МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД «ЛУГАНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА»

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

УДК 512.572, 512.53

КРИКЛЯ Яна Анатоліївна

ВІЛЬНІ ЛІВІ *n*-ТРИНІЛЬПОТЕНТНІ ТРІОЇДИ

Галузь знань 11 – Математика та статистика
Спеціальність 111 – Математика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело

____________ Я. А. Крикля

Науковий керівник: **Жучок Анатолій Володимирович**, доктор фізико-математичних наук, професор ДЗ «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»

Полтава – 2023

АНОТАЦІЯ

Крикля Я. А. Вільні ліві *n*-тринільпотентні тріоїди. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика (Галузь знань 11 Математика та статистика). ДЗ «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка», м. Полтава, Міністерство освіти і науки України, 2023.

Дисертаційна робота присвячена вивченню вільних алгебр у многовиді тріоїдів.

Вивчення універсальних алгебр, які називаються тріоїдами, започаткували Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко. Ці алгебри вперше з'явилися під час досліджень тернарних планарних дерев. Тріоїд – це непорожня множина з трьома бінарними асоціативними операціями, які задовольняють додаткові вісім аксіом. Тріоїди також можуть бути визначені за допомогою дімоноїдів, введених Ж.-Л. Лоде у контексті алгебраїчної K-теорії. А саме, тріоїд є дімоноїдом, наділеним бінарною асоціативною операцією, що задовольняє додаткові п'ять аксіом. Зазначимо, що триалгебри, введені Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко, є лінійними аналогами тріоїдів, тому результати, отримані для тріоїдів, можуть бути застосованими до теорії триалгебр. Якщо всі операції тріоїда (триалгебри) збігаються, то отримуємо поняття напівгрупи (асоціативної алгебри), а під час збігу двох конкретних операцій тріоїда (триалгебри) отримуємо поняття дімоноїда (діалгебри). Тріоїди та триалгебри мають тісні зв'язки з алгебрами Хопфа, алгебрами Лейбніца, некомутативною версією алгебр Пуасона та операторами Рота–Бакстера. Завдяки своїй аксіоматиці тріоїди також пов'язані з такими алгебраїчними структурами як дігрупи, g-дімоноїди, допельнапівгрупи та n-кратні напівгрупи.

Знаходження абсолютно вільних структур і відносно вільних структур є основною проблемою абстрактної алгебри. Сьогодні теорія многовидів тріоїдів активно розвивається. Вже відомі конструкції вільного тріоїду, вільного n-нільпотентного тріоїду, вільної прямокутної трисполуки, вільного комутативного тріоїду, вільного абелевого тріоїду та вільної трисполуки.

Об'єктом дослідження дисертації є вільні ліві (праві) n-тринільпотентні тріоїди та вільні тріоїди. Предметом дослідження є структура та властивості вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів та вільних тріоїдів. У процесі дослідження дисертаційної проблематики застосовуються методи алгебраїчної теорії напівгруп та універсальної алгебри.

У дисертації введено ліві (праві) n-тринільпотентні тріоїди, які є аналогами лівих (правих) нільпотентних напівгруп рангу n, розглянутих Б. М. Шайном, та побудовано вільний лівий (правий) n-тринільпотентний тріоїд довільного рангу.

Як зазвичай, $\mathbb{N}$ позначає множину всіх натуральних чисел. Через Ω позначимо сигнатуру тріоїда. Нехай $a_1,\ldots,a_n$ – індивідуальні змінні. Через $P(a_1,\ldots,a_n)$ позначимо множину всіх термів алгебр сигнатури Ω, які мають вигляд $a_1 \circ_1 \ldots \circ_{n-1} a_n$ з розстановкою дужок, де $\circ_1,\ldots,\circ_{n-1} \in \Omega$. Тріоїд $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ називається лівим триніпольтентним, якщо для деякого $n\in\mathbb{N}$, будь-якого $a\in T$ та будь-якого $p(a_1,\ldots,a_n)\in P(a_1,\ldots,a_n)$ мають місце наступні тотожності:

$$p(a_1,\ldots,a_n)*a = p(a_1,\ldots,a_n),\ \ p(a_1,\ldots,a_n)\vdash a = a_1\vdash\ldots\vdash a_n,$$

де $*\in\{\dashv,\perp\}$. Найменше серед таких n називається індексом лівої тринільпотентності тріоїда $(T,\dashv,\vdash,\perp)$. Для $k\in\mathbb{N}$ лівий тринільпотентний тріоїд з індексом лівої тринільпотентності $\le k$ називається лівим k-тринільпотентним. У будь-якому тріоїді $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ маємо $p(a_1,\ldots,a_n)\vdash a = a_1\vdash\ldots\vdash a_n\vdash a$. Отже, якщо $(T,\vdash)$ є лівою нільпотентною напівгрупою рангу n, то отримаємо третю тотожність у визначенні лівого тринільпотентного тріоїда. Праві k-тринільпотентні тріоїди визначаються двоїстим чином. Операції будь-якого лівого (правого) 1-тринільпотентного тріоїда збігаються та він є напівгрупою лівих (правих) нулів. Клас усіх лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів утворює підмноговид многовиду тріоїдів. Тріоїд, який є вільним у многовиді лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів, називається вільним лівим (правим) n-тринільпотентним тріоїдом.

Нехай $n,k \in \mathbb{N}$ та $L \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$. Вважаємо, що $L+k=\{m+k \mid m \in L\}$. Для $L \neq \varnothing$ покладемо $L^{k,n}=\{m \in L \mid k+m \leq n\}$, і позначимо найменше число множини L через L_{min}. Нехай X – довільна непорожня множина, $F[X]$ – вільна напівгрупа на X та $w \in F[X]$. Довжину слова w позначимо через l_w. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Якщо $l_w \geq n$, то через $\overset{n}{\overrightarrow{w}}$ позначимо початкове підслово довжини n слова w, і якщо $l_w < n$, то нехай $\overset{n}{\overrightarrow{w}} = w$. Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ на множині

$$V_n=\{(w,L) \mid w \in F[X],\, l_w \leq n,\, L \subseteq \{1,2,\ldots,l_w\},\, L \neq \varnothing\}$$

за такими правилами:

$$(w,L) \dashv (u,R) = (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, L),$$

$$(w,L) \vdash (u,R) = \begin{cases} (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, \{n\}), & n < l_w + R_{min}, \\ (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, R^{l_w,n} + l_w) & \textit{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$(w,L) \perp (u,R) = (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, L \cup (R^{l_w,n} + l_w))$$

для всіх $(w,L),\, (u,R) \in V_n$. Алгебру $(V_n, \dashv, \vdash, \perp)$ позначимо через $FT_n^l(X)$. Доведено, що $FT_n^l(X)$ є вільним лівим n-тринільпотентним тріоїдом. Окремо розглянуто вільні ліві (праві) n-тринільпотентні тріоїди рангу 1. Встановлено, що група автоморфізмів вільного лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда ізоморфна симетричній групі.

Охарактеризовано найменшу ліву (праву) n-тринільпотентну конгруенцію на вільному тріоїді. Якщо ρ є конгруенцією на тріоїді $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ такою, що $(T,\dashv,\vdash,\perp)/\rho$ є лівим (правим) n-тринільпотентним тріоїдом, то говоримо, що ρ є лівою (правою) n-тринільпотентною конгруенцією. Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ на множині

$$F=\{(w,L)\,|\,w\in F[X],\, L\subseteq\{1,2,\ldots,l_w\},\, L\neq\varnothing\}$$

за правилами:

$$(w,L)\dashv(u,R)=(wu,L),\quad (w,L)\vdash(u,R)=(wu,R+l_w),$$
$$(w,L)\perp(u,R)=(wu,L\cup(R+l_w))$$

для всіх $(w,L),(u,R)\in F$. У роботі А. В. Жучка доведено, що $(F,\dashv,\vdash,\perp)$ є вільним тріоїдом. Його позначають через $FT(X)$.

Зафіксуємо $n\in\mathbb{N}$. Нехай далі

$$L^{(n)}=\begin{cases}\{n\}, & n\leq L_{min},\\ \{m\in L\,|\,m\leq n\}, & n>L_{min}\end{cases}$$

для будь-якої непорожньої множини $L\subseteq\{1,2,\ldots,k\}$ та $k\in\mathbb{N}$. Візьмемо довільні елементи $(w,L),(u,R)\in FT(X)$. Для кожного $n\in\mathbb{N}$ визначимо бінарне відношення $\tilde{d}_n$ на $FT(X)$ за правилом:

$$(w,L)\tilde{d}_n(u,R)\quad \text{тоді і тільки тоді, коли}\quad \overset{\overset{n}{\rightarrow}}{w}=\overset{\overset{n}{\rightarrow}}{u}\quad i\quad L^{(n)}=R^{(n)}.$$

Доведено, що відношення $\tilde{d}_n$ є найменшою лівою n-тринільпотентною конгруенцією на вільному тріоїді $FT(X)$.

Підраховано потужність вільного лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда в скінченному випадку. Описано всі ідемпотентні та всі регулярні елементи вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів. Знайдено всі максимальні підтріоїди вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів $(n > 1)$. Показано, що вільний лівий n-тринільпотентий тріоїд містить підтріоїд, який може бути представлений у вигляді лівої сполуки піддімоноїдів. Підраховано потужність напівгрупи ендоморфізмів вільного лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда та кількість всіх ідемпотентних і регулярних елементів вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів у скінченному випадку.

Результати дисертації можуть бути застосовані в теорії тріоїдів та триалгебр, теорії дімоноїдів та діалгебр, теорії напівгруп, універсальній алгебрі.

Ключові слова: тріоїд, лівий n-тринільпотентний тріоїд, вільний лівий n-тринільпотентний тріоїд, конгруенція, напівгрупа, максимальний підтріоїд, регулярний елемент, ідемпотентний елемент, група автоморфізмів, напівгрупа ендоморфізмів, потужність.

ABSTRACT

Kryklia Y. A. Free left *n*-trinilpotent trioids. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy, Speciality 111 Mathematics (Field of studies 11 Mathematics and Statistics). State Insitution «Luhansk Taras Shevchenko National University», Poltava, Ministry of Education and Science of Ukraine, 2023.

The thesis is devoted to the study of free algebras in the variety of trioids.

J.-L. Loday and M. O. Ronco introduced the study of universal algebras that are called trioids. Firstly these algebras appeared in the study of ternary planar trees. A trioid is a nonempty set with three binary associative operations which satisfy the additional eight axioms. Trioids may be also defined via dimonoids introduced by J.-L. Loday in the context of algebraic K-theory. Namely, a trioid is a dimonoid equipped with a binary associative operation which satisfies an additional five axioms. We should note that trialgebras introduced by J.-L. Loday and M. O. Ronco are linear analogues of trioids, so the results obtained for trioids can be applied to trialgebra theory. If all operations of a trioid (trialgebra) coincide, we obtain the notion of a semigroup (associative algebra), and if two concrete operations of the trioid (trialgebra) coincide, we obtain the notion of a dimonoid (dialgebra). Trioids and trialgebras are closely related to Hopf algebras, Leibniz algebras, the noncommutative version of Poisson algebras, and Rota-Baxter operators. Thanks to their axiomatics, trioids are also related to such algebraic structures as digroups, g-dimonoids, doppelsemigroups, and n-tuple semigroups.

Finding absolutely free structures and relatively free structures is a central problem in abstract algebra. Nowadays the variety theory of trioids is developing actively. The constructions of a free trioid, a free n-nilpotent trioid, a free rectangular triband, a free commutative trioid, a free abelian trioid, and a free triband are already known.

The object of the research of the thesis is free left (right) n-trinilpotent trioids and free trioids. The subject of the research is the structure and properties of free left (right) n-trinilpotent trioids and free trioids. The methods of the algebraic theory of semigroups and universal algebra are used in the process of researching the thesis issues.

In the thesis left (right) n-trinilpotent trioids are introduced, which are analogs of left (right) nilpotent semigroups of rank n considered by B. M. Schein, and the free left (right) n-trinilpotent trioid of an arbitrary rank is constructed.

As usual, $\mathbb{N}$ denotes the set of all positive integers. By Ω we denote the signature of a trioid. Let $a_1,\ldots,a_n$ be individual variables. By $P(a_1,\ldots,a_n)$ we denote the set of all terms of the signature Ω, having the form $a_1 \circ_1 \ldots \circ_{n-1} a_n$ with parenthesizing, where $\circ_1,\ldots,\circ_{n-1} \in \Omega$. A trioid $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ is called left trinilpotent if for some $n \in \mathbb{N}$, any $a \in T$ and any $p(a_1,\ldots,a_n) \in P(a_1,\ldots,a_n)$ the following identities hold:

$$p(a_1,\ldots,a_n) * a = p(a_1,\ldots,a_n), \;\; p(a_1,\ldots,a_n) \vdash a = a_1 \vdash \ldots \vdash a_n,$$

where $* \in \{\dashv,\perp\}$. The least such n is called the left trinilpotency index of $(T,\dashv,\vdash,\perp)$. For $k \in \mathbb{N}$, a left trinilpotent trioid of left trinilpotency index $\leq k$ is said to be left k-trinilpotent. In any trioid $(T,\dashv,\vdash,\perp)$, we have $p(a_1,\ldots,a_n) \vdash a = a_1 \vdash \ldots \vdash a_n \vdash a.$ Hence, if $(T,\vdash)$ is a left nilpotent semigroup of rank n, we get the third identity in the definition of a left trinilpotent trioid. Right k-trinilpotent trioids are defined dually. The operations of any left (right) 1-trinilpotent trioid coincide and it is a left (right) zero semigroup. The class of all left (right) n-trinilpotent trioids forms a subvariety of the variety of trioids. A trioid which is free in the variety of left (right) n-trinilpotent trioids is called a free left (right) n-trinilpotent trioid.

Let $n,k \in \mathbb{N}$ and $L \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$. We suppose that $L + k = \{m + k \mid m \in L\}$. For $L \neq \varnothing$ we put $L^{k,n} = \{m \in L \mid k + m \leq n\}$, and denote the least number of the set L by

L_{min}. Let X be an arbitrary nonempty set, let $F[X]$ be the free semigroup on X and $w \in F[X]$. The length of the word w is denoted by l_w. Fix $n \in \mathbb{N}$. If $l_w \geq n$, let $\overset{n}{\vec{w}}$ denote the initial subword with the length n of the word w, and if $l_w < n$, let $\overset{n}{\vec{w}} = w$. Define operations $\dashv$, $\vdash$ and $\perp$ on the set

$$V_n = \{(w, L) \mid w \in F[X],\ l_w \leq n,\ L \subseteq \{1, 2, \ldots, l_w\},\ L \neq \varnothing\}$$

according to the following rules:

$$(w, L) \dashv (u, R) = (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, L),$$

$$(w, L) \vdash (u, R) = \begin{cases} (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, \{n\}), & n < l_w + R_{min}, \\ (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, R^{l_w, n} + l_w) & \textit{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$(w, L) \perp (u, R) = (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, L \cup (R^{l_w, n} + l_w))$$

for all (w, L), $(u, R) \in V_n$. The algebra $(V_n, \dashv, \vdash, \perp)$ is denoted by $FT_n^l(X)$. It is proved that $FT_n^l(X)$ is a free left n-trinilpotent trioid. Free left (right) n-trinilpotent trioids of rank 1 are considered separately. It is established that the automorphism group of the free left (right) n-trinilpotent trioid is isomorphic to the symmetric group.

The least left (right) n-trinilpotent congruence on the free trioid is characterized. If ρ is a congruence on a trioid $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ such that $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$ is a left (right) n-trinilpotent trioid, we say that ρ is a left (right) n-trinilpotent congruence.

Define operations $\dashv$, $\vdash$ and $\perp$ on the set

$$F = \{(w, L) \mid w \in F[X],\ L \subseteq \{1, 2, \ldots, l_w\},\ L \neq \varnothing\}$$

according to the following rules:

$$(w, L) \dashv (u, R) = (wu, L), \quad (w, L) \vdash (u, R) = (wu, R + l_w),$$

$$(w, L) \perp (u, R) = (wu, L \cup (R + l_w))$$

for all $(w,L),(u,R) \in F$. In the paper of A. V. Zhuchok it is proved that $(F,\dashv,\vdash,\perp)$ is the free trioid. It is denoted by $FT(X)$.

