямок дотичної до інтегральної кривої в точці $M_i(x_i, y_i)$ і точку перетину прямої $y - y_i = k_1^{(i)}(x - x_i)$ і $x = x_i + \frac{h}{2}$, тобто точку $N_i' \left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + k_1^{(i)} \frac{h}{2} \right)$.

Знаходимо напрям дотичної в точці N_i' :

$$k_2^{(i)} = f \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_1^{(i)} \frac{h}{2} \right)$$

і з точки M_i проводимо пряму з кутовим коефіцієнтом $k_2^{(i)}$:

$$y - y_i = k_2^{(i)}(x - x_i)$$

до перетину із прямою $x = x_i + \frac{h}{2}$. Отримуємо точку

$$N_i'' \left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + k_2^{(i)} \frac{h}{2} \right).$$

Знаходимо напрям дотичної у точці N_i'' :

$$k_3^{(i)} = f \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_2^{(i)} \frac{h}{2} \right)$$

і з точки M_i проводимо пряму з кутовим коефіцієнтом $k_3^{(i)}$:

$$y - y_i = k_3^{(i)}(x - x_i)$$

до перетину із прямою $x = x_i + h$. Отримуємо точку $M'_{i+1} (x_i + h, y_i + k_3^{(i)} h)$. Далі визначаємо напрям дотичної у точці M'_{i+1} :

$$k_4^{(i)} = f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)} h).$$

Остаточно напрямок відрізка ламаної, що є наближеним розв'язанням задачі, вважаємо рівним

$$k^{(i)} = \frac{1}{6} (k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)})$$

і проводимо з точки M_i пряму $y - y_i = k^{(i)}(x - x_i)$ до перетину з прямою $x = x_i + h$ в точці $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$, де $y_{i+1} = y_i + k^{(i)}h$ вважаємо наближеним значенням рішення в точці

$$x_{i+1} = x_i + h.$$

Метод Рунге-Кутта має більшу точність і широко використовується при чисельному розв'язанні диференціальних рівнянь.

Приклад. Методом Рунге-Кутта знайти на відрізку $[0; 0,5]$ рішення задачі Коші

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1, \quad (1.54)$$

обравши крок $h = 0,1$.

Рішення. Обчислимо y_1 . Послідовно знаходимо

$$k_1^{(0)} = (0 + 1) \cdot 0,1 = 0,1;$$

$$k_2^{(0)} = 0,05 + (1 + 0,05) \cdot 0,1 = 0,11;$$

$$k_3^{(0)} = 0,05 + (1 + 0,055) \cdot 0,1 = 0,1105;$$

$$k_4^{(0)} = 0,1 + (1 + 0,1105) \cdot 0,1 = 0,12105.$$

Звідси

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6} (0,1 + 2 \cdot 0,11 + 2 \cdot 0,1105 + 0,12105) = 0,1103;$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0,1103 = 1,1103.$$

Аналогічно обчислюються інші $y_i = y(x_i)$, їх результати приведені в табл. 1.6.

Таблиця 1.6

i	x	y	$k = hf(x, y)$	Δy
0	0	1	0,1	0,1000
	0,05	1,05	0,11	0,2200
	0,05	1,055	0,1105	0,2210
	0,1	1,1105	0,1210	0,1210
				$\frac{1}{6} \cdot 0,6620 = 0,1103$

1	0,1 0,15 0,15 0,2	1,1103 1,1708 1,1763 1,2429	0,1210 0,1321 0,1326 0,1443	$\left. \begin{array}{l} 0,1210 \\ 0,2642 \\ 0,2652 \\ 0,1443 \end{array} \right\}$
				$\frac{1}{6} \cdot 0,7947 = 0,1324$
2	0,2 0,25 0,25 0,3	1,2427 1,3149 1,3209 1,3998	0,1443 0,1565 0,1571 0,1700	$\left. \begin{array}{l} 0,1443 \\ 0,3130 \\ 0,3142 \\ 0,1700 \end{array} \right\}$
				$\frac{1}{6} \cdot 0,9415 = 0,1569$
2	0,2 0,25 0,25 0,3	1,2427 1,3149 1,3209 1,3998	0,1443 0,1565 0,1571 0,1700	$\left. \begin{array}{l} 0,1443 \\ 0,3130 \\ 0,3142 \\ 0,1700 \end{array} \right\}$
				$\frac{1}{6} \cdot 0,9415 = 0,1569$
2	0,2 0,25 0,25 0,3	1,2427 1,3149 1,3209 1,3998	0,1443 0,1565 0,1571 0,1700	$\left. \begin{array}{l} 0,1443 \\ 0,3130 \\ 0,3142 \\ 0,1700 \end{array} \right\}$
				$\frac{1}{6} \cdot 0,9415 = 0,1569$
5	0,5	1,7974		

1.8. Розв'язання задачі Коші для системи диференціальних рівнянь та для диференціального рівняння n-го порядку

Метод Ейлера та його модифікації, метод Рунге–Кутта застосовуються і у випадку розв'язання задачі Коші я нормальної системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1.55)$$

$$y(x_0) = y^0, \quad (1.56)$$

де

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \frac{dy}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad y^0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{bmatrix}$$

Названі вище методи формально залишаються тими самими, тільки функції y, f і величини $k^{(i)}$ замінюються відповідно вектор-функції y, f і вектори $k^{(i)}$.

Задані вище вимоги до гладкості функції f накладаються на компоненти вектор-функції f , а точність, що гарантується, по порядку щодо h буде та ж, що і в разі одного рівняння (1.55) для компонент наближеного рішення. Правило Рунге практичної оцінки похибки, застосовується для кожної компоненти окремо.

Задача Коші для диференціального рівняння n -го порядку

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1.57)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (1.58)$$

зводиться до задачі (1.55), (1.56) шляхом виділення $n - 1$ -ї допоміжної функції.

Справді, вважаючи

$$y_1 = y', \quad y_2 = y'', \quad \dots, \quad y_{n-1} = y^{(n-1)},$$

маємо еквівалентну нормальну систему:

з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, \quad y_1(x_0) = y_0^1, \quad \dots, \quad y_{n-1}(x_0) = y_0^{n-1}.$$

Приклад. Методом Рунге-Кутта проінтегрувати на відрізку $[0; 0,3]$ рівняння коливань маятника в середовищі, що опирається

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 0,2 \frac{d\theta}{dt} + 10 \sin \theta = 0 \quad (1.59)$$

за початкових умов

$$\theta(0) = 0,3; \quad \dot{\theta}(0) = 0,$$

де $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$; θ – кут відхилення маятника від вертикалі; t – час

Таким чином, у початковий момент часу задаються початкове відхилення $\theta_0 = 0,3$ і початкова швидкість $\dot{\theta}_0 = 0$.

Рішення. Вважаючи $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, запишемо рівняння (1.59) у вигляді нормальної системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega, \\ \dot{\omega} = -0,2\omega - 10\sin\theta, \end{cases} \quad (1.60)$$

Виберемо крок $h = \Delta t = 0,1$ і покладемо

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ -0,2\omega - 10\sin\theta \end{bmatrix}, \quad \bar{k} = \begin{bmatrix} k^{(1)} \\ k^{(2)} \end{bmatrix},$$

де компоненти $k^{(1)}, k^{(2)}$ визначаються за формулами (1.46).

Результати обчислень за формулами (1.46), (1.47) наведено у табл. 1.7.

Таблиця 1.7

i	t	θ	ω	$k^{(1)} = 0,1\dot{\theta}$	$k^{(2)} = 0,1\dot{\omega}$	$\Delta\theta$	$\Delta\omega$
0	0	0,3	0	0	-0,2955	0	-0,2955
	0,05	0,3000	-0,1478	-0,0148	-0,2926	-0,0296	-0,5852
	0,05	0,2926	-0,1463	-0,0146	-0,2855	-0,0292	-0,5710
	0,1	0,2854	-0,2855	-0,0286	-0,2810	-0,0286	-0,2810
						$-0,0874 \cdot \frac{1}{6} =$ $= -0,0146$	$-1,327 \cdot \frac{1}{6} =$ $= -0,2888$
1	0,1	0,2854	-0,2888	-0,0289	-0,2759	-0,0289	-0,2759
	0,15	0,2710	-0,4267	-0,0427	-0,2592	-0,0854	-0,5184
	0,15	0,2641	-0,4184	-0,0418	-0,2527	-0,0836	-0,5054
	0,2	0,2436	-0,5415	-0,0541	-0,2304	-0,0541	-0,2304
						$-0,2520 \cdot \frac{1}{6} =$ $= -0,0420$	$-1,5301 \cdot \frac{1}{6} =$ $= -0,2550$
2	0,2	0,2434	-0,5438	-0,0544	-0,2301	-0,0544	-0,2301
	0,25	0,2162	-0,6589	-0,0659	-0,2013	-0,1318	-0,4026
	0,25	0,2105	-0,6445	-0,0644	-0,1960	-0,1288	-0,3920
	0,3	0,1790	-0,7398	-0,0740	-0,1633	-0,0740	-0,1633

Завдання для самостійної роботи

1. Отримати наближене рішення завдання Коші у формі степеневого ряду, обмежуючись першими чотирма членами.

1. $y' = x + y, y(0) = 1.$

2. $y(0) = 0.$
 $y' = \sin x + y^2,$

3. $0.$
 $y' = xy + e^y, y(0) =$

4. $0.$
 $y' = \cos x + y, y(0) =$

5. $1.$
 $y' = x - \sin y, y(0) =$

1.6. $y' = e^x + \sin y,$
 $y(0) = 1.$

1.7. $y' = y - x^2, y(0) = 0.$

1.8. $1.$
 $y' = \cos x + y, y(0) =$

1.9. $0.$
 $y' = e^x + y^2, y(0) =$

1.10. $0.$
 $y' = x + \cos y, y(0) =$

2. Знайти рішення задачі Коші методом послідовних наближень, обмежуючись третім наближенням

1.11. $y' = x^2 + y, y(0) = 0.$

1.16. $0.$
 $y' = x^3 y + 1, y(0) =$

12. $y' = x - y^2, y(0) = 0.$ 1.17. 0. $y' = 1 - 2y, y(0) =$
 13. $y' = y + 2x, y(0) = 1.$ 1.18. 1. $y' = x^2 - 3y, y(0) =$
 14. $y' = xy + x^2, y(0) = 0.$ 1.19. 0. $y' = x^3 - y, y(0) =$
 15. $y' = x^2 - xy, y(0) = 1.$ 1.20. $y' = 1 + x - y,$
 $y(0) = 1.$

3. Методом Ейлера вирішити завдання Коші на відрізку $[0; 1]$ з кроком $h = 0,25$.

21. 0. $y' = y + \cos x, y(0) =$ 1.26. 1. $y' = x^3 - y^2, y(0) =$
 22. $y' = x + y^2, y(0) = 0.$ 1.27. $y', y(0) = 1.$ $y' = x \cos x -$
 23. $y' = 3y - 1, y(0) = 1.$ 1.28. $y' = x - y, y(0) = 1.$
 24. $y' = xy^2, y(0) = 1.$ 1.29. 1. $y' = (1 + x)y, y(0) =$
 25. $y' = xy + 1, y(0) = 1.$ 1.30. $y(0) = 0.$ $y' = 2xy + x^3,$

4. Удосконаленим методом Ейлера вирішити завдання Коші на відрізку $[1; 2]$ з кроком $h = 0,25$.

31. $y' = x^2 - y^2, y(1) = 0.$ 1.36. $y' = x^2 + y, y(1) = 1.$
 32. $y' = 1 + x - y^2, y(1) = 0.$ 1.37. 1. $y' = x + ye^x, y(1) =$
 33. $y' = x^2y + e^{2x}, y(1) = 0.$ 1.38. $y(1) = 0.$ $y' = xy + \sin x,$
 34. $y' = x^2 + \sin^2 x, y(1) = 1.$ 1.39. $y(1) = 0.$ $y' = \cos x - y^3,$
 35. $y' = x^3 + y \cos x, y(1) = 0.$ 1.40. $y(1) = 0.$ $y' = \sin x + e^x,$

5. Методом Рунге-Кутта четвертого порядку точності вирішити завдання Коші на відрізку $[0; 1]$ з кроком $h = 0,25$.

41. $y' = 1 + y \sin x, y(0) = 1.$ 1.4 6. 1. $y' = \cos(xy) + x - y, y(0) =$
 42. $y' = \frac{\cos x}{x+1} - y^2, y(0) = 0.$ 1.4 7. 0. $y' = 1 - \sin(2x + y), y(0) =$
 43. 1. $y' = 1 + y \sin x - y^2, y(0) =$ 1.4 8. $y' = \cos y - y^2, y(0) = 0.$
 44. $y' = \cos(x + y) - y, y(0) = 0.$ 1.4 9. 0. $y' = x + y \sin x - y^2, y(0) =$
 45. $y' = \sin x - y^2 + 1,$ 1.6 $y' = e^x + \cos y,$
 $y(0) = 0.$ 0 $y(0) = 0.$

6. Методом «предиктор–корректор» знайти розв'язання задачі Коші на відрізку $[0; 1]$ з кроком $h = 0,25$.

$$\begin{array}{ll}
 \begin{array}{l} 1 \\ .51. \end{array} & \begin{cases} x' = \cos(x + y) + 3 \\ y' = \frac{3}{t + x^2 + 1} + t \end{cases} & .56. & \begin{array}{l} (x + 1)y'' + y' + y = 0, \\ y(0) = 1; y'(0) = 0. \end{array} \\
 & x(0) = 1; y(0) = 0. & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \begin{array}{l} 1 \\ .52. \end{array} & \begin{cases} x' = e^{-x} + 2t \\ y' = x^2 + y \end{cases} & .57. & \begin{array}{l} y'' = y' - y + 1, \\ y(0) = 1; y'(0) = 0. \end{array} \\
 & x(0) = 1; y(0) = 1. & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \begin{array}{l} 1 \\ .53. \end{array} & \begin{cases} x' = \sin x - 7y \\ y' = x - \cos y \end{cases} & .58. & \begin{array}{l} y'' + y' = xy, \\ y(0) = 1; y'(0) = 1. \end{array} \\
 & x(0) = 1; y(0) = 1. & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \begin{array}{l} 1 \\ .54. \end{array} & \begin{cases} x' = -x + 3yt \\ y' = -x + \cos y^2 \end{cases} & .59. & \begin{array}{l} y'' = xy' - 4y, \\ y(0) = 0; y'(0) = 1. \end{array} \\
 & x(0) = 0; y(0) = 1. & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \begin{array}{l} 1 \\ .55. \end{array} & \begin{cases} x' = 3x + y^2 \\ y' = \sin xt + e^{-x} \end{cases} & .60. & \begin{array}{l} y'' - x^2y' + y = x^2, \\ y(0) = 0; y'(0) = 0. \end{array} \\
 & x(0) = 0; y(0) = 0. & &
 \end{array}$$

РОЗДІЛ 2. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Загальна постановка крайової задачі

Розглянемо диференціальне рівняння n -го порядку ($n \geq 2$)

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (2.1)$$

Крайова задача для рівняння (2.1) формулюється наступним чином: знайти рішення $y = y(x)$ рівняння (2.1), яке в точках $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, k; k \geq 2$) задовольняє n незалежним між собою крайовим умовам, у загальному випадку нелінійним:

$$\Gamma_v(y_1, y_1', \dots, y_1^{(s_{1v})}, \dots, y_k, y_k', \dots, y_k^{(s_{kv})}) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n). \quad (2.2)$$

Іноді похідна $y^{(n)}$, що входить у (2.1), може бути виражена через потрібну функцію y та її молодші похідні $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$. Тоді можна вважати, що

$$s_{iv} \leq n - 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k; v = 1, 2, \dots, n). \quad (2.3)$$

Розглянемо, для визначеності, крайове завдання лінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку [6]:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (2.4)$$

$$\alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = \gamma_0,$$

$$\alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_1, \quad (2.5)$$

де $p(x), q(x), f(x) \in C[a, b]$ – задані функції, $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ – задані числа, причому $\alpha_j^2 + \beta_j^2 > 0, j = 0, 1$.

Крайові умови (2.5) у загальному випадку задають лінійний зв'язок між значенням шуканого рішення та його похідною на кінцях відрізка $[a, b]$ окремо. У окремому випадку, якщо $\alpha_j = 1, \beta_j = 0$, то на відповідному кінці відрізка задано значення шуканого рішення. Така крайова умова називається умовою першого роду. Якщо $\alpha_j = 0, \beta_j = 1$, то на кінці відрізка встановлено значення похідної рішення. Ця крайова

умова є умовою другого роду. У випадку, коли $\alpha_j = 0$, $\beta_j = 1$, крайова умова називається умовою третього роду.

Задачі (2.4), (2.5), якщо (2.5) є крайовими умовами першого чи другого роду, можна дати геометричну інтерпретацію.

У разі крайових умов першого роду потрібно знайти інтегральну криву диференціального рівняння (2.4), що проходить через ці точки $M(a, \gamma_0)$ та $N(b, \gamma_1)$.

Крайова задача (2.4), (2.5) за крайових умов другого роду геометрично зводиться до пошуку інтегральної кривої рівняння (2.4), що перетинає прямі $x = a$ та $x = b$ під заданими відповідно кутами α і β такими, що $\operatorname{tg} \alpha = \gamma_0$ і $\operatorname{tg} \beta = \gamma_1$.

Задача Коші для рівняння (2.4), у якій одному кінці відрізка задаються значення рішення та її похідної, переважно більшості має єдине рішення. Крайова задача (2.4), (2.5) може мати або одне рішення, або безліч рішень, або може зовсім не мати рішень.

Для того, щоб існувало єдине рішення неоднорідної крайової задачі (2.4), (2.5), необхідно і достатньо, щоб відповідна однорідна крайова задача ($f(x) \equiv 0$, $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$) мала лише тривіальне рішення $y(x) \equiv 0$.

Однак ця умова не завжди вдається перевірити. У цьому розділі припускатимемо існування єдиного рішення заданої крайової задачі, що часто випливає з фізичних міркувань.

Точні рішення крайового завдання можливі в окремих випадках. Тому надалі будуть розглянуті чисельні методи рішень крайових завдань (2.4), (2.5)

2.2. Редукція до задачі Коші крайової задачі для лінійного рівняння другого порядку

Розглянемо крайову задачу

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (2.6)$$

$$\alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = \gamma_0,$$

$$\alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_1. \quad (2.7)$$

Рішення шукатимемо у вигляді лінійної комбінації

$$y(x) = Cu(x) + v(x), \quad (2.8)$$

де $u = u(x)$ – ненульове рішення відповідного однорідного рівняння

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0, \quad (2.9)$$

а $v = v(x)$ – часткове рішення даного неоднорідного рівняння (2.6):

$$v'' + p(x)v' + q(x)v = f(x). \quad (2.10)$$

Потрібно, щоб перша крайова умова (2.7) виконувалася для функції $u(x)$ за будь-якого C . Виходячи з цього, отримуємо рівність

$$C\alpha_0 u(a) + \alpha_0 v(a) + C\beta_0 u'(a) + \beta_0 v'(a) = \gamma_0,$$

або

$$C[\alpha_0 u(a) + \beta_0 u'(a)] + \alpha_0 v(a) + \beta_0 v'(a) = \gamma_0. \quad (2.11)$$

Для того, щоб рівність (2.11) була справедливою при будь-якому C , необхідно і достатньо, щоб коефіцієнт C звертався в нуль, тобто. повинні виконуватись рівності:

$$\alpha_0 u(a) + \beta_0 u'(a) = 0; \quad (2.12)$$

$$\alpha_0 v(a) + \beta_0 v'(a) = \gamma_0. \quad (2.13)$$

Для виконання рівностей (2.12), (2.13) достатньо, наприклад, покласти

$$u(a) = \beta_0 k, \quad u'(a) = -\alpha_0 k, \quad (2.14)$$

де константа k відмінна від нуля;

$$v(a) = \frac{\gamma_0}{\alpha_0}, \quad v'(a) = 0, \quad \text{якщо } \alpha_0 \neq 0, \quad (2.15)$$

$$v(a) = 0, \quad v'(a) = \frac{\gamma_0}{\beta_0}, \quad \text{якщо } \beta_0 \neq 0. \quad (2.16)$$

Отже, $u(x)$ має бути розв'язком задачі Коші для однорідного рівняння (2.9), що задовольняє початковим умовам (2.14), а $v(x)$ – розв'язок задачі Коші для неоднорідного рівняння (2.10), що задовольняє початковим умовам (2.15) або (2.16). При цьому для будь-якого C функція (2.8) задовольняє першу умову на кінці $x = a$.

Підберемо постійну C так, щоб функція задовольняла крайову умову (2.7) на кінці $x = b$. Отримаємо

$$C[\alpha_1 u(b) + \beta_1 u'(b)] + [\alpha_1 v(b) + \beta_1 v'(b)] = \gamma_1,$$

$$\text{звідки } C = \frac{\gamma_1 - [\alpha_1 v(b) + \beta_1 v'(b)]}{\alpha_1 u(b) + \beta_1 u'(b)}.$$

Припускаємо, що знаменник

$$\alpha_1 u(b) + \beta_1 u'(b) \neq 0. \quad (2.17)$$

Таким чином, крайова задача (2.6)–(2.7) зведено до двох задач Коші (2.9), (2.14) та (2.10), (2.16) для функцій $u(x)$ та $v(x)$ відповідно.

Зазначимо, що якщо виконано умову (2.17), то крайове завдання (2.6) - (2.7) має єдине рішення. В іншому випадку вона або зовсім не має рішень, або їх безліч.

Слід зазначити, що й вихідне рівняння (2.6) однорідне, тобто $f(x) \equiv 0$ і, крім того, $\gamma_0 = 0$, то через умови (2.15) або (2.16) маємо $v(a) = 0$ і $v'(a) = 0$, отже $v \equiv 0$.

