УДК 512.53

Е. А. Тоичкина

ЭНДОСПЕКТР ОТНОШЕНИЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

O. O. Toichkina. *The endotopism spectrum of an equivalence*, Mat. Stud. **46** (2016), 3–12.

We study semigroups of endotopisms of six types for an arbitrary equivalence relation. We calculate an endotopism spectrum of an equivalence relation on a finite set relative to its endotopisms.

1. Введение. Изучению полугрупп эндоморфизмов алгебраических систем и их различных свойств посвящены работы многих авторов (см., напр. [1]–[4]). Одним из первых результатов об эндоморфизмах бинарных отношений является теорема Л. М. Глускина ([5]) об определяемости отношения квазипорядка соответствующей ему полугруппой эндоморфизмов. Объектами дальнейших исследований в этом направлении были различные классы отношений. В частности, Дж. Арауджо и Дж. Конечжны [6] перенесли упомянутый результат на плотные отношения. Л. Б. Шнеперман ([7]) установил, что результат Глускина невозможно распространить на класс всех рефлексивных бинарных отношений, в то время как Б. В. Попов ([8]) выделил подкласс рефлексивных отношений, для которого теорема Глускина выполняется. Обобщение полученных результатов на определенные μ-арные отношения дало развитие понятию эндотопизма, которое было введено Б. В. Поповым в [9].

Тесно связанным с понятием эндотопизма является предложенное А. Г. Курошем ([10]) понятие соответствия универсальной алгебры. Как оказалось, полугруппа эндотопизмов произвольного бинарного отношения, определенного на некотором множестве, является соответствием симметрической полугруппы на том же множестве. В частности, полугруппа всех эндотопизмов произвольного отношения эквивалентности является соответствием полугруппы эндоморфизмов данной эквивалентности [11]. Эндотипы отношений эквивалентности относительно эндоморфизмов и эндотопизмов были описаны в [12], [13]. Основным понятием, которое здесь изучается, является понятие эндоспектра. В зависимости от условий, накладываемых на эндоморфизм симметричного отношения, У. Кнауэр и М. Боттчер ([14]) выделили пять типов эндоморфизмов, с помощью которых определили спектр данного отношения. В этой работе, распространяя принятое в [14] определение спектра эндоморфизмов на случай эндотопизмов бинарного отношения, мы вычисляем эндоспектр произвольного отношения эквивалентности на конечном множестве относительно его эндотопизмов.

2. Предварительные сведения. Пусть X — произвольное непустое множество, ρ — бинарное отношение на X.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 08A35.
Keywords: endotopism; equivalence relation; endospectrum of binary relation.
doi:10.15330/ms.46.1.3-12

Определение 1. *Эндотопизмом* отношения ρ называется такая упорядоченная пара (φ, ψ) преобразований φ и ψ множества X, что при любых $x, y \in X$ из условия $(x, y) \in \rho$ следует $(x\varphi, y\psi) \in \rho$.

Множество всех эндотопизмов бинарного отношения ρ относительно операции покомпонентного умножения образует полугруппу, которая называется полугруппой эндотопизмов отношения ρ. Эту полугруппу будем обозначать через $Et\,(\rho)$.

Определение 2. Эндотопизм (φ, ψ) отношения $\rho \subseteq X \times X$ называется *полусильным эндотопизмом,* если из $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ следует, что существуют такие $x' \in x\varphi\varphi^{-1}$, $y' \in y\psi\psi^{-1}$, что $(x', y') \in \rho$.

Множество всех полусильных эндотопизмов отношения ρ обозначим через $HEt(\rho)$.

Определение 3. Эндотопизм (φ, ψ) отношения $\rho \subseteq X \times X$ называется *локально сильным эндотопизмом*, если из $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ следует, что для каждого $x' \in x\varphi\varphi^{-1}$ найдется такой $y' \in y\psi\psi^{-1}$, что $(x', y') \in \rho$, и аналогично для каждого прообраза $y' \in y\psi\psi^{-1}$.

Обозначим множество всех локально сильных эндотопизмов отношения ρ как $LEt(\rho)$.

Определение 4. *Квазисильным эндотопизмом* называется такой эндотопизм (φ, ψ) отношения $\rho \subseteq X \times X$, что из условия $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ следует существование прообраза $x' \in x\varphi\varphi^{-1}$, который находится в отношении ρ с каждым прообразом из $y\psi\psi^{-1}$, и аналогично для подходящего прообраза $y' \in y\psi\psi^{-1}$.