Fix $n \in \mathbb{N}$. Let further

$$L^{(n)} = \begin{cases} \{n\}, & n \le L_{min}, \\ \{m \in L \mid m \le n\}, & n > L_{min} \end{cases}$$

for any nonempty $L \subseteq \{1,2,\ldots,k\}$ and $k \in \mathbb{N}$. Let us take arbitrary elements $(w,L),(u,R) \in FT(X)$. For every $n \in \mathbb{N}$ define a binary relation $\tilde{d}_n$ on $FT(X)$ according to the rule:

$$(w,L)\tilde{d}_n(u,R) \quad \text{if and only if} \quad \overset{n}{\vec{w}} = \overset{n}{\vec{u}} \quad \text{and} \quad L^{(n)} = R^{(n)}.$$

It is proved that the relation $\tilde{d}_n$ is the least left n-trinilpotent congruence on the free trioid $FT(X)$.

The cardinality of the free left (right) *n*-trinilpotent trioid in the finite case is calculated. All idempotent and all regular elements of free left (right) *n*-trinilpotent trioids are described. All maximal subtrioids of free left (right) *n*-trinilpotent trioids $(n > 1)$ are found. It is shown that a free left *n*-trinilpotent trioid contains a subtrioid, which can be represented as a left band of subdimonoids. The cardinality of the endomorphisms semigroup of a free left (right) *n*-trinilpotent trioid and the number of all idempotent and regular elements of free left (right) *n*-trinilpotent trioids in the finite case are calculated.

The results of the thesis can be applied to the theory of trioids and trialgebras, the theory of dimonoids and dialgebras, semigroup theory, and universal algebra.

Key words: trioid, left *n*-trinilpotent trioid, free left *n*-trinilpotent trioid, congruence, semigroup, maximal subtrioid, regular element, idempotent element, automorphism group, endomorphism semigroup, cardinality.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікації у фахових виданнях України

1. Крикля Я. А. Про деякі властивості вільних лівих *n*-тринільпотентних тріоїдів. *Науковий вісник Ужгородського університету,* 2023. Вип.43. № 2. С. 34–41. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).34-41

Публікації у зарубіжних періодичних виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз (Scopus, квартилі Q2 та Q3)

2. Zhuchok A. V., Kryklia Y. A. Free left *n*-trinilpotent trioids. *Communications in Algebra*, 2021. 49. no. 2. P. 467–481. DOI: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00927872.2020.1802472
3. Zhuchok A. V., Kryklia Y. A. The least left *n*-trinilpotent congruence on the free trioid. *Algebra Universalis,* 2022. 83. no. 4. DOI: https://link.springer.com/article/10.1007/s00012-021-00758-x

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

4. Kryklia Y. A. On free *n*-trinilpotent trioids. *International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv* (14-17 July 2020, Kyiv). Kyiv : Book of Abstracts, 2020. P. 42.
5. Zhuchok A. V., Kryklia Y. A. On free left *n*-trinilpotent trioids. *International Conference «Mal’tsev Meeting». Abstracts*, 2018. P. 219.
6. Крикля Я. А. Про один клас відносно вільних тріоїдів. *Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2023 Форум молодих дослідників»:* матеріали IV Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених (17 листопада 2023 р., м. Суми). Суми : СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2023. С. 45–46.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Спираючись на проблеми алгебраїчної K-теорії, Ж.-Л. Лоде вперше ввів асоціативні діалгебри, тобто k-векторні простори, наділені двома асоціативними операціями, що задовольняють деякі умови [34]. Тоді операда, пов'язана з асоціативними діалгебрами, є дуальною за Кошулем до операди, пов'язаної з дендриформними діалгебрами [34]. Подібним чином, щоб запропонувати некомутативну версію алгебр Пуассона, Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко [35] ввели асоціативні триалгебри. Виявляється, що операда, пов'язана з асоціативними триалгебрами, є дуальною за Кошулем до операди, пов'язаної з дендриформними триалгебрами [35]. У наступні кілька років властивості діалгебр і триалгебр активно досліджувалися кількома авторами в різних напрямах, див., наприклад, [2, 25, 44, 48] та [1, 4, 10, 28], відповідно. Триалгебри мають зв'язки з алгебрами Хопфа [42], з алгебрами Лейбніца [4] та з операторами Рота–Бакстера [10].

Асоціативні діалгебри та асоціативні триалгебри є лінійними аналогами дімоноїдів та тріоїдів, відповідно. Останні два типи алгебр були введені відповідно Ж.-Л. Лоде [34], та Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко [35], і вони мають широке застосування в теорії діалгебр та теорії триалгебр, відповідно. Деякі результати щодо дімоноїдів містяться у роботах [65, 70]. Структура тріоїда є нетривіальним розширенням понять дімоноїда та напівгрупи. Нагадаємо, що тріоїд – це непорожня множина, наділена трьома бінарними асоціативними операціями, що задовольняють вісім аксіом, які пов'язують ці операції. Якщо всі операції тріоїда (асоціативної триалгебри) збігаються, то отримуємо поняття напівгрупи (асоціативної алгебри), а при збігу двох конкретних операцій тріоїда (асоціативної триалгебри) отримуємо поняття дімоноїда (асоціативної діалгебри).

Відомо також, що аксіоматика тріоїда містить три аксіоми допельнапівгрупи [61, 66, 79], а будь-який комутативний тріоїд є 3-кратною напівгрупою [64, 68, 73, 81, 82, 89, 90]. Завдяки тому, що тріоїди є основою для асоціативних триалгебр, усі результати, отримані для тріоїдів, можна застосувати до теорії триалгебр. Цей факт дає мотивацію для вивчення многовиду тріоїдів. Тріоїди тісно пов'язані з дігрупами, які узагальнюють групи та останнім часом активно вичаються (див., наприклад, [12, 13, 22, 30, 31, 32, 45, 46, 47, 52, 88, 93, 86, 100]).

Знаходження абсолютно вільних структур і відносно вільних структур є основною проблемою абстрактної алгебри. Для вивчення тріоїдів у цілому корисно почати з відносно вільних тріоїдів. В останні роки було досягнуто певного прогресу щодо таких обчислень із застосуванням результатів до діалгебр і триалгебр. Зокрема, для випадку дімоноїдів можна знайти конструкції вільних об'єктів у кількох роботах, наприклад, див. [58, 60, 72, 87]. Абсолютно вільні тріоїди та деякі відносно вільні тріоїди представлені в роботах [35, 78] та [19, 59, 96, 102, 103], відповідно. Ендоморфізми вільних тріоїдів досліджувалися в [98, 99]. Дослідженню найменших конгруенцій на вільних тріоїдах присвячено роботи [76, 91].

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційні дослідження виконувалися в рамках науково-дослідних тем «Напівгрупи та структурні властивості дімоноїдів» (номер державної реєстрації 0115U000199), «Вільні системи в многовиді *n*-кратних напівгруп і напівгрупи ендоморфізмів» (номер державної реєстрації 0119U100181), «Вільні структури Лоде та моноїди ендоморфізмів» (номер державної реєстрації 0122U000820) та виконання завдань перспективного плану розвитку наукового напряму «Математичні науки та природничі науки» (договір № БФ/11-2021 від 01 червня 2021 року) на кафедрі алгебри та системного аналізу Інституту фізики, математики та інформаційних технологій Державного закладу «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка».

Мета і завдання дослідження. Метою дослідження є побудова вільних об'єктів у многовиді лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів та характеризація найменшої лівої (правої) n-тринільпотентної конгруенції на вільному тріоїді. Основними завданнями при цьому є:

1) підрахунок потужності вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів;

2) опис всіх максимальних підтріоїдів вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів;

3) опис всіх регулярних та всіх ідемпотентних елементів вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів.

Об'єктом дослідження є вільні ліві (праві) n-тринільпотентні тріоїди та вільні тріоїди.

Предметом дослідження є структура та властивості вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів та вільних тріоїдів.

Методи дослідження. У процесі дослідження дисертаційної проблематики застосовуються методи алгебраїчної теорії напівгруп та універсальної алгебри.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертації одержано наступні основні нові результати:

1. Побудовано вільну алгебру в многовиді лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів.

2. Охарактеризовано найменшу ліву (праву) n-тринільпотентну конгруенцію на вільному тріоїді.

3. Підраховано потужність вільного лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда у скінченному випадку.

4. Описано всі ідемпотентні та всі регулярні елементи вільного лівого

(правого) n-тринільпотентного тріоїда.

5. Знайдено всі максимальні підтріоїди вільного лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда $(n > 1)$.

6. Показано, що вільний лівий (правий) n-тринільпотентний тріоїд містить підтріоїд, який може бути представлений у вигляді дісполуки піддімоноїдів.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер і можуть бути застосовані у теорії тріоїдів та триалгебр, теорії дімоноїдів та діалгебр, теорії напівгруп, універсальній алгебрі.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертації, які виносяться на захист, одержані автором самостійно і опубліковані в трьох статтях [83, 85, 108], з яких дві у співавторстві [83, 85]. В усіх роботах, опублікованих у співавторстві, внески авторів є рівними і нероздільними. Визначення напрямку дослідження та постановка задач належать науковому керівнику А. В. Жучку.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації оприлюднено на:

- Міжнародній конференції, присвяченій 60-річчю кафедри алгебри та математичної логіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка (Київ, 2020);
- Міжнародній конференції «Mal'tsev Meeting» (2018);
- Всеукраїнській науково-методичній інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу – ІТМ*плюс-2023 Форум молодих дослідників» (Суми, 2023);
- Алгебраїчному семінарі Луганського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Старобільськ, м. Полтава, 2016–2023 рр.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 6 наукових працях, з них: 1 – у науковому фаховому виданні України [108], 2 – у зарубіжних виданнях, які індексуються в науково-метричній базі Scopus [83, 85] (стаття [83] у науковому виданні, віднесеному до другого квартиля (Q2) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank, стаття [85] – у науковому виданні, віднесеному до третього квартиля (Q3) відповідно до класифікації SCImago Journal Rank), 3 – у збірниках матеріалів міжнародних наукових конференцій [27, 84, 109].

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з анотацій українською й англійською мовами, вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг роботи – 133 сторінки, обсяг основного тексту дисертації – 113 сторінок. Список використаних джерел викладений на 9-ти сторінках і містить 111 найменувань.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дослідження, зазначено мету, завдання, предмет, об’єкт та методи дослідження, вказано наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв’язки роботи з державними науково-дослідними темами, особистий внесок здобувача, апробацію та список публікацій основних результатів дисертації.

У **першому розділі** дається огляд літератури за даною темою. Результати цього розділу мають зв’язки з тріоїдами та триалгебрами і належать Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко [35], А. В. Жучку, Юл. В. Жучок, Ю. В. Жучку [59, 78, 91, 96, 99, 101, 103], Ж. Хуангу, Ю. Баю, Ю. Чену, З. Жангу [19].

У підрозділі 1.1 розглянуто приклади асоціативних триалгебр, зв’язки триалгебр з некомутативною версією алгебри Пуасона та побудовано конструкцію вільної асоціативної триалгебри.

У підрозділах 1.2–1.6 розглянуто конструкції вільного тріоїда, вільного комутативного тріоїда, вільного прямокутного тріоїда, вільного абелевого тріоїда, вільного ідемпотентного тріоїда та охарактеризовано деякі їх властивості.

Підрозділ 1.7 присвячено розгляду деяких найменших конгруенцій на вільних тріоїдах.

Другий розділ присвячений вивченню нільпотентності у тріоїдах. Результати цього розділу є важливим внеском у розвиток теорії многовидів тріоїдів.

У підрозділі 2.1 розглянуто поняття n-нільпотентного тріоїда, n-тринільпотентного тріоїда та лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда. Наведено приклади нільпотентних тріоїдів. Результати цього підрозділу опубліковано в [83, 84, 102].

У підрозділі 2.2 представлено вільні n-нільпотентні тріоїди. Крім того, в термінах 0-трисполук підтріоїдів описано структуру вільних n-нільпотентних тріоїдів. А також охарактеризовано найменшу n-нільпотентну конгруенцію на вільному тріоїді. Результати цього підрозділу опубліковано у роботі [102].

У підрозділі 2.3 введено многовид лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів, які є аналогами лівих (правих) нільпотентних напівгруп рангу n, розглянутих Б. М. Шайном. Побудовано вільний лівий (правий) n-тринільпотентний тріоїд довільного рангу та окремо розглянуто вільні ліві (праві) n-тринільпотентні тріоїди рангу 1 [83]. Крім того, встановлено, що група автоморфізмів вільного лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда ізоморфна симетричній групі.

Тріоїдом [35] називається непорожня множина T, наділена трьома бінарними асоціативними операціями $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$, які задовольняють аксіоми:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \tag{T1}$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \tag{T2}$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \tag{T3}$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z), \tag{T4}$$

$$(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z), \tag{T5}$$

$$(x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z), \tag{T6}$$

$$(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z), \tag{T7}$$

$$(x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z) \tag{T8}$$

для всіх $x,\ y,\ z \in T$.

Як зазвичай, $\mathbb{N}$ позначатимемо множину всіх натуральних чисел. Через Ω позначимо сигнатуру тріоїда. Нехай $a_1,\ldots,a_n$ – індивідуальні змінні. Через $P(a_1,\ldots,a_n)$ будемо позначати множину всіх термів алгебр сигнатури Ω, які мають вигляд $a_1 \circ_1 \ldots \circ_{n-1} a_n$ з розстановкою дужок, де $\circ_1,\ldots,\circ_{n-1} \in \Omega$. Тріоїд $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ будемо називати лівим триніпольтентним, якщо для деякого $n \in \mathbb{N}$, будь-якого $a \in T$ та будь-якого $p(a_1,\ldots,a_n) \in P(a_1,\ldots,a_n)$ мають місце наступні тотожності:

$$p(a_1,\ldots,a_n) * a = p(a_1,\ldots,a_n), \tag{1}$$

$$p(a_1,\ldots,a_n) \vdash a = a_1 \vdash \ldots \vdash a_n, \tag{2}$$

де $* \in \{\dashv,\perp\}$. Найменше серед таких n будемо називвати індексом лівої тринільпотентності тріоїда $(T,\dashv,\vdash,\perp)$. Для $k \in \mathbb{N}$ лівий тринільпотентний тріоїд з індексом лівої тринільпотентності $\le k$ називається лівим k-тринільпотентним. Очевидно, що в будь-якому тріоїді $(T,\dashv,\vdash,\perp)$, за аксіомами $(T3)$, $(T8)$ та асоціативністю операції $\vdash$, маємо

$$p(a_1,\ldots,a_n) \vdash a = a_1 \vdash \ldots \vdash a_n \vdash a.$$

Отже, якщо $(T,\vdash)$ є лівою нільпотентною напівгрупою рангу n, то отримаємо тотожність (2). Це пояснює, як одержуємо третю тотожність у визначенні лівого тринільпотентного тріоїда. Праві k-тринільпотентні тріоїди визначаються двоїстим чином.

Зрозуміло, що операції будь-якого лівого (правого) 1-тринільпотентного тріоїда збігаються та він є напівгрупою лівих (правих) нулів.

Клас усіх лівих (правих) *n*-тринільпотентних тріоїдів утворює підмноговид многовиду тріоїдів. Тріоїд, який є вільним у многовиді лівих (правих) *n*-тринільпотентних тріоїдів, будемо називати вільним лівим (правим) *n*-тринільпотентним тріоїдом.

Нехай $n,k\in\mathbb{N}$ та $L\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$. Покладемо $L+k=\{m+k\mid m\in L\}$. Зрозуміло, що $\varnothing+k=\varnothing$. Для $L\neq\varnothing$ маємо $L^{k,n}=\{m\in L\mid k+m\leq n\}$, і позначимо найменше число множини L через L_{min}. Очевидно, $L^{k,n}=\varnothing$, якщо $k+m>n$ для всіх $m\in L$.

Нехай X – довільна непорожня множина та $F[X]$ – вільна напівгрупа на X, а також $w\in F[X]$. Довжину слова w позначимо через l_w. Зафіксуємо $n\in\mathbb{N}$. Якщо $l_w\geq n$, то через $\overset{n}{\vec{w}}$ позначатимемо початкове підслово довжини *n* слова *w*, і якщо $l_w<n$, то нехай $\overset{n}{\vec{w}}=w$. Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ на

$$V_n=\{(w,L)\mid w\in F[X],\, l_w\leq n,\ L\subseteq\{1,2,\ldots,l_w\},\, L\neq\varnothing\}$$

за такими правилами:

$$(w,L)\dashv(u,R)=(\overset{n}{\overrightarrow{wu}},L),$$

$$(w,L)\vdash(u,R)=\begin{cases}(\overset{n}{\overrightarrow{wu}},\{n\}), & n<l_w+R_{min},\\ (\overset{n}{\overrightarrow{wu}},R^{l_w,n}+l_w) & \textit{в інших випадках},\end{cases}$$

$$(w,L)\perp(u,R)=(\overset{n}{\overrightarrow{wu}},L\cup(R^{l_w,n}+l_w))$$

для всіх $(w,L),(u,R)\in V_n$. Алгебру $(V_n,\dashv,\vdash,\perp)$ позначимо через $FT_n^l(X)$.