Тоді

$$y(x) = Cu(x),$$

де $u(x)$ є рішення рівняння (2.9), що відповідає початковим умовам (2.14). У цьому випадку

$$C = \frac{\gamma_1}{\alpha_1 u(b) + \beta_1 u'(b)}.$$

Приклад. Знайти рішення однорідного рівняння

$$y'' + y \operatorname{ch} x = 0, \quad (2.18)$$

що задовольняє крайових умов: $y(0) = 0$; $y(1) = 1$.
(2.19)

Рішення. Порівнюючи умови (2.19) із загальними крайовими умовами (2.7), бачимо, що

$$\alpha_0 = 1, \quad \beta_0 = 0, \quad \gamma_0 = 0; \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 1.$$

Маємо

$$y(x) = Cu(x),$$

де $u(x)$ – рішення однорідного рівняння (2.18), що задовольняє початковим умовам (2.14), де прийнято $k = -1$, тобто

$$u(0) = 0; \quad u'(0) = 1. \quad (2.20)$$

З другої крайової умови (2.19) отримуємо $Cu(1) = 1$, звідси $C = \frac{1}{u(1)}$.

Вирішуючи будь-яким чисельним методом завдання Коші (2.18) - (2.20), знаходимо $u(x)$ і постійну C , після чого визначаємо $y(x)$. Остаточні результати обчислень наведено у табл. 2.1. Задача Коші (2.18) - (2.20) вирішувалася за допомогою формул Рунге-Кутта четвертого порядку точності.

Таблиця 2.1

x	$u(x)$	$y(x)$
0	0	0
0,2	0,199	0,243
0,4	0,389	0,475
0,6	0,563	0,687

0,8	0,710	0,867
1	0,819	1

2.3. Метод колокації

Нехай потрібно знайти функцію, яка задовольняє лінійному диференціальному рівнянню:

$$Ly \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (2.21)$$

та лінійними крайовими умовами:

$$\begin{aligned} l_0 y &\equiv \alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = \gamma_0, \\ l_1 y &\equiv \alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_1, \end{aligned} \quad (2.22)$$

де $\alpha_j^2 + \beta_j^2 > 0, j = 0, 1, L, l_0, l_1$ – диференціальні оператори.

Для знаходження наближеного рішення крайової задачі (2.21), (2.22) надаємо наступним чином. Задаємо на відрізку $[a, b]$ лінійно незалежну систему двічі безперервно диференційованих функцій $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x), \dots$, що $u_0(x)$ задовольняє неоднорідним крайовим умовам (2.22), тобто $l_0 u_0 = \gamma_0, l_1 u_0 = \gamma_1$, а інші функції задовольняють однорідним крайовим умовам, тобто $l_0 u_i(x) = 0, l_1 u_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots)$. Задана система функцій $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x), \dots$ називається базисною.

Наближене рішення крайової задачі (2.21), (2.22) шукатимемо у вигляді

$$y_n(x) = u_0(x) + C_1 u_1(x) + \dots + C_n u_n(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(x) \quad (2.23)$$

з невідомими поки що коефіцієнтами $C_1, C_2, \dots, C_n$. Вочевидь, що з лінійності операторів l_0, l_1 , функція (2.23) за будь-яких $C_1, C_2, \dots, C_n$ задовольняє заданим крайовим умовам (2.22). Дійсно,

$$l_j y_n(x) = l_j \left(u_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(x) \right) = l_j u_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i l_j u_i(x) = \gamma_j + 0$$

$\gamma_j, j = 0, 1.$

Функція

$$\begin{aligned} R(x; C_1, C_2, \dots, C_n) &= Ly_n(x) - f(x) = \\ &= Lu_0(x) - f(x) + \sum_{i=1}^n C_k Lu_k(x) \end{aligned} \quad (2.24)$$

називається нев'язкою. Нев'язка дорівнює різниці лівої та правої частин рівняння (2.21), коли в ліву частину замість $y(x)$ підставлена функція $y_n(x)$ (2.23).

Зазвичай не вдається зробити нев'язку тотожно рівною нулю. Тому підбирають параметри $C_1, C_2, \dots, C_n$ таким чином, щоб нев'язка стала по можливості меншою. За способами знаходження параметрів $C_1, C_2, \dots, C_n$ будуються деякі наближені методи вирішення крайового завдання (2.21), (2.22).

[illegible]

Вочевидь, що похибка наближеного рішення (2.23) буде менше, що більше точок колокації ми візьмемо, які кількість, своєю чергою, залежить кількості вибраних базисних функцій.

Приклад. Методом колокації вирішити крайове завдання:

Рішення. Як базисних функцій виберемо поліноми $u_n(x) = x^{2n-2}(1-x^2)$ ($n = 1, 2, \dots$), що задовольняють крайових умов: [5].

В якості точок колокації застосовуємо

$$x_{-1} = -\frac{1}{2}; \quad x_0 = 0; \quad x_1 = \frac{1}{2}.$$

Обмежуючись двома базовими функціями, покладемо

$$y_2(x) = C_1(1 - x^2) + C_2(x^2 - x^4).$$

Підставляючи цей вислів у рівняння (2.26), отримуємо нев'язку:

$$R(x; C_1, C_2) = -2C_1 + C_2(2 - 12x^2) + (1 + x^2)[C_1(1 - x^2) + C_2(x^2 - x^4)] + 1 = 1 - C_1(1 + x^4) + C_2(2 - 11x^2 - x^6). \quad (2.27)$$

У точках колокації $x_0 = 0$ та $x_{\pm 1} = \pm \frac{1}{2}$ маємо

$$R(x_0; C_1, C_2) = 0, \quad R(x_{\pm 1}; C_1, C_2) = 0$$

Звідси, використовуючи формулу (2.27), отримуємо для визначення коефіцієнтів C_1 і C_2 систему лінійних рівнянь алгебри:

$$\begin{cases} 1 - C_1 + 2C_2 = 0, \\ 1 - \frac{17}{16}C_1 - \frac{49}{64}C_2 = 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Вирішуючи систему (2.28), знаходимо

$$C_1 = 0,957; \quad C_2 = -0,022$$

Отже, маємо наближене рішення:

$$y_{\square}(x) = 0,957(1 - x^2) - 0,022(x^2 - x^4).$$

2.4. Метод Гальоркіна

Гальоркіна заснований на теоремі, яка доводиться теоретично загальних рядів Фур'є.

Теорема. Нехай $\{u_n(x)\}$ – повна система функцій з ненульовою нормою, ортогональних на відрізку $[a, b]$. Якщо безперервна функція $f(x)$ ортогональна на відрізку $[a, b]$ всім функціям $u_n(x)$, тобто

$$\int_a^b f(x)u_n(x)dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.29)$$

то $f(x) \equiv 0$ при $a \leq x \leq b$.

Зауваження: Ґрунтуючись на сформульованій теоремі, можна довести, що якщо безперервна функція $f(x)$ ортогональна до кінцевої системи функцій

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_N(x),$$

то при досить великому N функція $f(x)$ в середньому на відрізку $[a, b]$ буде як завгодно мала.

Нехай маємо лінійну крайову задачу:

$$Ly = f(x), \quad (2.30)$$

де

і крайові умови:

$$\begin{aligned} l_0 y &\equiv \alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = \gamma_0, \\ l_1 y &\equiv \alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_1 \\ &\quad (\alpha_j^2 + \beta_j^2 > 0, \quad j = 0, 1). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Наближене рішення задачі (2.30), (2.31) знову шукатимемо у вигляді

$$y_n(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i u_i(x). \quad (2.32)$$

Знову вибираємо систему базисних функцій $u_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) і формуємо нев'язку $R(x; C_1, C_2, \dots, C_n)$. Відповідно до методу Гальоркіна вимагаємо, щоб нев'язка R була ортогональна до базисних функцій $u_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), що за достатньо великої кількості цих функцій забезпечує забезпечує мінімальність нев'язки в середньому, тобто погрішність наближеного розв'язку, як і в попередніх методах, залежить від кількості базисних функцій.

Таким чином, для визначення коефіцієнтів C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) приходимо до системи лінійних рівнянь алгебри:

$$\begin{cases} \int_a^b R(x; C_1, C_2, \dots, C_n) u_1(x) dx = 0, \\ \int_a^b R(x; C_1, C_2, \dots, C_n) u_2(x) dx = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \int_a^b R(x; C_1, C_2, \dots, C_n) u_n(x) dx = 0, \end{cases} \quad (2.33)$$

або у розгорнутому вигляді:

$$\sum_{i=1}^n C_i \int_a^b u_j(x) Lu_i(x) dx = \int_a^b u_j(x) [f(x) - Lu_0(x)] dx$$

$$(j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.34)$$

Приклад. Методом Гальоркіна вирішити крайову задачу:

$$Ly \equiv y'' + y = -x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (2.35)$$

Рішення. Вибираємо базисні функції:

$$u_0(x) = 0, \quad u_i(x) = x^i(1-x), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.36)$$

що задовольняють заданим однорідним крайовим умовам.

Нехай $n = 1$. Тоді маємо дві базисні функції

$$u_0(x) = 0; \quad u_1(x) = x(1 - x).$$

Оскільки $f(x) = -x$,

$$Lu_1(x) = u_1''(x) + u_1(x),$$

$Lu_0(x) = 0$ и $n = 1$, то система (2.34) обертається в одне рівняння:

$$C_1 \int_0^1 (-2 + x(1-x))x(1-x)dx = - \int_0^1 x^2(1-x)dx.$$

Після обчислення інтегралів отримаємо

$$-\frac{3}{10}C_1 = -\frac{1}{12}.$$

Отже, $C_1 = \frac{5}{18}$ та наближене рішення (2.34) має вигляд

$$y_1(x) = \frac{5}{18}x(1-x).$$

Розглянемо тепер $n = 2$, тобто. три базисні функції:

$$u_0(x) = 0,$$

$$u_1(x) = x(1-x),$$

$$u_2(x) = x^2(1-x).$$

Тоді система рівнянь (2.34), якій задовольняють шукані коефіцієнти C_1, C_2 , набуде вигляду

$$\begin{aligned} C_1 \int_0^1 (-2 + x(1-x))x(1-x)dx \\ + C_2 \int_0^1 (2 - 6x + x^2(1-x))x(1-x)dx = \\ = - \int_0^1 x^2(1-x)dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 \int_0^1 (-2 + x(1-x))x^2(1-x)dx \\ + C_2 \int_0^1 (2 - 6x + x^2(1-x))x^2(1-x)dx = \\ = - \int_0^1 x^3(1-x)dx. \end{aligned}$$

Обчислюючи інтеграли, знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{3}{10}C_1 + \frac{3}{20}C_2 &= \frac{1}{12}; \\ \frac{3}{20}C_1 + \frac{13}{105}C_2 &= \frac{1}{20} \end{aligned}$$

Звідси отримуємо $C_1 = 71/369$; $C_2 = 7/41$.

Шукане наближене рішення має вигляд

$$y_2(x) = x(1-x) \left(\frac{71}{369} + \frac{7}{41}x \right).$$

Для порівняння наведемо деякі значення точного рішення $y(x) = \sin x / \sin 1 - x$ крайової задачі (2.35), а також $y_1(x)$, $y_2(x)$ (табл. 2.2).

Таблиця 2.2

x	y	y_1	y_2
0,25	0,044	0,052	0,044
0,50	0,070	0,069	0,069
0,75	0,060	0,052	0,060

Таким чином, у першого наближення $y_1(x)$ погрішність порядку 0,01, а у другого – порядку 0,001.

2.5. Різницьвий метод. Основні поняття теорії різницьвих схем

Розглянемо крайову задачу:

$$Lu \equiv u'' + p(x)u' - q(x)u = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.37)$$

$$l_0 u \equiv u(0) = \gamma_0, \quad l_1 u \equiv u(1) = \gamma_1, \quad (2.38)$$

де $p, q, f \in C_2[0; 1]$ – задані функції, $q(x) \geq 0$ на відрізку $[0; 1]$, γ_0, γ_1 – задані числа.

Сітки та сіткові функції. Задаємо на відрізку $[0; 1]$ кінцеву множину точок (вузлів), на якому знаходимо наближене рішення задачі (2.37), (2.38):

$$\omega_h = \{x_j\}_{j=0}^N,$$

де $x_j = jh$, $h = 1/N$, $N \geq 2$ – натуральне.

Множину ω_h назвемо сіткою. Розглянемо також сітку ω'_h , отриману з ω_h відкиданням крайніх (граничних) вузлів x_0, x_N . Нехай також $\omega_h^* = \{x_0; x_N\}$ – сітка, що складається з двох граничних вузлів.

Функцію $y(x)$, областю визначення якої є якась сітка ω_h , ω'_h або ω_h^* , назвемо сітковою. Введемо позначення: $y_j = y(x_j)$, $(j = 0, 1, \dots, N)$.

Позначимо Y_h, Y'_h, Y_h^* – множини всіх сіткових функцій, визначених відповідно на $\omega_h, \omega'_h, \omega_h^*$. У лінійних просторах Y_h, Y'_h, Y_h^* сіткових функцій встановимо відповідні норми:

$$\|y\|_h = \max_{0 \leq j \leq N} |y_j|,$$

$$\|y\|'_h = \max_{1 \leq j \leq N-1} |y_j|,$$

$$\|y\|_h^* = \max\{|y_0|, |y_N|\}, \quad (2.39)$$

які будуть використовуватись нижче.

Різницеві оператори. Оператор $L^h u$ називається різницевим, якщо він кожній сіткової функції $u \in Y_h$ ставить у відповідність деяку сіткову функцію, що належить Y_h' (или Y_h^*).

Наприклад:

$$\begin{aligned} (L^h u)_j &= u_{j+1}, \\ j &= 1, 2, \dots, N-1; \\ (l^h u)_j &= u_j, \quad j = 0, N; \\ (L^h u)_j &= \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1; \\ (l^h u)_j &= \begin{cases} \frac{u_1 - u_0}{h}, & j = 0, \\ \frac{u_N - u_{N-1}}{h}, & j = N. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Індекс j у лівій частині рівностей вказує номер вузла, у якому оператор приймає це право значення.

Розглянемо диференціальний оператор

$$Lu = u'' + p(x)u' - q(x)u, \quad (2.41)$$

та введемо єдиний оператор

$$lu = \begin{cases} l_0 u, & x = 0, \\ l_1 u, & x = 1, \end{cases} \quad (2.42)$$

для граничних умов $l_0 u = u(0)$, $l_1 u = u(1)$.

За допомогою операторів (2.41), (2.42) крайову задачу (2.37), (2.38) можна записати компактно у такому вигляді:

$$Lu = f, \quad (2.43)$$

$$lu = \gamma, \quad (2.44)$$

$$\text{де } \gamma = \begin{cases} \gamma_0, & x = 0, \\ \gamma_1, & x = 1. \end{cases}$$

Апроксимуємо задану на відрізку $[0;1]$ диференціальну крайову задачу (2.37), (2.38) (або, що одне і теж, завдання (2.41), (2.42)) деякою крайовою задачею, в якій шуканою є сіткова функція на сітці ω_h . Будуємо спочатку деякі різницеві оператори, що апроксимують диференціальний оператор lu і граничний оператор lu , і складаємо на сітці ω_h різницеву крайову задачу, яку прийнято називати різницевою схемою для диференціальної задачі (2.37), (2.38).

Після цього досліджують стійкість різницевої схеми та збіжність її вирішення до вирішення диференціальної задачі при прагненні кроку сітки до нуля. До різницевої схеми також пред'являється важлива

вимога, щоб знаходження її рішення міг бути застосований досить ефективний чисельний метод. Поняття апроксимація, стійкість і збіжність вводяться нижче.

Апроксимуємо диференціальний оператор Lu на сітці ω'_h різницевим оператором $L^h u$, отриманим з (2.41) шляхом заміни у вузлах сітки ω'_h похідних u' , u'' відповідними різницевиими похідними за формулами

$$u'_j \approx \frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2h}, \quad u''_j \approx \frac{u_{j-1}-2u_j+u_{j+1}}{h^2},$$

де $u_j^{(k)} = u^{(k)}(x_j)$ ($k = 1, 2; j = 1, 2, \dots, N-1$).

Оператор $L^h u$, побудований за вказаним правилом, має такий вигляд:

$$(L^h u)_j = \frac{u_{j-1}-2u_j+u_{j+1}}{h^2} + p_j \frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2h} - q_j u_j, \quad (2.45)$$

де $p_j = p(x_j)$, $q_j = q(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, N-1$.

Оскільки наведені вище різницеві похідні, за допомогою яких замінили похідні u' , u'' (2.41), є формулами чисельного диференціювання другого порядку точності (щодо h), то справедливі нерівності

$$\left| p(x_j)u'(x_j) - p_j \frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2h} \right| \leq \frac{h^2}{6} \|p\|_C \|u'''\|_C,$$

$$\left| u''(x_j) - \frac{u_{j-1}-2u_j+u_{j+1}}{h^2} \right| \leq \frac{h^2}{12} \|u^{(4)}\|_C,$$

де $\|p\|_C = \max_{[0;1]} |p(x)|$, $u \in C_4[0; 1]$.

Звідси і з (2.41), (2.45) згідно з визначенням норми (2.39) легко випливає, що

$$\|Lu - L^h u\|'_h \leq C_u h^2, \quad (2.46)$$

де C_h – деяка, яка не залежить від h постійна.

Кажуть, що різницевий оператор $L^h u$ апроксимує диференціальний оператор Lu з k -м порядком щодо кроку h , якщо $k > 0$ і для будь-якої досить гладкої функції $u(x)$ виконується нерівність

$$\|Lu - L^h u\|'_h \leq C_u h^k, \quad (2.47)$$

де C_u – деяка, незалежна від h , постійна.

Таким чином, розглянутий вище різницевий оператор (2.45) апроксимує, згідно з (2.46), диференціальний оператор (2.41) з другим порядком щодо h .

Граничний оператор (2.42), з якого задаються крайові умови першого роду (2.38), тобто. умови (2.44), природно апроксимувати різницевим оператором (2.40).

Складемо різницеву схему:

$$L^h y = f, \quad (2.48)$$

$$l^h y = g, \quad (2.49)$$

де $L^h y$ – різницевий оператор, визначений за формулою (2.45), y – наближений розв’язок задачі (2.37), (2.38), $l^h y$ – різницевий оператор (2.40), $f \in Y'_h$ – сіткова функція, що породжена правою частиною рівняння (2.43), $g \in Y_h^*$ – задана сіткова функція зі значеннями $g_0 = \gamma_0$, $g_N = \gamma_1$.

Ця різницева схема у більш докладному записі має вигляд

$$\frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2} + p_j \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} - g_j y_j = f_j, \quad (j = 1, 2, \dots, N-1) \quad (2.50)$$

$$y_0 = \gamma_0, \quad y_N = \gamma_1. \quad (2.51)$$

Очевидно, що (2.50), (2.51) являють собою систему лінійних рівнянь алгебри з тридіагональною матрицею (ненульові коефіцієнти при невідомих розташовані тільки на головній діагоналі і двох сусідніх діагоналях), для знаходження рішення якої може бути застосований, наприклад, дуже ефективний на практиці метод прогонки. Зауважимо, що якщо

$$h < h_0 = \min \left\{ 1; \frac{2}{\|p\|_C} \right\}, \quad (2.52)$$

то будуть виконані умови існування єдиного рішення системи (2.50), (2.51), знайденого методом прогонки.

Розв’язок $u(x)$ диференціальної задачі (2.43), (2.44) не задовольняє на сітці ω_h різницеvim рівнянням (2.48), (2.49). Однак справедливй рівність

$$L^h u = f + \psi(\text{на } \omega'_h), \quad (2.53)$$

$$l^h u = g + \phi(\text{на } \omega_h^*), \quad (2.54)$$

де $\psi = L^h u - f$, $\phi = l^h u - g$ – сіткові функції, які називаються нев’язками розв’язання диференціальної задачі для різницевої задачі ($\psi \in Y'_h$ – нев’язка для різницевого рівняння (2.48), $\phi \in Y_h^*$ – нев’язка для крайових умов (2.49)).

Кажуть, що різницева схема апроксимує диференціальну задачу на її розв'язанні $u(x)$ з k -м порядком щодо h , якщо $k > 0$ і норми нев'язок розв'язання диференціальної задачі мають вигляд

$$\|\psi\|_h' = O(h^k), \quad \|\phi\|_h^* = O(h^k). \quad (2.55)$$

Покажемо, що різницева схема (2.50), (2.51) апроксимує крайову задачу (2.37), (2.38) на її розв'язанні $u(x)$ з другим порядком щодо h . Справді, оскільки $Lu = f$, то

$$\psi = L^h u - f = L^h u - Lu \text{ на } \omega_h'$$

і, отже, згідно (2.46), де $L^h u$ – оператор (2.45), маємо

$$\|\psi\|_h' = \|L^h u - Lu\|_h' = \|Lu - L^h u\|_h' = O(h^2).$$

того, відповідно (2.54), (2.40), (2.49), (2.38) отримуємо

$$\|\phi\|_h^* = \max\{|u_0 - g_0|, |u_N - g_N|\} = \max\{|u(0) - \gamma_0|, |u(1) - \gamma_1|\} = O(h),$$

а постійна, що дорівнює нулю, також є величиною порядку $O(h^2)$.

Далі будемо вважати, що різницева схема стійка, якщо існує таке $h_0 > 0$, що за будь-якого $h = 1/N < h_0$ і довільних сіткових функцій $\xi \in Y_h'$, $\eta \in Y_h^*$ різницева задача

$$L^h z = \xi, \quad (2.56)$$

$$l^h z = \eta, \quad (2.57)$$

має єдине рішення $z \in Y_h$, причому виконується нерівність

$$\|z\|_h \leq C' \|\xi\|_h' + C^* \|\eta\|_h^*, \quad (2.58)$$

де C' , C^* – деякі постійні, які не залежать ні від h , ні від функції ξ ,

η .

Зазначимо, що властивість стійкості (чи нестійкості) різницевої схеми є внутрішньою властивістю різницевої схеми як такої, тобто. воно ніяк не пов'язується з тим вихідним диференціальним завданням, для якої побудована різницева схема. Дуже важливо, щоб різницева схема була стійка.

Нестійкі схеми різниці непридатні для практичних розрахунків, оскільки вони надзвичайно чутливі до похибок округлень, що сильно спотворює отримане наближене рішення.

Кажуть, що різницева схема апроксимує диференціальну задачу на її розв'язанні $u(x)$ з k -м порядком щодо h , якщо $k > 0$ і норми нев'язок розв'язання диференціальної задачі мають вигляд

$$\|u - y\|_h = O(h^k). \quad (2.59)$$

І тут кажуть також, що різницева схема має k -й порядок точності

Слід зазначити, що наявність збіжності у сенсі (2.55) при подрібненні сітки залежить від властивостей рішення $u(x)$ вихідної задачі, від різницевої схеми, а також від вибору норм Y_h, Y'_h, Y_h^* . Говорячи про збіжність рішення різницевої схеми слова «при подрібненні сітки» для стислості опускатимемо.

