УДК 512.53

О. О. Тоічкіна (Луганський нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Старобільськ)

ЕНДОТИПИ ДЕЯКИХ ЧАСТКОВИХ ВІДНОШЕНЬ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

We classify certain partial equivalence relations according to their type of an endomorphism.

В роботі класифікуються часткові відношення еквівалентності певного виду за їх ендотипами відносно ендоморфізмів.

Напівгрупи ендоморфізмів реляційних систем вивчалися багатьма авторами. Основна увага при їх вивченні приділялася дослідженню визначеності реляційних систем їх напівгрупами ендоморфізмів [1–3], опису їх абстрактних властивостей і зображень [4–6], вивченню алгебраїчних і комбінаторних властивостей моноїдів ендоморфізмів [7, 8]. Основним поняттям, яке тут вивчаєть- ся, є поняття ендотипу реляційної системи. Поняття ендотипу, як числової характеристики, що зв'язує множини шести типів ендоморфізмів симетричного бінарного відношення, було введене в [9], а надалі в [10] і для відношень довільної арності. Використовуючи це поняття, можна класифікувати відношення за їх ендотипами відносно ендоморфізмів. Так, в [11] знайдено ендотипи узагальнених полігонів, в [12] — ендотипи доповнень скінченного шляху, а в [13] — ендотипи графів N-призм. У [14] класифіковано всі відношення еквівалентності за їх ендотипами відносно ендоморфізмів. У [15] обчислені всі значення ендотипу довільного відношення еквівалентності відносно його ендотопізмів. Тут ми визначаємо всі ендотипи часткових відношень еквівалентності певного виду, що доповнює основний результат з [14].

Робота побудована таким чином. У пункті 1 даються визначення шести типів ендоморфізмів і приклади ендоморфізмів кожного типу. У пункті 2 наведено необхідні та достатні умови існування відповідних ендоморфізмів часткового відношення еквівалентності. У пункті 3 обчислюються всі можливі значення ендотипу заданих часткових еквівалентностей.

1. Типи ендоморфізмів. Нехай X — довільна непорожня множина, $\Im(X)$ — симетрична напівгрупа на множині X і $\rho \subseteq X \times X$.

Перетворення $f \in \Im(X)$ називається *ендоморфізмом* відношення $\rho \subseteq X \times X$, якщо з $(x, y) \in \rho$ випливає, що $(xf, yf) \in \rho$ при будь-яких $x, y \in X$. Множина всіх ендоморфізмів бінарного відношення ρ відносно операції композиції перетворень утворює напівгрупу, яка позначається через $End\,(X, \rho)$.

Ендоморфізм f відношення $\rho \subseteq X \times X$ називається *напівсильним*, якщо з $(xf, yf) \in \rho$ випливає, що існують такі $x' \in xff^{-1}$, $y' \in yff^{-1}$, що $(x', y') \in \rho$. Множина всіх напівсильних ендоморфізмів відношення ρ позначається як $HEnd(X, \rho)$.

Ендоморфізм f відношення $\rho \subseteq X \times X$ називається *локально сильним*, якщо з $(xf, yf) \in \rho$ випливає, що для кожного $x' \in xff^{-1}$ знайдеться такий $y' \in yff^{-1}$, що $(x', y') \in \rho$, і аналогічно для кожного прообразу $y' \in yff^{-1}$. Множина всіх локально сильних ендоморфізмів відношення ρ позначається як $LEnd(X, \rho)$.

Ендоморфізм f відношення $\rho \subseteq X \times X$ називається *квазісильним*, якщо з $(xf, yf) \in \rho$ випливає, що існує такий $x' \in xff^{-1}$, який знаходиться у відношенні ρ з кожним прообразом з yff^{-1}, і аналогічно для деякого прообразу $y' \in yff^{-1}$. Множина всіх квазісильних ендоморфізмів бінарного відношення ρ позначається через $QEnd(X, \rho)$.

Зазначимо, що множини $HEnd(X, \rho)$, $LEnd(X, \rho)$ і $QEnd(X, \rho)$ у загальному випадку не є напівгрупами [9].