Основним результатом підрозділу 2.3 є наступна теорема.

Теорема 2.9. $FT_n^l(X)$ *– вільний лівий n-тринільпотентний тріоїд.*

Побудуємо тріоїд, ізоморфний вільному лівому n-тринільпотентному тріоїду рангу 1.

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ нехай $\overset{n}{\overrightarrow{m}} = \begin{cases} m, & m \le n, \\ n, & m > n. \end{cases}$

Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ на

$$M_n = \{(k, L) \mid k \in \mathbb{N},\ k \le n,\ L \subseteq \{1, 2, \dots, k\},\ L \ne \varnothing\}$$

за такими правилами:

$$(k_1, L) \dashv (k_2, R) = (\overset{n}{\overrightarrow{k_1 + k_2}}, L),$$

$$(k_1, L) \vdash (k_2, R) = \begin{cases} (n, \{n\}), & n < k_1 + R_{min}, \\ (\overset{n}{\overrightarrow{k_1 + k_2}}, R^{k_1, n} + k_1) & \textit{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$(k_1, L) \perp (k_2, R) = (\overset{n}{\overrightarrow{k_1 + k_2}}, L \cup (R^{k_1, n} + k_1))$$

для всіх (k_1, L), $(k_2, R) \in M_n$. Позначимо $(M_n, \dashv, \vdash, \perp)$ через $F_1T_n^l$.

З теореми 2.9. випливає таке твердження.

Наслідок 2.19. *Якщо* $|X| = 1$ *, то* $FT_n^l(X) \cong F_1T_n^l$.

Вільний лівий n-тринільпотентний тріоїд $FT_n^l(X)$ визначається однозначно з точністю до ізоморфізму потужністю множини X. Отже, група автоморфізмів $FT_n^l(X)$ ізоморфна симетричній групі на X.

Зауважимо, що для побудови вільних правих n-тринільпотентних тріоїдів, використовуємо принцип двоїстості.

У третьому розділі вивчаються деякі властивості вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів та описується найменша ліва (права) n-тринільпотентна конгруенція на вільному тріоїді [85, 108].

У підрозділі 3.1 охарактеризовано найменшу ліву (праву) n-тринільпотентну конгруенцію на вільному тріоїді.

Якщо ρ є конгруенцією на тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ такою, що $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$ є лівим (правим) *n*-тринільпотентним тріоїдом, то говоримо, що ρ є лівою (правою) *n*-тринільпотентною конгруенцією.

Нагадаємо конструкцію вільного тріоїда довільного рангу [78].

Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ на множині

$$F = \{(w, L) \mid w \in F[X],\ L \subseteq \{1, 2, \ldots, l_w\},\ L \neq \varnothing\}$$

за правилами:

$$(w, L) \dashv (u, R) = (wu, L), \quad (w, L) \vdash (u, R) = (wu, R + l_w),$$

$$(w, L) \perp (u, R) = (wu, L \cup (R + l_w))$$

для всіх $(w, L), (u, R) \in F$. Відповідно до [78], $(F, \dashv, \vdash, \perp)$ є вільним тріоїдом. Його позначають $FT(X)$.

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Нехай далі

$$L^{(n)} = \begin{cases} \{n\}, & n \leq L_{min}, \\ \{m \in L \mid m \leq n\}, & n > L_{min} \end{cases}$$

для будь-якої непорожньої множини $L \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ та $k \in \mathbb{N}$. Візьмемо довільні елементи $(w, L), (u, R) \in FT(X)$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ визначимо бінарне відношення $\tilde{d}_n$ на $FT(X)$ за правилом:

$$(w, L)\tilde{d}_n(u, R) \quad \text{тоді і тільки тоді, коли} \quad \overset{n}{\vec{w}} = \overset{n}{\vec{u}} \quad \text{і} \quad L^{(n)} = R^{(n)}.$$

Основнм результатом підрозділу 3.1 є наступна теорема.

Теорема 3.1. *Відношення* $\tilde{d}_n$ *є найменшою лівою* n*-тринільпотентною конгруенцією на вільному тріоїді* $FT(X)$.

У підрозділі 3.2 досліджуються властивості вільних лівих (правих) *n*-тринільпотентних тріоїдів. А саме, охарактеризовано всі ідемпотентні та всі регулярні елементи вільних лівих (правих) *n*-тринільпотентних тріоїдів, а також підраховано кількість всіх ідемпотентних та регулярних елементів вільних лівих (правих) *n*-тринільпотентних тріоїдів у скінченному випадку.

Нагадаємо, що елемент x тріоїда $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ називається ідемпотентом, якщо $x\dashv x=x\vdash x=x\perp x=x$. Елемент a напівгрупи S називається регулярним, якщо існує такий $b\in S$, що $aba=a$. Елемент x тріоїда $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ будемо називати регулярним, якщо x є регулярним у $(T,\dashv)$, $(T,\vdash)$ та $(T,\perp)$.

Твердження 3.6. *Множиною всіх ідемпотентів (регулярних елементів) в* $FT_n^l(X)$ *є* $E=\{(w,\{n\})\mid l_w=n\}$. *Крім того, операції* $\dashv$, $\vdash$ *та* $\perp$ *на* E *збігаються, та* E *є напівгрупою лівих нулів. Якщо* X *– скінченна множина, то* $|E|=|X|^n$.

У підрозділі 3.3 охарактеризовано всі максимальні підтріоїди вільних лівих (правих) *n*-тринільпотентних тріоїдів ($n>1$) та показано, що вільний лівий *n*-тринільпотентий тріоїд містить підтріоїд, який може бути представлений у вигляді лівої сполуки піддімоноїдів. Також підраховано потужність напівгрупи ендоморфізмів вільного лівого (правого) *n*-тринільпотентного тріоїда в скінченному випадку.

Опишемо всі максимальні підтріоїди тріоїда $FT_n^l(X)$.

Підтріоїд тріоїда G є власним, якщо він не дорівнює G. Підтріоїд тріоїда G є максимальним, якщо він є власним підтріоїдом тріоїда G, який не міститься в будь-якому іншому власному підтріоїді тріоїда G.

Теорема 3.8. *Нехай* F *– підтріоїд вільного лівого n-тринільпотентного тріоїда* $FT_n^l(X), n>1$. *Тоді* F *є максимальним тоді і тільки тоді, коли існує* $x\in X$ *такий, що* $F=V_n\setminus\{(x,\{1\})\}$.

Нагадаємо, що дімоноїд [34] – це непорожня множина, наділена двома бінарними асоціативними операціями $\dashv$ та $\vdash$, які задовольняють аксіоми $(T1)-(T3)$ тріоїда. Дісполука або дімоноїд ідемпотентів [55] – це дімоноїд, у якого обидві операції ідемпотентні. У [55] було введено поняття дісполуки піддімоноїдів. Наведемо його визначення.

Якщо $\psi : D_1 \to D_2$ – гомоморфізм дімоноїдів, то через Δ_ψ позначатимемо відповідну конгруенцію на дімоноїді D_1.

Нехай D – довільний дімоноїд, J – деякий дімоноїд ідемпотентів. Якщо існує гомоморфізм

$$\beta : D \to J : x \mapsto x\beta,$$

то кожний клас конгруенції Δ_β є піддімоноїдом дімоноїду $D,$ а сам дімоноїд D є об'єднанням таких дімоноїдів $D_\xi, \xi \in J,$ що

$$x\beta = \xi \Leftrightarrow x \in D_\xi = \Delta_\beta^x = \{t \in D \big| (x;t) \in \Delta_\beta\},$$

$$D_\xi \dashv D_\varepsilon \subseteq D_{\xi \dashv \varepsilon}, \quad D_\xi \vdash D_\varepsilon \subseteq D_{\xi \vdash \varepsilon},$$

$$\xi \neq \varepsilon \Rightarrow D_\xi \cap D_\varepsilon = \varnothing.$$

У цьому випадку кажуть, що D розкладається в дісполуку піддімоноїдів (або D є дісполукою J піддімоноїдів $D_\xi,\ \xi \in J)$. Якщо ж J є напівгрупою ідемпотентів (сполукою), то кажуть, що D є сполукою J піддімоноїдів $D_\xi,\ \xi \in J$. Якщо ж J є напівгрупою лівих (правих) нулів, то кажуть, що D є лівою (правою) сполукою J піддімоноїдів $D_\xi,\ \xi \in J$.

Застосовуючи поняття дісполуки піддімоноїдів, охарактеризуємо один важливий підтріоїд тріоїду $FT_n^l(X)$.

Теорема 3.9. *Нехай* $n > 1$. *Множина* $R_n = \{(w, L) \in FT_n^l(X) \mid l_w = n\}$ *є підтріоїдом тріоїда* $FT_n^l(X)$. *Крім того, операції* $\dashv$ *та* $\perp$ *на* R_n *збігаються та* R_n *є лівою сполукою піддімоноїдів, кожен із яких утворюється з напівгрупи лівих нулів та напівгрупи з нульовим множенням.*

Підраховано кількість всіх ендоморфізмів вільного лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда $FT_n^l(X)$. Через $End(FT_n^l(X))$ позначимо напівгрупу всіх ендоморфізмів тріоїда $FT_n^l(X)$.

Твердження 3.10. *Вільний лівий n-тринільпотентний тріоїд* $FT_n^l(X)$*, породжений скінченною множиною* $X \times \{1\}$*, є скінченним. Зокрема,* $|FT_n^l(X)| = \sum_{i=1}^{n}(2^i - 1) \cdot |X|^i$ *.*

Твердження 3.11. *Нехай* X *– непорожня скінченна множина. Тоді*

$$\left|End(FT_n^l(X))\right| = (\sum_{i=1}^{n}(2^i - 1) \cdot |X|^i)^{|X|}.$$

Зазначимо, що для того, щоб охарактеризувати найменшу праву n-тринільпотентну конгруенцію на вільному тріоїді та описати відповідні властивості вільного правого n-тринільпотентного тріоїда, використовуємо принцип двоїстості.

У **висновках** перелічено основні результати роботи.

Подяка. Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику – доктору фізико-математичних наук, професору, проректору з науково-педагогічної роботи ДЗ «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка» (м. Полтава) Жучку Анатолію Володимировичу за постановку розглянутих у дисертації задач, постійну увагу, всебічну підтримку та допомогу в роботі.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

У цьому розділі наведено огляд літератури за даною темою. Результати цього розділу мають зв'язки з тріоїдами та триалгебрами. Розглянуто конструкції вільного тріоїда, вільного комутативного тріоїда, вільного прямокутного тріоїда, вільного абелевого тріоїда, вільного ідемпотентного тріоїда та охарактеризовано деякі їх властивості. Представлено деякі найменші конгруенції на (відносно) вільних тріоїдах. Результати цього розділу належать Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко [35], А. В. Жучку, Юл. В. Жучок, Ю. В. Жучку [59, 78, 91, 96, 99, 101, 103], Ж. Хуангу, Ю. Баю, Ю. Чену, З. Жангу [19].

1.1. Вільні триалгебри

Цей підрозділ, який ґрунтується на результатах, які отримані у статті Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко [35], містить поняття асоціативної діалгебри, асоціативної триалгебри, асоціативного тріоїду. Також побудовано конструкцію вільної асоціативної триалгебри, розглянуто приклади асоціативних триалгебр і зв'язки триалгебр з некомутативною версією алгебри Пуасона.

Як показано у праці [35], сім'я політопів Сташеффа та сім'я стандартних симплексів дуальні одне до одного. Основний результат цієї статті вказує на те, що вони обидві є операдами Кошуля. Далі показано, що породжуючі серії політопів Сташеффа та породжуючі серії стандартних симплексів є зворотними одне до одного. У [35] автори ввели поняття асоціативної триалгебри та побудовали конструкцію вільної триалгебри. Крім того, показано зв'язок асоціативних триалгебр з некомутативною версію алгебри Пуасона.

Розглянемо більш детально деякі результати статті [35].

У [33, 34] Ж.-Л. Лоде було введено поняття асоціативної діалгебри наступним чином.

Асоціативною діалгеброю називається векторний простір A, наділений двома бінарними білінійними операціями: $\vdash$ (права) та $\dashv$ (ліва)

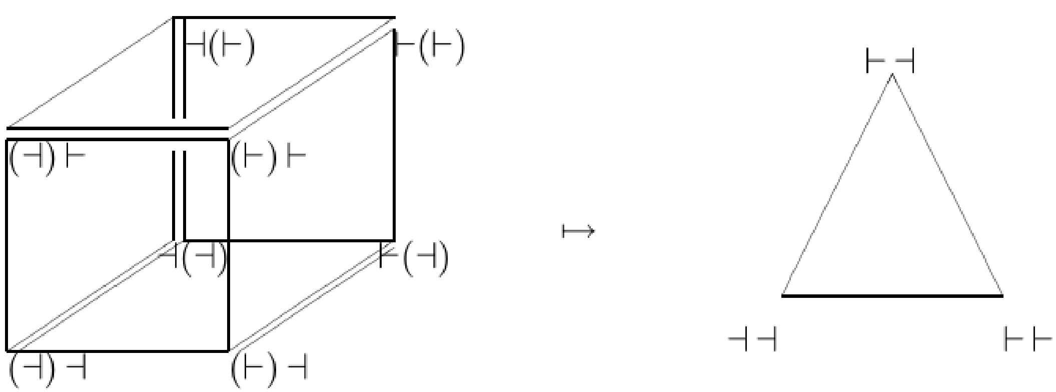
$$\vdash : A \otimes A \to A,$$

$$\dashv : A \otimes A \to A,$$

які задовольняють наступні аксіоми:

$$\begin{cases} (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z), \\ (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \\ (x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \\ (x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \\ (x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z). \end{cases}$$

Слід відзначити, що в аксіомах асоціативної триалгебри зустрічається 8 можливих добутків з трьома змінними *x*, *y*, *z* (представлених у вказаному порядку) зустрічаються в аксіомах. Ідентифікація кожного добутку з вершиною куба та розпад куба відносно аксіом перетворюють куб на трикутник $\triangle^2$:

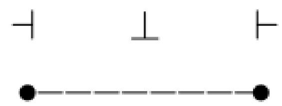


Подвійні лінії показують вершини, які ідентифіковані відповідно до аксіом.

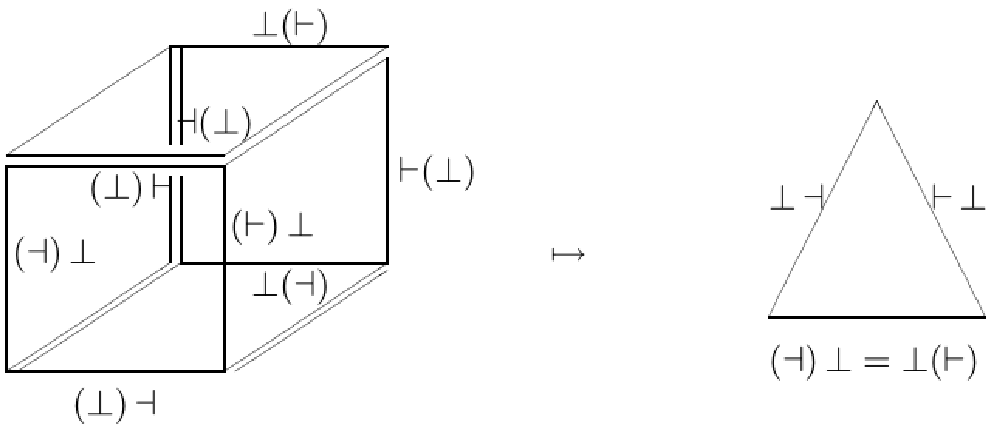
Введемо третю операцію $\perp$ (середня) за правилом:

$$\perp : A \otimes A \to A.$$

Відомо, що операції $\dashv$ та $\vdash$ пов'язані з 0-клітинами інтервалу, а операція $\perp$ – з 1-клітиною:



Зв'яжемо будь-яку вершину з трьома змінними із клітиною куба за допомогою бінарних операцій $\dashv, \vdash, \perp$. Нові аксіоми (вказуємо тільки 1-клітини) визначає відношення еквівалентності, яке перетворює куб на трикутник:



Цей аналіз дає наступне визначення.