Апроксимація крайових умов другого та третього роду. Розглянемо більш загальну, ніж (2.37), (2.38), крайову задачу

$$Lu \equiv u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (2.60)$$

$$l_0 u \equiv \alpha_0 u(a) + \beta_0 u'(a) = \gamma_0, \quad (2.61)$$

де $p, q, f \in C[a, b]$ – задані функції, $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ – задані числа, причому $\alpha_j^2 + \beta_j^2 > 0, j = 1, 2$.

Крайові умови (2.61) можуть бути умовами першого роду ($\alpha_j \neq 0, \beta_j = 0$), умовами другого ($\alpha_j = 0, \beta_j \neq 0$), а також умовами третього роду ($\alpha_j \neq 0, \beta_j \neq 0$).

Цю крайову задачу також можна розв'язати за допомогою різницевого методу.

Похідні u', u'' , які входять у рівняння (2.60), замінюємо як і, як було описано вище, тобто. диференціальне рівняння (2.60) апроксимуємо виразом (2.50) з другим порядком щодо h . Необхідно також апроксимувати і похідні $u'(a), u'(b)$, що входять до крайових умов (2.61). Використовувати для цих цілей центральну похідну різницевої $(y_{j+1} - y_{j-1})/2h$, яка застосовувалася для апроксимації похідної $u'(x_j)$ в рівнянні (2.77), не можна, так як зазначена різницева похідна для вузла x_j містить значення функції в двох сусідніх вузлах x_{j-1}, x_{j+1} , що з крайніх вузлів x_0, x_N неприйнятно. У цьому випадку можна покласти

$$u'_0 \approx \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}, \quad u'_N \approx \frac{3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2}}{2h},$$

$$\text{де } u'_0 = u'(a), u'_N = u'(b).$$

Дані формули є формулами чисельного диференціювання другого порядку точності. Таким чином, побудована різницева схема

$$\frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2} + p_j \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} + q_j y_j = f_j \quad (j = 1, 2, \dots, N-1). \quad (2.62)$$

$$\alpha_0 y_0 + \beta_0 \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = \gamma_0,$$

$$\beta_0 y_N + \beta_1 \frac{3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2}}{2h} = \gamma_1 \quad (2.63)$$

апроксимуватиме диференціальну крайову задачу (2.60), (2.61) на її розв'язку $u(x)$ з другим порядком щодо кроку h .

Приклад. Методом скінченних різниць знайти рішення крайової задачі:

$$y'' + (1 + x^2)y = -1, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (2.64)$$

Рішення. Виберемо крок $h = 0,5$. Вважаючи $x_{-2} = -1$; $x_{-1} = -0,5$; $x_0 = 0$; $x_1 = 0,5$; $x_2 = 1$, зважаючи на симетрію рівняння та крайових умов будемо мати

$$y_{-2} = y_2 = 0, \quad y_{-1} = y_1.$$

Таким чином, потрібно визначити лише дві ординати: y_0 та y_1 .

Представимо рівняння (2.81) у вигляді

$$\frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2} + (1 - x_j^2)y_j = -1.$$

При $j = 0$, тобто. $x_0 = 0$, маємо

$$(y_1 - 2y_0 + y_{-1})/0,25 + y_0 = -1$$

Аналогічно за $j = 1$, тобто $x_1 = 0,5$, маємо

$$(y_0 - 2y_1 + y_2)/0,25 + (1 + 0,25)y_1 = -1$$

Враховуючи, що $y_{-1} = y_1$ та використовуючи крайову умову $y_2 = 0$, отримуємо систему рівнянь

$$-7y_0 + 8y_1 = -1,$$

$$4y_0 = 6,75y_1 = -1,$$

вирішуючи яку знаходимо $y_0 = 0,967$; $y_1 = 0,721$.

Таблиця 2.3

x	-1	-0,5	0	0,5	1
y	0	0,721	0,967	0,721	0

2.6. Метод Рігца

Визначення. Закон, яким кожному функції, з деякого класу функцій, ставиться у відповідність певне число називається функціоналом.

Наприклад, розглянемо множину функцій $y(x)$ безперервно-диференційованих на відрізку $[a; b]$. Тоді довжина дуги s кривої $y = y(x)$ між точками $x = a$ і $x = b$ є функціонал від $y(x)$, який може бути виражений формулою $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$.

Визначення. Нехай лінійний оператор L визначений на лінійному множині функцій $\mathcal{U}$ (допустимі функції), заданих і безперервних в ω , і його значення Lu являють собою функції, також певні і безперервні в ω .

Лінійний оператор L називається симетричним (самоспряженим), якщо для будь-яких допустимих функцій u та v справедливе співвідношення

$$\int_{\omega} v L u d\omega = \int_{\omega} u L v d\omega,$$

$$\text{тобто } (Lu, v) = (u, Lv)$$

Якщо, крім того, для будь-якої допустимої функції u виконується нерівність $(Lu, u) \geq 0$,

причому

$$(Lu, u) = 0$$

тоді и лише тоді, коли $u \equiv 0$, то оператор L називається позитивним.

Розглянемо крайове завдання загального вигляду:

$$Ly = f, \quad (2.65)$$

$$Ry = 0, \quad (2.66)$$

де L и R – лінійні диференціальні оператори для рівняння та крайових умов відповідно.

Теорема 1. Нехай L – симетричний оператор, певний і позитивний у класі $C_2[a; b]$ функцій, що задовольняють, крім того, заданим крайовим умовам (2.66), а $F[y]$ – функціонал виду

$$F[y] = (Ly, y) - 2(f, y) \equiv \int_{\omega} (Ly - 2f)y d\omega, \quad (2.67)$$

де f – права частина рівняння (2.65).

Якщо крайова задача (2.65)–(2.66) з однорідними граничними умовами має розв'язок y , це рішення є мінімумом функціонала $F[y]$.

Навпаки, якщо у класі $C_2[a; b]$ існує функція y , що є мінімумом функціонала (2.67), то ця функція і є рішенням рівняння (2.65).

Доведення. Нехай $\bar{y}$ є рішенням крайової задачі (2.652) - (2.66), тобто.

$$L\bar{y} = f \quad \text{и} \quad R[\bar{y}] = 0.$$

Підставляючи $f = L\bar{y}$ в формулу (2.67), отримуємо

$$F[y] = (Ly, y) - 2(L\bar{y}, y).$$

Оскільки оператор L симетричний, то справедливі рівності

$$(L\bar{y}, y) = (\bar{y}, Ly) = (Ly, \bar{y}).$$

Тоді

$$\begin{aligned} F[y] &= (Ly, y) - (Ly, \bar{y}) - (L\bar{y}, y) = \\ &= (Ly, y - \bar{y}) - [(L\bar{y}, y) - (L\bar{y}, \bar{y})] - (L\bar{y}, \bar{y}) = \\ &= (Ly, y - \bar{y}) - (L\bar{y}, y - \bar{y}) - (L\bar{y}, \bar{y}) = \\ &= (L(y - \bar{y}), (y - \bar{y})) - (L\bar{y}, \bar{y}). \end{aligned} \quad (2.68)$$

У правій частині формули (2.68) тільки перший доданок є змінною величиною. Очевидно, що $(y - \bar{y}) \in C_2[a; b]$, тому через позитивність оператора L маємо

$$(L(y - \bar{y}), (y - \bar{y})) \geq 0.$$

Таким чином, функціонал $F[y]$ досягає свого найменшого значення для тих і лише тих допустимих функцій y , для яких справедлива рівність

$$(L(y - \bar{y}), (y - \bar{y})) = 0.$$

Тоді, оскільки оператор L позитивний, маємо

$$y - \bar{y} \equiv 0,$$

тобто $y \equiv \bar{y}$.

Таким чином, першу частину теореми доведено. Доведемо тепер зворотнє твердження.

Нехай існує функція $\bar{y}$ з класу $C_2[a; b]$, що є мінімумом функціоналу (2.67). Це означає, що для будь-якої функції $y_1 \in C_2[a; b]$ і досить близькою до $\bar{y}$ справедлива нерівність

$$F[y_1] - F[\bar{y}] \geq 0.$$

Нехай

$$\eta = (y_1 - \bar{y}) \in C_2[a; b].$$

Розглянемо сімейство функцій:

$$y = \bar{y} + \alpha\eta, \quad (2.69)$$

де α – числовий параметр. Очевидно, за будь-якої функції y є допустимими і за досить малого $|\alpha|$ виконується нерівність

$$\Delta F = F[y] - F[\bar{y}] \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \Delta F[y] &= (Ly, y) - 2(f, y) - (L\bar{y}, \bar{y}) + 2(f, \bar{y}) = (Ly, y) - 2(L\bar{y}, y) + \\ &+ 2(L\bar{y} - f, y) - 2(L\bar{y} - f, \bar{y}) + (L\bar{y}, \bar{y}) = (Ly, y) - 2(L\bar{y}, y) + \\ &+ 2(L\bar{y} - f, y - \bar{y}) + (L\bar{y}, \bar{y}) \geq 0. \end{aligned}$$

Далі, використовуючи перетворення (2.68) та формулу (2.69), знаходимо

$$\begin{aligned} \Delta F[y] &= (L(y - \bar{y}), (y - \bar{y})) - (L\bar{y}, \bar{y}) + 2(L\bar{y} - f, y - \bar{y}) + (L\bar{y}, \bar{y}) = \\ &= \alpha^2(L\eta, \eta) + 2\alpha(L\bar{y} - f, \eta) \geq 0. \end{aligned}$$

Ліва частина останньої нерівності є квадратним тричленом щодо параметра α , причому цей тричлен не може змінювати знак. Отже, відповідне квадратне рівняння немає дійсних різних коренів і, отже, дискримінант його неперезитивний, тобто.

$$(L\bar{y} - f, \eta)^2 - (L\eta, \eta) \cdot 0 \leq 0,$$

Звідси

$$(L\bar{y} - f, \eta) = 0.$$

Таким чином,

$$\int_{\omega} (L\bar{y} - f)\eta d\omega = 0$$

для будь-якої функції $\eta \in C_2[a; b]$. Тоді через довільність функції η маємо

$$L\bar{y} - f \equiv 0,$$

тобто $L\bar{y} = f$.

Таким чином, $\bar{y}$ є рішенням крайової задачі (2.65), (2.66).

Теорему доведено.

Розглянемо тепер звичайне диференціальне рівняння:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = \phi(x) \quad (2.70)$$

з лінійними крайовими умовами:

$$\begin{aligned} \alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) &= \gamma_0, \\ \alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) &= \gamma_1, \end{aligned} \quad (2.71)$$

де функції $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\phi(x)$ безперервні на відрізку $[a; b]$.

Помноживши праву та ліву частини (2.70) на $e^{\int p_1(x)dx}$, приведемо його до самоспряженого вигляду:

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = f(x), \quad (2.72)$$

де $p(x) = e^{\int p_1(x)dx}$, $q(x) = p_2(x)e^{\int p_1(x)dx}$, $f(x) = \phi(x)e^{\int p_1(x)dx}$.

Введемо лінійний оператор:

$$Ly = -\frac{d}{dx}(p(x)y') - q(x)y.$$

Тоді рівняння (2.72) запишеться у вигляді

$$Ly = -f(x). \quad (2.73)$$

Припустимо спочатку, що крайові умови (2.71) однорідними, тобто.

$$\begin{aligned} \alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) &= 0, \\ \alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) &= 0, \end{aligned} \quad (2.74)$$

і що $\beta_0 \geq 0$ та $\beta_1 \geq 0$.

Можна показати, що в цьому випадку оператор L є самоспряженим (симетричним) у класі функцій $C_2[a; b]$, безперервних на відрізку $[a; b]$ вразом зі своїми першими та іншими похідними та задовольняють на кінцях відрізка $[a; b]$ однорідним крайовим умовам (2.74).

З'ясуємо, за яких умов оператор L є позитивним.

Для функції $y \in C_2[a; b]$ маємо

$$(Ly, y) = - \int_a^b \left\{ \frac{d}{dx} (p(x)y') + q(x)y \right\} y dx. \quad (2.75)$$

Після інтегрування частинами перший член формули (2.75), отримаємо

$$(Ly, y) = -p(x)yy' \Big|_a^b + \int_a^b [p(x)(y')^2 - q(x)y^2] dx. \quad (2.76)$$

Оскільки $p(x) > 0$, то з формули (2.76) витікає, що оператор L позитивний, якщо

$$q(x) \leq 0 \quad \text{при} \quad a \leq x \leq b \quad (2.77)$$

і

$$y(a)y'(a) \geq 0, \quad y(b)y'(b) \leq 0. \quad (2.78)$$

Так як $\beta_0 \geq 0$ і $\beta_1 \geq 0$ за припущенням, то через крайові умови (2.74) нерівності (2.78) еквівалентні нерівностям

$$\alpha_0 \leq 0, \quad \alpha_1 \geq 0. \quad (2.79)$$

Таким чином, крайова задача (2.73), (2.74) за наявності нерівностей (2.77), (2.79) відповідно до теореми 1 рівносильне задачі про мінімум функціоналу

$$F[y] = (Ly, y) + 2(f, y) \quad (2.80)$$

у класі функцій $C_2[a; b]$.

Використовуючи формулу (2.76), маємо

$$F[y] = p(a)y(a)y'(a) - p(b)y(b)y'(b) + \int_a^b [p(x)(y')^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y] dx. \quad (2.81)$$

Зокрема, якщо $\beta_0 \geq 0$ і $\beta_1 \geq 0$, то отримаємо

$$F[y] = -\frac{\alpha_0}{\beta_0} p(a)y^2(a) + \frac{\alpha_1}{\beta_1} p(b)y^2(b) + \int_a^b [p(x)(y')^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y] dx. \quad (2.82)$$

Аналогічні вирази знаходимо для інших випадків співвідношення знаків коефіцієнтів $\alpha_i, \beta_i (i = 0, 1)$ із крайових умов (2.74).

Розглянемо тепер крайову задачу (2.73) з неоднорідними крайовими умовами (2.71) також припускаючи, що виконані нерівності (2.77) та (2.79). Оператор L у класі функцій $C_2[a; b]$, які відповідають умовам (2.72) перестав бути симетричним і позитивним. Тому не можна безпосередньо використати теорему 1.

Припустимо, що $z = z(x) \in C_2[a; b]$ і відповідає умовам (2.72), тобто.

$$\alpha_0 z(a) + \beta_0 z'(a) = \gamma_0,$$

$$\alpha_1 z(b) + \beta_1 z'(b) = \gamma_1, \quad (2.83)$$

Позначивши y – рішення крайової задачі (2.73), (2.71), введемо функцію $u = u(x)$ наступним чином:

$$u = y - z. \quad (2.84)$$

Очевидно, функція u задовольняє однорідним крайовим умовам:

$$\begin{aligned} \alpha_0 u(a) + \beta_0 u'(a) &= 0, \\ \alpha_1 u(b) + \beta_1 u'(b) &= 0, \end{aligned} \quad (2.85)$$

і є рішенням рівняння

$$Lu = Ly - Lz,$$

тобто

$$Lu = -f(x) - Lz. \quad (2.86)$$

Оператор Lu у класі функцій $C_2[a; b]$ є симетричним і позитивним, і, отже, рішення u крайової задачі з теореми 1 дає мінімум функціоналу:

$$F[u] = (Lu, u) + 2(f(x) + Lz, u).$$

Тоді на підставі формули (2.76) маємо

$$\begin{aligned} F[u] &= p(a)u(a)u'(a) - p(b)u(b)u'(b) + \\ &+ \int_a^b [p(x)(u')^2 - q(x)u^2 + 2(f(x) + Lz)u] dx. \end{aligned} \quad (2.87)$$

З рівності (2.85) отримуємо, що розв'язання у крайової задачі (2.70), (2.71) дає мінімум функціоналу:

$$\begin{aligned} F_1[y] &= p(a)[y(a) - z(a)][y'(a) - z'(a)] - \\ &- p(b)[y(b) - z(b)][y'(b) - z'(b)] + \\ &+ \int_a^b [p(x)(y' - z')^2 - q(x)(y - z)^2 + 2(f(x) + Lz)(y - z)] dx = \\ &= p(a)[y(a) - z(a)][y'(a) - z'(a)] - \\ &- p(b)[y(b) - z(b)][y'(b) - z'(b)] + \\ &+ \int_a^b [p(x)(y')^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y] dx + \int_a^b [p(x)(z')^2 - q(x)z^2 - \\ &- 2f(x)z] dx + 2 \int_a^b [-p(x)y'z' + q(x)yz + (y - z)Lz] dx. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Інтегруючи частинами, отримуємо

$$\int_a^b (y - z)Lz dx = - \int_a^b (y - z) \left[\frac{d}{dx} (p(x)z') + q(x)z \right] dx =$$

$$\begin{aligned}
&= -(y-z)p(x)z' \Big|_a^b + \int_a^b [p(x)z'(y'-z') - q(x)z(y-z)]dx = \\
&= p(a)[y(a)-z(a)][z'(a)-p(b)][y(b)-z(b)]z'(b) + \\
&\quad + \int_a^b [p(x)z'(y'-z') - q(x)z(y-z)]dx.
\end{aligned}$$

Підставляючи цей вираз у формулу (2.89), після деяких перетворень маємо

$$\begin{aligned}
F_1[y] &= p(a)[y(a)-z(a)][y'(a)+z'(a)] - \\
&\quad - p(b)[y(b)-z(b)][y'(b)+z'(b)] + \\
&\quad + \int_a^b [p(x)(y')^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y]dx - \\
&\quad - \int_a^b [p(x)(z')^2 - q(x)z^2 + 2f(x)z]dx.
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Нехай $\beta_0 \geq 0$ и $\beta_1 \geq 0$. З крайових умов (2.71) знаходимо

$$\begin{aligned}
y'(a) &= \frac{\gamma_0 - \alpha_0 y(a)}{\beta_0}, & z'(a) &= \frac{\gamma_0 - \alpha_0 z(a)}{\beta_0}, \\
y'(b) &= \frac{\gamma_1 - \alpha_1 y(b)}{\beta_1}, & z'(b) &= \frac{\gamma_1 - \alpha_1 z(b)}{\beta_1}.
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
F_1[y] &= \frac{p(a)}{\beta_0} [2\gamma_0 y(a) - \alpha_0 y^2(a)] - \frac{p(b)}{\beta_1} [2\gamma_1 y(b) - \alpha_1 y^2(b)] + \\
&\quad + \int_a^b [p(x)(y')^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y]dx - \\
&\quad - \left\{ \frac{p(a)}{\beta_0} [2\gamma_0 z(a) - \alpha_0 z^2(a)] - \frac{p(b)}{\beta_1} [2\gamma_1 z(b) - \alpha_1 z^2(b)] + \right. \\
&\quad \left. + \int_a^b [p(x)(z')^2 - q(x)z^2 + 2f(x)z]dx \right\}.
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Оскільки члени формули (2.90), що стоять у фігурній дужці, не змінюються при зміні функції y , то замість функціоналу $F_1[y]$ можна розглянути функціонал

$$\begin{aligned}
\Phi[y] &= \frac{p(a)}{\beta_0} [2\gamma_0 y(a) - \alpha_0 y^2(a)] - \frac{p(b)}{\beta_1} [2\gamma_1 y(b) - \alpha_1 y^2(b)] + \\
&\quad + \int_a^b [p(x)(y')^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y]dx.
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Таким чином, крайова задача з неоднорідними крайовими умовами при обмеженнях (2.77), (2.79) еквівалентна варіаційному завданню для функціоналу (2.80) у класі функцій $C_2[a; b]$, що задовольняють заданим крайовим умовам.

Якщо $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 \neq 0$, то

$$y(a) = z(a) = \frac{\gamma_0}{\alpha_0}.$$

З формули (2.90) випливає, що за $\Phi[y]$ можна прийняти функціонал

$$\begin{aligned} \Phi[y] = & -\frac{p(b)}{\beta_1} [2\gamma_1 y(b) - \alpha_1 y^2(b)] + \\ & + \int_a^b [p(x)(y')^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y] dx. \end{aligned}$$

Аналогічно доводиться, якщо $\beta_0 = 0$ і $\beta_1 = 0$, то

$$\Phi[y] = \int_a^b [p(x)(y')^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y] dx.$$

Метод Рітца. Запропонований 1908 р. німецьким фізиком і математиком У. Рітцем, полягає у відшукуванні екстремуму функціоналу (2.98). При цьому, вибираємо систему лінійно незалежних базисних функцій $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ таких, що $u_0(a) = A, u_0(b) = B$, а решта $u_i(x)$ задовольняють умовам $u_i(a) = u_i(b) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Розв'язання варіаційного завдання (2.98) шукатимемо у вигляді

$$y_n(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x), \quad (2.92)$$

де c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) деякі постійні. Через вибір базисних функцій $y(a) = A, y(b) = B$. Коефіцієнти c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) підберемо таким чином, щоб (2.109) давала екстремум функціоналу (2.82), при цьому виходить наступна система лінійних рівнянь алгебри щодо зазначених коефіцієнтів:

$$\frac{\partial F}{\partial c_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial c_2} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial c_n} = 0. \quad (2.93)$$

Приклад 2.7. Знайти рішення крайової задачі

$$\begin{aligned} y'' + (1 + x^2)y + 1 &= 0, \\ y(-1) &= y(1) = 0. \end{aligned}$$

Рішення. Як базисні виберемо функції: $u_0(x) = 0; u_1(x) = 1 - x^2; u_2(x) = 1 - x^4$. Тоді рішення матиме вигляд

$$y_2 = c_1(1 - x^2) + c_2(1 - x^4). \quad (2.94)$$

Вихідне диференціальне рівняння, де $p(x) = 1$, $q(x) = 1 + x^2$, $f(x) = -1$, є самоспряженим. Складемо для нього відповідний функціонал

$$F[y] = \int_{-1}^1 [(y')^2 - (1 + x^2)y^2 - 2y]dx.$$

Замінюючи у його виразом (2.94), отримуємо

$$F[y] = \int_{-1}^1 \left[(2c_1x + 4c_2x^3)^2 - (1 + x^2)(c_1(1 - x^2) + c_2(1 - x^4))^2 - 2(c_1(1 - x^2) + c_2(1 - x^4)) \right] dx.$$

Знаходимо приватні часткові функціоналу $F[y]$ за параметрами c_1 и c_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F[y]}{\partial c_1} &= \int_{-1}^1 [4x(2c_1x + 4c_2x^3) - (1 + x^2)2(1 - x^2) \times \\ &\times (c_1(1 - x^2) + c_2(1 - x^4)) - 2(1 - x^2)] dx = \\ &= 8 \left(\frac{38}{105} c_1 + \frac{4}{9} c_2 - \frac{1}{3} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F[y]}{\partial c_2} &= \int_{-1}^1 [8x^3(2c_1x + 4c_2x^3) - 2(1 + x^2)(1 - x^4) \times \\ &\times (c_1(1 - x^2) + c_2(1 - x^4)) - 2(1 - x^4)] dx = 8 \left(\frac{4}{9} c_1 + \frac{2488}{3465} c_2 - \frac{2}{5} \right). \end{aligned}$$

Розв'язуючи систему

$$\frac{38}{105} c_1 + \frac{4}{9} c_2 = \frac{1}{3}; \quad \frac{4}{9} c_1 + \frac{2488}{3465} c_2 = \frac{2}{5}$$

знаходимо $c_1 = 0,988$, $c_2 = -0,054$.