Ендоморфізм f відношення $\rho \subseteq X \times X$ називається *сильним*, якщо з $(xf, yf) \in \rho$ випливає, що $(x, y) \in \rho$ при будь-яких $x, y \in X$. Множина всіх сильних ендоморфізмів відношення ρ відносно операції композиції перетворень утворює моноїд, який позначається як $SEnd\,(X, \rho)$. Неважко переконатися, що $SEnd(X, \rho)$ є піднапівгрупою $End(X, \rho)$.

Ендоморфізм f відношення $\rho \subseteq X \times X$ називається *автоморфізмом*, якщо f є біекцією і f^{-1} — ендоморфізм бінарного відношення ρ. Множина всіх автоморфізмів відношення ρ відносно операції композиції підстановок утворює групу, яка позначається через $Aut\,(X, \rho)$. Зрозуміло, що $Aut(X, \rho)$ є підгрупою $End(X, \rho)$.

Як відомо [9], для довільного бінарного відношення ρ на множині X має місце ланцюг включень:

$$End(X, \rho) \supseteq HEnd(X, \rho) \supseteq LEnd(X, \rho) \supseteq QEnd(X, \rho) \supseteq$$

$$\supseteq SEnd(X, \rho) \supseteq Aut(X, \rho).$$

Розглянемо приклади ендоморфізмів кожного типу для відношення $\rho = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (c, d), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (e, f), (f, e), (f, f)\}$, визначеного на множині $X = \{a, b, c, d, e, f\}$:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ c & c & c & b & c & c \end{pmatrix} \in End(X, \rho) \backslash HEnd(X, \rho),$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ c & c & b & b & e & e \end{pmatrix} \in HEnd(X, \rho) \backslash LEnd(X, \rho),$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & b & b & b & d & d \end{pmatrix} \in LEnd(X, \rho) \backslash QEnd(X, \rho),$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & b & c & d & e & e \end{pmatrix} \in QEnd(X, \rho) \backslash SEnd(X, \rho),$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a & b & c & d & e & e \end{pmatrix} \in SEnd(X, \rho) \backslash Aut(X, \rho),$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a & b & c & d & f & e \end{pmatrix} \in Aut(X, \rho).$$

2. Ендоморфізми часткових еквівалентностей. Нехай $Eq(X)$ — множина всіх еквівалентностей на X і $\alpha \in Eq(X)$. Через X/α позначається фактор-множина множини X по еквівалентності α, а через $\overline{x}$ — клас еквівалентності, який містить $x \in X$.

Лема 1 ([16]). *Перетворення $f \in \Im(X)$ є ендоморфізмом відношення $\alpha \in Eq(X)$ тоді і тільки тоді, коли для кожного класу еквівалентності $A \in X/\alpha$ існує клас $B \in X/\alpha$, такий що $Af \subseteq B$.*

Лема 2 ([17]). *(i) Ендоморфізм $f \in End(X, \alpha)$ відношення $\alpha \in Eq(X)$ є напівсильним тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $B \in X/\alpha$, такого що $B \cap im(f) \neq \varnothing$, і будь-яких $a, b \in B \cap im(f)$ існує $A \in X/\alpha$, такий що $a, b \in Af$.*

(ii) Ендоморфізм $f \in End(X, \alpha)$ відношення $\alpha \in Eq(X)$ є локально сильним ендоморфізмом тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $A, B, C \in X/\alpha$ з того, що $Af \subseteq C, Bf \subseteq C$, випливає $Af = Bf$.

(iii) Для будь-якого відношення $\alpha \in Eq(X)$ маємо $QEnd(X, \alpha) = SEnd(X, \alpha)$.

Лема 3. *Ендоморфізм $f \in End(X, \alpha)$ відношення $\alpha \in Eq(X)$ є сильним тоді і тільки тоді, коли $\tau^* : X/\alpha \to X/\alpha : \overline{a} \mapsto \overline{af}$ є ін'єктивним перетворенням.*

Доведення. Випливає з леми 3.1 в [5].

Бінарне відношення ρ на множині X називається *частковою еквівалентністю* (див., наприклад, [18]) на X, якщо воно симетричне і транзитивне.