Множество всех квазисильных эндотопизмов бинарного отношения ρ обозначим через $QEt(\rho)$.

Определение 5. Эндотопизм (φ, ψ) отношения $\rho \subseteq X \times X$ называется *сильным эндотопизмом,* если из $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ следует, что $(x, y) \in \rho$ при любых $x, y \in X$.

Множество всех сильных эндотопизмов отношения ρ относительно операции покомпонентного умножения образует моноид, который будем обозначать как $SEt\,(\rho)$.

Определение 6. Упорядоченная пара (φ, ψ) подстановок φ и ψ множества X называется *автотопизмом* отношения $\rho \subseteq X \times X$, если $(x, y) \in \rho$ тогда и только тогда, когда $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ при любых $x, y \in X$.

Множество всех автотопизмов отношения ρ относительно операции покомпонентного умножения образует группу, которую будем обозначать через $At\,(\rho)$.

Для произвольного бинарного отношения ρ на множестве X имеет место цепочка включений

$$Et(\rho) \supseteq HEt(\rho) \supseteq LEt(\rho) \supseteq QEt(\rho) \supseteq SEt(\rho) \supseteq At(\rho).$$

Заметим, что множества $HEt(\rho)$, $LEt(\rho)$ и $QEt(\rho)$ в общем случае не являются полугруппами. Понятно также, что если для эндотопизма (φ, ψ) отношения ρ выполняется равенство $\varphi = \psi$, то получаем соответствующее понятие эндоморфизма ([5]).

Рассмотрим примеры эндотопизмов каждого типа для отношения эквивалентности $\alpha = (A \times A) \cup (B \times B)$, где $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d\}$, заданного на множестве $Y = \{a, b, c, d\}$.

$$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & b & a & a \end{pmatrix}\right) \in Et(\alpha)\backslash HEt(\alpha),$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & b & b \end{pmatrix}\right) \in HEt(\alpha)\backslash LEt(\alpha),$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & a & a & a \end{pmatrix}\right) \in LEt(\alpha)\backslash QEt(\alpha),$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & b & a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & d & a & b \end{pmatrix}\right) \in SEt(\alpha)\backslash At(\alpha),$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}\right) \in At(\alpha).$$

Обозначим через $Eq(X)$ множество всех эквивалентностей на X. Заметим, что для любой эквивалентности $\alpha \in Eq(X)$ справедливо равенство $QEt(\alpha) = SEt(\alpha)$ (см., например, [13]).

Пусть $T(X)$ — симметрическая полугруппа на множестве X и $\alpha \in Eq(X)$. Через X/α обозначается фактор-множество множества X по эквивалентности α, а через $\overline{x}$ — класс эквивалентности, содержащий $x \in X$.

Лемма 1. ([13])

(i) *Пара (τ, σ) преобразований множества X является эндотопизмом эквивалентности $\alpha \in Eq(X)$ тогда и только тогда, когда для каждого класса $A \in X/\alpha$ существует такой класс $B \in X/\alpha$, что $A\tau \subseteq B$ и $A\sigma \subseteq B$.*

(ii) *Пара (τ, σ) подстановок множества X является автотопизмом эквивалентности $\alpha \in Eq(X)$ тогда и только тогда, когда для каждого класса $A \in X/\alpha$ существует такой класс $B \in X/\alpha$, что $A\tau = B$ и $A\sigma = B$.*

Заметим, что для каждого $\alpha \in Eq(X)$ преобразование $\tau\colon X \to X$ индуцирует преобразование $\delta_\tau\colon X/\alpha \to X/\alpha$, определенное по правилу: $\overline{a}\delta_\tau = \overline{a\tau}$ для всех $\overline{a} \in X/\alpha$.