Рішенням вихідної крайової задачі буде функція

$$y_2 = 0,934 - 0,988x^2 + 0,054x^4.$$

2.7. Метод скінченних елементів

Метод скінченних елементів (МСЕ) відноситься до проєкційних методів, що мають спеціальні координатні функції. Хоча ідея методу належала ще Л. Ейлеру та М. Пуассону, проте, лише наприкінці ХХ століття вона отримала своє остаточне втілення та розвиток у 1943 р. у роботі Р. Куранта [13]. Розвиток МСЕ обумовлюється трьома напрямками: представлення рівнянь МСЕ з урахуванням методу Рітца; на основі варіаційно-різницевого методу Гальоркіна; з урахуванням інженерного підходу. В основі всіх підходів використовують сіткові

функції. З останнього інженерного підходу при вирішенні завдань будівельної механіки метод і отримав назву – метод кінцевих елементів – у 1956 р. у роботі М. Тернера та його співробітників з Boeing Aircraft [18].

Популярність МКЕ обумовлена тим, що він поєднує в собі переваги варіаційних та різницевих методів з гнучкістю отримання дискретних моделей та легко реалізується на сучасних персональних комп'ютерах [11]. Внаслідок його використання для звичайних диференціальних рівнянь при кусково-лінійних координатних функціях матриця коефіцієнтів має тридіагональну структуру. Перевага МСЕ перед методом скінченних різниць, варіаційно-різницеvim методом Гальоркіна та методом Рітца особливо очевидна при вирішенні двовимірних та тривимірних завдань математичної фізики, де матриця коефіцієнтів є симетричною та позитивно-визначеною. (2.107)

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy(1)}{dx} = 0, \quad (2.96)$$

де $p(x)$, $q(x)$ – безперервні на відрізку $[0;1]$ функції, причому $p(x)$, $q(x)$. Для пошуку наближеного розв'язку задачі (2.95), (2.96) застосуємо метод скінченних елементів. Оскільки оператор задачі позитивно визначений, то вона еквівалентна задачі про мінімум функціоналу:

$$F(y) = \int_0^1 \left[p(x) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + q(x)y^2 - 2f(x)y \right] dx. \quad (2.12097)$$

Розіб'ємо відрізок $[0;1]$ вузловими точками x_i ($i = 1, 2, \dots, N - 1$) на частини, $[x_{i-1}; x_i]$, ($x_0 = 0$, $x_N = 1$), які називаються скінченними елементами. На скінченних елементах $[x_{i-1}; x_i]$ задаємо кусково-безперервні координатні функції (рис. 2.1) за допомогою співвідношень

$$u_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x \leq x_{i-1}; \\ (x - x_{i-1})/h_i & \text{при } x_{i-1} \leq x \leq x_i; \\ -(x - x_{i+1})/h_{i+1} & \text{при } x_i \leq x \leq x_{i+1}; \\ 0 & \text{при } x_{i+1} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (2.98)$$

де $h_k = x_k - x_{k-1}$; ($k = 1, 2, \dots, N$).

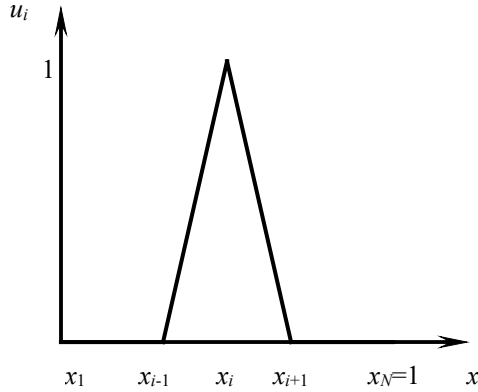


Рис.2.1. Кусково-безперервна координатна функція

Наближене рішення задачі про мінімум функціоналу (2.97) за методом Рітца і, отже, наближене рішення крайової задачі (2.95), (2.96) будемо відшукувати у вигляді

$$y_N = \sum_{i=0}^N c_i u_i. \quad (2.99)$$

Виходячи із співвідношень (2.98), невідомі константи c_i і у формулі (2.99) є значеннями функції y_N у вузлових точках x_i . Оскільки перша з крайових умов (2.96) є головним, у формулі (2.99) покладемо $c_0 = 0$. Відповідно до співвідношень (2.98) наближене рішення y_N на скінченному елементі $[x_{i-1}; x_i]$, ($i = 1, 2, \dots, N$) можна записати у наступному вигляді:

$$y_{Ni} = \frac{1}{h_i} [-q_{i-1}(x - x_i) + q_i(x - x_{i-1})], \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad q_0 = 0. \quad (2.100)$$

Оскільки для отримання основних співвідношень МСЕ зручно використовувати матричний запис формул, представимо вираз (2.100) у вигляді

$$y_{Ni} = \frac{1}{h_i} [-(x - x_i), (x - x_{i-1})] \begin{pmatrix} c_{i-1} \\ c_i \end{pmatrix}. \quad (2.101)$$

Реалізуючи далі схему методу Рітца, підставимо наближене рішення y_N із співвідношення (2.99) у функціонал (2.97). Використовуючи далі вираз (2.101), отримуємо:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 p(x) \left(\frac{dy_N}{dx} \right)^2 dx &= \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) \left(\frac{dy_{Ni}}{dx} \right)^2 dx; \\
\int_0^1 q(x) y_N^2 dx &= \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) y_{Ni}^2 dx; \\
\int_0^1 f(x) y_N dx &= \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) y_{Ni} dx.
\end{aligned} \tag{2.102}$$

Зауважимо, що розподіл на суми у формулах (2.102) припустимий, оскільки функції (2.99) і, отже, і (2.101) зберігають безперервність при переході через межі елементів.

Обчислимо окремо інтеграли, що стоять під знаками суми (2.102):

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) \left(\frac{dy_{Ni}}{dx} \right)^2 dx &= \frac{1}{h_i^2} (c_{i-1}, c_i) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{i-1} \\ c_i \end{pmatrix} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx = \\
&= (c_{i-1}, c_i) \begin{pmatrix} p_i & -p_i \\ -p_i & p_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{i-1} \\ c_i \end{pmatrix};
\end{aligned} \tag{2.103}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) y_{Ni}^2 dx &= \frac{1}{h_i^2} (c_{i-1}, c_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) dx \times \\
&\times \begin{pmatrix} (x - x_i)^2 & -(x - x_i)(x - x_{i-1}) \\ -(x - x_i)(x - x_{i-1}) & (x - x_{i-1})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{i-1} \\ c_i \end{pmatrix} = \\
&= (c_{i-1}, c_i) \begin{pmatrix} R_{i-1,i-1,i} & -R_{i-1,i,i} \\ -R_{i,i-1,i} & R_{i,i,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{i-1} \\ c_i \end{pmatrix};
\end{aligned} \tag{2.104}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) y_{Ni} dx &= \frac{1}{h_i} (c_{i-1}, c_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \begin{pmatrix} -(x - x_i) \\ (x - x_{i-1}) \end{pmatrix} dx = \\
&= (c_{i-1}, c_i) \begin{pmatrix} -\Phi_{i-1,i} \\ \Phi_{i,i} \end{pmatrix};
\end{aligned} \tag{2.105}$$

$$\text{де } p_i = \frac{1}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx;$$

$$R_{k,l,i} = \frac{1}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) (x - x_m) (x - x_n) dx;$$

$$\Phi_{l,i}=\frac{1}{h_i^2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)(x-x_n)dx,$$

$$k=i-1,i; \qquad m=\begin{cases} i-1 & \text{при } k=i; \\ i & \text{при } k=i-1; \end{cases}$$

$$l=i-1,i; \qquad n=\begin{cases} i-1 & \text{при } l=i; \\ i & \text{при } l=i-1. \end{cases}$$

$$\tilde{y}_{2n}^*-\int\limits_0^1p(x)\left(\frac{dy_N}{dx}\right)^2dx=(c_1,c_2,...,c_N)\left\{\left(\begin{array}{cccccc} p_1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0. & 0 \end{array}\right)+\right.$$

$$+\left(\begin{array}{ccccc} p_2 & -p_2 & 0 & . & 0 \\ -p_2 & p_2 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & p_3 & -p_3 & . & 0 \\ 0 & -p_3 & p_3 & . & 0 \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 \end{array}\right)+...+$$

$$+\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & p_N & -p_N \\ 0 & 0 & . & -p_N & p_N \end{array}\right)\left\{\left(\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ c_N \end{array}\right)\right\}=$$

$$= (c_1, c_2, \dots, c_N) \begin{pmatrix} p_1 + p_2 & -p_2 & 0 & 0 & 0 \\ -p_2 & p_2 + p_3 & -p_3 & 0 & 0 \\ 0 & -p_3 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & -p_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & -p_{N-1} & p_{N-1} + p_N & -p_N \\ 0 & 0 & 0 & -p_N & p_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (2.106)$$

Аналогічно отримаємо

$$\int_0^1 q(x) y_N^2 dx = (c_1, c_2, \dots, c_N) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} R_{1,1,1} + R_{1,1,2} & -R_{1,2,2} & 0 & 0 & 0 \\ -R_{2,1,2} & R_{2,2,2} + R_{2,3,3} & -R_{2,3,3} & 0 & 0 \\ 0 & -R_{3,2,3} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & -R_{N-2,N-1,N-1} & 0 \\ 0 & 0 & -R_{N-1,N-2,N-1} & R_{N-1,N-1,N-1} + R_{N-1,N-1,N} & -R_{N-1,N,N} \\ 0 & 0 & 0 & -R_{N,N-1,N} & R_{N,N,N-1} + R_{N,N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_N \end{pmatrix}; \quad (2.107)$$

$$\int_0^1 f(x) y_N dx = (c_1, c_2, \dots, c_N) \begin{pmatrix} \Phi_{1,1} - \Phi_{1,2} \\ \Phi_{2,2} - \Phi_{2,3} \\ \Phi_{N-1,N-1} - \Phi_{N-1,N} \\ \Phi_{N,N} \end{pmatrix}. \quad (2.108)$$

У формулах (2.106) - (2.108) $q_0 = 0$. Підсумувавши праві частини виразів (2.106)-(2.108), знайдемо функціонал $F(y_N)$. Розглядаючи його як функцію параметрів c_i ($i = 1, 2, \dots, N$), запишемо необхідні умови її мінімуму:

$$\frac{\partial F(y_N)}{\partial c_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Останні N співвідношень утворюють систему лінійних рівнянь алгебри щодо невідомих c_i :

$$KC = \Phi, \quad (2.109)$$

де $\mathbf{C}$ – вектор-стовпець невідомих $\mathbf{c}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$); $\mathbf{K}$ – матриця, що є сумою квадратних матриць з формул (2.106), (2.107); Φ – вектор-стовпець із формули (2.108).

Система рівнянь (2.109) має єдине рішення, оскільки її визначник відмінний від нуля як визначник Грама лінійно-незалежної системи функцій.

Усі матриці, які входять до формул (2.103)–(2.105), симетричні, таким чином, і матриця системи рівнянь (2.132), як їх сума, також симетрична. Це, а також наявність лише трьох ненульових діагоналей значно полегшує вирішення системи рівнянь (2.109).

Розглянемо рішення щодо МСЕ звичайного диференціального рівняння другого порядку на основі варіаційно-різницевого методу Гальоркіна.

Розглянемо крайову задачу:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x); \quad (2.110)$$

$$y(\mathbf{a}) = \mathbf{0}; \quad y(\mathbf{b}) = \mathbf{0}. \quad (2.111)$$

Вибравши крок $\mathbf{h} = (\mathbf{b} - \mathbf{a})/(N + 1)$, введемо на відрізьку $[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$ рівномірну сітку $\mathbf{x}_i = \mathbf{a} + i\mathbf{h}$, ($i = 1, 2, \dots, N$), $\mathbf{x}_N = \mathbf{b}$.

Будемо знаходити наближене рішення $y(0)=0$ крайового завдання (2.110)–(2.111) як лінійної комбінації функцій $u_i(x)$, у ролі яких візьмемо звані функції форми, зумовлені рівністю

$$u(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases} \quad (2.112)$$

Вважаючи $x \in [a; b]$ і вважаючи (2.112) $t = (x - x_i)/h$, $y(0)=0$ бачимо, що

$$|t| < 1 \Leftrightarrow x_i - h < x < x_i + h,$$

тобто. функція $u_i(x)$ відмінна від нуля лише на інтервалі $(x_{i-1}; x_{i+1})$ з центром у точці x_i . Таким чином, різним вузлам x_i сітки, що розглядається, відповідають різні функції, які, згідно (2.112) можна задати рівностями (2.98).

Щодо сукупності функцій форми $\{u_i(x)\}$, що задаються на відрізьку $[a; b]$ формулами (2.98), відомо, що вони лінійно незалежні та утворюють повну систему у просторі $C_2[a; b]$. Це дає основу їх застосування як базисних функцій методу Гальоркіна.

Для подальшої реалізації МСЕ потрібно уточнити вид системи лінійних рівнянь алгебри щодо коефіцієнтів c_i , з якими повинні підсумовуватися обрані базисні функції при отриманні наближеного рішення, і вивести формули коефіцієнтів цієї системи. З цією метою продиференціюємо (2.98), отримавши при цьому

$$u'_i = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{при } x \in (x_{i-1}; x_i), \\ -\frac{1}{h} & \text{при } x \in (x_i; x_{i+1}), \\ 0 & \text{при } x \notin (x_{i-1}; x_{i+1}), \end{cases} \quad (2.113)$$

і зобразимо систему визначених на відріжку $[a; b]$ функцій $u_i(x)$ та їх похідних $u'_i(x)$ (рис. 2.2).

Аналізуючи графіки функцій $u_i(x)$ і $u'_i(x)$, поряд з вже зазначеним фактом, що i -я базисна функція і її похідна мають ненульові значення тільки на двох суміжних елементарних проміжках $(x_{i-1}; x_i)$ і $(x_i; x_{i+1})$, бачимо також, що «сусідні» базисні функції та їх похідні: $(x_{i-1}; x_i)$ відмінні від нуля $u_{i-1}, u_i, u'_{i-1}, u'_i$, на $(x_i; x_{i+1})$ — u_{i+1}, u'_i, u'_{i+1} і т. д. Це дозволяє, застосувавши властивість адитивності за проміжком інтегрування до інтегралів формул методу Гальоркіна, спростити їх обчислення, відкинувши свідомо нульові доданки, і визначити структуру матриці роздільної здатності лінійних рівнянь алгебри, що полегшує її розв'язання.

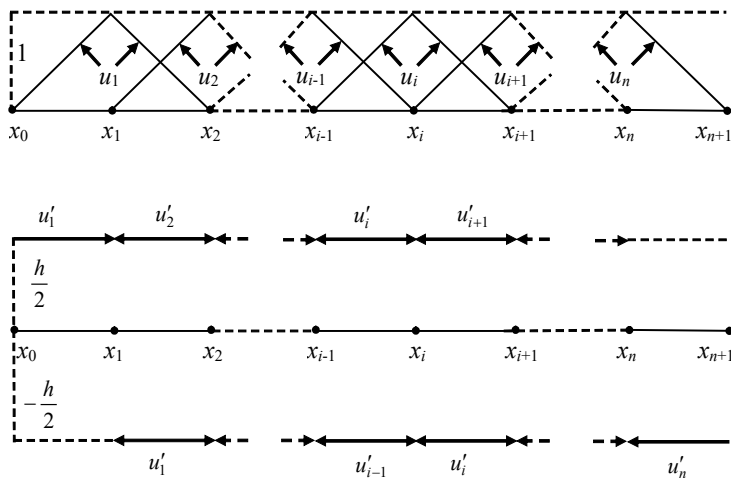


Рис.2.2. Функції форми та їх похідні

Наближений розв'язок задачі (2.110)–(2.111) шукатимемо у вигляді

$$\mathbf{y}_N = \sum_{i=0}^N \mathbf{c}_i \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) \quad (2.114)$$

з кусково-лінійними базисними функціями $u_i = u_i(\mathbf{x})$, визначеними (2.98). Для підрахунку коефіцієнтів $\mathbf{c}_i$ згідно з методом Гальоркіна складемо роздільну систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Її праві частини в даному випадку набудуть вигляду

$$\begin{aligned} d_i &= \int_a^b f(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{k=0}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\mathbf{x}) \frac{x - x_{i-1}}{h} d\mathbf{x} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\mathbf{x}) \left(-\frac{x - x_{i+1}}{h} \right) d\mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\mathbf{x}) (x - x_{i-1}) d\mathbf{x} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\mathbf{x}) (x - x_{i+1}) d\mathbf{x} \right]. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Так як при крайових умовах (2.111) використовуються N базисних функцій з u_1 по u_N , і всі вони в точках a і b дорівнюють нулю, формула для обчислення елементів a_{ij} матриці гальоркінської СЛАР тут має вигляд

$$a_{ij} = - \int_a^b u'_j(\mathbf{x}) u'_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_a^b p(\mathbf{x}) u'_j(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_a^b q(x)u_j(x)u_i(x)dx = \\
& = \sum_{k=0}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[-u'_j(x)u'_i(x) + p(x)u'_j(x)u_i(x) + q(x)u_j(x)u_i(x) \right] dx. \quad (2.116)
\end{aligned}$$

З огляду на зазначеного вище нерівності нулю на елементарному проміжку лише сусідніх за індексом функцій форми та його похідних вважатимуться відмінними від нуля добутки $u'_j(x)u'_i(x)$, $u'_j(x)u_i(x)$, $u_j(x)u_i(x)$ лише у випадках, коли $i - 1 \leq j \leq i + 1$. Тоді

$$a_{ij} = 0 \quad \text{при } |i - j| > 1, \quad (2.117)$$

тобто матриця $A = (a_{ij})$ зазначеної вище системи лінійних алгебраїчних рівнянь є тридіагональною матрицею. Це дозволяє застосовувати для її вирішення метод прогонки.

Запишемо формули для обчислення ненульових елементів матриці. Вважаючи у (2.116) $j = i$, враховуючи вирази (2.98), (2.113), отримуємо формулу для обчислення діагональних елементів:

$$\begin{aligned}
a_{ii} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[-\frac{1}{h^2} + p(x) \frac{1}{h} \cdot \frac{x - x_{i-1}}{h} + q(x) \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right)^2 \right] dx + \\
&+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[-\left(-\frac{1}{h} \right)^2 + p(x) \frac{1}{h} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{h} + q(x) \left(\frac{x - x_{i+1}}{h} \right)^2 \right] dx = \\
&= -\frac{2}{h} + \frac{1}{h^2} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)(x - x_{i-1})dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x - x_{i-1})^2 dx + \right. \\
&\quad \left. + \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)(x - x_{i+1})dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)(x - x_{i+1})^2 dx \right]. \quad (2.118)
\end{aligned}$$

При $j = i + 1$ з (2.116) знаходимо елементи правої побічної діагоналі матриці A :

$$\begin{aligned}
a_{i,i+1} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\frac{1}{h^2} + p(x) \frac{1}{h} \cdot \left(-\frac{x - x_{i+1}}{h} \right) + q(x) \left(-\frac{x - x_{i+1}}{h} \right) \frac{x - x_i}{h} \right] dx = \\
&= \frac{1}{h} - \frac{1}{h^2} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)(x - x_{i+1})dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)(x - x_i)(x - x_{i+1})dx \right], \quad (2.119)
\end{aligned}$$

а при $j = i - 1$ — лівої:

$$\begin{aligned}
a_{i,i-1} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\frac{1}{h^2} + p(x) \left(-\frac{1}{h} \right) \cdot \frac{x - x_{i-1}}{h} + q(x) \left(-\frac{x - x_i}{h} \right) \frac{x - x_{i-1}}{h} \right] dx = \\
&= \frac{1}{h} - \frac{1}{h^2} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)(x - x_{i-1})dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x - x_{i-1})(x - x_i)dx \right]. \quad (2.120)
\end{aligned}$$

Формули (2.115), (2.117) – (2.120) повністю задають систему лінійних алгебраїчних рівнянь для отримання коефіцієнтів c_i ($i = 1, 2, \dots, N$) наближеного розв'язку (2.114) крайової задачі (2.110), (2.111).

Приклад. Розглянемо диференціальне рівняння

$$y'' + x^2 y' - xy = \frac{6}{x^4} - \frac{3}{x}, \quad x \in [1; 2] \quad (2.121)$$

з крайовими умовами першого роду

$$y(1) = 1, \quad y(2) = 0,25. \quad (2.122)$$

Рішення. До цієї задачі, що має точне рішення $y(x) = 1/x^2$, застосуємо МСЕ з двома базисними функціями u_1 і u_2 .