Нехай A — непорожня власна підмножина множини X, α_A — еквівалентність на A. Відношення $\alpha_A \subset X \times X$ очевидно є частковим відношенням еквівалентності на множині X. Множину всіх таких часткових еквівалентностей $\alpha_A, A \subset X$, будемо позначати $Eq_A(X)$.

Якщо $f : X \to X$ — деяке перетворення і $A \subseteq X$, то через $f|_A$ позначатимемо обмеження перетворення f на підмножину A.

Лема 4. *(i) Перетворення $f \in \Im(X)$ є ендоморфізмом часткової еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ тоді і тільки тоді, коли $f|_A \in End(A, \alpha_A)$.*

(ii) Підстановка f множини X є автоморфізмом часткової еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ тоді і тільки тоді, коли $f|_A \in Aut(A, \alpha_A)$.

(iii) Ендоморфізм f часткового відношення еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ є напівсильним ендоморфізмом тоді і тільки тоді, коли для будь-якого класу $B \in A/\alpha_A$ такого, що $B \cap im(f) \neq \varnothing$, і будь-яких $a, b \in B \cap im(f)$ існує $Y \in A/\alpha_A$ такий, що $a, b \in Yf$.

(iv) Ендоморфізм f часткового відношення еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ є локально сильним ендоморфізмом тоді і тільки тоді, коли

$$(X \backslash A)f \subseteq X \backslash A \text{ і } f|_A \in LEnd(A, \alpha_A).$$

(v) Ендоморфізм f часткового відношення еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ є сильним ендоморфізмом тоді і тільки тоді, коли

$$(X \backslash A)f \subseteq X \backslash A \text{ і } f \in SEnd(A, \alpha_A).$$

(vi) Ендоморфізм f часткового відношення еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ є квазісильним ендоморфізмом тоді і тільки тоді, коли f — сильний ендоморфізм.

Доведення. Твердження (iii) доводиться аналогічно тому, як лема 2 з [17], а решта тверджень (i), (ii), (iv)–(vi) — подібно лемам 1–3 цього пункту.

Відмітимо, що з пунктів (v), (vi) леми 4 випливає, що $QEnd(X, \alpha_A) = SEnd(X, \alpha_A)$ для будь-якого $\alpha_A \in Eq_A(X)$.

3. Ендотипи часткових відношень еквівалентності. Нехай X — довільна непорожня множина, ρ — бінарне відношення на множині X. Ланцюгу включень

$$End(X,\rho) \supseteq HEnd(X,\rho) \supseteq LEnd(X,\rho) \supseteq QEnd(X,\rho) \supseteq$$

$$\supseteq SEnd(X,\rho) \supseteq Aut(X,\rho)$$

відповідає послідовність $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$, де $s_i \in \{0,1\}, i \in \{1,..,5\}$. При цьому $s_i = 0$, якщо на i-тій позиції в наведеній вище послідовності включень множини збігаються, $s_i = 1$ в противному випадку. Наприклад, $s_3 = 0$ означає $LEnd(X,\rho) = QEnd(X,\rho)$, а $s_5 = 1$ вказує на $SEnd(X,\rho) \neq Aut(X,\rho)$. Значення суми $\Sigma_{i=1}^{5} s_i 2^{i-1}$ називається *ендотипом* бінарного відношення ρ відносно його ендоморфізмів і позначається через $Endotype(X,\rho)$.

Відношення $\rho \subseteq X \times X$ називається *тотожним*, якщо $\rho = i_X = \{(x,x) | x \in X\}$ і *універсальним*, якщо $\rho = \omega_X = X \times X$.