Лемма 2. ([13])

(i) *Эндотопизм (τ, σ) отношения эквивалентности $\alpha \in Eq(X)$ является полусильным эндотопизмом тогда и только тогда, когда для любого $A \in (X/\alpha)\delta_\tau$ имеет место включение*

$$(A \cap X\tau) \times (A \cap X\sigma) \subseteq \bigcup_{Y \in A\delta_\tau^{-1}} (Y\tau \times Y\sigma).$$

(ii) *Эндотопизм (τ, σ) отношения эквивалентности $\alpha \in Eq(X)$ является локально сильным эндотопизмом тогда и только тогда, когда для любого $A \in (X/\alpha)\delta_\tau$ и для всех $B, C \in A\delta_\tau^{-1}$ выполняются равенства*

$$B\tau = C\tau \text{ и } B\sigma = C\sigma.$$

(iii) *Эндотопизм (τ, σ) отношения эквивалентности $\alpha \in Eq(X)$ является сильным эндотопизмом тогда и только тогда, когда δ_τ является инъективным преобразованием.*

3. Эндоспектр отношений эквивалентности. Пусть X — конечное непустое множество, ρ — бинарное отношение на множестве X. Цепочке включений

$$Et(\rho) \supseteq HEt(\rho) \supseteq LEt(\rho) \supseteq QEt(\rho) \supseteq SEt(\rho) \supseteq At(\rho)$$

соответствует последовательность мощностей

$$(|Et(\rho)|, |HEt(\rho)|, |LEt(\rho)|, |QEt(\rho)|, |SEt(\rho)|, |At(\rho)|),$$

которую назовем *эндоспектром* бинарного отношения ρ относительно его эндотопизмов и обозначим через $\operatorname{Etspec}(X, \rho)$.

Пусть α — отношение эквивалентности на множестве X, $S(X)$ — симметрическая группа на X. Через $B(X/\alpha)$ обозначим множество всех биекций $\eta\colon X/\alpha \to X/\alpha$, таких что $|A| = |A\eta|$ для каждого $A \in X/\alpha$. Понятно, что $B(X/\alpha)$ является подгруппой $S(X/\alpha)$.

Если $\tau\colon X \to X$ — некоторое преобразование, то через $\operatorname{im}(\tau)$ будем обозначать образ множества X при преобразовании τ.

Пусть $A \in \operatorname{im}(\delta_\tau)$ — такой класс, что $|A\delta_\tau^{-1}| = 1$ и $Y \in A\delta_\tau^{-1}$. Тогда $A\delta_\tau^{-1} = \{Y\}$. Положим

$$\min\{|Y|, |A|\} = \begin{cases} |Y|, & \text{если } |Y| < |A|, \\ |A|, & \text{если } |Y| \geq |A|. \end{cases}$$

Обозначим элементы класса A через $x_1, x_2, \ldots, x_{|A|}$. Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, \min\{|Y|, |A|\}\}$ положим

$$Y\tau_{(i)} = \left\{ \tau \in T(X) \mid Y\tau = \bigcup_{k=1}^{i} \{x_k\} \right\}.$$

Если $i = 1$, то $Y\tau = \{x_1\}$ и $|Y\tau_{(1)}| = 1$. Через C_n^m обозначается число всех сочетаний без повторений из n элементов по m.

Лемма 3. *Пусть* $i \in \{2, 3, \ldots, \min\{|Y|, |A|\}\}$. *Тогда*

$$|Y\tau_{(i)}| = i^{|Y|} - \sum_{k=1}^{i-1} C_i^k \cdot |Y\tau_{(k)}|. \tag{1}$$

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по i. Если $i = 2$, то $Y\tau = \{x_1, x_2\}$ для любого $\tau \in Y\tau_{(2)}$. Число $|Y\tau_{(2)}|$ найдем как разность числа всех преобразований $\tau \in T(X)$, таких что $Y\tau \subseteq \{x_1, x_2\}$, и числа всех таких преобразований $\tau \in T(X)$, что $Y\tau = \{x_j\}$, где $j \in \{1, 2\}$, т. е. $|Y\tau_{(2)}| = 2^{|Y|} - 2 = 2^{|Y|} - C_2^1 |Y\tau_{(1)}|$ и равенство (1) леммы выполняется.