Перетворимо це завдання на завдання з однорідними умовами:

$$z'' + x^2 z' - xz = F(x), \quad x \in [1; 2], \quad z(1) = 0, \quad z(2) = 0, \quad (2.123)$$

для чого зробимо заміну $y = z + v$, де

$$v = 1 + \frac{0,25 - 1}{2 - 1}(x - 1) = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}x,$$

і, отже,

$$F(x) = \frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} - x^2 v' + xv = \frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + \frac{7}{4}x.$$

Ввівши на відрізку $[1; 2]$ рівномірну сітку

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 4/3, \quad x_2 = 5/3, \quad x_3 = 2 \quad (2.124)$$

з кроком $h = 1/3$, запишемо вираз наближеного розв'язання задачі (2.123):

$$z_2(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x),$$

де $u_1(x)$ і $u_2(x)$ – відповідні сітці (2.147) функції форми (2.98).

Для отримання коефіцієнтів складаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь::

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 = d_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 = d_2. \end{cases} \quad (2.125)$$

Використовуючи формули (2.115), (2.118)–(2.120), отримуємо

$$\begin{aligned} a_{11} &= -6 + 9 \cdot \left[\int_1^{4/3} x^2(x-1)dx + \int_1^{4/3} (-x)(x-1)^2dx + \right. \\ &+ \left. \int_{4/3}^{5/3} x^2(x-5/3)dx + \int_{4/3}^{5/3} (-x)(x-5/3)^2dx \right] \approx -6,5926, \\ a_{22} &= -6 + 9 \cdot \left[\int_{4/3}^{5/3} x^2(x-4/3)dx + \int_{4/3}^{5/3} (-x)(x-4/3)^2dx + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{5/3}^2 x^2(x-2)dx + \int_{5/3}^2 (-x)(x-2)^2 dx \Big] \approx -6,7407, \\
a_{12} &= 3 - 9 \cdot \left[\int_{4/3}^{5/3} x^2(x-5/3)dx + \int_{4/3}^{5/3} (-x)(x-4/3)(x-5/3)dx \right] \\
& \approx 3,9630, \\
a_{21} &= 3 - 9 \cdot \left[\int_{4/3}^{5/3} x^2(x-4/3)dx + \int_{4/3}^{5/3} (-x)(x-4/3)(x- \right. \\
& \quad \left. d_1 = 3 \int_1^{4/3} \left(\frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + \frac{7}{4}x \right) (x-1)dx - \right. \\
& \quad \left. 5/3)dx \right] \approx 1,7037, \\
& \quad \left. - 3 \int_{4/3}^{5/3} \left(\frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + \frac{7}{4}x \right) \left(x - \frac{5}{3} \right) dx \approx 0,7256, \right. \\
d_2 &= 3 \int_{4/3}^{5/3} \left(\frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + \frac{7}{4}x \right) \left(x - \frac{4}{3} \right) dx - \\
& \quad \left. - 3 \int_{5/3}^2 \left(\frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + \frac{7}{4}x \right) (x-2)dx \approx 0,6446. \right.
\end{aligned}$$

Вирішуючи систему (2.125), знаходимо

$$c_1 \approx -0,1976, \quad c_2 \approx -0,1456.$$

Таким чином, наближене рішення $z_2(x)$ даної задачі (2.144), (2.145) набуде вигляду:

$$y_2(x) = v(x) + z_2(x) \approx 1,75 - 0,75x - 0,1976u_1(x) - 0,1456u_2(x),$$

де

$$u_1(x) = \begin{cases} 3(x-1) & \text{при } x \in [1; 4/3]; \\ -3(x-5/3) & \text{при } x \in [4/3; 5/3]; \end{cases} \quad (2.126)$$

$$u_2(x) = \begin{cases} 3(x-4/3) & \text{при } x \in [4/3; 5/3]; \\ -3(x-2) & \text{при } x \in [5/3; 2]. \end{cases}$$

Останній вираз можна представити у вигляді:

$$y_2(x) = \begin{cases} 2,3428 - 1,3428x & \text{если } x \in [1; 4/3]; \\ 1,3444 - 0,5940x & \text{если } x \in [4/3; 5/3]; \\ 0,8764 - 0,3132x & \text{если } x \in [5/3; 2]. \end{cases} \quad (2.127)$$

Щоб оцінити точність знайденого наближеного рішення $y_2(x)$, , порівняємо його значення з точними ними $y_2(x)$ у внутрішніх вузлах

сітки і в середині заданого проміжку. Зазначені значення представлені у табл.2.4

Таблиця 2.4

x	4/3	3/2	5/3
$y_2(x)$	0,5524	0,4534	0,3544
$y(x)$	0,5625	0,4444	0,36

Збільшивши кількість базисних функцій на одиницю, приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -8,4167c_1 + 4,8333c_2 = 0,5992, \\ 2,9375c_1 - 8,5000c_2 + 5,1875c_3 = 0,4578, \\ 2,5417c_2 - 8,5833c_3 = 0,5020. \end{cases}$$

Знаходячи звідси значення c_1, c_2, c_3 , отримуємо наближене рішення:

$$y_3(x) \approx 1,75 - 0,75x - 0,1725u_1(x) - 0,1806u_2(x) - 0,1110u_3(x)$$

з базисними функціями $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$, які легко можуть бути визначені за формулами (2.98) з урахуванням того, що вузлами сітки в цьому випадку служать точки

$$x_0 = 1, x_1 = 1,25, x_2 = 1,5, x_3 = 1,75, x_4 = 2.$$

Наближення $y_3(x)$, точніше побудованого вище наближення $y_2(x)$: є його каркас на даній сітці збігається з каркасом точного розв'язання $y(x)$ задачі (2.121), (2.122) у чотирьох десяткових знаках після коми.

Використання інших координатних функцій.

При застосуванні МСЕ для побудови наближених розв'язків крайових задач були використані найпростіші кусково-поліноміальні координатні функції. Вважаючи, що загальну схему МСЕ побудовано основі методу Рітца, зазначимо можливість побудови координатних функцій як поліномів вищих степенів.

Вибір лінійних поліномів при побудові наближеного розв'язання задачі (2.95), (2.96) було обґрунтовано лише вимогою простоти. У випадку при використанні МСЕ можна вибирати поліноми довільного степеня.

Користуючись інтерполяційними формулами Лагранжа, побудуємо на елементі $[x_{i-1}; x_i]$ поліном другого ступеня. Для цього виберемо посередині кінцевого елемента додаткову точку $x_{i-1/2}$.

На елементі $x_{i-1/2}$ запишемо функцію у:

$$y_{Ni} = (L_{i-1}, L_{i-1/2}, L_i) \begin{pmatrix} c_{i-1} \\ c_{i-1/2} \\ c_i \end{pmatrix}, \quad (2.128)$$

$$\text{де } L_{i-1} = \frac{(x - x_{i-1/2})(x - x_i)}{(x_{i-1} - x_{i-1/2})(x_{i-1} - x_i)};$$

$$L_{i-1/2} = \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i-1/2} - x_{i-1})(x_{i-1/2} - x_i)};$$

$$L_i = \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i-1/2})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-1/2})}.$$

З очевидної властивості функцій

$$L_k = \begin{cases} 1, & k = r, \\ 0, & k \neq r; \end{cases}$$

та (2.128) отримуємо, що постійні c_{i-1} , $c_{i-1/2}$, c_i є значеннями функції y_{Ni} відповідно у точках x_{i-1} , $x_{i-1/2}$, x_i .

Кусково-аналітичні координатні функції (рис. 2.3), які призводять до запису за методом Рітца наближеного рішення у вигляді (2.128), мають такий вигляд:

$$u_k(x) = \begin{cases} L_k & \text{якщо елемент містить точку } x_k, \\ 0 & \text{у іншому випадку} \end{cases} \quad \left(k = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, N\right). \quad (2.129)$$

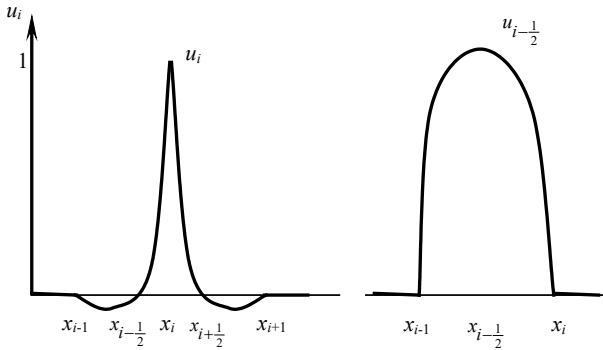


Рис.2.3. Кусково-аналітичні координатні функції

Функції (2.128) та (2.129) є безперервними при переході через межі елементів. Отже, при їх використанні в МСЕ розподіл функціоналу енергії на суму за елементами буде обґрунтованим, якщо найвищий порядок похідних у функціоналі – перший.

Розглянемо рішення щодо МСЕ на основі інженерного підходу.

МСЕ використовується як інженерний метод розрахунку різних конструкцій. Специфічні інженерні засоби та методика надали йому особливу форму, відмінну від викладеної вище, де МСЕ трактувався як проекційно-варіаційний метод. Широке застосування в інженерному підході матричного формалізму виявилось дуже корисним для конструювання «зручних» алгоритмів та проведення конкретних обчислень на ЕОМ.

Щоб проілюструвати інженерний підхід, розглянемо завдання для розтягування-стиснення стрижня постійного перерізу під дією власної ваги за умови, що кінці стрижня закріплені. Математична модель цього завдання має вигляд (2.118), (2.119), де $y(x)$ – переміщення (прогин), $q(x) \equiv 0$, $p(x) = E$, $f(x) = G$, E – модуль Юнга, а G – наведена об'ємна сила. Еквівалентна задача для мінімум функціоналу (2.120) є формулювання принципу мінімуму потенційної енергії.

Для наближеного розв'язання задачі розіб'ємо стрижень, один кінець якого знаходиться у точці 0, а другий – у точці 1, на N кінцевих елементів однакової довжини точками $x_i = ih$. Вважатимемо, що у кожному кінцевому елементі $e^{(i)} = [x_{i-1}; x_i]$ наближене рішення апроксимується лінійною функцією. Тоді визначення наближеного рішення на елементі досить знати його значення у двох точках, наприклад у вузлах x_{i-1} і x_i . Позначимо наближене рішення $y_N(x)$, тоді елементі $e^{(i)}$ його можна представити як:

$$y_N(x) = y_{Ni-1} u_{i-1}^{(i)}(x) + y_{Ni} u_i^{(i)}(x), \quad x \in e^{(i)}, \quad (2.130)$$

де $y_{Ni} = y_N(x_i)$, $u_{i-1}^{(i)}(x) = (x_i - x)/h$, $u_i^{(i)}(x) = (x - x_{i-1})/h$. Функції $u_{i-1}^{(i)}(x)$, $u_i^{(i)}(x)$ називаються функцій форми скінченного елемента $e^{(i)}$.

Нехай

$$y^{(i)} = [y_{Ni-1}, y_{Ni}]^T, \quad \Phi^{(i)} = \Phi^{(i)}(x) = [u_{i-1}^{(i)}(x), u_i^{(i)}(x)].$$

Тоді наближене рішення (2.130) можна записати у вигляді

$$y_N(x) = \Phi^{(i)}(x) y^{(i)} = \Phi^{(i)} y^{(i)}, \quad x \in e^{(i)}. \quad (2.131)$$

Підставимо рішення $y_N(x)$ у функціонал (2.120) (функціонал подвоєної потенційної енергії) та представимо його у вигляді

$$J(y_N) = \sum_{i=1}^N J^{(i)}(y_N),$$

де

$$J^{(i)}(y_N) = \int_{e^{(i)}} E(dy_N/dx)^2 dx - 2 \int_{e^{(i)}} G y_N dx.$$

У силу виразів (2.130), (2.131) поздовжня деформація $\varepsilon^{(i)}(x) = dy_N/dx$ має вигляд

$$\varepsilon^{(i)}(x) = B^{(i)}(x)y^{(i)} = B^{(i)}y^{(i)},$$

де

$$B^{(i)} = B^{(i)}(x) = \frac{d}{dx} \Phi^{(i)}(x) = h^{-1}[-1; 1].$$

Нормальне напруження, яке визначається формулою,

$$\sigma^{(i)} = E \varepsilon^{(i)}(x), \text{ набуває вигляду } \sigma^{(i)} = E B^{(i)} y^{(i)}, \text{ і, отже,}$$

$$J_E^{(i)}(y_N) = \int_{e^{(i)}} E(dy_N/dx)^2 dx = \int_{e^{(i)}} \sigma^{(i)} \varepsilon^{(i)} dx = y^{(i)T} K^{(i)} y^{(i)},$$

де

$$K^{(i)} = \int_{e^{(i)}} B^{(i)T} E B^{(i)} dx = \int_{e^{(i)}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} E [-1, 1] h^{-2} dx = \frac{E}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

– є матриця жорсткості елемента $e^{(i)}$.

Оскільки $\Phi^{(i)}(x)y^{(i)} = y^{(i)T} \Phi^{(i)}$, маємо

$$J_G^{(i)}(y_N) = 2 \int_{e^{(i)}} G y_N dx = 2 y^{(i)T} F^{(i)},$$

де

$$F_{\square}^{(i)} = \int_{e^{(i)}} G \Phi^{(i)T} dx = G h^{-1} \int_{e^{(i)}} \begin{bmatrix} x_i - x \\ x - x_{i-1} \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{Gh}{2}.$$

Цей вектор називається вектор вузлових сил елемента. Отже, подвоєна потенційна енергія скінченного елемента $e^{(i)}$ на наближеному рішенні виражається формулою

$$J^{(i)}(y_N) = J_E^{(i)}(y_N) + J_G^{(i)}(y_N) = y^{(i)T} K^{(i)} y^{(i)} - 2 y^{(i)T} F^{(i)}. \quad (2.132)$$

Неважко також помітити, що зв'язок між повним вектором невідомих $Y = [y_0, y_1, \dots, y_N]^T$ і вектором невідомих на елементі $e^{(i)}$ задається формулою

$$y^{(i)} = S^{(i)} Y, \quad (2.133)$$

де $S^{(i)}$ – прямокутна матриця розмірності $2 \times (N + 1)$, яка називається матрицею кінематичних зв'язків. Вона має вигляд

$$S^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} \\ \underbrace{\mathbf{0} \dots \mathbf{0}}_{i-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \underbrace{\mathbf{0} \dots \mathbf{0}}_{N-i} \end{bmatrix}.$$

З урахуванням умови (2.158) вираз (2.157) набуде вигляду

$$J_{\square}^{(i)}(\mathbf{y}_N) = \mathbf{Y}^T \mathbf{S}^{(i)T} \mathbf{K}^{(i)} \mathbf{S}^{(i)} \mathbf{Y} - 2 \mathbf{Y}^T \mathbf{S}^{(i)T} \mathbf{F}^{(i)},$$

а функціонал $J^{(i)}(\mathbf{y}_N)$ запишеться так

$$J_{\square}^{(i)}(\mathbf{y}_N) = \mathbf{Y}^T \mathbf{K} \mathbf{Y} - 2 \mathbf{Y}^T \mathbf{F}. \quad (2.134)$$

Матриця

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^N \mathbf{S}^{(i)T} \mathbf{K}^{(i)} \mathbf{S}^{(i)} \quad (2.135)$$

називається глобальною матрицею жорсткості, а вектор

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{S}^{(i)T} \mathbf{F}^{(i)} \quad (2.136)$$

є глобальним вектором навантаження.

Зі співвідношення (2.134) слід, що значення потенційної енергії на наближеному рішенні є функцією $(N+1)$ змінних $y_0, y_1, \dots, y_N$, необхідною умовою мінімуму якої є звернення в нуль її перших часткових похідних по y_i ($i = 0, 1, \dots, N$). Виконавши диференціювання, прирівнявши похідні до нуля, з урахуванням симетрії матриці $\mathbf{K}$, після скорочення на множник 2 отримаємо систему лінійних рівнянь алгебри:

$$\mathbf{K} \mathbf{Y} = \mathbf{F}. \quad (2.137)$$

Для простоти та однорідності алгоритму ми припускали всі скінченні елементи однакові. Але елементи $e^{(0)}$ і $e^{(N)}$ закріплені одному з кінців. Останнє означає, що $y_0 = 0$, $y_N = 0$ і це співвідношення становлять перше і останнє рівняння системи (2.162). Виключивши потім y_0 та y_N із системи (2.137), отримаємо систему $(N-1)$ -го порядку знову з симетричною матрицею. Таким чином, інженерний варіант МСЕ полягає в наступному:

1) формування матриці жорсткості $\mathbf{K}$ за формулою (2.135) та глобального вектора навантаження $\mathbf{F}$ за формулою (2.136);

2) розв'язання системи лінійних рівнянь алгебри (2.137).

При цьому дуже важливо, що для формування $\mathbf{K}$ та $\mathbf{F}$ немає необхідності виконувати відповідні матричні множення у виразах (2.136), (2.137) через специфіку матриць $\mathbf{S}^{(i)}$. Справді, розглянемо випадок $N=2$, для якого послідовно отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(1)} &= \frac{E}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{S}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}^{(1)} \mathbf{S}^{(1)} &= \frac{E}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{S}^{(1)T} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{(1)T} K^{(1)} S^{(1)} &= \frac{E}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
K^{(2)} &= \frac{E}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
K^{(2)} S^{(2)} &= \frac{E}{h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \\
S^{(2)T} K^{(2)} S^{(2)} &= \frac{E}{h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \\
K &= \sum_{i=1}^2 S^{(i)T} K^{(i)} S^{(i)} = \frac{E}{h} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

З наведених формул випливає, що множення матриці $K^{(i)}$ на $S^{(i)}$ та $S^{(i)T}$ зводиться до відповідного оточення її нульовими рядками та стовпчиками із збереженням симетрії. Аналогічні перетворення виробляють із вектором $F^{(i)}$. Це дозволяє порівняно просто побудувати K і F .

Загальна оцінка похибки методу кінцевих елементів.

Розглянемо загальну крайову задачу про знаходження невідомої функції u , яка задовольняє диференціальне рівняння:

$$Ly + f = 0 \text{ на } \Omega \quad (2.138)$$

з крайовими умовами

$$ly + r = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (2.139)$$

де L і l – лінійні диференціальні оператори загального виду, а f та r – задані функції.

Як було показано вище, у методі кінцевих елементів наближене рішення будується у вигляді

$$y_N = \sum_{i=0}^N c_i u_i(x). \quad (2.140)$$

Очевидно, що локальну похибку E можна визначити просто за формулою

$$E = y - y_N, \quad (2.141)$$

де y – точний розв'язок.

Так як обчислення похибки по точкам трудомістке, можна скористатися деякими іншими заходами для E . Одним із таких заходів є так звана енергетична норма, яка визначається за формулою

$$\|E\| = \left[\int_{\Omega} E L E d\Omega \right]^{1/2}. \quad (2.142)$$

Застосування формули Гріна або інтегрування частинами показує, що величина цієї норми дозволяє судити про точність апроксимації похідних (наприклад, напружень у задачах теорії пружності).

Величина (2.142) пов'язана з нев'язкою R_Ω , що задається рівністю

$$R_\Omega = Ly_N + f, \quad (2.143)$$

причому з метою спрощень передбачається, що вираз (2.165) точно задовольняє крайових умов. Щоб встановити цей зв'язок підставимо в (2.142) вираз (2.166) для E :

$$\|E\|^2 = \int_\Omega (yLy + y_NLy_N - yLy_N - y_NLy) d\Omega. \quad (2.144)$$

Згідно з методом Гальоркіна маємо

$$\int_\Omega y_NLy d\Omega = - \int_\Omega y_Nf d\Omega. \quad (2.145)$$

Враховуючи цей результат та рівняння (2.138), рівність (2.144) можна подати у вигляді

$$\|E\|^2 = - \int_\Omega (y - y_N)(Ly_N + f) d\Omega. \quad (2.146)$$

Останній вираз рівносильний рівності

$$\|E\|^2 = - \int_\Omega ER_\Omega d\Omega. \quad (2.147)$$

Для запровадженої скінченно-елементної апроксимації y_N легко знайти нев'язку R_Ω . У загальному випадку її можна подати у вигляді суми двох доданків:

$$R_\Omega = R_1 + R_2. \quad (2.148)$$

Перший доданок, R_1 визначається стандартним чином усередині кожного елемента і залежить від виду апроксимуючої функції; другий доданок, R_2 , має вигляд дельта функції Дірака на межах між елементами, де іноді деякі з похідних, що входять до Ly_N , не визначені. У цьому випадку можна виконати інтегрування частинами, і якщо n і t – напрямки нормалі та дотичної до межі Γ^e елемента e , то

$$\int_\Omega R_2 d\Omega = \sum_{\Gamma^e \in \Gamma} \int_{\Gamma^e} \Theta dt, \quad (2.149)$$

де Θ – величина розриву відповідної похідної на кордоні та підсумовування проводиться за межами елементів, які не містяться в Γ .

Якщо нев'язки визначені, то оцінки похибки можна використовувати вираз (2.146). При подрібненні сітки, коли характерний розмір h елемента прагне нулю, порядок похибки апроксимації досить гладкої функції многочленом межі буде на одиницю вище ступеня апроксимуючого багаточлена. Це впливає з розкладання функції до ряду Тейлора з подальшою її апроксимацією відрізком цього ряду.

Розглянемо розкладання виду (2.140) з параметрами $c_1, c_2, \dots, c_N$ додамо до цього ряду ще один член $c_{N+1}u_{N+1}$, де u_{N+1} представляє інтерполяцію наступного порядку; наприклад, якщо рішення ґрунтується на лінійних елементах, то u_{N+1} буде квадратичною функцією. На носії цього додаткового доданку можна приблизно подати похибку у вигляді

$$E \approx c_{N+1}u_{N+1} \quad (2.150)$$

і знайти апроксимацію для c_{N+1} за допомогою рівняння методу зважених нев'язок

$$\int_{\Omega} u_{N+1} [L(y_N + c_{N+1}u_{N+1}) + f] d\Omega, \quad (2.151)$$

вважаючи, що параметри $c_1, c_2, \dots, c_N$ залишаються без зміни.

Таким чином, маємо

$$c_{N+1} = -[\int_{\Omega} u_{N+1} (Lu_{N+1}) d\Omega]^{-1} \int_{\Omega} u_{N+1} R_{\Omega} d\Omega. \quad (2.152)$$

У ряді випадків перший множник у правій частині після інтегрування частинами можна подати у вигляді

$$[\int_{\Omega} u_{N+1} (Lu_{N+1}) d\Omega]^{-1} = K_{N+1, N+1}^{-1}, \quad (2.153)$$

тобто, він буде оберненим для відповідної компоненти матриці.