Теорема 1. *Нехай $A \neq \varnothing$ і $A \subset X$. Для будь-якої часткової еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$:*

$$Endotype(X,\alpha_A) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } |A| = 1, |X| = 2; \\ 7, & \text{якщо } 2 \leq |A| < \infty,\ |X \backslash A| = 1,\ \alpha_A = i_A; \\ 18, & \text{якщо } |A| = 1,\ 2 < |X|; \\ 19, & \text{якщо } 2 \leq |A|, \alpha_A = \omega_A; \\ 23, & \text{якщо } 2 \leq |A| < \infty, i_A \neq \alpha_A \neq \omega_A \text{ або} \\ & \qquad 2 \leq |A| < \infty, 1 < |X \backslash A|, \alpha_A = i_A \text{ або} \\ & \qquad |A| = \infty, \alpha_A \neq \omega_A. \end{cases}$$

Доведення. 1) Нехай $|X| = 2$, $A \subset X$ — підмножина, що містить один елемент. Тоді $Eq_A(X)$ вичерпується еквівалентністю $\alpha_A = i_A = \omega_A$, при цьому, як випливає з леми 4, $End(X,\alpha_A) = HEnd(X,\alpha_A)$ і потужність цих множин дорівнює 2, а $LEnd(X,\alpha_A) = Aut(X,\alpha_A)$ з потужністю 1, отже, $Endotype(X,\alpha_A) = \sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1} = 2$.

2) Нехай $A \subset X$ — скінченна множина, що містить не менше двох елементів, $|X \backslash A| = 1$ і α_A — тотожне відношення. Візьмемо різні $a, b \in A$ і визначимо перетворення f множини X таким чином:

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A, \\ b, & \text{якщо } x \notin A. \end{cases}$$

Неважко переконатися, що $f \in End(X,\alpha_A)$, проте $f \notin HEnd(X,\alpha_A)$, що випливає з п. (iii) леми 4. Аналогічно можна показати, що $HEnd(X,\alpha_A) \neq$ $\neq LEnd(X,\alpha_A) \neq QEnd(X,\alpha_A)$. Дійсно, визначивши $f : X \to X$, як

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A \backslash \{b\}, \\ b, & \text{якщо } x \in \{b\} \cup X \backslash A \end{cases}$$

для різних $a, b \in A$, приходимо до $f \in HEnd(X, \alpha_A) \backslash LEnd(X, \alpha_A)$. Перетворення

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A, \\ x, & \text{якщо } x \notin A \end{cases}$$

дає нам приклад такого $f \in LEnd(X, \alpha_A) \backslash QEnd(X, \alpha_A)$. Оскільки $|X \backslash A| = 1$, $\alpha_A = i_A$ і A – скінченна множина, згідно з лемою 3, п. (ii) і п. (v) леми 4, $f \in Aut(X, \alpha_A)$ для будь-якого $f \in SEnd(X, \alpha_A)$, тому $Aut(X, \alpha_A) = SEnd(X, \alpha_A)$. Таким чином,

$$End(X, \alpha_A) \supset HEnd(X, \alpha_A) \supset LEnd(X, \alpha_A) \supset QEnd(X, \alpha_A) = Aut(X, \alpha_A).$$

Отже, $Endotype(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1} = 7$.

3) Нехай $A = \{a\}$, X — множина, що містить більше двох елементів. Як і в п. 1), $Eq_A(X)$ вичерпується еквівалентністю $\alpha_A = i_A = \omega_A$, при цьому для ендоморфізму f будь-якого типу очевидно, що $af = a$. Згідно з п. (iii) леми 4, $f \in HEnd(X, \alpha_A)$ для будь-якого $f \in End(X, \alpha_A)$, тому $HEnd(X, \alpha_A) = End(X, \alpha_A)$. Умови пунктів (iv)–(vi) леми 4 в даному випадку визначають один і той самий ендоморфізм, не обов'язково бієктивний, тому $LEnd(X, \alpha_A) = SEnd(X, \alpha_A)$ і $SEnd(X, \alpha) \neq Aut(X, \alpha)$. Таким чином,

$$End(X, \alpha_A) = HEnd(X, \alpha_A) \supset LEnd(X, \alpha_A) = SEnd(X, \alpha_A) \supset Aut(X, \alpha_A),$$

отже, $Endotype(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1} = 18$.