Допустим, что равенство (1) имеет место для всех натуральных l, таких что $3 \leq l < i$, т. е.

$$|Y\tau_{(l)}| = l^{|Y|} - \sum_{k=1}^{l-1} C_l^k \cdot |Y\tau_{(l-k)}|.$$

Покажем, что (1) справедливо и для i. Представим число $i^{|Y|}$ преобразований множества X, таких что $Y\tau \subseteq \bigcup_{k=1}^{i} \{x_k\}$, в виде суммы слагаемых S_m, где S_m $(1 \leq m \leq i)$

определяет число всех таких преобразований $\tau \in T(X)$, что $1 \le |Y\tau| \le i$. Из множества элементов $\bigcup_{k=1}^{i}\{x_k\}$ можно составить C_i^m, $1 \le m \le i$, m-элементных подмножеств, для каждого из которых существует $|Y\tau_{(m)}|$ преобразований множества X, таких что $Y\tau \subseteq \bigcup_{k=1}^{i}\{x_k\}$ и $|Y\tau| = m$. Поскольку, согласно индукционному допущению, равенство (1) выполняется для всех $l \le i-1$, то

$$i^{|Y|} = C_i^1|Y\tau_{(1)}| + C_i^2|Y\tau_{(2)}| + \ldots + C_i^{i-1}|Y\tau_{(i-1)}| + C_i^i|Y\tau_{(i)}| = \sum_{k=1}^{i-1} C_i^k|Y\tau_{(k)}| + |Y\tau_{(i)}|,$$

откуда $|Y\tau_{(i)}| = i^{|Y|} - \sum_{k=1}^{i-1} C_i^k|Y\tau_{(k)}|$. □

Пусть теперь $A \in \mathrm{im}(\delta_\tau)$ такое, что $|A\delta_\tau^{-1}| > 1$. Обозначим через M_A класс наименьшей мощности из семейства $A\delta_\tau^{-1} \cup \{A\}$. Заметим, что если $|A| \le |Y|$ для любого $Y \in A\delta_\tau^{-1}$, то $|Y\tau| \le |A|$.

Обозначим через P_i^A, где $1 \le i \le |M_A|$, множество таких преобразований $\tau \in T(X)$, что $|Y\tau| = i$ для любого $Y \in A\delta_\tau^{-1}$. Тогда, учитывая мощности $|Y\tau_{(i)}|$, определенные выше, получим

Лемма 4. *Пусть* $i \in \{1, 2, \ldots, |M_A|\}$. *Тогда*

$$|P_i^A| = C_{|A|}^i \cdot \prod_{Y \in A\delta_\tau^{-1}} |Y\tau_{(i)}|. \tag{2}$$

Доказательство. Докажем лемму индукцией по i. База индукции при $i = 1$, очевидно, выполняется: $|P_1^A| = |A| = C_{|A|}^1 \cdot \prod_{Y \in A\delta_\tau^{-1}} |Y\tau_{(1)}|$. Предположим, что равенство (2) справедливо для всех натуральных l таких, что $2 \le l < i$, т. е.

$$|P_l^A| = C_{|A|}^l \cdot \prod_{Y \in A\delta_\tau^{-1}} |Y\tau_{(l)}|.$$

Покажем, что равенство (2) имеет место и для i. Из множества A можно выбрать $C_{|A|}^i$ i-элементных подмножеств, по одному представителю из которых обозначим через K_i, где $1 \le i \le |M_A|$. Тогда существует $|Y\tau_{(i)}|$ таких преобразований $\tau \in T(X)$, что $Y\tau = K_i$ для любого $Y \in A\delta_\tau^{-1}$. Поскольку $|A\delta_\tau^{-1}| > 1$ и, согласно лемме 2 (ii), $B\tau = C\tau$ для всех $B, C \in A\delta_\tau^{-1}$, то существует $\prod_{Y \in A\delta_\tau^{-1}} |Y\tau_{(i)}|$ таких преобразований $\tau \in T(X)$, что $Y\tau = K_i$ для любого $Y \in A\delta_\tau^{-1}$ и, как результат, имеем $C_{|A|}^i \cdot \prod_{Y \in A\delta_\tau^{-1}} |Y\tau_{(i)}|$ всех преобразований $\tau \in T(X)$, таких что $|Y\tau| = i$ для любого $Y \in A\delta_\tau^{-1}$. □

Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Для любой эквивалентности* α *на конечном множестве* X *справедливы следующие утверждения:*

(i) $|Et(\alpha)| = \sum_{\delta \in T(X/\alpha)} (\prod_{A \in X/\alpha} |A\delta|^{|A|})^2$;

(ii) $|LEt(\alpha)| = \sum_{\delta \in T(X/\alpha)} (\prod_{A \in (X/\alpha)\delta} \sum_{i=1}^{|M_A|} |P_i^A|)^2$;

(iii) $|SEt(\alpha)| = \sum_{\delta \in S(X/\alpha)} (\prod_{A \in X/\alpha} |A\delta|^{|A|})^2$;

(iv) $|QEt(\alpha)| = |SEt(\alpha)|$;

(v) $|At(\alpha)| = |B(X/\alpha)| \cdot (\prod_{A \in X/\alpha} |A|!)^2$.