Враховуючи рівність (2.147), отримуємо вираз для оцінки похибки у вигляді

$$\|E\|^2 = - \int_{\Omega} c_{N+1} u_{N+1} R_{\Omega} d\Omega = K_{N+1, N+1}^{-1} [\int_{\Omega} u_{N+1} R_{\Omega} d\Omega]^2. \quad (2.154)$$

Так як функції можуть бути додані на кожному елементі, в загальному випадку можна обчислити такі члени на кожному елементі, а потім підсумувати внесок окремих елементів.

Як було зазначено вище, ця оцінка справедлива тільки в асимптотичному сенсі при h , що прагне нуля, і не вірна на фіксованих сітках. Відзначимо також, що якщо функція u_{N+1} виявиться ортогональною до нев'язки, то оцінка похибки дорівнюватиме нулю. Раніше ми припускали, що при додаванні члена $c_{N+1}u_{N+1}$ до апроксимації вихідні параметри $c_1, c_2, \dots, c_N$ залишаються без зміни, і тим самим знехтували взаємним впливом нового доданку та вихідного рішення. Проте рівність (2.154) широко використовують у процесах адаптивного уточнення, оскільки він показує, де слід із найбільшим ефектом провести таке уточнення ієрархічного типу.

Щоб деталізувати оцінку похибки, розглянемо конкретний випадок, а саме рівняння

$$-d^2y/dx^2 + f = 0, \quad (2.155)$$

і шукатимемо рішення, використовуючи лінійні скінченні елементи..

При зроблених вище припущеннях похибка буде постійна кожному елементі, а ієрархічна добавка u_{N+1} є квадратичною функцією, що обертається в нуль у вузлах; таким чином, сингулярна частина похибки виключається. Рівність (2.154) у разі можна переписати як

$$\|E\|^2 = K_{N+1,N+1}^{-1} R_{\Omega}^2 [\int_{\Omega} u_{N+1} d\Omega]^2. \quad (2.156)$$

Використовуючи середнє значення R_{Ω}^2 , можна розглянути загальніший випадок, коли похибка змінна. При цьому приходимо до формули

$$\|E\|^2 = K_{N+1,N+1}^{-1} [\int_{\Omega} u_{N+1} d\Omega]^2 [\int_{\Omega} R_{\Omega}^2 d\Omega] [\int_{\Omega} d\Omega]^{-1}. \quad (2.157)$$

Це забезпечує отримання нульової оцінки похибки для лінійних елементів. Відзначимо також, що для завдання, що описується рівнянням (2.155), ієрархічні добавки при відповідному виборі можуть давати діагональні вклади в результуючу матрицю, тобто. Виключається їхній взаємний вплив. Отже, оцінка (2.157) буде "асимптотично точною" при h , що прагне нуля.

Можна також показати, що при підстановці в рівність (2.157) функції $u_{N+1}^e = (x/h^e)(1 - x/h^e)$ формула оцінки похибки на елементі e набуде вигляду

$$\|E\|_{[e]}^2 = [(h^e)^2/12] \int_0^{h^e} R_{\Omega^e}^2 dx. \quad (2.158)$$

Приклад. Розглянемо крайову задачу

$$\begin{aligned} -d^2 y/dx^2 + Q &= 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) &= 0, & y(1) = 0. \end{aligned}$$

Рішення. Припустимо спочатку, що $Q=-1$, і розв'яжемо задачу методом кінцевих елементів, використовуючи один лінійний кінцевий елемент. Для лінійного елемента з рівності (2.143) отримаємо $R_{\Omega} = Q = -1$ і згідно з оцінкою похибки (2.158) маємо

$$\|E\|_{[e]}^2 = [h^2/12] \int_0^h R_{\Omega}^2 dx,$$

тобто $\|E\|^2 = 1/12$.

Щоб визначити наскільки точна ця оцінка, необхідно знати точну величину похибки. Точне рішення розглянутого крайового завдання має вигляд

$$y = x(1 - x)/2.$$

Так як для скінченного елемента обидва вузлові параметри дорівнюватимуть нулю, з (2.141) слід

$$E = x(1 - x)/2.$$

Пряма підстановка на рівність (2.147) дає точне значення енергетичної норми похибки:

$$\|E\|_T^2 = - \int_{\Omega} E R_{\Omega} d\Omega,$$

звідки

$$\|E\|_T^2 = 1/12.$$

Таким чином, формула оцінки похибки, як і слід було очікувати, для випадку лінійних елементів та постійної нев'язки R_{Ω} , дала точне значення.

Припустимо тепер, що $Q = -x$, і знову оцінимо похибку одного лінійного елемента. Тоді відповідно до рівності (2.143) $R_{\Omega} = Q = -x$ і оцінка похибки набуде вигляду

$$\|E\|_{\square}^2 = 1/12 \int_0^1 x^2 dx,$$

тобто

$$\|E\|_{\square}^2 = 1/36.$$

Точним рішенням крайового завдання в даному випадку є

$$E = x(1 - x^2)/6,$$

і, отже, маємо для точної енергетичної норми похибки

$$\|E\|_T^2 = - \int_0^1 (x/6)(1 - x^2)(-x) dx,$$

звідки $\|E\|_{\text{точне}}^2 = 1/45$. Тут оцінка похибки дає обмеження згори для енергетичної норми похибки.

Нехай вирішення цього завдання додається ієрархічна квадратична функція, тобто скінченний елемент стає квадратичним. У цьому випадку скінченно-елементне рішення набуде вигляду

$$y_2 = x(1 - x)/4.$$

Вираз (2.143) для нев'язки у разі запишеться так:

$$R_{\Omega} = -d^2 y_2 / dx^2 + Q = 1/2 - x.$$

Застосовуючи рівність (2.158) з додатковим множником $2^{(-2)}$ для квадратичного елемента, отримуємо

$$\|E\|^2 = (1/12) \times (1/2^2) \int_0^1 (1/2 - x)^2 dx = 0,0017.$$

Як і вище, точна енергетична норма похибки задається виразом

$$\begin{aligned}\|E\|_T^2 &= - \int_0^1 ER_\Omega dx = \\ &= - \int_0^1 [-x^3/6 + x/6 - (x/4)(1-x)(1/2-x)]dx,\end{aligned}$$

що дає $\|E\|_T^2 = 0,0014$.

Оцінка похибки досить прийнятна для практичних цілей.

2.10. Поняття про чисельні методи вирішення крайового завдання для диференціального рівняння n-го порядку

Розглянемо диференціальне рівняння n-го порядку

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.159)$$

із заданими, загалом, нелінійними крайовими умовами:

$$G_v(y_1, y_1', \dots, y_1^{(\sigma_1)}; \dots; y_k, y_k', \dots, y_k^{(\sigma_k)}) = A_v \quad (v = 1, 2, \dots, n), \quad (2.160)$$

де $y_i^{(s)} = y^{(s)}(x_i) \quad (s = 0, 1, 2, \dots, \sigma_i)$.

Таке завдання називається загальною крайовою задачею.

Наближене рішення загального крайового завдання (2.159)-(2.160)

шукатимемо у вигляді

$$y_p = y_p(x; C_1, C_2, \dots, C_p),$$

(2.161)

причому за будь-яких константах $C_1, C_2, \dots, C_p$ функція y повинна задовольняти крайових умов (2.160). Підставляючи вираз (2.161) у ліву частину диференціального рівняння (2.159), отримуємо нев'язку:

$$R(x; C_1, C_2, \dots, C_p) \equiv F(x; y_p, y_p', \dots, y_p^{(n)}). \quad (2.162)$$

Шляхом підбору констант $C_1, C_2, \dots, C_n$ прагнемо наблизити функцію R до нуля в області. Реалізуючи по-різному цю вимогу, приходимо до різних методів вирішення крайової задачі, як і при вирішенні крайової задачі для диференціального рівняння другого порядку.

Розглянемо деякі з цих методів.

Метод колокації. Вибираємо систему точок $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ (точки колокації) та вимагаємо, щоб у цих точках диференціальне рівняння (2.159) задовольнялося точно. Це дає систему:

з якої визначаються параметри $C_1, C_2, \dots, C_p$.

$$I = \int_a^b R^2(x; C_1, C_2, \dots, C_p) dx,$$
$$\frac{\partial I}{\partial c_1} = 0, \frac{\partial I}{\partial c_2} = 0, \dots, \frac{\partial I}{\partial c_n} = 0.$$
$$I_N = \sum_{i=1}^N R^2(\xi_i; C_1, C_2, \dots, C_p),$$

Метод Гальоркіна. Якщо крайові умови лінійні (диференціальне рівняння (2.159) при цьому може бути нелінійним), то рішення можна шукати у вигляді

причому функція u_r повинна задовольняти крайових умов (2.160) за будь-якого вибору коефіцієнтів

$$C_j (j = 1, 2, \dots, p).$$

Відповідно до методу Гальоркіна коефіцієнти C_i визначаються з умови ортогональності нев'язки R до функцій $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$, тобто з системи рівнянь:

Узагальнений метод Гальоркіна (метод ортогональних проєкцій).

Вибираємо p лінійно незалежних функцій $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_p(x)$ (за кількістю параметрів) і визначаємо коефіцієнти $C_1, C_2, \dots, C_p$ з умови

ортогональності функції R до всіх цих функцій, тобто. постійні C_i визначаються із системи

$$\begin{cases} \int_a^b R(x; C_1, C_2, \dots, C_n) \phi_1(x) dx = 0, \\ \int_a^b R(x; C_1, C_2, \dots, C_n) \phi_2(x) dx = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \int_a^b R(x; C_1, C_2, \dots, C_n) \phi_p(x) dx = 0. \end{cases} \quad (2.165)$$

Як функції $\phi_i(x)$ зазвичай беруть перші p функцій з якоїсь повної системи, наприклад системи степенів x або системи тригонометричних поліномів.

Метод підобластей. Розбиваємо відрізок $[a; b]$, що містить дані точки x_i ($i = 1, 2, \dots, k$), на p часткових відрізків

$[\xi_0; \xi_1], [\xi_1; \xi_2], \dots, [\xi_{p-1}; \xi_p]$, де $\xi_0 = a$ і $\xi_p = b$. Постійні $C_i (i = 1, 2, \dots, p)$ визначаються із системи рівнянь

$$\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} R(x; C_1, C_2, \dots, C_p) dx = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p).$$

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати крайову задачу методом колокацій. Обрати дві точки колокацій.

$$2.1. \quad y'' - 3xy' - \frac{3x}{x^2+4}y = \frac{1}{\sqrt{x^2+9}};$$

$$2y'(1) = 0,5; \quad y(2) = -0,5.$$

2.2. $y'' - \frac{3}{x+2}y' + 2xy = 2 + x^3;$

$$2y(-1) = 1,3; \quad y'(0) = -0,7.$$

2.3. $\frac{y'' - (3x - 2)y' - 3x^2y}{2+x}$,
 $\frac{1}{x^2+3}$,

$$y(-1) = -2,4; \quad y'(0) = 0.$$

2.4. $\frac{y'' + 2xy' + (2x^3 - 3)y}{x^2 + 2}$;

$$3y'(0,5) = 1; \quad 3y(1,5) = 1.$$

2.6. $y'' - (3+x)y' + (2+x^3)y = \sqrt{x^2+4};$

$$5y(2) = 1; \quad -5y'(3) = 0,5.$$

2.7. $y'' + (2 + x^2)y' + 2xy = \frac{-3x^2}{2+x};$

$$y(-1) = 0; \quad y'(0) = 0.$$

2.8. $y'' - 3x^3y' + (2x + 3)y = \frac{1}{2x^2 + 3};$

$$y'(0,5) = -0,8; \quad y(1,5) = -0,3.$$

2.9. $y'' + (2x^3 + 3)y' - (3x - 2)y = 2x;$

$$y(-1) = 0; \quad y'(0) = -0,6.$$

$$2.5. \quad y'' + (2x^2 + 3)y' + (2 - x)y = \frac{-1}{3x+2};$$

$$2.10. \quad y'' + 9x^2y' + \frac{2}{x+1}y = \frac{-3x+2}{(-3-x)^3};$$

Розв'язати крайові задачі методом Гальоркіна. Використати три базисні функції.

$$2.21. \quad y'' + xy' - xy = x^3;$$

$$y(0,9) = 0; y(1,2) = 0,8.$$

$$2.22. \quad y'' + y' + 2xy = \frac{1}{2x};$$

$$y'(1,3) = 0,6; y(1,6) = 0,3.$$

$$2.23. \quad y'' + y' + y = \frac{2}{x^3};$$

$$y'(1) = 0,5; y(1,3) = 1.$$

$$2.24. \quad y'' + 2y' - xy = x;$$

$$y'(0,8) = 1; y(1,1) = 1.$$

$$2.25. \quad y'' + y' - y = \frac{1}{x^6};$$

$$y(1,1) = 0; y(1,4) = 0.$$

$$2.26. \quad y'' + xy' + x^3y = 2x - 1;$$

$$4y(0,2) = 1,5; y'(0,5) = 0,4.$$

$$2.27. \quad y'' + xy' - y = x^2 - 1;$$

$$y(0,5) = 0,1; y(0,8) = 0.$$

$$2.28. \quad y'' + \frac{x}{2}y' - y = x^6 - x^2;$$

$$y(0,6) = 0; y'(0,9) = 0,5.$$

$$2.29. \quad y'' + x^2y' - 2y = 2x^2 - 1.$$

$$0,7y'(0,6) = 2; y(0,9) = 0,8.$$

$$2.30. \quad y'' + x^2y' - 2xy = x^2 - 0,5;$$

$$y(0,2) = 0; y'(0,5) = 2.$$

Розв'язати різницеvim методом з кроком $h = 0,1$.

$$2.31. \quad y'' + xy' + y = x^2;$$

$$y(0,7) = 0,5; 2y(1) + 3y'(1) = 1,2.$$

- 2.32. $y'' + x^2 y' + 2y = x + 1;$
 $y(0,9) - y'(0,9) = 2; y(1,2) = 1$
- 2.33. $y'' + xy' - y = x^3 + 1.$
 $y(0,5) + 2y'(0,5) = 1; y'(0,8) = 1,2;$
- 2.34. $y'' + y' - xy = 5;$
 $y(0,2) = 2; 3y(0,5) - y'(0,5) = 1.$
- 2.35. $y'' + 3y' - x^2 y = x^3;$
 $y'(0,6) = 0,3; y(0,9) - 0,5y'(0,9) = 1.$
- 2.36. $y'' + y' + 2xy = x + 0,5;$
 $y(1,1) - 2y'(1,1) = 2; y'(1,4) = 4.$
- 2.37. $y'' - 5y' + x^2 y = 1;$
 $y(0,4) = 2; y(0,7) + 2y'(0,7) = 0,7.$
- 2.38. $y'' + 4y' - xy = x + 1;$
 $y'(1,2) = 1; 2y(1,5) - y'(1,5) = 0,5.$
- 2.39. $y'' + 2y' + 3xy = 2x^2;$
 $y(1) + 2y'(1) = 0,6; y(1,3) = 1.$
- 2.40. $y'' + 6y' + x^2 y = x + 4;$
 $2y(1,3) - y'(1,3) = 1; y(1,6) = 3.$

Розв'язати методом Рітца.

- 2.41. $y'' - y = 1,$ $y(-1) = y(1) = 0.$
- 2.42. $y'' + 2xy = x^2,$ $y(-1) = y(1) = 0.$
- 2.43. $y'' + y = x^4,$ $y(-1) = y(1) = 0.$
- 2.44. $y'' - 2xy = 2x^2,$ $y(-1) = y(1) = 0.$
- 2.45. $y'' + y = 1,$ $y(-1) = y(1) = 0.$
- 2.46. $y'' + xy = x^4,$ $y(-1) = y(1) = 0.$
- 2.47. $y'' + xy = 3x^2,$ $y(-1) = y(1) = 0.$
- 2.48. $y'' - 2y = 5x^4,$ $y(-1) = y(1) = 0.$
- 2.49. $y'' - 3y = 3,$ $y(-1) = y(1) = 0.$
- 2.50. $y'' - 2xy = 3,$ $y(-1) = y(1) = 0.$

РОЗДІЛ 3. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РІШЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТКОВИМИ ПОХІДНИМИ

3.1. Класифікація диференціальних рівнянь із частковими похідними

Загалом диференціальне рівняння з частковими похідними другого порядку з двома незалежними змінними має вигляд

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0, \quad (3.1)$$

де x, y – незалежні змінні, $u(x, y)$ – шукана функція, $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ – її перші та другі часткові похідні за аргументами x і y .

Рішенням рівняння (3.1) називається функція $u = u(x, y)$, що обертає це рівняння в тотожність.

Рівняння (3.1) називається лінійним, якщо він першого ступеня щодо шуканої функції та її похідних і містить їх творів, тобто. має вигляд

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + Cu = F(x, y), \quad (3.2)$$

де коефіцієнти A, B, C, a, b, c є у випадку функціями від x, y . Зокрема, якщо ці коефіцієнти не залежать від x і y , то рівняння (3.2) є лінійним диференціальним рівнянням у часткових похідних з постійними коефіцієнтами.

Введемо поняття дискримінанта D рівняння (3.2) як

$$D = AC - B^2.$$

Залежно від знаку функції D розрізняють такі типи рівнянь:

- 1) $D > 0$ – еліптичний тип;
- 2) $D = 0$ – параболічний тип;
- 3) $D < 0$ – гіперболічний тип;

Рівняння, у яких D не зберігає постійного знаку, відносяться до рівнянь змішаного типу.

Зазначимо, що тип лінійного рівняння (3.2) є його важливою особливістю і зберігається за будь-якого невиродженого перетворення:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \quad (3.3)$$

при якому Якобіан не дорівнює нулю $\left(\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0 \right)$.

Розглянемо кілька прикладів рівнянь, які стосуються тому чи іншому типу.

Приклад. Стаціонарний розподіл температури $u = u(x, y)$ на пластині задовольняє рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (3.4)$$

Оскільки $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, то $D = AC - B^2 > 0$, то, рівняння (3.4) є рівнянням еліптичного типу.

Приклад. Розподіл температури $u = u(x, t)$ в тонкому однорідному стрижні для кожного моменту часу t описується одномірним рівнянням теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t), \quad (3.5)$$

де a – постійна, яка залежить від фізичних властивостей стрижня, $F(x, t)$ – функція густини джерел розподілу тепла. Якщо у стрижні відсутні джерела тепла, то отримуємо однорідне рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Вводячи нову змінну $a^2 t = \tau$, отримуємо наведене рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.6)$$

Рівняння теплопровідності (3.5) та (3.6), очевидно, параболічного типу.

Приклад. Переміщення $u = u(x, t)$ точки однорідної струни за наявності зовнішньої сили кожного моменту t задовольняє неоднорідному одновимірному хвильовому рівнянню:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t), \quad (3.7)$$

де a – стала і $F(x,t)$ – функція, залежить від зовнішньої сили. Рівняння (3.7) називається рівнянням коливань струни. Якщо зовнішня сила відсутня (вільні коливання), то рівняння коливань струни набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.8)$$

Рівняння коливань струни (3.7) та (3.8) відносяться до гіперболічного типу

3.2. Початкові та крайові умови. Задача Коші. Змішана задача. Коректність постановки змішаного завдання

Якщо фізичний процес описується за допомогою рівняння в приватних похідних, то для однозначної характеристики цього процесу потрібно до рівняння приєднати додаткові умови, оскільки, як відомо, диференціальне рівняння з приватними похідними має в загальному випадку незліченну безліч рішень. Ці додаткові дані в більшості випадків складаються з початкових та крайових (граничних) умов. У цьому умови, які стосуються початкового моменту часу, називаються початковими, а умови, які стосуються фіксованим значенням координат – крайовими.

Наведемо приклади запису початкових і крайових умов різних крайових задачах.

Розглянемо задачу про розподіл температури в тонкому теплоізолюваному (крім кінців) однорідному стрижні довжиною l . Вона описується рівнянням

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.9)$$

де a – постійна.

У початковий момент $t = t_0$ для внутрішніх точок стрижня зазвичай визначається початковий розподіл температури. Це призводить до початкової умови:

$$u(x, t_0) = f(x) \quad (3.10)$$

при $0 < x < l$, де $f(x)$ – відома функція.

Умови (3.10) замало однозначності рішення диференціального рівняння (3.9), оскільки фізично ясно, що розподіл температури $u(x, t)$ в

стрижні для моментів часу $t > t_0$ залежить від того, в якому стані знаходяться кінці стрижня $x = 0$ і $x = l$.

Залежно стану кінця $x = 0$ маємо такі основні крайові умови.

1. Кінець стрижня $x = 0$ підтримується при заданій температурі $\varphi = \varphi(t)$:

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad (3.11)$$

де $\varphi(t)$ – відома функція. Зокрема, якщо ця температура дорівнює нулю, то крайова умова набуває вигляду

$$u(0, t) = 0. \quad (3.12)$$

2. Кінець стрижня $x = 0$ теплоізолюваний:

$$u_x(0, t) = 0. \quad (3.13)$$

3. На кінці стрижня $x = 0$ відбувається теплообмін з навколишнім середовищем, температура якої змінюється за заданим законом: $\varphi = \varphi(t)$:

$$u(0, t) + \alpha u_x(0, t) = \varphi(t), \quad (3.14)$$

де α – постійна и $\varphi(t)$ – відома функція.

В окремому випадку, якщо температура зовнішнього середовища дорівнює нулю, то отримаємо

$$u(0, t) + \alpha u_x(0, t) = 0. \quad (3.15)$$

Можливі інші типи крайових умов. Аналогічні крайові умови можуть бути поставлені на кінці $x = l$. Комбінуючи крайові умови для кінців $x = 0$ і $x = l$, матимемо крайові завдання для стрижня, які за наявності початкової умови (3.10) мають єдині рішення.

Розглянемо вільні коливання однорідної струни довжини l ($0 < x < l$), поперечне зміщення $u = u(x, t)$ точок якої моменту часу t задовольняє хвильовому рівнянню:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.16)$$

де a – постійна.