4) Нехай A — множина, що містить не менше двох елементів і α_A — універсальне відношення. Візьмемо різні $a, b \in A$ і визначимо перетворення $f : X \to X$ за правилом:

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A, \\ b, & \text{якщо } x \notin A. \end{cases}$$

Згідно з лемою 1 і п. (i) леми 4, $f \in End(X, \alpha_A)$, але $f \notin HEnd(X, \alpha_A)$, що випливає з п. (iii) леми 4. Якщо $Xf = \{a\}$, матимемо $f \in HEnd(X, \alpha_A) \backslash LEnd(X, \alpha_A)$. Оскільки $|A/\alpha_A| = 1$, умови пунктів (iv)–(vi) визначають один і той самий не обов'язково бієктивний ендоморфізм, тому $LEnd(X, \alpha_A) = SEnd(X, \alpha_A)$ і $SEnd(X, \alpha_A) \neq Aut(X, \alpha_A)$. Таким чином,

$$End(X, \alpha_A) \supset HEnd(X, \alpha_A) \supset LEnd(X, \alpha_A) = SEnd(X, \alpha_A) \supset Aut(X, \alpha_A),$$

отже, $Endotype(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1} = 19$.

5) а) Нехай A — скінченна множина, що містить не менше двох елементів, і $\alpha_A \neq i_A, \alpha_A \neq \omega_A$. Тоді $|A| \geq 3, |A/\alpha_A| \geq 2$ і в A/α_A існує принаймні один клас, потужність якого не менше 2. Позначимо його через $\overline{x}$. Візьмемо різні $a, b \in \overline{x}$ і визначимо перетворення $f : X \to X$, поклавши

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A, \\ b, & \text{якщо } x \notin A. \end{cases}$$

Неважко переконатися, що $f \in End(X, \alpha_A)$, але $f \notin HEnd(X, \alpha_A)$, що випливає з п. (iii) леми 4. Якщо $Xf = \{a\}$, будемо мати приклад $f \in HEnd(X, \alpha_A) \backslash LEnd(X, \alpha_A)$.

Визначимо тепер перетворення f множини X, поклавши

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A, \\ x, & \text{якщо } x \notin A \end{cases}$$

для всіх $x \in X$. Згідно з пунктами (iv) і (v) леми 4, $f \in LEnd(X, \alpha_A)$, проте $f \notin SEnd(X, \alpha_A)$, що випливає з п. (v) леми 4. Звідси $SEnd(X, \alpha_A) \neq LEnd(X, \alpha_A)$. Нерівність $Aut(X, \alpha_A) \neq SEnd(X, \alpha_A)$ є очевидною. Отже,

$$End(X, \alpha_A) \supset HEnd(X, \alpha_A) \supset LEnd(X, \alpha_A) \supset QEnd(X, \alpha_A) =$$

$$= SEnd(X, \alpha_A) \supset Aut(X, \alpha_A)$$

і $Endotype(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1} = 23$.
b) Нехай A — скінченна непорожня множина з $|A| \geq 2$, $|X \backslash A| > 1$ і $\alpha_A = i_A$. Ланцюг включень

$$End(X, \alpha_A) \supset HEnd(X, \alpha_A) \supset LEnd(X, \alpha_A) \supset QEnd(X, \alpha_A) = SEnd(X, \alpha_A)$$

доводиться аналогічно тому, як в п. 2) цього доведення. Оскільки множина $X \backslash A$ містить не менше 2 елементів, виберемо в ній довільний елемент a і визначимо перетворення f множини X таким чином:

$$xf = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A, \\ a, & \text{якщо } x \notin A. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $f \in SEnd(X, \alpha_A) \backslash Aut(X, \alpha_A)$ і, як результат, $Endotype(X, \alpha_A) = = \sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1} = 23$.
c) Нехай A — нескінченна множина і $\alpha_A \neq \omega_A$. Розглянемо випадок, коли $\alpha_A = i_A$. Оскільки множина A нескінченна, на відміну від пункту 2), $SEnd(X, \alpha_A) \neq Aut(X, \alpha_A)$. Приклад ендоморфізму $f \in SEnd(X, \alpha_A) \backslash Aut(X, \alpha_A)$ отримуємо при виборі на обмеженні $f|_A$ ін'єкції, яка не є сюр'єкцією. В цьому випадку

$$End(X, \alpha_A) \supset HEnd(X, \alpha_A) \supset LEnd(X, \alpha_A) \supset QEnd(X, \alpha_A) =$$

$$= SEnd(X, \alpha_A) \supset Aut(X, \alpha_A).$$

Таким чином, $Endotype(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1} = 23$.