Векторний простір A (відповідно, множина X), наділений (відповідно, наділена) трьома бінарними операціями $\dashv$, $\vdash$ і $\perp$, які задовольняють наступні 11 аксіом:

$$\left\{\begin{array}{l}
(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z),\\
(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z),\\
(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z),\\
(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z),\\
(x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z),
\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z),\\ (x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z),\\ (x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z),\\ (x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z),\\ (x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z),\end{cases}$$

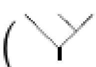
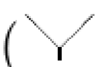
$$\{(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z),$$

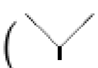
називається асоціативною триалгеброю (відповідно, асоціативним тріоїдом).

Спочатку, зауважимо, що кожна операція асоціативна. По-друге, не має значення, який добуток знаходиться на стороні бар'єра. По-третє, кожна аксіома має симетричну копію, яку можна отримати за допомогою зворотнього порядку дужок, змінюючи $\vdash$ і $\dashv$ та залишаючи операцію $\perp$ незмінною.

Морфізм між двома асоціативними триалгебрами – це лінійне відображення, яке сумісне з трьома операціями. Позначимо через *Trias* категорію асоціативних триалгебр.

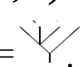
Позначимо через T_n множину планарних дерев з *(n+1)* листками. Пов'яжемо дерева в T_2 з трьома бінарними операціями наступним чином:

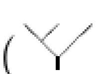
( $; x, y) \mapsto$ ( $; x \dashv y)$

( $; x, y) \mapsto$ ( $; x \vdash y)$

( $; x, y) \mapsto$ ( $; x \perp y)$.

Зауважимо, що це саме напрям середнього листка, який визначає операцію.

Кожне з 11 дерев в T_3 дає два різні способи обчислень образу $(t; x, y, z)$. Прирівнявши два результати, маємо співвідношення. Наприклад, нехай $t =$ .
Перше обчислення дає:

( $; x, y, z) \mapsto$ ( $; x \perp y, z) \mapsto$ ( $; (x \perp y) \vdash z$).

У результаті другого обчислення отримуємо:

$$($$$$; x, y, z) \mapsto ($$$$; x, y \vdash z) \mapsto ($$$$; x \vdash (y \vdash z)).$$

Отже, це дерево породжує 10 аксіом асоціативної триалгебри. Неважко пересвідчитися безпосередньо, що 11 дерев дають 11 аксіом триалгебри. Визначення цього взаємозв'язку є важливим при побудові ланцюгового комплексу асоціативної триалгебри.

Наступні приклади асоціативних триалгебр наведено в [35].

а) Нехай A – асоціативна триалгебра. Множина $n \times n$ матриць над A утворює асоціативну триалгебру відносно операції коефіцієнтного множення.

б) Припустимо, що $\dashv = \perp = \vdash$. Тоді одержуємо просто асоціативну (неунітарну) алгебру. Отже, отримуємо функтор між категоріями алгебр:

$$\mathbf{As} \to \mathbf{Trias}.$$

Ігноруючи операцію $\perp$, отримаємо асоціативну діалгебру. Таким чином, існує (забуваючий) функтор

$$\mathbf{Trias} \to \mathbf{Dias}$$

з категорії триалгебр до категорії діалгебр.

в) Очевидно, що векторний простір над асоціативним тріоїдом є асоціативною триалгеброю.

г) Алгебра Соломона. Нехай $V = \oplus_{n \geq 0} K \cdot \omega_n$ – градуйований K-векторний простір з такою властивістю: підпростір однорідних елементів ступеня n є векторним простором розмірності один, породженим ω_n для всіх $n \geq 0$.

Розглянемо тензорну алгебру $T(V)$ з операціями $\perp$, $\dashv$ та $\vdash$, заданими за правилами:

$$(\omega_{n_1} \otimes \ldots \otimes \omega_{n_r}) \perp (\omega_{m_1} \otimes \ldots \otimes \omega_{m_k}) := \omega_{n_1} \otimes \ldots \otimes \omega_{n_r} \otimes \omega_{m_1} \otimes \ldots \otimes \omega_{m_k},$$

$$(\omega_{n_1} \otimes \ldots \otimes \omega_{n_r}) \dashv (\omega_{m_1} \otimes \ldots \otimes \omega_{m_k}) := \omega_{n_1} \otimes \ldots \otimes \omega_{n_r} \otimes \omega_{m_1 + \ldots + m_k},$$

$$(\omega_{n_1} \otimes \ldots \otimes \omega_{n_r}) \vdash (\omega_{m_1} \otimes \ldots \otimes \omega_{m_k}) := \omega_{n_1 + \ldots + n_r} \otimes \omega_{m_1} \otimes \ldots \otimes \omega_{m_k}$$

для всіх $n_1,\dots,n_r,\ m_1,\dots m_k \ge 0.$ Легко перевірити, що $(T(V),\perp,\dashv,\vdash)$ – асоціативна триалгебра. Асоціативна алгебра $(T(V),\perp)$ ізоморфна алгебрі Соломона Sol_∞ (див., наприклад, [36]).

Нехай $[n-1]:=\{0,...,n-1\}$ є множиною з n елементами. Множина непорожніх підмножин $[n-1]$ позначається через P_n. Зазначимо, що P_n можна сортувати за потужністю своїх членів. Позначимо через $P_{n,k}$ підмножину з P_n, члени якої мають потужність k. Тому $P_n = P_{n,1}\bigcup\dots P_{n,n}$.

Відповідно до визначення [35] вільна асоціативна триалгебра над векторним простором V є асоціативною триалгеброю $Trias\,(V)$, наділеною відобаженням $V \to Trias\,(V)$, яке задовольняє наступній універсальній властивості. Для будь-якого відображення $V \to A$, де A – асоціативна триалгебра, існує єдине продовження $Trias\,(V) \to A$, яке є морфізмом асоціативних триалгебр.

$Trias\,(V)$ повністю визначається вільною асоціативною триалгеброю на одному генераторі, тобто $V = K$, оскільки операції несиметричні, а змінні в аксіомах розташовані в однаковому порядку. Таким чином, маємо градуйований векторний простір вигляду

$$Trias(K) = \oplus_{n\ge 1} Trias(n).$$

Із мотивації визначення типу асоціативних триалгебр видно, що для $n = 1,2,3$ базиси $Trias(n)$ дають елементи P_1, P_2 і P_3 відповідно (тобто елементи $\Delta^0,\Delta^1,\Delta^2$ відповідно).

Позначимо через

$$bij:[i_1-1]\bigcup...\bigcup[i_n-1]\to[i_1+\dots+i_n-1]$$

бієкцію, яка елементу $k\in[i_j-1]$ ставить у відповідність елемент $i_1+\dots+i_j-1+k\in[i_1+\dots+i_n-1]$.

Теорема 1.1 ([35], теорема 1.7). *Вільна асоціативна триалгебра* $Trias(K)$ *з одним породжуючим елементом є* $\oplus_{n\geq 1}K[P_n]$ *як векторний простір. Бінарні операції* $\dashv$, $\perp$ *і* $\vdash$ *з* $K[P_p]\otimes K[P_q]$ *у* $K[P_{p+q}]$ *задаються за правилами:*

$$X \dashv Y = bij(X),\ X \vdash Y = bij(Y),\ X \perp Y = bij(\mathrm{X}\cup \mathrm{Y}),$$

де $X \in P_p$ і $Y \in P_q$ $Y \in P_q$ і $bij:[p-1]\times[q-1]\to[p+q-1]$.

З цієї теореми випливає наслідок.

Наслідок 1.2 ([35], наслідок 1.8). $Trias\ (V) = \oplus_{n\geq 1}K[P_n]\otimes V^{\otimes n}$ *є вільною асоціативною триалгеброю* $Trias\ (V)$ *на векторному просторі V, причому операції індукуються операціями на* $Trias\ (K)$ *та конкатенацією.*

Вперше поняття асоціативної діалгебри було введено Ж.-Л. Лоде як аналог асоціативної алгебри для алгебр Лейбніца. Алгебра Лейбніца визначається бінарною операцією $[-,-]$, яка не є обов'язково косо-симетричною і задовольняє праву тотожність Лейбніца:

$$[[x,y],z] = [[x,z],y] + [x,[y,z]].$$

Коли дужки є косо-симетричними, то вони є дужками Лі. Якщо покласти

$$[x,y] := x \dashv y - y \vdash x,$$

то асоціативна діалгебра дає дужки Лейбніца.

Побудуємо тепер некомутативну версію алгебри Пуасона. Введемо асоціативну операцію xy (не обов'язково комутативну) і звичайно ж вимагатимемо, щоб її зв'язок з дужками Лейбніца визначався за правилами:

$$[xy,z] = x[y,z] + [x,z]y,$$

$$[x, yz - zy] = [x,[y,z]].$$

Твердження 1.3 ([35], твердження 1.16). Нехай $(A, \dashv, \vdash, \perp)$ – асоціативна триалгебра. Поклавши

$$[a,b] := a \dashv b - b \vdash a \text{ та } ab := a \perp b,$$

отримуємо некомутативну структуру алгебри Пуасона на A.

Для зручності надалі у роботі будемо використовувати термін «тріоїд» та «триалгебра» замість термінів «асоціативний тріоїд» та «асоціативна триалгебра», відповідно.

1.2. Вільні тріоїди

Результати даного підрозділу ґрунтуються на результатах, отриманих у роботах А. В. Жучка [78], Юл. В. Жучок [101], Ю. В. Жучка [99], Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко [35].

У цьому підрозділі розглянуто основні результати про вільні тріоїди та їх декомпозиції. Описано вільний тріоїд довільного рангу та для цього тріоїда надано ізоморфну конструкцію. Наведено декомпозиції вільних тріоїдів у трисполуки і сполуки підтріоїдів. Далі описано всі ендоморфізми вільного тріоїда рангу 1 та побудовано напівгрупу, яка ізоморфна моноїду ендоморфізмів вільного моногенного тріоїда.

Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко у процесі дослідження тернарних планарних дерев [35] ввели тип алгебр, які називаються тріоїдами. Це множини, наділені трьома бінарними асоціативними операціями, що задовольняють додаткові вісім аксіом, які пов'язують ці операції. Теорія тріоїдів має широке застосування в теорії триалгебр. Триалгебри впродовж останніх років викликають значний науковий інтерес (див., наприклад, [4], [10], [41], [42]). Інтерес до вивчення тріоїдів викликано тим, що отримані для тріоїдів результати, можуть бути застосовані до триалгебр. Ще однією мотивацією до вивчення тріоїдів є їх зв'язок з дімоноїдами, діалгебрами та напівгрупами. Поняття дімоноїда та діалебри були введені Ж.-Л. Лоде [34] під час вивчення періодичності в алгебраїчній K-теорії. Також ці алгебраїчні структури мають застосування в теорії алгебр Лейбніца і вивчалися, наприклад, в [2], [24], [25], [44], [56] та [69], [72], [87], відповідно. Якщо операції тріоїду (триалгебри) збігаються, отримуємо поняття напівгрупи (асоціативної алгебри).

Звернемо увагу на деякі результати вказаних вище робіт.

Нехай Y – довільна непорожня множина, $\overline{Y}=\{\overline{x}\mid x\in Y\}$, $X=Y\cup\overline{Y}$ і $F[X]$ – вільна напівгрупа на X. Нехай далі $P\subset F[X]$ – піднапівгрупа, яка містить слова w з елементами $\overline{x}\,(x\in Y)$, які зустрічаються в w принаймні один раз. Неважко побачити, що $F[X]$ – сполука напівгруп P і $F[X]\backslash P$ [6].

Для кожного $w\in P$ позначимо через $\tilde{w}$ слово, отримане з w шляхом заміни всіх літер $\overline{x}\,(x\in Y)$ на x. Наприклад, якщо $w=x\overline{x}\overline{y}x\overline{z}$, то $\tilde{w}=xxyxz$. Очевидно, $\tilde{w}\in F[X]\backslash P$.

Визначимо операції $\dashv,\vdash$ та $\perp$ на множині P за правилами:

$$w\dashv u=w\tilde{u},\ w\vdash u=\tilde{w}u,\ w\perp u=wu$$

для всіх $w,u\in P$. Через $Frt(Y)$ позначимо алгебру $(P,\dashv,\vdash,\perp)$.

Твердження 1.4 ([78], твердження 7.1). $Frt(Y)$ *– вільний тріоїд.*

$Frt(Y)$ є вільним однопородженим тріоїдом, представленим Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко, якщо $Y=\{x\}$. У [35] показано, що вільна асоціативна триалгебра над векторним простором повністю визначається вільною асоціативною триалгеброю на одному породжуючому елементі, а також, що опис останньої триалгебри зводиться до опису вільного однопородженого тріоїда. Ознайомитися з тріоїдами, які є ізоморфними вільному однопородженому тріоїду, можна у роботах [78], [105].

Тепер наведемо ще одну модель вільного тріоїда довільного рангу [78].

Нехай $F[Y]$ – вільна напівгрупа на довільній множині Y. Якщо $w\in F[Y]$, то довжину ω позначатимемо через l_ω. Для будь-яких $n,\ k\in\mathbb{N}$ і $L\subseteq\{1,2,...,n\}$, $L\neq\varnothing$ будемо вважати $L+k=\{y+k\mid y\in L\}$. Визначимо операції $\dashv',\vdash'$ та $\perp'$ на

$$F=\{(w,L)\,|\,w\in F[Y],\ L\subseteq\{1,2,...,l_w\},L\neq\varnothing\}$$

за правилами:

$$(w,L)\dashv'(u,R)=(wu,L),$$

$$(w,L)\vdash'(u,R)=(wu,R+l_w),$$

$$(w,L)\perp'(u,R)=(wu,L\cup(R+l_w))$$

для всіх $(w,L),\ (u,R)\in F.$

Лема 1.5 ([78], лема 7.1). $(F,\dashv',\vdash',\perp')$ *– тріоїд.*

Теорема 1.6 ([78], теорема 7.1). *Вільний тріоїд* $Frt(Y)$ *є ізоморфним тріоїду* $(F,\dashv',\vdash',\perp')$.

З цієї теореми випливає наступний наслідок.

Наслідок 1.7 ([78], наслідок 7.1). *Вільний тріоїд* $Frt(Y)$ *рангу 1 є ізоморфним тріоїду* $(F',\prec,\succ,\uparrow)$.

Нагадаємо, що метод декомпозиції використовується при вивченні структури різних алгебр і застосовується в теорії групоїдів, теорії напівгруп, а також теорії дімоноїдів (див., наприклад, [43], відповідно, [6, 55]). Основні результати про декомпозицію тріоїдів опубліковано в [101].

Введемо поняття трисполуки підтріоїдів [77].

Нагадаємо, що тріоїд $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ називається ідемпотентним тріоїдом або трисполукою [77], якщо напівгрупи $(T,\dashv)$, $(T,\vdash)$ і $(T,\perp)$ – ідемпотентні напівгрупи. Тріоїд $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ є прямокутним тріоїдом або прямокутною трисполукою [103] тоді, коли напівгрупи $(T,\dashv)$, $(T,\vdash)$ та $(T,\perp)$ – прямокутні сполуки.

Для довільної непорожньої множини X нехай $X_{lz}=(X,\dashv)$, $X_{rz}=(X,\vdash)$, $X_{rb}=X_{lz}\times X_{rz}$ є напівгрупою лівих нулів, напівгрупою правих нулів і прямокутною сполукою відповідно.

Нехай S – довільний тріоїд, J – деяка трисполука, а $\alpha : S \to J : x \mapsto x\alpha$ є гомоморфізмом. Тоді кожен клас конгруенції Δ_α є підтріоїдом тріоїда S, а сам тріоїд S є об'єднанням таких тріоїдів S_ξ, $\xi \in J$, що

$$x\alpha = \xi \Leftrightarrow x \in S_\xi = \Delta_\alpha^x = \{t \in S \mid (x,t) \in \Delta_\alpha\},$$

$$S_\xi \dashv S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \dashv \varepsilon}, \quad S_\xi \vdash S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \vdash \varepsilon},$$

$$S_\xi \perp S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \perp \varepsilon}, \quad \xi \neq \varepsilon \Rightarrow S_\xi \cap S_\varepsilon = \varnothing.$$

У такому разі говорять, що S розкладається в трисполуку підтріоїдів (або S – трисполука J підтріоїдів S_ξ $(\xi \in J)$). Якщо J є напівгрупою ідемпотентів (сполукою), то говорять, що S – сполука J підтріоїдів S_ξ $(\xi \in J)$. Якщо J – комутативна сполука, то говорять, що S є напіврешіткою J підтріоїдів S_ξ $(\xi \in J)$. Далі, коли J є напівгрупою лівих (правих) нулів, то говорять, що S – ліва (права) сполука J підтріоїдів S_ξ $(\xi \in J)$.