Доказательство. (i) Пусть δ — произвольное преобразование фактор-множества X/α. Положим $Et_\delta(\alpha) = \{(\varphi, \psi) \in Et(\alpha) \mid A\varphi \subseteq A\delta \quad \forall A \in X/\alpha\}$. Согласно лемме 1,(i),

$$|Et_\delta(\alpha)| = \left(\prod_{A \in X/\alpha} |\operatorname{Map}(A, A\delta)|\right)^2 = \left(\prod_{A \in X/\alpha} |A\delta|^{|A|}\right)^2,$$

где $\operatorname{Map}(A, A\delta)$ — множество всех отображений из класса A в класс $A\delta$. Поскольку $\delta \in T(X/\alpha)$ — произвольное, то $|Et(\alpha)| = \sum_{\delta \in T(X/\alpha)} (\prod_{A \in X/\alpha} |A\delta|^{|A|})^2$.
(ii) Пусть $\delta \in\ T(X/\alpha)$, $A \in \operatorname{im}(\delta)$ — некоторый класс, $(\varphi, \psi) \in LEt(\alpha)$, M_A — класс, определенный выше. Как следует из леммы 4, число всех преобразований $\varphi \in T(X/\alpha)$, таких что $|Y\varphi| \leq |M_A|$ для любого $Y \in A\delta^{-1}$, равно $\sum_{i=1}^{|M_A|} |P_i^A|$.

Обозначим через $LEt_\delta(\alpha) = \{(\varphi, \psi) \in LEt(\alpha) \mid A\varphi \subseteq A\delta \quad \forall A \in X/\alpha\}$. Тогда

$$|LEt_\delta(\alpha)| = \left(\prod_{A \in (X/\alpha)\delta} \sum_{i=1}^{|M_A|} |P_i^A|\right)^2.$$

Наконец,

$$|LEt(\alpha)| = \sum_{\delta \in T(X/\alpha)} |LEt_\delta(\alpha)| = \sum_{\delta \in T(X/\alpha)} \left(\prod_{A \in (X/\alpha)\delta} \sum_{i=1}^{|M_A|} |P_i^A|\right)^2.$$

(iii) Пусть δ — произвольное биективное преобразование фактор-множества X/α. Обозначим через $SEt_\delta(\alpha) = \{(\varphi, \psi) \in SEt(\alpha) \mid A\varphi \subseteq A\delta \quad \forall A \in X/\alpha\}$. Аналогично доказательству (i) этой теоремы,

$$|SEt_\delta(\alpha)| = \left(\prod_{A \in X/\alpha} |\operatorname{Map}(A, A\delta)|\right)^2 = \left(\prod_{A \in X/\alpha} |A\delta|^{|A|}\right)^2.$$

Так как преобразование $\delta \in S(X/\alpha)$ — произвольное, то

$$|SEt(\alpha)| = \sum_{\delta \in S(X/\alpha)} \left(\prod_{A \in X/\alpha} |A\delta|^{|A|}\right)^2.$$

(iv) Доказательство следует из равенства $QEt(\alpha) = SEt(\alpha)$ (см. п. 2).
(v) Пусть $\delta \in B(X/\alpha)$. Аналогично пп. (i)-(iii) положим

$$At_\delta(\alpha) = \{(\varphi, \psi) \in At(\alpha) \mid A\varphi = A\delta \quad \forall A \in X/\alpha\}.$$

Тогда, согласно лемме 1, (ii),

$$|At_\delta(\alpha)| = \left(\prod_{A \in X/\alpha} |\operatorname{Map}_b(A, A\delta)|\right)^2 = \left(\prod_{A \in X/\alpha} |A|!\right)^2,$$

где $\operatorname{Map}_b(A, A\delta)$ — множество всех биекций из класса A в класс $A\delta$. Наконец, $|At(\alpha)| = |B(X/\alpha)| \cdot (\prod_{A \in X/\alpha} |A|!)^2$. □

Если $\varphi\colon X \to X$ — некоторое преобразование и $A \subseteq X$, то через $\varphi|_A$ будем обозначать ограничение преобразования φ на подмножество A.