У початковий момент $t = t_0$ прийнято задавати форму струни та розподіл швидкостей її точок. Це призводить до початкових умов:

$$\left. \begin{aligned} u(x, t_0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, t_0) &= \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

де $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – відомі функції, визначені в інтервалі $0 < x < l$. Залежно від способів закріплення кінців струни $x=0$ і $x=l$, отримуємо при $t_0 \leq t < \infty$ за наступні основні крайові умови:

1. кінець жорстко защемлений

$$u(0, t) = 0 \quad (\text{або} \quad u(l, t) = 0);$$

2. кінець пружно закріплений:

$$u_x(0, t) - k_1 u(0, t) = 0 \quad (\text{або} \quad u_x(l, t) + k_2 u(l, t) = 0),$$

де k_1 і k_2 – позитивні постійні;

3. кінець вільний:

$$u_x(0, t) = 0 \quad (\text{або} \quad u_x(l, t) = 0). \quad (3.18)$$

За достатньої гладкості функцій $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ задача (3.16)–(3.18) має єдине рішення.

Нехай дано лінійне диференціальне рівняння в досить загальному вигляді:

$$Lu = F(x, y), \quad (3.19)$$

де

$$\begin{aligned} Lu = & A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ & + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y)u. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Задача Коші для цього рівняння полягає в наступному: знайти рішення $u = u(x, y)$ рівняння (3.19), що задовольняє початковим умовам:

$$\left\{ \begin{aligned} u(x, y_0) &= \varphi(x), \\ u_y(x, y_0) &= \psi(x). \end{aligned} \right. \quad (3.21)$$

Умови (3.21) задають початкові дані Коші на прямий $y = y_0$. Однак це не є обов'язковим: можна задавати початкові дані на будь-якій гладкій кривій:

$$\Phi(x, y) = 0. \quad (3.22)$$

Таким чином, приходимо до спільного завдання Коші – знайти рішення $u = u(x, y)$ диференціального рівняння (3.19), яке б задовольняло початковим умовам:

$$\begin{cases} u|_{\Phi} = \varphi(x, y), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\Phi} = \psi(x, y). \end{cases} \quad (3.23)$$

Замість похідної $\frac{\partial u}{\partial x}$ можна задавати похідну $\frac{\partial u}{\partial y}$, а також нормальну похідну:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y). \quad (3.24)$$

Задача Коші зазвичай ставиться для лінійного рівняння (3.19) гіперболічного та параболічного типів.

Змішана задача для рівняння (3.19) у загальному вигляді може бути сформульована наступним чином: дана кінцева або нескінченна область G у площині Oxy , що має кусково-гладку межу Γ . Потрібно знайти в області G рішення диференціального рівняння

$$Lu = F(x, y), \quad (3.25)$$

якщо на деяких частинах границі $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ виконано співвідношення:

$$L_{ij}u = \varphi_{ij}(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_i \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, \rho_i), \quad (3.26)$$

де L_{ij} – або диференціальні оператори по змінних x і y порядку не вище за перший, або кінцеві співвідношення, а $\varphi_{ij}(x, y)$ – задані функції. Завдання Коші, очевидно, є окремим випадком загального змішаного завдання.

Визначення. Змішана задача (3.25), (3.26) називається коректно поставленою в області G , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати число $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ таке, що при зміні функцій $\varphi_{ij}(x, y)$ на величини, модуль яких менший, ніж η , рішення $u = u(x, y)$ змінюється у всій області G менше, ніж на ε . Інакше вважається, що завдання поставлене некоректно.

Для рівнянь еліптичного типу завдання Коші зазвичай не розглядається. Це тим, що, зазвичай, задачі Коші для рівнянь еліптичного типу поставлено некоректно. Покажемо це з прикладу, запропонованому французьким математиком Адамаром.

Нехай потрібно знайти у верхній півплощині $y > 0$ рішення рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (3.27)$$

що задовольняє за початкових умов при $y = 0$:

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ u_y(x, 0) &= \frac{1}{n} \cos nx, \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

де n – натуральне число.

Легко перевірити, що розв'язанням цього завдання є

$$u(x, y) = \frac{1}{n^2} \cos nx \cdot \operatorname{sh} ny.$$

Вочевидь, що з досить великому n початкові дані (3.28) можна зробити як завгодно малими, тобто.

$$|u(x, 0)| < \eta, \quad |u_y(x, 0)| < \eta,$$

тим не менш, дане рішення для будь-якого $\eta > 0$ не обмежене при $n \rightarrow \infty$ в кожній смужі $0 \leq y \leq h$. Дійсно, якщо $y > 0$, то маємо

$$u(0, y) = \frac{1}{n^2} \operatorname{sh} ny \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

При нульових початкових умовах

$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = 0,$$

рішення $u_0(x, y)$ задачі Коші, очевидно буде $u_0(x, y) \equiv 0$.

Таким чином, тут як завгодно мала зміна початкових умов призводить до необмежено великого розходження отриманих рішень.

3.3. Різницеві схеми змішаної задачі для рівняння теплопровідності

Нехай

$$\overline{D} = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}, \quad (3.29)$$

$$D' = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < t < T\}, \quad (3.30)$$

тобто. $\overline{D}$ – замкнутий прямокутник; D' – напіввідкритий прямокутник. Потрібно знайти безперервну на $\overline{D}$ функцію $u(x, t)$, яка задовольняє рівнянню теплопровідності:

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (3.31)$$

а також при $t = 0$ задовольняє початковій умові:

$$u(x, 0) = s(x), \quad (3.32)$$

а при $x = 0$ та $x = 1$ підпорядковується крайовим умовам:

$$u(0, t) = p(t); \quad u(1, t) = q(t), \quad (3.33)$$

де $f(x, t)$, $s(x)$, $p(t)$, $q(t)$ – задані достатньо гладкі функції, причому

$$s(0) = p(0), \quad s(1) = q(0),$$

що забезпечує коректність завдання умов (3.32) и (3.33).

Задача (3.31)-(3.33) є змішаною, оскільки вона містить як початкову умову, так і крайові умови. Відомо, що у поставленому завданні існує єдине рішення $u(x, t)$. Припускатимемо, що це рішення має на замкнутому прямокутнику $\overline{D}$ безперервні часткові похідні $\partial u / \partial t$, $\partial^2 u / \partial t^2$, $\partial^2 u / \partial x^2$, $\partial^4 u / \partial x^4$.

Введемо на розгляд сітки та норми. Нехай $h = 1/N$, $\tau = T/M$ - кроки по x і t , де N, M – натуральні $x_k = kh$, $t_v = v\tau$, $u_k^v = u(x_k, t_v)$. Побудуємо сітки:

$$\begin{aligned} \omega_h &= \{(x_k, t_v): k = 0, 1, \dots, N; v = 0, 1, \dots, M\}, \\ \omega'_h &= \{(x_k, t_v): k = 1, 2, \dots, N-1; v = 1, 2, \dots, M\}, \\ \omega_h^* &= \omega_h / \omega'_h. \end{aligned}$$

Сітка ω_h^* складається з вузлів сітки ω_h , розташованих на трьох сторонах прямокутника $\overline{D}$, на яких задані початкові та крайові умови. Сітка складається ω'_h з решти вузлів сітки ω_h .

Задаймо для сіткових функцій, визначених ω_h і ω'_h , такі норми::

$$\|y\|_h = \max_{\omega_h} |y_k^v|, \quad \|y\|_h' = \max_{\omega_h'} |y_k^v|, \quad (3.34)$$

які будуть використовуватись надалі.

Різницеві схеми. Введемо різницевий оператор Λ :

$$\Lambda y_k^v = -\frac{y_{k-1}^v - 2y_k^v + y_{k+1}^v}{h^2}. \quad (3.35)$$

Під виразом Λy_k^v мається на увазі значення сіткової функції Λy у точці (x_k, t_v) .

Задаймо на сітці ω_h^* тотожний оператор:

$$l^h y \equiv y \quad (3.36)$$

і сіткову функцію

$$g = \begin{cases} s(x_k), & x = x_k, \quad t = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \\ p(t_v), & x = 0, \quad t = t_v, \quad v = 0, 1, \dots, M, \\ q(t_v), & x = 1, \quad t = t_v, \quad v = 0, 1, \dots, M. \end{cases} \quad (3.37)$$

Побудуємо дві різницеві схеми:

$$L_1^h y_k^v = -\frac{y_k^v - y_k^{v-1}}{\tau} + \Lambda y_k^{v-1} = f_k^{v-1}, \quad (3.38)$$

$$l^h y = g; \quad (3.39)$$

$$L_2^h y_k^v = -\frac{y_k^v - y_k^{v-1}}{\tau} + \Lambda y_k^v = f_k^v, \quad (3.40)$$

$$l^h y = g, \quad (3.41)$$

де $k = 1, 2, \dots, N-1$, $v = 1, 2, \dots, M$.

Визначення. Геометричне місце точок (вузлів), у яких використовуються значення функції у різницевому рівнянні при фіксованих k, v , називається шаблоном різницевого рівняння.

У різницеве рівняння (3.38) при фіксованих k і v входять чотири невідомі y_{k-1}^{v-1} , y_k^{v-1} , y_{k+1}^{v-1} , y_k^v , що відносяться відповідно до вузлів (x_{k-1}, t_{v-1}) , (x_k, t_{v-1}) , (x_{k+1}, t_{v-1}) , (x_k, t_v) . Тому шаблон різницевого рівняння (3.38) матиме вигляд (рис. 3.1).

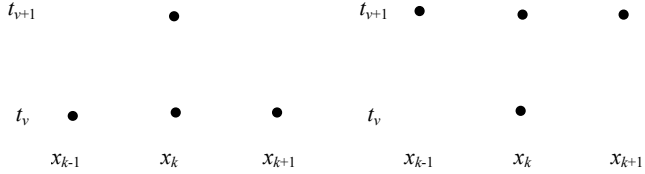


Рис.3.1. Шаблон разностного уравнения (3.38)

Рис.3.2. Шаблон разностного уравнения (3.40)

Аналогічно будується шаблон для різницевого рівняння (3.40) (рис. 3.2).

Обидві схеми різниці (3.38), (3.39) і (3.40), (3.41) є двошаровими, так як шаблони різницевих рівнянь (3.38) і (3.40) містять вузли, що лежать тільки на двох шарах, що відповідають значенням часу $t = t_{v-1}$ і $t = t_v$.

Різницеві схеми (3.38), (3.39) і (3.40), (3.41) відрізняються тим, що в рівнянні (3.38) оператор Λ діє на нижньому шарі, а в рівнянні (3.40) оператор Λ винесений на верхній шар і, крім того, значення правої частини $f_k^{v-1} = f(x_k, t_{v-1})$ и $f_k^v = f(x_k, t_v)$ беруться на різних шарах. описані нижче.

Апроксимація. Порівнюючи диференціальне рівняння (3.31) і різницеві рівняння (3.38) і (3.40), бачимо, що частковій похідній u'_t відповідає різницева похідна $(y_k^v - y_k^{v-1})/\tau$, а частковій похідній u''_{xx} відповідає різницева похідна другого порядку в напрямку осі x , утворена з протилежним знаком за допомогою оператора Λ (3.35). Тоді, очевидно, справедливі рівності

$$\Lambda u_k^{v-1} = -u''_{xx}(x_k, t_{v-1}) + r_k^v, \quad (3.42)$$

$$\frac{u_k^v - u_k^{v-1}}{\tau} = u'_t(x_k, t_{v-1}) + \rho_k^v, \quad (3.43)$$

де $k = 1, 2, \dots, N-1$; $v = 1, 2, \dots, M$,

$$|r_k^v| \leq C_1 h^2; \quad |\rho_k^v| \leq C_2 \tau, \quad (3.44)$$

C_1, C_2 – деякі постійні, які не залежать від h, τ, k, v .

Якщо $u = u(x, t)$ є розв'язання задачі (3.31)–(3.33), воно задовольняє рівнянню (3.31) на замкнутому прямокутнику $\bar{D}$.

Отже, виконується рівність

$$u'_t(x_k, t_{v-1}) - u''_{xx}(x_k, t_{v-1}) = f_k^{v-1} \quad (3.45)$$

для $k = 1, 2, \dots, N-1$; $v = 1, 2, \dots, M$, тобто, зокрема, і для $t_{v-1} = 0$.

Відповідно до (3.42), (3.43), (3.45) нев'язка Ψ_1 розв'язку $u(x, t)$ задачі (3.31)–(3.33) для різницевого рівняння (3.38) має такий вираз:

$$\begin{aligned} \Psi_{1k}^v &= L_1^h u_k^v - f_k^{v-1} = \frac{u_k^v - u_k^{v-1}}{\tau} + \Lambda u_k^{v-1} - f_k^{v-1} = \\ &= u'_t(x_k, t_{v-1}) + \rho_k^v - u''_{xx}(x_k, t_{v-1}) + r_k^v - f_k^{v-1} = r_k^v + \rho_k^v. \end{aligned}$$

Беручи до уваги (3.44), отримуємо

$$\|\Psi_1\|_h' = \max_{\omega_h'} |\Psi_{1k}^v| = \max_{1 \leq v \leq M} \max_{1 \leq k \leq N-1} |r_k^v + \rho_k^v| = O(h^2 + \tau) \quad (3.46)$$

Аналогічно знаходимо

$$\|\Psi_2\|_h' = O(h^2 + \tau), \quad (3.47)$$

де Ψ_2 – нев'язка рішення $u(x, t)$ задачі (3.31)–(3.33) для різницевого рівняння (3.40).

Таким чином, різницеві рівняння (3.38) та (3.40) апроксимують диференціальне рівняння (3.31) на розв'язку $u(x, t)$ задачі (3.31)–(3.33) з другим порядком по h та з першим порядком по τ .

Додаткові умови (3.32) та (3.33) апроксимуються на сітці ω_h^* за допомогою тотожного оператора l^h умовами (3.39) або відповідно умовами (3.41) точно.

Таким чином, обидві різницеві схеми (3.38), (3.39) і (3.40), (3.41) з точки зору апроксимації завдання (3.31)–(3.33) мають по порядку відносно h і τ однакову гарантовану точність.

Обчислювальні алгоритми. Виразивши з різницевого рівняння (3.38) y_k^v , отримаємо

$$y_k^v = \frac{\tau}{h^2} y_{k-1}^{v-1} + \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right) y_k^{v-1} + \frac{\tau}{h^2} y_{k+1}^{v-1} + \tau f_k^{v-1}. \quad (3.48)$$

Оскільки y_k^0 , y_0^v , y_N^v ($k = 1, 2, \dots, N-1$; $v = 0, 1, \dots, M$) відомі (3.39), то рішення різницевої схеми (3.38), (3.39) знаходиться за формулою (3.48) явно, шар за шаром. Така різницева схема (3.38), (3.39) називається явною.

Різницеве рівняння (3.40) з урахуванням (3.35) подаємо у вигляді

$$\frac{\tau}{h^2} y_{k-1}^v - \left(1 + \frac{2\tau}{h^2}\right) y_k^v + \frac{\tau}{h^2} y_{k+1}^v = -y_k^{v-1} - \tau f_k^v. \quad (3.49)$$

Згідно з (3.36), (3.37), (3.41) маємо також

$$y_0^v = p_v; \quad y_N^v = q_v. \quad (3.50)$$

Таким чином, якщо y_k^{v-1} ($k=1,2,\dots,N-1$) відомі (зокрема на шарі $v=0$ y_k^0 , $k=1,2,\dots,N-1$, задані умовою (3.41)), то для знаходження рішення різницевої схеми (3.40), (3.41) на наступному v -му шарі потрібно вирішити триточкове різницеве рівняння (3.49) з крайовими умовами I роду (3.50), тобто СЛАР спеціального виду (з тридіагональною матрицею). Тому різницева схема (3.40), (3.41) називається неявною.

Для знаходження різницевого рішення на v -му шарі може бути застосований метод прогонки, оскільки для завдання (3.49), (3.50) умови однозначного рішення, сформульовані для методу прогонки, виконані.

Стійкість та збіжність. Розглянемо різницеву схему (3.38), (3.39). Оскільки додаткові умови (3.32), (3.33) апроксимуються тут точно, то дослідження її стійкості потрібно розглянути рішення z допоміжної різницевої задачі

$$L_1^h z_k^v \equiv \frac{z_k^v - z_k^{v-1}}{\tau} + \Lambda z_k^{v-1} = \xi_k^v, \quad (3.51)$$

$$l^h z = 0, \quad (3.52)$$

де ξ – довільна задана на ω'_h сіткова функція. Виразивши з різницевого рівняння (3.51) z_k^v , аналогічно (3.48) отримаємо

$$z_k^v = \frac{\tau}{h^2} z_{k-1}^{v-1} + \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right) z_k^{v-1} + \frac{\tau}{h^2} z_{k+1}^{v-1} + \tau \xi_k^v, \quad (3.53)$$

$$k = 1, 2, \dots, N-1; \quad v = 1, 2, \dots, M.$$

Враховуючи (3.52), маємо

$$z_k^0 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1; \quad (3.54)$$

$$z_0^v = z_N^v = 0, \quad v = 0, 1, \dots, M.$$

Нехай τ і h задовольняють умові

$$\tau/h^2 \leq 1/2. \quad (3.55)$$

Тоді, очевидно

$$\frac{\tau}{h^2} + \left| 1 - \frac{2\tau}{h^2} \right| + \frac{\tau}{h^2} = 1.$$

Звідси з (3.53), (3.54) випливає нерівність

$$\max_{0 \leq k \leq N} |z_k^v| \leq \max_{0 \leq k \leq N} |z_k^{v-1}| + \tau \max_{1 \leq k \leq N-1} |\xi_k^v|. \quad (3.56)$$

Враховуючи, що $\max_{0 \leq k \leq N} |z_k^0| = 0$, з (3.56) послідовно отримуємо

$$\max_{0 \leq k \leq N} |z_k^v| \leq v\tau \|\xi\|_h'.$$

Таким чином,

$$\|z\|_h = \max_{0 \leq v \leq M} \max_{0 \leq k \leq N} |z_k^v| \leq M\tau \|\xi\|_h' = T \|\xi\|_h',$$

або

$$\|z\|_h \leq T \|\xi\|_h'. \quad (3.57)$$

Остання нерівність і означає стійкість різницевої схеми (3.38), (3.39) за умови (3.55). Можна довести, що порушення умови (3.55) призведе до порушення стійкості різницевої схеми (3.38), (3.39), тобто, якщо навіть $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$, але $\tau/h^2 \geq \text{const} > 1/2$, то різницева схема (3.38), (3.39) буде нестійкою.

Для дослідження стійкості різницевої схеми (3.40), (3.41) розглянемо різницеву задачу

$$L_2^h z_k^v \equiv \frac{z_k^v - z_k^{v-1}}{\tau} + \Lambda z_k^v = \xi_k^v, \quad (3.58)$$

$$l^h z = 0, \quad (3.59)$$

причому обмежень на співвідношення кроків τ та h накладати не будемо. Задачу (3.58), (3.59), аналогічно (3.49), (3.50), перепишемо в такому вигляді:

$$\frac{\tau}{h^2} z_{k-1}^v - \left(1 + \frac{2\tau}{h^2} \right) z_k^v + \frac{\tau}{h^2} z_{k+1}^v = -z_k^{v-1} - \tau \xi_k^v, \quad (3.60)$$

$$z_0^v = 0, \quad z_N^v = 0. \quad (3.61)$$

Якщо z_k^{v-1} ($k=1,2,\dots,N-1$) відомі (зокрема, на шарі $v=0$ за умовою (3.59), $z_k^0 = 0$, $k=0,1,\dots,N$), то як зазначалося вище, для

різницевої задачі (3.60), (3.61), де v фіксовано, виконані умови однозначної роздільної здатності на v -му шарі.

Очевидно, знайдеться таке k' , $0 < k' < N$, що

$$|z_{k'}^v| = \max_{0 \leq k \leq N} |z_k^v|. \quad (3.62)$$

Оскільки $|z_{k'-1}^v| \leq |z_{k'}^v|$, $|z_{k'+1}^v| \leq |z_{k'}^v|$, то

$$|z_{k'}^v| \leq \left| z_{k'}^v \left(1 + \frac{2\tau}{h^2} \right) - \frac{\tau}{h^2} (z_{k'-1}^v + z_{k'+1}^v) \right|$$

і, отже, згідно (3.60) справедлива нерівність

$$|z_{k'}^v| \leq |z_{k'}^{v-1}| + \tau |z_{k'}^v|.$$

З останньої нерівності з урахуванням (3.62) випливає нерівність (3.56) і, зрештою, оцінка (3.57), що означає стійкість різницевої схеми (3.40), (3.41) при будь-якому співвідношенні кроків τ та h .

Оскільки додаткові умови (3.32), (3.33) апроксимуються на ω_h^* точно, то з апроксимації (3.46), (3.47) і встановленої стійкості по правій частині з теорії різницевих схем витікає збіжність рішень різницевих схем (3.38), (3.39) і (3.40), (3.41) до розв'язку задачі (3.31)–(3.33) з другим порядком з h і з першим порядком з τ , тобто.

$$\|u - y\|_h = O(h^2 + \tau). \quad (3.63)$$

При цьому у разі явної схеми (3.38) (3.39) передбачається виконання обмеження (3.55).

Визначення. Різницева схема, стійка за будь-якого співвідношення кроків τ і h , називається абсолютно стійкою, а стійка при обмеженнях на τ і h – умовно стійкою.

Недоліком різницевої схеми (3.38), (3.39) є її умовна стійкість, а перевага – простота рахунку за явною формулою (3.48).

Приклад. Розглянемо змішану задачу для рівняння теплопровідності для однорідного стрижня:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.64)$$

де $u = u(x, t)$ – температура, t – час, при початкових та крайових умовах

$$u(x, 0) = 4x(1 - x), \quad (3.65)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0. \quad (3.66)$$

Рішення. Прийнемо $h = 0,1$; $\tau = 0,01$; $T = 0,05$. Тоді; $x_k = k \cdot 0,1$, $t_v = v \cdot 0,01$, де $k = 0, 1, \dots, 10$; $v = 0, 1, \dots, 5$. Будемо використовувати неявну різницеву схему (3.49), (3.50), яка в даному випадку набуде вигляду

$$y_{k-1}^v - 3y_k^v + y_{k+1}^v = -y_k^{v-1}, \quad (3.67)$$

$$y_0^v = 0; \quad y_N^v = 0, \quad (3.68)$$

де $k = 1, 2, \dots, 9$; $v = 0, 1, \dots, 5$.