Нехай $\omega \in F[X]$ і $w \in Frt(Y)$. Позначимо першу (відповідно, останню) літеру слова ω через $\omega^{(0)}$ (відповідно, $\omega^{(1)}$). Припустимо, що u – початкове (відповідно, кінцеве) підслово слова w мінімальної довжини таке, що $u^{(1)} \in \overline{Y}$ (відповідно, $u^{(0)} \in \overline{Y}$). У цьому випадку $\tilde{u}^{(1)}$ (відповідно, $\tilde{u}^{(0)}$) будемо позначати через $w^{[0]}$ (відповідно, $w^{[1]}$). Для кожного $\omega \in F[X]$ множину всіх літер, що входять в ω, позначатимемо через $c(\omega)$ і для кожного $w \in Frt(Y)$ покладемо $\tilde{c}(w) = c(w)$.

Далі розглянемо довільну непорожню скінченну підмножину C множини Y. Нехай $B^C(Y)$ – множина всіх скінченних підмножин A з Y таких, що $C \subseteq A$, а $B_C(Y)$ – напіврешітка, визначена на $B^C(Y)$ за допомогою операції теоретико-множинного об'єднання.

Нехай $i, j, k, s \in Y$,

$$L=\{(i,j,k,s),\ (i,j,k),\ [i,j,k],\ [i,j],\ (i,j),\ (i,j],\ [i,j),\ (i),\ [i]\}$$

та

$$U_{(i,j,k,s)}=\{w\in Frt(Y)\,|\,(\tilde{w}^{(0)},w^{[0]},w^{[1]},\tilde{w}^{(1)})=(i,j,k,s)\},$$

$$U_{(i,j,k)}=\{w\in Frt(Y)\,|\,(\tilde{w}^{(0)},w^{[0]},w^{[1]})=(i,j,k)\},$$

$$U_{[i,j,k]}=\{w\in Frt(Y)\,|\,(w^{[0]},w^{[1]},\tilde{w}^{(1)})=(i,j,k)\},$$

$$U_{[i,j]}=\{w\in Frt(Y)\,|\,(w^{[0]},w^{[1]})=(i,j)\},$$

$$U_{(i,j)}=\{w\in Frt(Y)\,|\,(\tilde{w}^{(0)},\tilde{w}^{(1)})=(i,j)\},$$

$$U_{(i)}=\{w\in Frt(Y)\,|\,\tilde{w}^{(0)}=i\},$$

$$U_{[i]}=\{w\in Frt(Y)\,|\,\tilde{w}^{(1)}=i\}.$$

Для кожного $l\in L$ нехай l^* є множиною, що включає всі компоненти l. Далі введемо до розгляду множину

$$U_l^A=\{w\in U_l\,|\,\tilde{c}(w)=A\},$$

де $A\in B_{l*}(Y)$ та $l\in L\backslash\{(i,j],[i,j)\}$.

У наступних трьох теоремах надамо декомпозиції $Frt(Y)$ у трисполуки підтріоїдів.

Теорема 1.8 ([101], теорема 3.1). *Нехай* $Frt(Y)$ *– вільний тріоїд. Справедливі наступні твердження:*

(i) $Frt(Y)$ *є трисполукою* $FRT(Y)$ *підтріоїдів* $U_{(i,j,k,s)}$, $(i,j,k,s)\in FRT(Y)$. *Кожен тріоїд* $U_{(i,j,k,s)}$, $(i,j,k,s)\in FRT(Y)$, *є напіврешіткою* $B_{(i,j,k,s)^*}(Y)$ *підтріоїдів* $U_{(i,j,k,s)}^A$, $A\in B_{(i,j,k,s)^*}(Y)$.

(ii) $Frt(Y)$ *є трисполукою* $Y_{lz,rd}$ *підтріоїдів* $U_{(i,j,k)}$, $(i,j,k)\in Y_{lz,rd}$. *Кожен тріоїд* $U_{(i,j,k)}$, $(i,j,k)\in Y_{lz,rd}$, *є напіврешіткою* $B_{(i,j,k)^*}(Y)$ *підтріоїдів* $U_{(i,j,k)}^A$, $A\in B_{(i,j,k)^*}(Y)$.

(iii) $Frt(Y)$ *є трисполукою* $Y_{rd,rz}$ *підтріоїдів* $U_{[i,j,k]}$, $(i,j,k)\in Y_{rd,rz}$. *Кожен тріоїд* $U_{[i,j,k]}$, $(i,j,k)\in Y_{rd,rz}$, *є напіврешіткою* $B_{[i,j,k]^*}(Y)$ *підтріоїдів* $U^A_{[i,j,k]}$, $A\in B_{[i,j,k]^*}(Y)$.

(iv) $Frt(Y)$ *є трисполукою* $Y^{rb}_{lz,rz}$ *підтріоїдів* $U_{[i,j]}$, $(i,j)\in Y^{rb}_{lz,rz}$. *Кожен тріоїд* $U_{[i,j]}$, $(i,j)\in Y^{rb}_{lz,rz}$, *є напіврешіткою* $B_{[i,j]^*}(Y)$ *підтріоїдів* $U^A_{[i,j]}$, $A\in B_{[i,j]^*}(Y)$.

Нехай для всіх $i,j,k\in X$

$$R_{(i,j,k)}=\{w\in Frt(Y)\,|\,(\tilde{w}^{(0)},w^{[0]},\tilde{w}^{(1)})=(i,j,k)\},$$

$$R_{[i,j,k]}=\{w\in Frt(Y)\,|\,(\tilde{w}^{(0)},w^{[1]},\tilde{w}^{(1)})=(i,j,k)\},$$

$$R_{(i)}=\{w\in Frt(Y)\,|\,(w^{[0]})=i\},$$

$$R_{[i]}=\{w\in Frt(Y)\,|\,(w^{[1]})=i\},$$

$$R_{(i,j)}=\{w\in Frt(Y)\,|\,(\tilde{w}^{(0)},w^{[0]})=(i,j)\},$$

$$R_{[i,j]}=\{w\in Frt(Y)\,|\,(\tilde{w}^{(0)},w^{[1]})=(i,j)\},$$

$$R_{(i,j]}=\{w\in Frt(Y)\,|\,(w^{(0)},\tilde{w}^{(1)})=(i,j)\},$$

$$R_{[i,j)}=\{w\in Frt(Y)\,|\,(w^{[1]},\tilde{w}^{(1)})=(i,j)\}.$$

Розглянемо множину

$$R^A_l=\{w\in R_l\,|\,\tilde{c}(w)=A\},$$

де $A\in B_{l*}(Y)$ та $l\in L\backslash\{(i,j,k,s)\}$.

Теорема 1.9 ([101], теорема 3.2). *Нехай* $Frt(Y)$ *– вільний тріоїд. Мають місце такі твердження:*

(i) $Frt(Y)$ *є трисполукою* $(FRct(Y))^{\dashv}$ *підтріоїдів* $R_{(i,j,k)},(i,j,k)\in(FRct(Y))^{\dashv}$. *Кожен тріоїд* $R_{(i,j,k)},(i,j,k)\in(FRct(Y))^{\dashv}$, *є напіврешіткою* $B_{(i,j,k)*}(Y)$ *підтріоїдів* $R^A_{(i,j,k)},A\in B_{(i,j,k)*}(Y)$.

(ii) $Frt(Y)$ *є трисполукою* $(FRct(Y))^{\vdash}$ *підтріоїдів* $R_{[i,j,k]}, (i,j,k) \in (FRct(Y))^{\vdash}$. *Кожен тріоїд* $R_{[i,j,k]}, (i,j,k) \in (FRct(Y))^{\vdash}$, *є напіврешіткою* $B_{[i,j,k]*}(Y)$ *підтріоїдів* $R^{A}_{[i,j,k]}, A \in B_{[i,j,k]*}(Y)$.

(iii) $Frt(Y)$ *є трисполукою* $(Y_{lz,rz})^{\dashv}$ *підтріоїдів* $R_{(i)}, i \in (Y_{lz,rz})^{\dashv}$. *Кожен тріоїд* $R_{(i)}, i \in (Y_{lz,rz})^{\dashv}$, *є напіврешіткою* $B_{\{i\}}(Y)$ *підтріоїдів* $R^{A}_{(i)}, A \in B_{\{i\}}(Y)$.

(iv) $Frt(Y)$ *є трисполукою* $(Y_{lz,rz})^{\vdash}$ *підтріоїдів* $R_{[i]}, i \in (Y_{lz,rz})^{\vdash}$. *Кожен тріоїд* $R_{[i]}, i \in (Y_{lz,rz})^{\vdash}$, *є напіврешіткою* $B_{\{i\}}(Y)$ *підтріоїдів* $R^{A}_{[i]}, A \in B_{\{i\}}(Y)$.

Теорема 1.10 ([101], теорема 3.3). *Нехай* $Frt(Y)$ *– вільний тріоїд. Справедливі наступні твердження:*

(i) $Frt(Y)$ *є трисполукою* $(Y_{lz,rb})^{\dashv}$ *підтріоїдів* $R_{(i,j)}, (i,j) \in (Y_{lz,rb})^{\dashv}$. *Кожен тріоїд* $R_{(i,j)}, (i,j) \in (Y_{lz,rb})^{\dashv}$, *є напіврешіткою* $B_{(i,j)^*}(Y)$ *підтріоїдів* $R^{A}_{(i,j)}, A \in B_{(i,j)^*}(Y)$.

(ii) $Frt(Y)$ *є трисполукою* $(Y_{lz,rb})^{\vdash}$ *підтріоїдів* $R_{[i,j]}, (i,j) \in (Y_{lz,rb})^{\vdash}$. *Кожен тріоїд* $R_{[i,j]}, (i,j) \in (Y_{lz,rb})^{\vdash}$, *є напіврешіткою* $B_{[i,j]*}(Y)$ *підтріоїдів* $R^{A}_{[i,j]}, A \in B_{[i,j]^*}(Y)$.

(iii) $Frt(Y)$ *є трисполукою* $(Y_{rb,rz})^{\dashv}$ *підтріоїдів* $R_{(i,j]}, (i,j) \in (Y_{rb,rz})^{\dashv}$. *Кожен тріоїд* $R_{(i,j]}, (i,j) \in (Y_{rb,rz})^{\dashv}$, *є напіврешіткою* $B_{(i,j]*}(Y)$ *підтріоїдів* $R^{A}_{(i,j]}, A \in B_{(i,j]*}(Y)$.

(iv) $Frt(Y)$ *є трисполукою* $(Y_{rb,rz})^{\vdash}$ *підтріоїдів* $R_{[i,j)}, (i,j) \in (Y_{rb,rz})^{\vdash}$. *Кожен тріоїд* $R_{[i,j)}, (i,j) \in (Y_{rb,rz})^{\vdash}$, *є напіврешіткою* $B_{[i,j)*}(Y)$ *підтріоїдів* $R^{A}_{[i,j)}, A \in B_{[i,j)*}(Y)$.

Наступна структурна теорема надає декомпозиції $Frt(Y)$ у сполуки підтріоїдів.

Теорема 1.11 ([101], теорема 3.4). *Нехай $Frt(Y)$ – вільний тріоїд. Мають місце такі твердження:*

(i) $Frt(Y)$ є прямокутною сполукою Y_{rb} підтріоїдів $U_{(i,j)}, (i,j) \in Y_{rb}$. Кожен тріоїд $U_{(i,j)}, (i,j) \in Y_{rb}$, є напіврешіткою $B_{(i,j)^*}(Y)$ підтріоїдів $U^A_{(i,j)}, A \in B_{(i,j)^*}(Y)$.

(ii) $Frt(Y)$ є лівою сполукою Y_{lz} підтріоїдів $U_{(i)}, i \in Y_{lz}$. Кожен тріоїд $U_{(i)}, i \in Y_{lz}$, є напіврешіткою $B_{\{i\}}(Y)$ підтріоїдів $U^A_{(i)}, A \in B_{\{i\}}(Y)$.

(iii) $Frt(Y)$ є правою сполукою Y_{rz} підтріоїдів $U_{[i]}, i \in Y_{rz}$. Кожен тріоїд $U_{[i]}, i \in Y_{rz}$, є напіврешіткою $B_{\{i\}}(Y)$ підтріоїдів $U^A_{[i]}, A \in B_{\{i\}}(Y)$.

Якщо ρ є конгруенцією на тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ такою, що операції на фактор-тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$ збігаються і фактор-тріоїд є прямокутною сполукою (відповідно, напівгрупою лівих нулів, напівгрупою правих нулів), то говорять, що ρ є прямокутною конгруенцією (відповідно, лівою ідемпотентною конгруенцією, правою ідемпотентною конгруенцією).

З попередньої теореми отримуємо такий наслідок.

Наслідок 1.12. ([101], наслідок 1). *Нехай $Frt(Y)$ – вільний тріоїд. Отримаємо такі твердження:*

(i) $\Delta_{\varphi_{rb}}$ – найменша прямокутна конгруенція на $Frt(Y)$.

(ii) $\Delta_{\varphi_{lz}}$ – найменша ліва ідемпотентна конгруенція на $Frt(Y)$.

(iii) $\Delta_{\varphi_{rz}}$ – найменша права ідемпотентна конгруенція на $Frt(Y)$.

Наведемо опис вільного моногенного тріоїда, отриманого Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко у [35]. Для цього будемо застосовувати умови та позначення підрозділу 1.1.

Твердження 1.13 ([35], твердження 1.9). *Вільний тріоїд* T, *породжений одним елементом* x, *є ізоморфним тріоїду* $P=\bigcup_{n\geq 1}P_n$, *який наділений операціями, що описані в теоремі 1.1. підрозділу 1.1.*

Лема 1.14. ([35], лема 1.10). *Будь-яка повна розстановка дужок у*

$$\underbrace{(x\vdash\ldots\vdash x)}_{a_0}\vdash\underbrace{(x\dashv\ldots\dashv x)}_{a_1}\perp\underbrace{(x\dashv\ldots\dashv x)}_{a_2}\perp\ldots\perp\underbrace{(x\dashv\ldots\dashv x)}_{a_k},$$

де $a_0\geq 0$, $a_i\geq 1$ *для* $i=1,\ldots,k$, *дає однаковий елемент з* T, *який позначають через* ω. Його називають нормальною формою ω. Під дією ϕ її образом в P є

$$\underbrace{x\cdots x}_{a_0}\underbrace{\overset{\vee}{x}\cdots x}_{a_1}\underbrace{\overset{\vee}{x}\cdots x}_{a_2}\cdots\underbrace{\overset{\vee}{x}\cdots x}_{a_k}.$$

Множину P_n можна відфільтрувати таким способом: $F_kP_n:=\bigcup_{i\leq k}P_{n,i}$. Образ $F_kP_n\times F_lP_m$ знаходиться в $F_{k+1}P_{n+m}$, завдяки тому, що в будь-якому добутку двох елементів кількість помічених змінних дорівнює або менше суми чисел компонентів.

Далі визначено, відповідно до позначень [99], конструкцію вільного тріоїда довільного рангу, а також описано всі ендоморфізми вільного тріоїда рангу 1. Наведено теоретико-напівгрупову конструкцію, ізоморфну моноїду ендоморфізмів вільного моногенного тріоїда.

Для довільної непорожньої множини X нехай $\bar{X}=\{\bar{x}\mid x\in X\}$ і $Ft^{+}(X)$ є вільною напівгрупою на $X\cup\bar{X}$. Далі через $Ft(X)$ позначимо піднапівгрупу $Ft^{+}(X)$, яка є підмножиною слів, які містять в своєму записі хоча б один символ $\bar{x}$ $(x\in X)$. Нехай $w\in Ft(X)$. Через $\tilde{w}$ позначимо слово, отримане з w у результаті заміни всіх літер $\bar{x}$ $(x\in X)$ на x. Визначимо операції $\dashv,\vdash$ і $\perp$ на множині $Ft(X)$ за правилами:

$$u\dashv v=u\tilde{v},\; u\vdash v=\tilde{u}v,\; u\perp v=uv.$$

Твердження 1.15 ([99], твердження 2.1). *Алгебраїчна система* $(Ft(X),\dashv,\vdash,\perp)$ *є вільним тріоїдом рангу* $|X|$.

Елементи з $Ft(X)$ називають словами, а $\overline{X}$ – породжуючою множиною вільного тріоїда $(Ft(X),\dashv,\vdash,\perp)$. Довжина слова $w\in Ft(X)$ позначається через $|\omega|$. Вільний тріоїд на *n*-елементній множині X позначимо через Ft_n.