Пример. Вычислим эндоспектр отношения эквивалентности $\alpha = A^2 \cup B^2$, где $A = \{a, b\}, B = \{c, d, e\}$, определенного на множестве $X = \{a, b, c, d, e\}$, относительно его эндотопизмов. Положим

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ A & A \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ A & B \end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}, \varphi_4 = \begin{pmatrix} A & B \\ B & B \end{pmatrix}.$$

1. Ясно, что $T(X/\alpha) = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$. Тогда

$$|Et(\alpha)| = \sum_{\delta \in T(X/\alpha)} \left(\prod_{Y \in \{A,B\}} |Y\delta|^{|Y|} \right)^2 =$$
$$= (|A\varphi_1|^{|A|} \cdot |B\varphi_1|^{|B|})^2 + (|A\varphi_2|^{|A|} \cdot |B\varphi_2|^{|B|})^2 + (|A\varphi_3|^{|A|} \cdot |B\varphi_3|^{|B|})^2 +$$
$$+ (|A\varphi_4|^{|A|} \cdot |B\varphi_4|^{|B|})^2 = (|A|^{|A|} \cdot |A|^{|B|})^2 + (|A|^{|A|} \cdot |B|^{|B|})^2 + (|B|^{|A|} \cdot |A|^{|B|})^2 +$$
$$+ (|B|^{|A|} \cdot |B|^{|B|})^2 = (2^2 \cdot 2^3)^2 + (2^2 \cdot 3^3)^2 + (3^2 \cdot 2^3)^2 + (3^2 \cdot 3^3)^2 =$$
$$= 1024 + 11664 + 5184 + 59049 = 76921.$$

2. Найдем $|HEt(\alpha)|$ как разность чисел $|Et(\alpha)|$ и $|D|$, где $D = \{(\varphi, \psi) \in Et(\alpha) | (\varphi, \psi) \notin HEt(\alpha)\}$.

Понятно, если $\delta \in \{\varphi_2, \varphi_3\}$, то $A\delta \neq B\delta$ и $(\varphi, \psi) \notin D$, поэтому рассмотрим только такие $(\varphi, \psi) \in Et(\alpha)$, что $A\delta = B\delta$.

а) пусть $\delta = \varphi_1$ и $(a, a) \in \mathrm{im}(\varphi|_A) \times \mathrm{im}(\psi|_B)$. Тогда $(\varphi, \psi) \in D$, если $a \notin \mathrm{im}(\varphi|_B)$ и $a \notin \mathrm{im}(\psi|_A)$. Таких пар будет

$$(|A\delta|^{|A|} - 1) \cdot (|B\delta|^{|B|} - 1) = (|A|^{|A|} - 1)(|A|^{|B|} - 1) = 21.$$

Случаи $(a, b), (b, a), (b, b) \in \mathrm{im}(\varphi|_A) \times \mathrm{im}(\psi|_B)$ рассматриваются аналогично. Число соответствующих эндотопизмов каждый раз рассчитывается по формуле $(|A\delta|^{|A|} - 1) \cdot (|B\delta|^{|B|} - 1)$ и равно 21.

б) пусть $\delta = \varphi_1$ и $(a, a) \in \mathrm{im}(\varphi|_B) \times \mathrm{im}(\psi|_A)$. Тогда $(\varphi, \psi) \in D$, если $a \notin \mathrm{im}(\varphi|_A)$ и $a \notin \mathrm{im}(\psi|_B)$. Таких пар, учитывая а), будет

$$(|B\delta|^{|B|} - 1) \cdot (|A\delta|^{|A|} - 1) - 1 = (|A|^{|B|} - 1)(|A|^{|A|} - 1) - 1 = 20.$$

Здесь мы вычли пару

$$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & b & a & a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & a & b & b & b \end{pmatrix} \right).$$

Для подсчета $|D|$ при рассмотрении случаев $(a, b), (b, a), (b, b) \in \mathrm{im}(\varphi|_B) \times \mathrm{im}(\psi|_A)$ используем формулу $(|B\delta|^{|B|} - 1) \cdot (|A\delta|^{|A|} - 1) - 1$. Каждый раз вычитаем учтенный в а) эндотопизм. Например, в случае $(a, b) \in \mathrm{im}(\varphi|_B) \times \mathrm{im}(\psi|_A)$ вычитаем

$$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & b & a & a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & b & a & a & a \end{pmatrix} \right) \in D.$$