Зауважимо, що y_k^0 , $k = 1, 2, \dots, 9$, задані умовою (3.65) ($y_k^0 = u(x_k, 0) = 4x_k(1 - x_k)$).

Отже, при кожному фіксованому v отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (3.67), (3.68) з тридіагональною матрицею, яку вирішуватимемо методом прогонки, визначаючи таким чином y_k^v , шар за шаром по осі t ($v = 1, 2, \dots, 5$).

Розрахункові формули методу прогонки набудуть вигляду:

$$a_k = \frac{1}{3 - a_{k-1}}, \quad b_k = \frac{b_{k-1} + y_k^{v-1}}{3 - a_{k-1}},$$

де $a_0 = 0$; $b_0 = 0$; $a_N = 0$; $b_N = 0$; $y_0^v = 0$; $k = 1, 2, \dots, 9$,

$$y_k^v = a_k y_{k+1}^v + b_k,$$

$$y_N^v = 0, \quad k = 9, 8, \dots, 1.$$

Отримані результати наведені в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

$x \backslash t$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
	$y(x, t)$										
0	0	0,36	0,64	0,84	0,96	1,00	0,96	0,84	0,64	0,36	0
0,1	0	0,310	0,572	0,764	0,882	0,921	0,882	0,764	0,571	0,310	0
0,2	0	0,275	0,514	0,695	0,808	0,846	0,808	0,695	0,514	0,275	0
0,3	0	0,246	0,464	0,633	0,738	0,774	0,738	0,633	0,464	0,346	0
0,4	0	0,222	0,421	0,576	0,674	0,707	0,674	0,576	0,421	0,222	0
0,5	0	0,201	0,382	0,524	0,614	0,645	0,614	0,524	0,382	0,201	0

3.4. Рішення задачі Діріхле для рівняння Пуассона методом сіток

Розглянемо задачу Діріхле для рівняння еліптичного типу – рівняння Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \text{ на } G, \quad (3.69)$$

$$u = \varphi(x, y) \text{ на } \Gamma, \quad (3.70)$$

де G – деяка скінченна область (рис. 3.4), Γ – границя області G , $f(x, y)$ – задана на G функція, $\varphi(x, y)$ – задана на Γ функція.

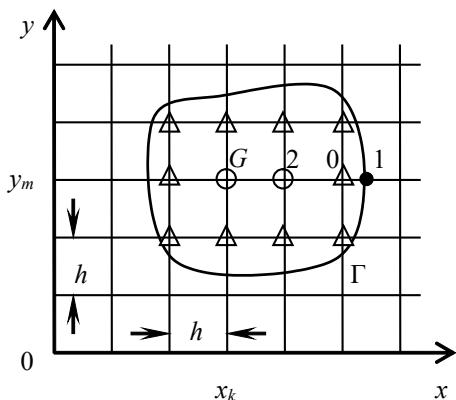


Рис.3.3. Скінченна область

Суть різницевого методу розв'язання задачі (3.69), (3.70) полягає у наступному. Будуємо квадратну сітку з кроком $h = 1/M$ (M – натуральне): $x_k = kh$, $y_m = mh$. У всіх розташованих в області G вузлах сітки, які можна з'єднати з чотирма найближчими вузлами відрізками прямих, не перетинаючи кордон Γ , похідні $\partial^2 u / \partial x^2$, $\partial^2 u / \partial y^2$, що входять до рівняння (3.94), замінюємо формулами чисельного диференціювання другого порядку точності (порядку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{v_{k-1,m} - 2v_{km} + v_{k+1,m}}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{v_{k,m-1} - 2v_{km} + v_{k,m+1}}{h^2},$$

де $v_{km} = v(x_k, y_m)$ – наближений розв’язок задачі (3.69), (3.70).

Підставляючи останні вирази (3.94), отримуємо:

$$\frac{v_{k-1,m} - 2v_{km} + v_{k+1,m}}{h^2} + \frac{v_{k,m-1} - 2v_{km} + v_{k,m+1}}{h^2} = f_{km}, \quad (3.71)$$

де $f_{km} = f(x_k, y_m)$.

Для всіх внутрішніх вузлів області G поблизу її межі Γ (позначених на рис. 3.6 трикутниками) для завдання різницевих рівнянь застосовується лінійна інтерполяція у напрямку осі x або y . Наприклад, у точці з номером 0 рівняння має вигляд

$$v_0 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} v_2 + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \varphi_1, \quad (3.72)$$

де ρ_1 – відстань від точки 0 до точки 1 на межі Γ , в якій береться задане значення функції φ , позначене φ_1 ; v_0, v_2 – невідомі в точках 0, 2; $\rho_2 = h$ – відстань між цими точками. Тут для простоти використається один індекс. Формула (3.72) означає лінійну інтерполяцію між точками 1 і 2 у точку 0 у напрямку осі x .

Аналогічно різницеві рівняння задаються за іншими вузлах, позначених трикутниками. При цьому відстань від точки, в яку здійснюється інтерполяція, до обох крайніх точок не повинні перевищувати h , а одна або обидві крайні точки повинні лежати на межі Γ .

Отже, у кожному вузлі, позначеному кружком, задано рівняння (3.71), а кожному вузлі, зазначеному трикутником, рівняння має вигляд типу (3.72). Загальна кількість рівнянь збігається з кількістю невідомих. Отримана система лінійних рівнянь алгебри має єдине рішення v , для знаходження якого можуть бути застосовані прямі та ітераційні методи вирішення систем рівнянь.

Якщо розв’язання задачі Діріхле (3.69), (3.70) $u(x, y) \in C_2(\overline{G})$, то можна довести, що буде справедлива оцінка похибки

$$\max_{G_h} |u - v| = O(h^2),$$

де $\overline{G} = G \cup \Gamma$, G_h – множина всіх вузлів, означених кружками и трикутниками.

Приклад. Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos(x - y) + \frac{1,25y}{1,5 + x},$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = |x| + |y|,$$

де $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$.

Рішення. Побудуємо сітку для кроку $h = 0,5$

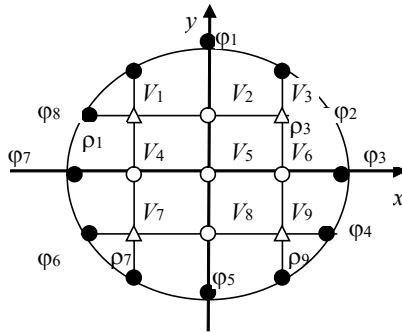


Рис.3.4. Сетка різницевого оператора

З метою спрощення запису використовуватимемо один нижній індекс. Для зручності обчислень рівняння (3.71) дозволимо щодо: v_{km} :

$$v_{km} = \frac{v_{k-1,m} + v_{k+1,m} + v_{k,m-1} + v_{k,m+1}}{4} - \frac{h^2}{4} f_{km},$$

де $f_{km} = \cos(x_k - y_m) + \frac{1,25y_m}{1,5 + x_k}$, $x_k = kh$, $y_m = mh$, $k, m = 0, \pm 1$.

Використовуючи формули (3.71), (3.72), отримуємо систему лінійних рівнянь алгебри щодо невідомих v_i ($i = 1, 2, \dots, 9$):

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + h} v_2 + \frac{h}{\rho_1 + h} \varphi_8; & v_2 = \frac{v_1 + \varphi_1 + v_3 + v_5}{4} - \frac{h^2}{4} f_2; \\ v_3 = \frac{\rho_3}{\rho_3 + h} v_2 + \frac{h}{\rho_3 + h} \varphi_2; & v_4 = \frac{\varphi_7 + v_1 + v_5 + v_7}{4} - \frac{h^2}{4} f_4; \\ v_5 = \frac{v_4 + v_2 + v_6 + v_8}{4} - \frac{h^2}{4} f_5; & v_6 = \frac{v_5 + v_3 + \varphi_3 + v_9}{4} - \frac{h^2}{4} f_6; \\ v_7 = \frac{\rho_7}{\rho_7 + h} v_8 + \frac{h}{\rho_7 + h} \varphi_6; & v_8 = \frac{v_7 + v_5 + v_9 + \varphi_5}{4} - \frac{h^2}{4} f_8; \\ & v_9 = \frac{\rho_9}{\rho_9 + 4} v_8 + \frac{h}{\rho_9 + h} \varphi_4. \end{array} \right.$$

Обчислюємо величини φ_i ($i = 1, 2, \dots, 8$), $f_2, f_4, f_5, f_6, f_8, \rho_1, \rho_3, \rho_7, \rho_9$, використовуючи умови задачі:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_5 = \varphi_7 = 1; \quad \varphi_2 = \varphi_4 = \varphi_6 = \varphi_8 &= \left| \sqrt{1 - 0,5^2} \right| + |0,5| \approx 1,366; \\ f_2 = \cos(0 - 0,5) + \frac{1,25 \cdot 0,5}{1,5 + 0} &\approx 1,295; \quad f_4 = \cos(-0,5 - 0) + \frac{1,25 \cdot 0}{1,5 - 0,5} \approx 0,878; \\ f_5 = \cos 0 + \frac{1,25 \cdot 0}{1,5 + 0} = 1; \quad f_6 = \cos(0,5 - 0) + \frac{1,25 \cdot 0}{1,5 + 0,5} &\approx 0,878; \\ f_8 = \cos(0 + 0,5) + \frac{1,25 \cdot (-0,5)}{1,5 + 0} &\approx 0,461; \end{aligned}$$

$$\rho_1 = \rho_3 = \rho_7 = \rho_9 = \sqrt{1 - 0,5^2} - 0,5 \approx 0,366.$$

Підставляючи обчислені значення в останню систему, перетворимо її на вигляд

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_1 = 0,423v_2 + 0,788; & v_2 = 0,25(v_1 + v_3 + v_5) - 0,169; \\ v_3 = 0,423v_2 + 0,788; & v_4 = 0,25(v_1 + v_5 + v_7) - 0,195; \\ v_5 = 0,25(v_2 + v_4 + v_6 + v_8) - 0,063; & v_6 = 0,25(v_3 + v_5 + v_9) - 0,195; \\ v_7 = 0,423v_8 + 0,788; & v_8 = 0,25(v_5 + v_7 + v_9) - 0,221; \\ & v_9 = 0,423v_8 + 0,788. \end{array} \right.$$

Вирішуючи останню систему, отримуємо наближене розв'язання задачі: $v_1 = 0,946$; $v_2 = 0,374$; $v_3 = 0,946$; $v_4 = 0,340$; $v_5 = 0,277$; $v_6 = 0,340$; $v_7 = 0,918$; $v_8 = 0,307$; $v_9 = 0,918$.

3.5. Методи Релея–Рітца и Бубнова–Гальоркіна

Нехай маємо функціонал

$$I(u), \quad (3.73)$$

заданий на деякому класі функцій в області D , за граничних умов на границі Γ :

$$V(u) = 0. \quad (3.74)$$

Розглянемо варіаційну проблему щодо дослідження стаціонарності функціоналу (3.73). Наближене рішення цієї задачі може бути отримано наступним методом, що відноситься до так званих прямих методів. Рішення u шукатимемо у вигляді суми:

$$u = \sum_{i=1}^n c_i^n u_i, \quad (3.75)$$

де c_i^n – невідомі коефіцієнти, u_i – лінійно незалежні функції. У позначеннях c_i використаний верхній індекс, оскільки коефіцієнти з тим самим номером i , але за різному числі n , збережених у (3.10075) членів, виходять різними.

Метод Релея–Рітца у тому, що сума (3.75) підставляється на (3.73) і функціонал у своїй перетворюється на функцію коефіцієнтів. Таким чином, замість проблеми екстремуму функціоналу отримуємо проблему екстремуму (нульового мінімуму) функції. Вирішуючи цю проблему методом Релея–Рітца приходимо до СЛАР.

$$\frac{\partial I}{\partial c_i^n} = 0,$$

яка є лінійною відносно c_i^n , якщо функціонал (3.73) квадратичний. З цієї системи знаходимо коефіцієнти, які, як зрозуміло з вище викладеного, мінімізують функціонал I .

У методі Бубнова–Гальоркіна Рітца вираз (3.75) також підставляється в (3.73) і далі вимагаємо, щоб вираз

$$L\left(\sum_{i=1}^n c_i^n u_i\right) - f \quad (3.76)$$

приблизно зверталось в тотожний нуль.

Оскільки тотожний нуль ортогональний будь-якої з функцій, у тому числі і функціям u_j , отримуємо

$$\int_D \left[L\left(\sum_{i=1}^n c_i^n u_i\right) - f \right] u_j d\sigma = 0 \quad (j=1,2,\dots,n). \quad (3.77)$$

Рівняння (3.77) являють собою систему алгебраїчних рівнянь алгебри щодо коефіцієнтів c_i^n , яка буде лінійною, якщо оператор L - лінійний. Таким чином, можна побудувати наближене рішення як завгодно (при досить великому n) близьке до точного.

При цьому умова тотожності нулю лівої частини (3.76) виконується приблизно (у певному сенсі в середньому).

Як відомо, для будь-якої варіаційної проблеми можна скласти рівняння Ейлера-Лагранжа, але, оскільки при цьому, не будь-яке диференціальне рівняння можна розглядати як рівняння Ейлера-Лагранжа якоїсь варіаційної проблеми, метод Гальоркіна дещо загальніший, ніж метод Рітца. У деяких випадках обидва методи призводять до однакових систем роздільних алгебраїчних рівнянь.

Зазначимо, що найбільш складний зручний вибір системи базисних функцій, що залежить від характеру розв'язуваної задачі.

Метод Рітца вирішення проблеми полягає в наближеній мінімізації відповідного функціоналу розглянутим вище способом. Метод же Гальоркіна застосовується безпосередньо до диференціальних рівнянь, які є рівняння Ейлера-Лагранжа деякої варіаційної проблеми, породженої тим чи іншим варіаційним принципом механіки.

Приклад Розв'язати методом Релея-Ритца завдання про згин прямокутної шарнірно опертої на контурі пластини під впливом розподіленого поперечного навантаження q .

Рішення. Рішення. Згідно з варіаційним принципом Лагранжа, якщо система перебуває у стані рівноваги, то її повна енергія (в даному випадку – енергія навантаженої пластини) набуває мінімального значення:

$$W = \int_0^b \int_0^a \left\{ \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} - wq \right\} dx dy, \quad (3.78)$$

де $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – циліндрична жорсткість, E – модуль Юнга,

h – товщина пластини, μ – коефіцієнт Пуассона.

Шукане рішення – функцію w (прогину пластини), що мінімізує функціонал (3.78), представимо у вигляді подвійних тригонометричних рядів:

$$w = \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^s c_{mn}^{rs} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (3.79)$$

де a і b – розміри пластини, m і n – кількість напівхвиль.

Дане представлення обґрунтовується тим, що воно задовольняє всім граничним умовам (дорівнює нулю на контурі прогинів та згинальних моментів, тобто других похідних в напрямку нормалі до контуру):

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{та} \quad x = a; \quad (3.80)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad \text{та} \quad y = b$$

незалежно від вибору коефіцієнтів $c_{mn}^{(r,s)}$.

Підставляючи (3.79) в (3.78), отримуємо

$$W = \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \left[- \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^s c_{mn}^{rs} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right]^2 dx dy -$$

$$- 2(1-\mu) \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \left[- \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^s c_{mn}^{rs} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right] \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(- \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^s c_{mn}^{rs} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) dx dy + \\
& + 2(1-\mu) \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \left[\sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^s c_{mn}^{rs} \frac{mn\pi^2}{ab} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right]^2 dx dy - \\
& - \int_0^b \int_0^a \left(q \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^s c_{mn}^{rs} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) dx dy.
\end{aligned}$$

Враховуючи взаємне знищення другого та третього інтегралів і виконання очевидних співвідношень

$$\begin{aligned}
& \int_0^b \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{j\pi y}{b} dx dy = \\
& = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq i \text{ и или } n \neq j; \\ \frac{ab}{4}, & \text{если } m = i \text{ и } n = j. \end{cases} \quad (3.81)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^b \int_0^a \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{j\pi y}{b} dx dy = \\
& = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq i \text{ и или } n \neq j; \\ \frac{ab}{4}, & \text{если } m = i \text{ и } n = j, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Отримуємо } W = & \frac{D\pi^4 ab}{8} \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^s (c_{mn}^{rs})^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \\
& - \int_0^b \int_0^a \left(q \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^s c_{mn}^{rs} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) dx dy.
\end{aligned}$$

Таким чином, знайшли W як функцію параметрів c_{mn} ($m=1,2,\dots,r$; $n=1,2,\dots,s$). Для відшукування сукупності значень коефіцієнтів c_{mn}^{rs} , що мінімізують W , складаємо відповідно до методу Релея–Рітца, необхідні умови екстремума функції декількох змінних:

$$\frac{\partial W}{\partial c_{mn}^{rs}} = 0 \quad (m=1,2,\dots,r; \quad n=1,2,\dots,s).$$

В розгорнутому вигляді система рівнянь має вигляд

$$\frac{D\pi^4 ab}{4} c_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \int_0^b \int_0^a q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = 0$$

$$(m=1,2,\dots,r; \quad n=1,2,\dots,s).$$

Введемо означення

$$A_{mn} = \int_0^b \int_0^a q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy.$$

Оскільки коефіцієнти c_{mn} визначені незалежно, то вони не залежать від кількості утриманих членів (r и s) в сумах по m и по n , и тому верхні індекси у c_{mn} опущені.

Звідси

$$c_{mn} = \frac{4}{D\pi^4 ab} \frac{A_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2},$$

і рішення w набуває вигляду

$$w = \frac{4}{D\pi^4 ab} \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^s \frac{A_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (3.82)$$

Приклад. Розв'язати попередню задачу методом Бубнова–Гальоркіна.

Рішення.. Диференціальне рівняння вигину пластини Софі Жермен–Лагранжа має вигляд

$$\nabla^4 w - \frac{q}{D} = 0, \quad (3.83)$$

де $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ – бігармонічний оператор.

Враховуючи граничні умови (3.80), рішення вигідно подати у вигляді лінійної комбінації такого ж виду, як і при вирішенні цього прикладу методом Релея-Рітца, тобто. у формі (3.79).

Підставляючи (3.79) у (3.83), отримуємо

$$\Delta\Delta\left(\sum_{m=1}^r\sum_{n=1}^sc_{mn}^{rs}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)-\frac{q}{D}=0. \quad (3.84)$$

Враховуючи ортогональність тотожного нуля будь-якої функції, у тому числі і функцій

$$\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad (m=1,2,...; n=1,2,...),$$

отримуємо

$$\int_0^b\int_0^a\left\{\Delta\Delta\left(\sum_{m=1}^r\sum_{n=1}^sc_{mn}^{rs}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)-\frac{q}{D}\right\}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}dxdy=0,$$

або

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^r\sum_{n=1}^sc_{mn}^{rs}\int_0^b\int_0^a\left[\Delta\Delta\left(\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)\right]\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}dxdy- \\ -\frac{1}{D}\int_0^b\int_0^aq\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}dxdy=0 \\ (i=1,2,...; j=1,2,...). \end{aligned}$$

Розписуючи символ бігармонічного оператора, знаходимо

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^r\sum_{n=1}^sc_{mn}^{rs}\int_0^b\int_0^a\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4+2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4\right]\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\times \\ \times\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}dxdy-\frac{A_{ij}}{D}=0, \end{aligned}$$

або, враховуючи (3.81), маємо

$$\frac{ab\pi^4}{4}c_{ij}\left(\frac{i^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}\right)-\frac{A_{ij}}{D}=0.$$

Повертаючись до індексів m та n , отримуємо

$$c_{mn} = \frac{4}{D\pi^4 ab} \frac{A_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2},$$

и

$$w = \frac{4}{D\pi^4 ab} \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^s \frac{A_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Таким чином, дійшли того ж результату, як і при вирішенні цього прикладу методом Рітца. Якби система базисних функцій, використаних як у методі Рітца, так і в методі Гальоркіна, не була б ортогональною, то система рівнянь відносно c_{mn}^{rs} не розділилася б і при визначенні c_{mn}^{rs} довелося вирішувати спільну систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor and J.Z. Zhu. (2013) The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals (Seventh edition). Elsevier
2. Киричевский В.В. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «Мирела+» / В.В. Киричевский, Б.М. Дохняк, Ю.Г. Козуб и др. – К.: Наукова думка, 2005. – 403с.
3. .Киричевский В.В., Дохняк Б.М., Козуб Ю.Г. Метод конечных элементов в механике разрушения эластомеров. – К.: «Наукова думка», 1998. – 200с.
4. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А. Метод скінченних елементів. Львів: ЛДУ, 1976. 80 с.
5. Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J. Stiffnes and deflection analysis of complex structures. *J. Aero. Sci.* 1956. V. 23. №9. P. 24 – 29.
6. Кутнів М. В., Пізюр Я. В. Чисельні методи : підручник. Львів : Растр-7, 2024. 277 с.
6. Андруник В.А., Висоцька В.А., Пасічник В.В., Чирун Л.Б., Чирун Л.В. Чисельні методи в комп'ютерних науках: навчальний посібник – Львів: Вид. «Новий світ – 2000», 2020. 470 с
7. Шебаніна О.В., Тищенко С.І., Хилько І.І., Крайній В.О. Чисельні методи : конспект лекцій. Миколаїв : МНАУ, 2023. 100 с.

Навчальне видання

Юрій Гордійович Козуб
Галина Олександрівна Козуб

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РІШЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
методичні рекомендації до вивчення теми освітнього компоненту
«Чисельні методи»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
спеціальності F3 – «Комп'ютерні науки»

Комп'ютерне макетування – Г. О. Козуб
Коректор – Ю. Г. Козуб

Здано до склад. 23.01.2026 р. Підп. до друку 30.01.2026 р. Формат 60х84 1/16.

Папір офсет. Гарнітура Times New Roman. Друк ризографічний.

Ум. друк. арк. 3,1. Наклад 100 прим. Зам. № 135

Видавництво Державний заклад «Луганський національний університет імені
Тараса Шевченка»

м. Полтава, вул. Коваля, 3

e-mail: mail@luguniv.edu.ua www.luguniv.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3459 від 09.04.2009 р.