Далі побудуємо тріоїд, який ізоморфний вільному тріоїду рангу 1 (див. також [78]). Нехай $n\in N$ та $I_n=\{1,2,\ldots,n\}$. Через $U(I_n)$ будемо позначати множину всіх непорожніх підмножин множини I_n. Для непорожніх підмножин *A, B* з *N* покладемо

$$A\pm B=\{a\pm b\,|\,a\in A,b\in B\},\;\; AB=\{a\cdot b\,|\,a\in A,b\in B\}.$$

Якщо $B=\{b\}$, то будемо писати $A\pm b$ (Ab), замість $A\pm\{b\}$ (відповідно $A\{b\}$).

На множині $P=\bigcup\limits_{n\in N}(n\times U(I_n))$ визначимо три операції $\dashv_p$, $\vdash_p$ і $\perp_p$ за наступними правилами:

$$(n;A)\dashv_p(m;B)=(n+m;A),$$

$$(n;A)\vdash_p(m;B)=(n+m;B+n),$$

$$(n;A)\perp_p(m;B)=(n+m;A\cup(B+n)).$$

Твердження 1.16 ([99], твердження 2.2). *Алгебраїчна система* $(P,\dashv_p,\vdash_p,\perp_p)$ *ізоморфна вільному тріоїду* $(Ft_1,\dashv,\vdash,\perp)$ *рангу 1.*

У [99] зазначено, що тріоїдна конструкція $(P,\dashv_p,\vdash_p,\perp_p)$ є більш зручнішою, порівнюючи з іншими конструкціями тріоїда, ізоморфними $(Ft_1,\dashv,\vdash,\perp)$. З точністю до позначень конструкція вільного тріоїда з [35] визначена на множині $P'=\bigcup_{n\in N}U(I_n)$. У такому разі для довільного елемента з множини P' незрозуміло яке саме слово тріоїда $(Ft_1,\dashv,\vdash,\perp)$ йому відповідає, тобто яка довжина такого слова.

Далі будемо уподібнювати вільний тріоїд $(Ft_1, \dashv, \vdash, \perp)$ рангу 1 з отриманим тріоїдом $(P, \dashv_P, \vdash_P, \perp_P)$, використовуючи символи операцій, що визначені на тріоїді Ft_1.

Мають місце такі твердження.

Лема 1.17 ([99], лема 3.1). *Для кожного* $(s,T) \in Ft_1$ *перетворення* $\xi_{s,\,T}$ *вільного тріоїда* $(Ft_1, \dashv, \vdash, \perp)$*, що визначене умовою* $(n;A)\xi_{s,T} = (ns;(A-1)s+T)$, *є мономорфізмом.*

Лема 1.18 ([99], лема 3.2). *Нехай* ξ *– ендоморфізм вільного тріоїда* $(Ft_1, \dashv, \vdash, \perp)$ *такий, що* $(1,\{1\})\xi = (s,T)$. *Тоді для всіх* $n a \in N$, *де* $n \geq a$, *маємо* $(n;\{a\})\xi = (ns;(a-1)s+T)$.

Лема 1.19 ([99], лема 3.3). *Для кожного* $(n,A) \in Ft_1$, *де* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $k \geq 2$ *і* $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, *маємо*

$$(n;A) = (a_2 - 1, \{a_1\}) \perp (a_3 - a_2, \{1\}) \perp \ldots \perp (n - a_k + 1, \{1\}).$$

Аналогічно тому, як і в попередній лемі можна показати, що для кожного $(n,A) \in Ft_1$, де $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $k \geq 2$ і $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, маємо

$$(n;A) = (a_1, \{a_1\}) \perp (a_2 - a_1, \{a_2 - a_1\}) \perp \ldots \perp (n - a_{k-1}, \{a_k - a_{k-1}\}).$$

Лема 1.20 ([99], лема 3.4). *Нехай* ξ *— ендоморфізм вільного тріоїда* Ft_1 *такий, що* $(1,\{1\})\xi = (s,T)$. *Тоді для всіх* $(n,A) \in Ft_1$, *де* $|A| \geq 2$, *маємо* $(n;A)\xi = (ns;(A-1)s+T)$.

Далі розглянемо бінарну операцію $\circ$ на множині $N \times U(N)$, визначену в такий спосіб:

$$(n;A) \circ (m;B) = (nm;(A-1)m+B).$$

Якщо $n \geq a$, $m \geq b$ для деяких $a \in A$, $b \in B$, то $nm = (n-1)m + m \geq (a-1)m + b$. Тому операція $\circ$ замкнена на множині $P = \bigcup_{n \in N} (n \times U(I_n))$ і отже, алгебра $(P, \circ)$ – напівгрупа.

Наступна теорема описує моноїд ендоморфізмів вільних моногенних тріоїдів.

Теорема 1.21 ([99], теорема 3.5).

(i) Для будь-якого $(s,T)\in Ft_1$ *перетворення* $\xi_{s,T}$ *вільного тріоїда* $(Ft_1,\dashv,\vdash,\perp)$*, визначене за правилом:* $(n;A)\xi_{s,T}=(ns;(A-1)s+T)$*, є мономорфізмом. І навпаки, кожний ендоморфізм тріоїда* $(Ft_1,\dashv,\vdash,\perp)$ *має вищезазначений вигляд.*

(ii) Моноїд ендоморфізмів $End(Ft_1)$ *є ізоморфним напівгрупі* $(P,\circ)$.

Очевидно, що група автоморфізмів вільного моногенного тріоїда $(Ft_1,\dashv,\vdash,\perp)$ є тривіальною.

1.3. Вільні комутативні тріоїди

У цьому підрозділі зроблено огляд результатів про вільні комутативні тріоїди. Як доповнення до роботи Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко [35], у роботі А. В. Жучка [59] доведено, що вільний комутативний тріоїд рангу $n>1$ є підпрямим добутком вільної комутативної напівгрупи рангу n та вільного комутативного тріоїда рангу 1. Також охарактеризовано найменшу комутативну конгруенцію, найменші комутативні дімоноїдні конгруенції та найменшу комутативну напівгрупову конгруенцію на вільному тріоїді. Результати цього підрозділу належать А. В. Жучку [59].

Нагадаємо, що тріоїд $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ називається комутативним [77], якщо напівгрупи $(T,\dashv)$, $(T,\vdash)$ і $(T,\perp)$ – комутативні. Приклади комутативних тріоїдів можна знайти в працях А. В. Жучка [77], [78]. Клас усіх комутативних тріоїдів утворює підмноговид многовиду тріоїдів. Тріоїд, вільний у многовиді комутативних тріоїдів, називається вільним комутативним тріоїдом. Якщо ρ є конгруенцією на тріоїді $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ такою, що $(T,\dashv,\vdash,\perp)/\rho$ – комутативний тріоїд, то говорять, що ρ – комутативна конгруенція.

Лема 1.22 ([59], лема 2.1). У комутативному тріоїді $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ рівності

$$(x\dashv y)\dashv z = x\dashv(y\vdash z) = (x\vdash y)\dashv z = x\vdash(y\dashv z)$$
$$= (x\dashv y)\vdash z = x\vdash(y\vdash z) = (x\dashv y)\dashv z = x\dashv(y\perp z)$$
$$= (x\perp y)\dashv z = x\perp(y\dashv z) = (x\dashv y)\perp z = x\perp(y\vdash z)$$
$$= (x\vdash y)\perp z = x\vdash(y\perp z) = (x\perp y)\vdash z = x\vdash(y\vdash z)$$

виконуються для всіх $x,y,z\in T$.

Має місце наступний наслідок з цієї леми.

Наслідок 1.23 ([59], наслідок 2.2). *У комутативному тріоїді* $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ *для будь-якого* $n>1$, $n\in\mathbb{N}$ *та будь-яких* $x_i\in T$ *з* $1\le i\le n+1$, *а також* $*_j\in\{\dashv,\vdash,\perp\}$ *з* $1\le j\le n$ *будь-яка розстановка дужок у*

$$x_1 *_1 x_2 *_2 \ldots *_n x_{n+1}$$

дає один і той же елемент з T.

Лема 1.24 ([59], лема 2.3). *Нехай* $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ – *комутативний тріоїд,* $n\in\mathbb{N}$ *та* $x_i\in T$ *з* $1\le i\le n+1$, *а також* $*_j\in\{\dashv,\vdash,\perp\}$ *з* $1\le j\le n$. *Тоді маємо*

(i) $x_1 *_1 x_2 *_2 \ldots *_n x_{n+1} = x_{1\pi} *_1 x_{2\pi} *_2 \ldots *_n x_{(n+1)\pi}$, де π є перестановкою на множині $\{1,2,\ldots,n+1\}$;

(ii) $x_1 *_1 x_2 *_2 \ldots *_n x_{n+1} = x_1\dashv x_2\dashv\ldots\dashv x_{n+1}$, якщо $n>1$ та $\dashv\in\{*_1,*_2,\ldots,*_n\}$ або $\vdash\in\{*_1,*_2,\ldots,*_n\}$.

Нагадаємо, що дімоноїдом називається непорожня множина, яка наділена двома бінарними асоціативними операціями $\dashv$ та $\vdash$, що задовольняють три аксіоми $(T1)-(T3)$ тріоїда. Дімоноїд називається комутативним [54], якщо обидві його операції є комутативними. Детальну інформацію про дімоноїди можна знайти в [57]. Якщо $T=(T,\dashv,\vdash)$ – дімоноїд, то тріоїд $(T,\dashv,\vdash,\dashv)$

(відповідно, $(T, \dashv, \vdash, \vdash)$) позначається через $(T)^{\dashv}$ (відповідно, $(T)^{\vdash}$). Очевидно, що $(T)^{\dashv}$ та $(T)^{\vdash}$ різні як тріоїди, але вони збігаються як дімоноїди. Якщо ρ – конгруенція на тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ така, що дві операції $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$ збігаються, і він є дімоноїдом, то говорять, що ρ – дімоноїдна конгруенція. Дімоноїдна конгруенція ρ на тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ називається $d_{\dashv}^{\perp}$-конгруенцією (відповідно, $d_{\vdash}^{\perp}$-конгруенцією), якщо операції $\dashv$ та $\perp$ (відповідно, $\vdash$ та $\perp$) фактор-тріоїду $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$ збігаються [59]. Якщо ρ є конгруенцією на тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ такою, що операції фактор-тріоїду $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$ збігаються, і він є комутативною напівгрупою, то говорять, що ρ – комутативна напівгрупова конгруенція.

Дімоноїд, який є ізоморфним вільному дімоноїду, був представлений в [60]. Нагадаємо цю конструкцію.

Нехай X – довільна непорожня множина і $F[X]$ – вільна напівгрупа на X. Як і раніше, l_w позначає довжину слова $w \in F[X]$.

Визначимо операції $\dashv$ та $\vdash$ на множині

$$\mathbb{F} = \{(w, m) \in F[X] \times \mathbb{N} \mid l_w \geq m\}$$

за правилами:

$$(w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2) = (w_1 w_2,\ m_1),$$
$$(w_1, m_1) \vdash (w_2, m_2) = (w_1 w_2,\ l_{w_1} + m_2)$$

для всіх $(w_1, m_1),\ (w_2, m_2) \in \mathbb{F}$. Алгебра $(\mathbb{F}, \dashv, \vdash)$ позначається через $\breve{F}[X]$. За лемами 2 та 3 з [60], $\breve{F}[X]$ – вільний дімоноїд.

Побудуємо вільний комутативний дімоноїд [58].

Нехай $F^{\star}[X]$ – вільна комутативна напівгрупа на X, та G – множина всіх неупорядкованих пар $(p, q),\ p, q \in X$. Визначимо операції $\dashv$ та $\vdash$ на $F^{\star}[X] \cup G$ за правилами:

$$a_1...a_m \dashv b_1...b_n = a_1...a_m b_1...b_n,$$

$$a_1...a_m \vdash b_1...b_n = \begin{cases} a_1...a_m b_1...b_n, & \text{якщо } mn > 1, \\ (a_1, b_1), & \text{якщо } m = n = 1, \end{cases}$$

$$a_1...a_m \dashv (p,q) = a_1...a_m \vdash (p,q) = a_1...a_m pq,$$

$$(p,q) \dashv a_1...a_m = (p,q) \vdash a_1...a_m = pqa_1...a_m,$$

$$(p,q) \dashv (r,s) = (p,q) \vdash (r,s) = pqrs$$

для всіх $a_1...a_m,\ b_1...b_n \in F^{\star}[X],\ (p,q),(r,s) \in G$.

Теорема 1.25 ([58], теорема 3). $(F^{\star}[X] \cup G, \dashv, \vdash)$ *– вільний комутативний дімоноїд.*

Дімоноїд $(F^{\star}[X] \cup G, \dashv, \vdash)$ позначається через $FCD(X)$.

Якщо $f : T_1 \to T_2$ – гомоморфізм тріоїдів, відповідну конгруенцію на T_1 будемо позначати через Δ_f.

Нехай Ω – вільний моноїд на трьохелементній множині $\{a,b,c\}$ та $\theta \in \Omega$ – порожнє слово. Для кожного $u \in \Omega$ множину всіх літер, що входять в u, позначимо через $c(u)$. За означенням, довжина l_θ слова θ дорівнює 0, $c(\theta) = \varnothing$ та $u^0 = \theta$ для будь-яких $u \in \Omega \setminus \{\theta\}$. Для всіх $u_1,\ u_2 \in \Omega$ нехай

$$f_{\dashv}(u_1,u_2) = a, \quad f_{\vdash}(u_1,u_2) = \begin{cases} b, & u_1 = u_2 = \theta, \\ a & \text{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$f_{\perp}(u_1,u_2) = \begin{cases} c, & u_1 = c^k,\ u_2 = c^p,\ k,\ p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ a & \text{в інших випадках}. \end{cases}$$

Очевидно, що

$$f_*(u_1,u_2) = f_*(u_2,u_1)$$

для всіх $* \in \{\dashv, \vdash, \perp\}$. Через $\overline{\Omega}$ позначимо підмножину

$$\{y^k \mid y \in \{a,c\},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{b\}$$

з Ω. Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ на $\overline{\Omega}$ за правилом:

$$u_1 * u_2 = f_*(u_1,u_2)^{l_{u_1}+l_{u_2}+1}$$

для всіх $u_1,u_2 \in \overline{\Omega}$ та $* \in \{\dashv,\vdash,\perp\}$. Алгебра $(\overline{\Omega},\dashv,\vdash,\perp)$ позначається через FCT_1.

Теорема 1.26 ([59], теорема 3.1). FCT_1 *– вільний комутативний тріоїд рангу 1.*

Позначимо операцію на Ω через $\cdot$.

Лема 1.27 ([59], лема 3.2). *Нехай* $u_1,u_2,u_3 \in FCT_1$, $n \in \mathbb{N}$ *та* $*_i \in \{\dashv,\vdash,\perp\}$ *для* $1 \le i \le 4$. *Тоді*

$$(u_1 *_1 u_2) *_2 u_3 = u_1 *_3 (u_2 *_4 u_3),$$

якщо виконується одна з наступних умов:

(i) $*_1 \in \{\dashv,\vdash\}$ *або* $*_2 \in \{\dashv,\vdash\}$, *та, одночасно,* $*_3 \in \{\dashv,\vdash\}$ *або* $*_4 \in \{\dashv,\vdash\}$;

(ii) $a \in c(u_1 \cdot u_2 \cdot u_3)$ *або* $b \in c(u_1 \cdot u_2 \cdot u_3)$;

(iii) $a,b \notin c(u_1 \cdot u_2 \cdot u_3)$ *та* $*_i = \perp$ *для* $1 \le i \le 4$.

Зауваження 1.28 ([59], зауваження 3.3). *Нехай* $c^k, c^p, c^t \in FCT_1$ *та* $*_1, *_2 \in \{\dashv,\vdash,\perp\}$. *Неважко побачити, що*

$$c^k *_1 c^p *_2 c^t \neq c^k \perp c^p \perp c^t$$

якщо $*_1 \in \{\dashv,\vdash\}$ *або* $*_2 \in \{\dashv,\vdash\}$.

Зауваження 1.29 ([59], зауваження 3.4). *Нехай* $u_1,u_2,u_3 \in FCT_1$, $*_i \in \{\dashv,\vdash,\perp\}$ *для* $1 \le i \le 4$, *та нехай*

$$(u_1 *_1 u_2) *_2 u_3 = x^{k_1}, \quad u_1 *_3 (u_2 *_4 u_3) = y^{k_2}$$

для деяких $x,\ y \in \{a,b,c\}$ *та* $k_1,\ k_2 \in \mathbb{N}$. *Тоді можна перевірити, що* $k_1 = k_2$.