в) пусть $\delta = \varphi_4$ и $(c, c) \in \mathrm{im}(\varphi|_A) \times \mathrm{im}(\psi|_B)$. Тогда $(\varphi, \psi) \in D$, если $c \notin \mathrm{im}(\varphi|_B)$ и $c \notin \mathrm{im}(\psi|_A)$. Число таких пар составит

$$(|A\delta|^{|A|} - (|A\delta| - 1)^{|A|})(|B\delta| - 1)^{|B|}(|A\delta| - 1)^{|A|}(|B\delta|^{|B|} - (|B\delta| - 1)^{|B|}) =$$
$$= (|B|^{|A|} - (|B| - 1)^{|A|})(|B| - 1)^{|B|}(|B| - 1)^{|A|}(|B|^{|B|} - (|B| - 1)^{|B|}) =$$
$$= (3^2 - 2^2)2^3 2^2(3^3 - 2^3) = 5 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 19 = 3040.$$

г) пусть $\delta = \varphi_4$ и $(c, d) \in \mathrm{im}(\varphi|_A) \times \mathrm{im}(\psi|_B)$. Тогда $(\varphi, \psi) \in D$, если $c \notin \mathrm{im}(\varphi|_B)$ и $d \notin \mathrm{im}(\psi|_A)$. Подсчитывая $|D|$ для этого случая, из максимально возможных 3040 эндотопизмов вычтем эндотопизмы, учтенные в случае в). Ими будут пары, в которых первыми компонентами являются все первые компоненты, указанные в случае в), а вторыми — следующие преобразования:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & d & d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & d & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & d & c & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & c & d & d \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & c & d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & c & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & e & d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & d & c & e \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & c & e & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & c & d & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & d & e & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & e & e & c & d \end{pmatrix}.$$

В результате получим $3040 - 5 \cdot 8 \cdot 12 = 2560$ эндотопизмов. Аналогично рассматриваются все возможные случаи для каждой пары из B^2. В конечном итоге получим $|D| = 33704$ и $|HEt(\alpha)| = 43217$.

3. В этом случае имеем:

$$|LEt(\alpha)| = \sum_{\delta \in \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}} \left(\prod_{Y \in \mathrm{im}(\delta)} \left(\sum_{i=1}^{|M_Y|} C_{|Y|}^i \prod_{Y' \in Y\delta^{-1}} (i^{|Y'|} - C_i^{i-1} \cdot \right.\right.$$
$$\left.\left. \cdot ((i-1)^{|Y'|} - (i-1)) - i) \right) \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{|A|} C_{|A|}^i (i^{|A|} - C_i^{i-1}((i-1)^{|A|} - (i-1)) - i) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot (i^{|B|} - C_i^{i-1}((i-1)^{|B|} - (i-1)) - i) \right)^2 + \left(\left(\sum_{i=1}^{|A|} C_{|A|}^i \left(i^{|A|} - C_i^{i-1}((i-1)^{|A|} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. -(i-1)) - i \right) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{|B|} C_{|B|}^i (i^{|B|} - C_i^{i-1}((i-1)^{|B|} - (i-1)) - i) \right) \right)^2 +$$
$$+ \left(\left(\sum_{i=1}^{|A|} C_{|A|}^i (i^{|B|} - C_i^{i-1}((i-1)^{|B|} - (i-1)) - i) \right) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \left(\sum_{i=1}^{|A|} C_{|B|}^i (i^{|A|} - C_i^{i-1}((i-1)^{|A|} - (i-1)) - i)) \right) \right)^2 +$$
$$+ \left(\sum_{i=1}^{|A|} C_{|B|}^i (i^{|A|} - C_i^{i-1}((i-1)^{|A|} - (i-1)) - i) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot (i^{|B|} - C_i^{i-1}((i-1)^{|B|} - (i-1)) - i) \right)^2 = (2 + C_2^2(2^2 - C_2^1(1^2 - 1) - 2) \cdot$$

$$\cdot(2^3 - C_2^1(1^3-1)-2))^2 + ((2+C_2^2(2^2-C_2^1(1^2-1)-2))\cdot$$
$$\cdot(3+C_3^2(2^3-C_2^1(1^3-1)-2)+C_3^3(3^3-C_3^2(2^3-2)-3)))^2+$$
$$+((2+C_2^2(2^3-C_2^1(1^3-1)-2))\cdot(3+C_3^2(2^2-C_2^1(1^2-1)-2)))^2+$$
$$+(3+C_3^2(2^2-C_2^1(1^2-1)-2)\cdot(2^3-C_2^1(1^3-1)-2))^2=$$
$$=196+11664+5184+1521=18565.$$

