**Міністерство освіти і науки України**

**Шифр роботи: «Подвійні напівгрупи»**

# КЛАСИФІКАЦІЯ G-ДІМОНОЇДІВ ДРУГОГО ТА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКІВ

**2023–2024 н.р**

# ЗМІСТ

**ВСТУП** ..... 3

**РОЗДІЛ 1. КЛАСИФІКАЦІЯ ДІМОНОЇДІВ ТА G-ДІМОНОЇДІВ ДРУГОГО ПОРЯДКУ** ..... 5

**1.1. Напівгрупи** ..... 5

**1.2. Класифікація дімоноїдів другого порядку** ..... 6

**1.3. Класифікація g-дімоноїдів другого порядку** ..... 12

**Висновки до розділу 1.** ..... 13

**РОЗДІЛ 2. КЛАСИФІКАЦІЯ ДІМОНОЇДІВ ТА G-ДІМОНОЇДІВ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ** ..... 14

**2.1. Класифікація дімоноїдів третього порядку** ..... 14

**2.2. Класифікація g-дімоноїдів третього порядку** ..... 24

**Висновки до розділу 2.** ..... 28

**ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ** ..... 29

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ** ..... 30

**ДОДАТКИ** ..... 31

**Додаток А** ..... 31

**Додаток Б** ..... 71

# ВСТУП

**Актуальність теми.** Задача класифікації структур (математичних об'єктів) за деякою властивістю або ознакою є однією з класичних проблем у математиці. Ця задача полягає у наступному: розглядається множина об'єктів, поділених певним чином на класи, при цьому для одних об'єктів відомо до яких класів вони відносяться, а для інших об'єктів – ні, тобто невідомо яким саме класам вони належать. Однією з областей сучасної алгебри, яка активно розвивається, є теорія напівгруп. Вона має тісні зв'язки з багатьма математичними дисциплінами: диференціальною геометрією, функціональним аналізом, теорією графів, теорією алгоритмів, абстрактною теорією автоматів, а також застосовується в таких галузях як біологія, соціологія, математична лінгвістика та ін. Природним узагальненням напівгрупи є поняття дімоноїда та g-дімоноїда. Поняття дімоноїда з'явилося в роботі сучасного французького математика Жан-Луї Лоде [1] при описі нового типу алгебраїчних систем – діалгебр. Зараз теорія дімоноїдів також починає швидко розвиватися. Як і в багатьох інших математичних теоріях, однією з основних задач теорії дімоноїдів є задача класифікації. Задача класифікації напівгруп другого порядку (тобто двоелементних напівгруп) – була представлена в праці Л. Н. Шевріна [2]. Класифікація допельнапівгруп другого порядку була наведена в праці Ю. В. Жучка [3], допельнапівгруп третього порядку – в праці В. Гаврилків та Д. Рендзяк [4].

**Проблема.** Скільки з точністю до ізоморфізму існує g-дімоноїдів та дімоноїдів на двоелементних та триелементних множинах?

**Основні результати роботи.** Основними результатами роботи є встановлена, з точністю до ізоморфізму, кількість g-дімоноїдів та дімоноїдів другого порядку (для другого порядку всі g-дімоноїди одночасно є також і дімоноїдами, з точністю до ізоморфізму їх існує 8) та встановлено, що, з точністю до ізоморфізму, існує 43 дімоноїди та 41 дімоноїд третього порядку. У роботі також доведено теорему про існування схрещено антиізоморфного дімоноїда.

**Новизна та оригінальність ідей.** У науковій роботі отримано новий результат, а саме: встановлена, з точністю до ізоморфізму, кількість g-дімоноїдів та дімоноїдів другого та третього порядків. При цьому слід відзначити, що спосіб доведення існування деяких дімоноїдів третього порядку є досить оригінальним та неочевидним, оскільки для доведення була використана теорема про існування схрещено антиізоморфного дімоноїда.

**Методи дослідження** – загальноалгебраїчні з використанням основних методів теорії напівгруп. Нестандартність цих методів обумовлена тим, що вони адаптовані до алгебр з двома операціями.

**Практичне та теоретичне значення одержаних результатів.** Результати роботи є новими. Вони мають теоретичне значення як такі, що є внеском у подальший розвиток теорії дімоноїдів та діалгебр. Результати роботи можуть бути використані на факультативних заняттях з математики для учнів старших класів.

**Структура роботи.** Наукова робота складається з двох розділів. У першому розділі, з точністю до ізоморфізму, класифіковано всі дімоноїди та g-дімоноїди другого порядку та встановлено, що всі g-дімоноїди на двоелементній множині одночасно є дімоноїдами. У другому розділі, з точністю до ізоморфізму, класифіковано всі дімоноїди та g-дімоноїди третього порядку, встановлено, що на триелементній множині існують g-дімоноїди, які відмінні від дімоноїдів та доведено теорему про існування схерещено антиізоморфного дімоноїда (теорему 2.1).

**Апробація результатів наукової роботи.** Результати роботи представлено на засіданні алгебраїчної дослідницької групи кафедри математики та інформатики Луганського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Миргород).

# ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

У цій роботі наведено основні визначення теорії дімоноїдів, встановлена, з точністю до ізоморфізму, кількість g-дімоноїдів та дімоноїдів другого порядку (для другого порядку всі g-дімоноїди одночасно є також і дімоноїдами, з точністю до ізоморфізму їх існує 8) та встановлено, що, з точністю до ізоморфізму, існує 43 дімоноїди та 41 дімоноїд третього порядку. У роботі також доведено теорему про існування схрещено антиізоморфного дімоноїда (теорему 2.1). Перспективним напрямком подальших наукових досліджень можуть бути задачі класифікації, з точністю до ізоморфізму, інших класів алгебраїчних систем, наприклад тріоїдів.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


1. Loday J.-L. Dialgebras // Dialgebras and Related Operads: Lect. Notes Math. – 2001. – 1763. – P. 7 – 66.
2. Шеврін Л. Н. Що таке напівгрупа. Соровський освітній журнал. 1997. №4. С. 99-104.
3. Жучок Ю.В. Класифікація двоелементних допельнапівгруп. Фізико-математична освіта. 2020. Випуск 3(25). Частина 2. С. 38-42.
4. Gavrylkiv V., Rendziak D. Interassociativity and three-element doppelsemigroups. Algebra and Discrete Mathematics. 2019. №28 (2). P. 224–247.
5. Кліффорд А. Престон Г. Алгебраїчна теорія напівгруп. М: Мир, 1972. Т. 1. 286 с.
6. Pareigis, Bodo (1970), Categories and Functors, Academic Press, ISBN 0-12-545150-4
7. Жучок, А.В. Вільні дімоноїди. Український математичний журнал. 2011.
8. Yuri Movsisyan, Sergey Davidov, Mher Safaryan. Construction of free g-dimonoids. Algebra and Discrete Mathematics Volume18(2014). Number 1, pp. 138 – 148.
9. Friðrik Diego; Kristín Halla Jónsdóttir (July 2008). "Associative Operations on a Three-Element Set"
10. Thomas W Kelsey. The semigroups of order 9 and their automorphism groups.
11. Yurii Zhuchok. AUTOMORPHISMS OF THE CATEGORY OF FREE DIMONOIDS (submitted for publication).