З леми 1.27 отримаємо наслідок.

Наслідок 1.30 ([59], наслідок 3.5). FCT_1 *– тріоїд.*

Лема 1.31 ([59], лема 3.6). FCT_1 *– комутативний тріоїд.*

Лема 1.32 ([59], лема 3.7). FCT_1 *є однопородженим вільним об'єктом у многовиді комутативних тріоїдів.*

Тепер представимо вільний комутативний тріоїд довільного рангу.

Нехай X – довільна непорожня множина і $F^{\star}[X]$ – вільна комутативна напівгрупа на X. Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ і $\perp$ на множині

$$A=\{(w,u)\in F^{\star}[X]\times FCT_1 \mid l_w-l_u=1\}$$

за правилом:

$$(w_1,u_1)*(w_2,u_2)=(w_1w_2,\ f_*(u_1,u_2)^{l_{u_1}+l_{u_2}+1})$$

для всіх $(w_1,u_1),\ (w_2,u_2)\in A$ та $*\in\{\dashv,\vdash,\perp\}$. Ці операції коректно визначені, оскільки $l_{w_1w_2}-l_{f_*(u_1,u_2)^{l_{u_1}+l_{u_1}+1}}=1$ для всіх $*\in\{\dashv,\vdash,\perp\}$. Алгебра $(A,\dashv,\vdash,\perp)$ позначається через $FCT(X)$.

Теорема 1.33 ([59], теорема 3.8). $FCT(X)$ *– вільний комутативний тріоїд.*

Наслідок 1.34 ([59], наслідок 3.9). *Кожний вільний комутативний тріоїд рангу* $n>1$ *є підпрямим добутком вільної комутативної напівгрупи рангу* n *та вільного комутативного тріоїда рангу 1.*

Вільний тріоїд довільного рангу представлений в підрозділах 1.2 та 3.1.

Далі охарактеризовано найменшу комутативну конгруенцію, найменші комутативні дімоноїдні конгруенції та найменшу комутативну напівгрупову конгруенцію на вільному тріоїді.

Позначимо операцію на $F^{\star}[X]$ через $\circ$. Нехай

$$E_1=\{(x_1x_2,\{2\})\in FT(X) \mid x_1,x_2\in X\},$$

$$E_2=\{(x_1x_2...x_s,\{1,2,...,s\})\in FT(X) \mid x_1,x_2,...,x_s\in X\},$$

$$E_3=\{(x_1x_2,L)\in FT(X) \mid x_1,\ x_2\in X,\ L\in\{\{2\},\{1,2\}\}\}.$$

Для кожного $x\in X$ кількість з’явлень елементу x у слові ω над X позначимо через $d_x(\omega)$.

Теорема 1.35 ([59], теорема 4.1). *Нехай* $FT(X)$ – *вільний тріоїд,* $(x_1x_2\ldots x_s, L)$, $(z_1z_2\ldots z_k, R)\in FT(X)$, *де* $x_i\in X$ *для* $1\le i\le s$ *та* $z_j\in X$ *для* $1\le j\le k$, $FCT(X)$ – *вільний комутативний тріоїд,* $FCD(X)$ – *вільний комутативний дімоноїд, та* $F^{\star}[X]$ – *вільна комутативна напівгрупа.*

(i) Визначимо відношення $\tilde{\eta}$ на $FT(X)$ у такий спосіб:

$$(x_1\ldots x_s, L)\tilde{\eta}(z_1\ldots z_k, R)$$

тоді і тільки тоді, коли

$$d_x(x_1\ldots x_s)=d_x(z_1\ldots z_k)\quad \text{для всіх}\quad x\in X$$

і виконується одна з наступних умов:

1) $s=2,\ L=R=\{2\}$;

2) $L=R=\{1,2,\ldots,s\}$;

3) $(x_1\ldots x_s, L),\ (z_1\ldots z_k, R)\in FT(X)\setminus(E_1\cup E_2)$.

Тоді $\tilde{\eta}$ – найменша комутативна конгруенція на $FT(X)$.

(ii) Визначимо відношення $\tilde{c}\tilde{d}_{\dashv}^{\perp}$ на $FT(X)$, поклавши

$$(x_1\ldots x_s, L)\tilde{c}\tilde{d}_{\dashv}^{\perp}(z_1\ldots z_k, R)$$

тоді і тільки тоді, коли

$$d_x(x_1\ldots x_s)=d_x(z_1\ldots z_k)\ \text{для всіх}\ x\in X$$

і виконується одна з наступних умов:

1) $s=2, L=R=\{2\}$;

2) $(x_1\ldots x_s, L),\ (z_1\ldots z_k, R)\in FT(X)\setminus E_1$.

Тоді $\tilde{c}\tilde{d}_{\dashv}^{\perp}$ – найменша комутативна $d_{\dashv}^{\perp}$-конгруенція на $FT(X)$.

(iii) Визначимо відношення $\tilde{c}\tilde{d}_{\vdash}^{\perp}$ на $FT(X)$, поклавши

$$(x_1\ldots x_s, L)\tilde{c}\tilde{d}_{\vdash}^{\perp}(z_1\ldots z_k, R)$$

тоді і тільки тоді, коли

$$d_x(x_1\ldots x_s)=d_x(z_1\ldots z_k)$$

і виконується одна з наступних умов:

1) $s = 2,\ L,\ R \in \{\{2\},\{1,2\}\}$;

2) $(x_1 \ldots x_s, L),\ (z_1 \ldots z_k, R) \in FT(X) \setminus E_3$.

Тоді $\tilde{c}\tilde{d}_{\vdash}^{\perp}$ – найменша комутативна $d_{\vdash}^{\perp}$- конгруенція на $FT(X)$.

(iv) Визначимо відношення $\tilde{\mu}$ на $FT(X)$, поклавши

$(x_1 \ldots x_s, L)\tilde{\mu}(z_1 \ldots z_k, R)$ тоді і тільки тоді, коли $d_x(x_1 \ldots x_s) = d_x(z_1 \ldots z_k)$ для всіх $x \in X$.

Тоді $\tilde{\mu}$ – найменша комутативна напівгрупова конгруенція на $FT(X)$.

1.4. Вільні прямокутні тріоїди

Використовуючи прямокутні дісполуки, у праці А. В. Жучка [70] представлено структурну теорему про ідемпотентні дімоноїди. У статті А. В. Жучка [67] побудовано вільну прямокутну дісполуку. У цьому підрозділі розглянуто результати роботи Юл. В. Жучок [103], в якій наведено поняття прямокутної трисполуки, а також приклади прямокутних трисполук. Крім того, сконструйовано вільну прямокутну трисполуку, описано її будову та групу автоморфізмів. На вільному тріоїді охарактеризовано найменшу ліву ідемпотентну конгруенцію, найменшу праву ідемпотентну конгруенцію, а також найменшу прямокутну конгруенцію.

Нагадаємо, що тріоїд $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ називається прямокутним тріоїдом або прямокутною трисполукою, якщо напівгрупи $(T, \dashv)$, $(T, \vdash)$ та $(T, \perp)$ – прямокутні сполуки.

Нехай $I_n = \{1, 2, \ldots, n\},\ n > 1,$ а також нехай $\{X_i\}_{i \in I_n}$ – сім'я довільних непорожніх множин $X_i, i \in I_n$.

Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ і $\perp$ на $\prod_{i\in I_3} X_i$ за правилами:

$$
\begin{aligned}
(a_1,b_1,c_1)\dashv(a_2,b_2,c_2)&=(a_1,b_1,c_1),\\
(a_1,b_1,c_1)\vdash(a_2,b_2,c_2)&=(a_1,b_2,c_2),\\
(a_1,b_1,c_1)\perp(a_2,b_2,c_2)&=(a_1,b_1,c_2)
\end{aligned}
$$

для всіх (a_1,b_1,c_1), $(a_2,b_2,c_2)\in\prod_{i\in I_3} X_i$. Очевидно, що $\left(\prod_{i\in I_3} X_i,\perp,\vdash\right)$ – прямокутна дісполука [67] і $\left(\prod_{i\in I_3} X_i,\dashv\right)$ – напівгрупа лівих нулів.

Лема 1.36 ([103], лема 1). $\left(\prod_{i\in I_3} X_i,\dashv,\vdash\perp\right)$ *– прямокутна трисполука.*

Якщо $X_i = X$ для всіх $i\in I_3$, то алгебру $\left(\prod_{i\in I_3} X_i,\dashv,\vdash\perp\right)$ будемо позначати через $X_{lz,rd}$.

Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ і $\perp$ на $\prod_{i\in I_3} X_i$ за такими правилами:

$$
\begin{aligned}
(a_1,b_1,c_1)\dashv(a_2,b_2,c_2)&=(a_1,b_1,c_2),\\
(a_1,b_1,c_1)\vdash(a_2,b_2,c_2)&=(a_2,b_2,c_2),\\
(a_1,b_1,c_1)\perp(a_2,b_2,c_2)&=(a_1,b_2,c_2)
\end{aligned}
$$

для всіх (a_1,b_1,c_1), $(a_2,b_2,c_2)\in\prod_{i\in I_3} X_i$. Зрозуміло, що $\left(\prod_{i\in I_3} X_i,\dashv,\perp\right)$ – прямокутна дісполука [67] і $\left(\prod_{i\in I_3} X_i,\vdash\right)$ – напівгрупа правих нулів.

Лема 1.37 ([103], лема 2). $\left(\prod_{i\in I_3} X_i,\dashv,\vdash\perp\right)$ *– прямокутна трисполука.*

Якщо $X_i = X$ для всіх $i\in I_3$, то алгебру $\left(\prod_{i\in I_3} X_i,\dashv,\vdash\perp\right)$ позначимо через $X_{rd,rz}$.

Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ і $\perp$ на $\prod_{i\in I_2} X_i$ за правилами:

$$(a_1,b_1)\dashv(a_2,b_2)=(a_1,b_1),$$
$$(a_1,b_1)\vdash(a_2,b_2)=(a_2,b_2),$$
$$(a_1,b_1)\perp(a_2,b_2)=(a_1,b_2)$$

для всіх $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in\prod_{i\in I_2}X_i$. Очевидно, що $\left(\prod_{i\in I_2}X_i,\dashv,\vdash\right)$ – дімоноїд лівих і правих нулів [67] і $\left(\prod_{i\in I_2}X_i,\perp\right)$– прямокутна сполука.

Лема 1.38 ([103], лема 3). $\left(\prod_{i\in I_2}X_i,\dashv,\vdash\perp\right)$ *– прямокутна трисполука.*

Якщо $X_i=X$ для всіх $i\in I_2$, то алгебру $\left(\prod_{i\in I_2}X_i,\dashv,\vdash\perp\right)$ позначимо через $X_{lz,rz}^{rb}$.

Зауважимо, що тріоїд $X_{lz,rz}^{rb}$ вперше був побудований в [77].

Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ і $\perp$ на $\prod_{i\in I_{2k}}X_i$, де $k\in\mathbb{N}$, поклавши

$$(x_1,x_2,...,x_{2k})\dashv(y_1,y_2,...,y_{2k})=(x_1,x_2,...,x_{2k-1},y_{2k}),$$
$$(x_1,x_2,...,x_{2k})\vdash(y_1,y_2,...,y_{2k})=(x_1,y_2,...,y_{2k}),$$
$$(x_1,x_2,...,x_{2k})\perp(y_1,y_2,...,y_{2k})=(x_1,x_2,...,x_k,y_{k+1},...,y_{2k})$$

для всіх $(x_1,x_2,...,x_{2k}),(y_1,y_2,...,y_{2k})\in\prod_{i\in I_{2k}}X_i$.

Лема 1.39 ([103], лема 4). *Для будь-якого* $k>1$ *алгебра* $\left(\prod_{i\in I_{2k}}X_i,\dashv,\vdash\perp\right)$ *– прямокутна трисполука.*

Зрозуміло, що операції тріоїда $\left(\prod_{i\in I_2}X_i,\dashv,\vdash\perp\right)$ збігаються і він є прямокутною сполукою.

Нехай, як і раніше, X – довільна непорожня множина. Позначимо тріоїд $\left(X^4,\dashv,\vdash\perp\right)$ через $FRT(X)$.

Має місце теорема.

Теорема 1.40 ([103], теорема 1). $FRT(X)$ – *вільна прямокутна трисполука.*

З останньої теореми випливає наслідок.

Наслідок 1.41 ([103], наслідок 1). *Вільна прямокутна трисполука* $FRT(X)$*, породжена скінченною множиною X, є скінченною. Зокрема, якщо* $|X|=n$*, то* $|FRT(X)|=n^4$.

Групу автоморфізмів тріоїда *M* позначають через $AutM$, а симетричну групу на множині X через $\mathfrak{I}[X]$. Відомо, що множина $\{(a,a,a,a)\,|\,a\in X\}$ є породжуючою для $FRT(X)$. Звідси випливає наступний опис групи автоморфізмів вільної прямокутної трисполуки.

Лема 1.42 ([103], лема 5). $AutFRT(X)\cong\mathfrak{I}[X]$.

Далі описано структуру вільних прямокутних трисполук та охарактеризовано деякі найменші конгруенції на вільних прямокутних трисполуках.

Для всіх $i,j\in X$ покладемо

$$\Lambda_{(i)}=\{(a,b,c,d)\in FRT(X)\,|\,a=i\},$$

$$\Lambda_{[i]}=\{(a,b,c,d)\in FRT(X)\,|\,d=i\},$$

$$\Lambda_{(i,j)}=\{(a,b,c,d)\in FRT(X)\,|\,(a,d)=(i,j)\}.$$

Декомпозиції тріоїда $FRT(X)$ в сполуки підтріоїдів дає наступна теорема.

Теорема 1.43 ([103], теорема 2). *Нехай* $FRT(X)$ *є вільною прямокутною трисполукою. Маємо такі твердження:*

(i) $FRT(X)$ *– ліва сполука* X_{lz} *підтріоїдів* $\Lambda_{(i)}, i\in X_{lz}$ *таких, що* $\Lambda_{(i)}\cong X_{rd,rz}$ *для кожного* $i\in X_{lz}$*;*

(ii) $FRT(X)$ *– права сполука* X_{rz} *підтріоїдів* $\Lambda_{[i]}, i\in X_{rz}$ *таких, що* $\Lambda_{[i]}\cong X_{lz,rd}$ *для кожного* $i\in X_{rz}$*;*

(iii) $FRT(X)$ *– прямокутна сполука* X_{rb} *підтріоїдів* $\Lambda_{(i,j)},(i,j)\in X_{rb}$ *таких, що* $\Lambda_{(i,j)}\cong X^{rb}_{lz,rz}$ *для кожного* $(i,j)\in X_{rb}$.

Нехай ρ є конгруенцією на тріоїді $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ такою, що операції на фактор-тріоїді $(T,\dashv,\vdash,\perp)/\rho$ збігаються і фактор-тріоїд є напівгрупою лівих нулів (відповідно, напівгрупою правих нулів, прямокутною сполукою, напіврешіткою). Тоді говорять, що ρ є лівою ідемпотентною конгруенцією (відповідно, правою ідемпотентною конгруенцією, прямокутною конгруенцією, напівструктурною конгруенцією) (див. підрозділ 1.2).

З попередньої теореми випливає наслідок.

Наслідок 1.44 ([103], наслідок 2). *Нехай* $FRT(X)$ *– вільна прямокутна трисполука. Тоді*

(i) $\Delta_{\pi lz}$ *– найменша ліва ідемпотентна конгруенція на тріоїді FRT(X);*

(ii) $\Delta_{\pi rz}$ *– найменша права ідемпотентна конгруенція на тріоїді FRT(X);*

(iii) $\Delta_{\pi rb}$ *– найменша прямокутна конгруенція на тріоїді FRT(X).*

Будь-яка прямокутна трисполука є нерозкладною в напіврешітку, тобто найменша напівструктурна конгруенція на прямокутній трисполуці збігається з універсальним відношенням на цьому тріоїді. Цей факт безпосередньо випливає з теореми 5 роботи [106].

Для всіх $i,j,k\in X$ покладемо

$$\Lambda_{(i,j,k)}=\{(a,b,c,d)\in FRT(X)\,|\,(a,b,c)=(i,j,k)\},$$

$$\Lambda_{[i,j,k]}=\{(a,b,c,d)\in FRT(X)\,|\,(b,c,d)=(i,j,k)\},$$

$$\Lambda_{[i,j]}=\{(a,b,c,d)\in FRT(X)\,|\,(b,c)=(i,j)\}.$$

Наступна теорема встановлює декомпозиції тріоїда $FRT(X)$ в трисполуки піднапівгруп.