4. Понятно, что $S(X/\alpha) = \{\varphi_2, \varphi_3\}$. Тогда

$$|QEt(\alpha)| = |SEt(\alpha)| = \sum_{\delta\in S(X/\alpha)} \left(\prod_{Y\in\{A,B\}} |Y\delta|^{|Y|}\right)^2 =$$
$$= (|A\varphi_2|^{|A|}\cdot|B\varphi_2|^{|B|})^2 + (|A\varphi_3|^{|A|}\cdot|B\varphi_3|^{|B|})^2 = (|A|^{|A|}\cdot|B|^{|B|})^2 + (|B|^{|A|}\cdot|A|^{|B|})^2 =$$
$$= (2^2\cdot3^3)^2 + (3^2\cdot2^3)^2 = 11664 + 5184 = 16848.$$

5. Группа $B(X/\alpha)$ одноэлементная, поэтому

$$|At(\alpha)| = \left(\prod_{Y\in\{A,B\}} |Y|!\right)^2 = (|A|!\cdot|B|!)^2 = (2!\cdot3!)^2 = 144.$$

Таким образом, $\mathrm{Etspec}(X,\alpha) = (76921, 43217, 18565, 16848, 16848, 144)$.

Заметим, что вопрос вычисления $|HEt(\alpha)|$ для произвольной эквивалентности α на конечном множестве остаётся открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schein B., Teclezghi B. *Endomorphisms of finite full transformation semigroups*// Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – №126. – P. 2579–2587.
2. Mazorchuk V. *Endomorphisms of B_n, PB_n and C_n*// Comm. Algebra. – 2002. – №30. – P. 3489–3513.
3. Molchanov A.V. *Semigroups of endomorphisms of weak p-hypergraphs*// Isv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. – 2000. – №3(454). – P. 80–83. (in Russian)
4. Zhuchok Yu.V. *The monoid of endomorphisms of disconnected hypergraphs*// Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – №16. – P. 134–150.
5. Gluskin L.M. *The semigroup of isotonne transformations*// Uspehi. Mat. Nauk. – 1961. – №5. – P. 157–162. (in Russian)
6. Araujo J., Konieczny J. *Dense relations are determined by their endomorphisms monoids*// Semigroup Forum. – 2005. – №70. – P. 302–306.
7. Shneperman L.B. *Semigroups of endomorphisms of quasiordered sets*// Uch. Zap. LGPI im. A. I. Gertsena. – 1962. – V. 238. – P. 21–37. (in Russian)
8. Popov B.V. *Endomorphism semigroups of reflexive binary relations*// Uch. Zap. LGPI im. A. I. Gertsena. – 1967. – V. 302. – P. 116–123. (in Russian)
9. Popov B.V. *Endotopism semigroups of μ-ary relations*// Uch. Zap. LGPI im. A. I. Gertsena. – 1965. – V. 274. – P. 184–201. (in Russian)
10. Kurosh A.G. General algebra (lectures 1969-70 school year). – M.: Nauka, 1974, 160 p. (in Russian)

11. Zhuchok Yu.V., Toichkina E.A. *Correspondences of the semigroup of endomorphisms of an equivalence relation*// Mat. Zametki. – 2015. – V. 97, №2. – P. 217–230. (in Russian)
12. Zhuchok Yu.V. *Endotypes of equivalence relations*// Quasigroups and Related Systems. – 2014. – №22. – P. 295–300.
13. Zhuchok Yu.V., Toichkina E.A. *The endotopism semigroups of an equivalence relation*// Mat. Sbornik. – 2014. – V.205, №5. – P. 37–54. (in Russian)
14. Böttcher M., Knauer U. *Endomorphism spectra of graphs*// Discrete Mathematics. – 1992. – №109. – P. 45–57.

Luhansk Taras Shevchenko National University
e.a.rom@mail.ru

Поступило 11.06.2016
После переработки 23.10.2016