Якщо ж $\alpha_A \neq i_A, \alpha_A \neq \omega_A$, то, міркуючи аналогічно тому, як в п. 5), a), приходимо до $Endotype(X, \alpha_A) = 23$. Теорема доведена.

Таким чином, всі можливі значення ендотипу довільного відношення еквівалентності, знайдені в [14], і отриманий тут результат дають повну класифікацію всіх часткових відношень еквівалентності виду $\alpha_A, A \subseteq X$, за їх ендотипами відносно ендоморфізмів.

Список використаної літератури

1. *Глускин Л. М.* Полугруппа изотонных преобразований // Успехи мат. наук. – 1961.– № 5. – С. 157–162.
2. *Шнеперман Л. Б.* Полугруппы эндоморфизмов квазиупорядоченных множеств // Учёные записки ЛГПИ им. А. И. Герцена. – 1962.– **238**. – С. 21–37.

3. *Айзенштат А. Я.* Определяющие соотношения полугруппы эндоморфизмов конечного линейного упорядоченного множества // Сиб. мат. журн. – 1962.– **3**, № 2. – С. 161–169.
4. *Бондарь Е. А., Жучок Ю. В.* Представления моноида сильных эндоморфизмов конечных n-однородных гиперграфов // Фундамент. и прикл. матем. – 2013. – **18**, № 1. – С. 21–34.
5. *Бондарь Е. А., Жучок Ю. В.* Полугруппы сильных эндоморфизмов бесконечных графов и гиперграфов // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 6. – С. 743–754.
6. *Шайн Б. М.* Представление упорядоченных полугрупп // Мат. сборник – 1964.– **65**, № 107 (2). – С. 161–169.
7. *Mashevitzky G., Schein B. M.* Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free monoid or a free semigroup // Proceedings of the American Mathematical Society. – 2003. – **131**, № 6. – P. 1655–1660.
8. *Laradji A., Umar A.* Combinatorial results for semigroups of order-preserving partial transformations // Journal of Algebra. – 2004. – **278**, № 1. – P. 342–359.
9. *Böttcher M., Knauer U.* Endomorphism spectra of graphs // Discr. Math. – 1992. – **109**. – P. 45–57.
10. *Решетников А. В.* Об определениях гомоморфизма гиперграфов // Дискретная математика и ее приложения: Материалы X Междунар. сем. – Москва: МГУ. – 2010. – С. 325–327.
11. *Hou H., Fan X., Luo Y.* Endomorphism types of generalized polygon // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. – 2009. – **33**, № 3. – P. 433–441.
12. *Hou H., Fan X., Luo Y.* The endomorphism monoid of $\overline{P_n}$ // European J. Combinatorics. – 2008. – **29**, № 5. – P. 1173–1185.
13. *Wang W., Hou H.* The endomorphism monoid of N-prism // Intern. Math. Forum. – 2011. – **50**. – P. 2461-2471.
14. *Zhuchok Y. V.* Endotypes of equivalence relations // Quasigroups and Related Systems. – 2014. – **22**. – P. 295–300.
15. *Жучок Ю. В., Тоичкина Е. А.* Полугруппы эндотопизмов отношения эквивалентности // Матем. сб. – 2014. – **205**, № 5. – С. 37–54.
16. *Жучок Ю. В.* Ендоморфізми відношень еквівалентності // Вісн. Київ. унів. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2007.– **3**. – С. 22—26.
17. *Бондарь Е. А.* О регулярности некоторых подполугрупп моноида эндоморфизмов отношения эквивалентности // Прикладная дискретная математика. – 2014. – № 3(25). – С. 5–11.
18. *Дудек В. А.* Алгебры Менгера многоместных функций / В. А. Дудек, В. С. Трохименко. – Ch.: S. n., 2006. – 237 p.

Одержано 10.08.2017