Наслідок 1.45 ([103], теорема 3). *Нехай* $FRT(X)$ *– вільна прямокутна трисполука. Справедливі такі твердження:*

(i) $FRT(X)$ *– трисполука* $X_{lz,rd}$ *піднапівгруп* $\Lambda_{(i,j,k)}, (i,j,k) \in X_{lz,rd}$ *таких, що* $\Lambda_{(i,j,k)} \cong X_{rz}$ *для кожного* $(i,j,k) \in X_{lz,rd}$*;*

(ii) $FRT(X)$ *– трисполука* $X_{rd,rz}$ *піднапівгруп* $\Lambda_{[i,j,k]}, (i,j,k) \in X_{rd,rz}$ *таких, що* $\Lambda_{[i,j,k]} \cong X_{lz}$ *для кожного* $(i,j,k) \in X_{rd,rz}$*;*

(iii) $FRT(X)$ *– трисполука* $X_{lz,rz}^{rb}$ *піднапівгруп* $\Lambda_{[i,j]}, (i,j) \in X_{lz,rz}^{rb}$ *таких, що* $\Lambda_{[i,j]} \cong X_{rb}$ *для кожного* $(i,j) \in X_{lz,rz}^{rb}$*.*

Для всіх $i,j,k \in X$ задамо такі множини:

$$V_{(i)} = \{(a,b,c,d) \in FRT(X) \mid b = i\},$$

$$V_{[i]} = \{(a,b,c,d) \in FRT(X) \mid c = i\},$$

$$V_{(i,j,k)} = \{(a,b,c,d) \in FRT(X) \mid (a,b,d) = (i,j,k)\},$$

$$V_{[i,j,k]} = \{(a,b,c,d) \in FRT(X) \mid (a,c,d) = (i,j,k)\},$$

$$V_{(i,j)} = \{(a,b,c,d) \in FRT(X) \mid (a,b) = (i,j)\},$$

$$V_{[i,j]} = \{(a,b,c,d) \in FRT(X) \mid (a,c) = (i,j)\},$$

$$V_{(i,j]} = \{(a,b,c,d) \in FRT(X) \mid (b,d) = (i,j)\},$$

$$V_{[i,j)} = \{(a,b,c,d) \in FRT(X) \mid (c,d) = (i,j)\}.$$

Наступна теорема характеризує декомпозиції тріоїда $FRT(X)$ в трисполуки підтріоїдів.

Наслідок 1.46 ([103], теорема 4). *Нехай* $FRT(X)$ *– вільна прямокутна трисполука. Тоді маємо наступні твердження:*

(i) $FRT(X)$ *– трисполука* $(X_{lz,rz})^{\dashv}$ *підтріоїдів* $V_{(i)}, i \in (X_{lz,rz})^{\dashv}$ *таких, що* $V_{(i)} \cong (FRct(X))^{\vdash}$ *для кожного* $i \in X_{lz,rz}$*;*

(ii) $FRT(X)$ *– трисполука* $(X_{lz,rz})^{\vdash}$ *підтріоїдів* $V_{[i]}, i \in (X_{lz,rz})^{\vdash}$ *таких, що* $V_{[i]} \cong (FRct(X))^{\dashv}$ *для кожного* $i \in X_{lz,rz}$*;*

(iii) $FRT(X)$ *–* *трисполука* $(FRct(X))^{\dashv}$ *підтріоїдів* $V_{(i,j,k)}, (i,j,k) \in (FRct(X))^{\dashv}$ *таких, що* $V_{(i,j,k)} \cong (X_{lz,rz})^{\vdash}$ *для кожного* $(i,j,k) \in FRct(X)$*;*

(iv) $FRT(X)$ *–* *трисполука* $(FRct(X))^{\vdash}$ *підтріоїдів* $V_{[i,j,k]}, (i,j,k) \in (FRct(X))^{\vdash}$ *таких, що* $V_{[i,j,k]} \cong (X_{lz,rz})^{\dashv}$ *для кожного* $(i, j, k) \in FRct(X)$;

(v) FRT(X) – трисполука $(X_{lz,rb})^{\dashv}$ *підтріоїдів* $V_{(i,j)}, (i,j) \in (X_{lz,rb})^{\dashv}$ *таких, що* $V_{(i,j)} \cong (X_{rb,rz})^{\vdash}$ *для кожного* $(i,j) \in X_{lz,rb}$*;*

(vi) $FRT(X)$ *– трисполука* $(X_{lz,rb})^{\vdash}$ *підтріоїдів* $V_{[i,j]}, (i,j) \in (X_{lz,rb})^{\vdash}$ *таких, що* $V_{[i,j]} \cong (X_{rb,rz})^{\dashv}$ *для кожного* $(i,j) \in X_{lz,rb}$*;*

(vii) $FRT(X)$ *– трисполука* $(X_{rb,rz})^{\dashv}$ *підтріоїдів* $V_{(i,j]}, (i,j) \in (X_{rb,rz})^{\dashv}$ *таких, що* $V_{(i,j]} \cong (X_{lz,rb})^{\vdash}$ *для кожного* $(i,j) \in X_{rb,rz}$*;*

(viii) $FRT(X)$ *– трисполука* $(X_{rb,rz})^{\vdash}$ *підтріоїдів* $V_{[i,j)}, (i,j) \in (X_{rb,rz})^{\vdash}$ *таких, що* $V_{[i,j)} \cong (X_{lz,rb})^{\dashv}$ *для кожного* $(i,j) \in X_{rb,rz}$.

1.5. Вільні абелеві тріоїди

Абелеві дігрупи та їх приклади з’явилися в дослідженнях Р. Феліпе [13]. Ідея поняття дігрупи була запропонована Ж.-Л. Лоде [34]. Абелеві та симетричні узагальнені дігрупи, а також вільні абелеві моногенні дігрупи розглядалися в [45, 93]. Абелеві дімоноїди та конструкція вільного абелевого дімоноїда довільного рангу розглянуті в праці Ю. В. Жучка [95]. Абелеві допельнапівгрупи та вільні об’єкти в многовиді абелевих допельнапівгруп досліджувалися А. В. Жучком та К. Кнауером в [80]. Вільні абелеві дісполуки та автоморфізми їх напівгруп ендоморфізмів досліджено Ю. В. Жучком в [92, 94]. У цьому підрозділі представлено вільний абелевий тріоїд та найменшу абелеву конгруенцію на вільному тріоїді. Матеріал цього підрозділу базується на результатах Ю. В. Жучка [96].

Розглянемо приклади абелевих тріоїдів.

Відповідно до [13], дігрупа $(D,\dashv,\vdash)$ називається абелевою, якщо

$$x \vdash y = y \dashv x \text{ для всіх } x, y \in D.$$

Абелевість також розглядалася в таких класах алгебр, як дімоноїди, допельнапівгрупи, узагальнені дігрупи та узагальнені дімоноїди. Цілком природним є визначення многовиду абелевих тріоїдів.

Зафіксуємо $*,\circ \in \{\dashv,\vdash,\perp\}$, де $* \neq \circ$. Тріоїд $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ називається $(*,\circ)$-абелевим, якщо

$$x * y = y \circ x \text{ для всіх } x, y \in T.$$

Очевидно, що тріоїд $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ є $(*,\circ)$-абелевим тоді і тільки тоді, коли він є $(\circ,*)$-абелевим. Це означає, що з’являються три класи тріоїдів, а саме $(\dashv,\vdash)$-абелеві тріоїди, $(\dashv,\perp)$-абелеві тріоїди та $(\vdash,\perp)$-абелеві тріоїди. Очевидно, що клас усіх $(*,\circ)$-абелевих тріоїдів утворює многовид, який не збігається з многовидом комутативних тріоїдів [59]. Тріоїд, вільний у многовиді $(*,\circ)$-абелевих тріоїдів, називається вільним $(*,\circ)$-абелевим тріоїдом. У цьому підрозділі розглянуто лише $(\dashv,\vdash)$-абелеві тріоїди, які називаються просто абелевими тріоїдами.

Зауваження 1.47 ([96], зауваження 1). *Зазначимо, що якщо в тріоїді* $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ *умова* $x * y = y \circ x$ *виконується для всіх* $*,\circ \in \{\dashv,\vdash,\perp\}$ *з* $* \neq \circ$ *та*

$x, y \in T$, *то операції такого тріоїда очевидно збігаються. Якщо для тріоїда* $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ *виконуються будь-які дві з наступних тотожностей*

$$(i)\ x \dashv y = y \vdash x,\ (ii)\ x \vdash y = y \perp x,\ (iii)\ x \perp y = y \dashv x,$$

то дві відповідні операції цього тріоїда збігаються. Наприклад, $\dashv = \perp$, *якщо виконуються умови (i) та (ii).*

Зауваження 1.48 ([96], зауваження 2). *Зазначимо, що нормальні форми елементів вільних* $(\dashv, \vdash)$*-абелевих тріоїдів* $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ *з комутативною операцією* $\perp$ *наведені в [20].*

Нехай $(S, \circ)$ – довільна напівгрупа. Напівгрупа $(S, *)$ називається дуальною напівгрупою до $(S, \circ)$, якщо $x * y = y \circ x$ для всіх $x, y \in S$. Напівгрупа $(S, \circ)$ називається лівою комутативною (відповідно, правою комутативною), якщо вона задовольняє тотожність $x \circ y \circ a = y \circ x \circ a$ (відповідно, $a \circ x \circ y = a \circ y \circ x$).

Твердження 1.49 ([96], твердження 1). Нехай $(S, \circ)$ – довільна права комутативна напівгрупа і $(S, *)$-дуальна напівгрупа до $(S, \circ)$. Тоді алгебри $(S, \circ, *, \circ)$ і $(S, \circ, *, *)$ є абелевими тріоїдами.

Якщо $(S, *)$ є лівою комутативною напівгрупою та $(S, \circ)$ є дуальною напівгрупою до $(S, *)$, то алгебри $(S, \circ, *, \circ)$ та $(S, \circ, *, *)$ також є абелевими тріоїдами. Це випливає з твердження 4 роботи [95] та означення тріоїда.

Нехай $(S, \perp)$ – довільна напівгрупа. Визначимо дві бінарні операції $\dashv$ та $\vdash$ на S наступним чином:

$$a \dashv b = a, \quad a \vdash b = b.$$

Твердження 1.50 ([96], твердження 2). *Алгебра* $(S, \dashv, \vdash, \perp)$ *є абелевим тріоїдом.*

Дімоноїд $(D,\dashv,\vdash)$ є абелевим [95], якщо напівгрупа $(D,\vdash)$ дуальна до $(D,\dashv)$. Різні приклади абелевих дімоноїдів і, зокрема, абелевих дігруп, можна знайти, наприклад, у [88, 95].

Твердження 1.51 ([96], твердження 3). *Нехай $(D,\dashv,\vdash)$ – довільний абелевий дімоноїд. Тоді алгебри $(D,\dashv,\vdash,\dashv)$ і $(D,\dashv,\vdash,\vdash)$ є абелевими тріоїдами.*

Крім того, тріоїди $(D,\dashv,\vdash,\dashv)$ та $(D,\dashv,\vdash,\vdash)$ з твердження 1.51 є $(\vdash,\perp)$-абелевими тріоїдами з $\perp=\dashv$ та, відповідно, $(\dashv,\perp)$-абелевими тріоїдами такими, що $\perp=\vdash$.

Нехай S – довільна адитивна комутативна напівгрупа, $S_1,S_2,...,S_n$, $n\geq 2$, є піднапівгрупами S, та $S_\alpha = S$ для деякого $\alpha\in\{1,2,...,n\}$. Позначимо через S^* прямий добуток $\prod_{i=1}^{n} S_i$ напівгруп $S_j, 1\leq j\leq n$. Для всіх $s=(s_1,s_2,...,s_n)\in S^*$ покладемо $s^+ = s_1+s_2+...+s_n$.

Візьмемо довільні $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n), y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in S^*$ та визначимо три бінарні операції $\dashv_\alpha$, $\vdash_\alpha$ та $\perp_\alpha$ на S^* за правилами:

$$x\dashv_\alpha y=(x_1,\ldots,x_\alpha+y^+,\ldots,x_n),$$

$$x\vdash_\alpha y=(y_1,\ldots,y_\alpha+x^+,\ldots,y_n),$$

$$x\perp_\alpha y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n).$$

Звернемо увагу, що операції $\dashv_\alpha$ та $\vdash_\alpha$ вперше з'явилися в [95].

Твердження 1.52 ([96], твердження 4). *Для кожного $\alpha\in\{1,2,...,n\}$ алгебра $(S^*,\dashv_\alpha,\vdash_\alpha,\perp_\alpha)$ є абелевим тріоїдом.*

Нехай $(S,*)$ – довільна напівгрупа та $(T,\cdot)$ – комутативна напівгрупа такі, що існує гомоморфізм $\xi: S\to T$. Визначимо три бінарні операції $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ на прямому добутку $S\times T$ за правилами:

$$(a,b)\dashv(c,d)=(a,b\cdot(c\xi)\cdot d),$$

$$(a,b) \vdash (c,d) = (c, d \cdot (a\xi) \cdot b),$$

$$(a,b) \perp (c,d) = (a * c, b \cdot d).$$

Твердження 1.53 ([96], твердження 5). *Алгебра* $(S \times T, \dashv, \vdash, \perp)$ *є абелевим тріоїдом.*

Отриманий абелевий тріоїд $(S \times T, \dashv, \vdash, \perp)$ позначимо через $S \times T(\xi)$.

Зауважимо, що для кожного елемента t довільного $(\dashv, \vdash)$-абелевого тріоїда степені

$$t_{\dashv}^{n} = \underbrace{t \dashv t \dashv \ldots \dashv t}_{n} \text{ та } t_{\vdash}^{n} = \underbrace{t \vdash t \vdash \ldots \vdash t}_{n}$$

збігаються, тому замість t^n будемо писати $t_{\dashv}^{n}$ $(= t_{\vdash}^{n})$.

Перейдемо до розгляду вільного абелевого тріоїду.

Нехай X – довільна непорожня множина, а N – множина всіх натуральних чисел. Позначимо через $F(X)$ та $FCm(X)$ вільну напівгрупу на X і, відповідно, вільний комутативний моноїд на X з одиницею ε. Слова $FCm(X)$ пишемо як $w = w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} ... w_n^{\alpha_n}$, де $w_1, w_2, ..., w_n \in X$ попарно різні, а α_1, α_2, ..., $\alpha_n \in N \cup \{0\}$. Тут w_i^0, $1 \le i \le n$, є порожнім словом ε та $w^1 = w$ для всіх $w \in X$.

Позначимо через $*$ гомоморфізм $F(X) \to FCm(X) : w \mapsto w^*$, який індукує найменшу комутативну напівгрупову конгруенцію на вільній напівгрупі $F(X)$ (див., наприклад, [7]). Далі покладемо

$$FAt(X) = F(X) \times FCm(X)$$

та визначимо три бінарні операції $\dashv$, $\vdash$ і $\perp$ на $FAt(X)$ за правилами:

$$(u,v) \dashv (p,q) = (u, vp^*q),$$

$$(u,v) \vdash (p,q) = (p, qu^*v),$$

$$(u,v) \perp (p,q) = (up, vq).$$

Теорема 1.54 ([96], теорема 1). *Алгебра* $(FAt(X),\dashv,\vdash,\perp)$ *є вільним абелевим тріоїдом.*

Потужність множини X є рангом побудованого вільного абелевого тріоїда $(FAt(X),\dashv,\vdash,\perp)$.

Зауваження 1.55 ([96], зауваження 3). *З конструкції* $(FAt(X),\dashv,\vdash,\perp)$ *випливає, що вільний абелевий тріоїд визначається однозначно з точністю до ізоморфізму рангом. Отже, група автоморфізмів* $(FAt(X),\dashv,\vdash,\perp)$ *ізоморфна симетричній групі на* X.

Зауваження 1.56 ([96], зауваження 4). *Для зручності можна визначити операції* $\dashv$ *та* $\vdash$ *вільного абелевого тріоїда* $(FAt(X),\dashv,\vdash,\perp)$ *без використання гомоморфізму* $*$ (див., наприклад, [97]).

Тепер розглянемо структуру вільного абелевого тріоїду рангу 1.

Нехай $(N^0,+)$ – адитивна напівгрупа всіх невід'ємних цілих чисел. Очевидно, $\eta : N \to N^0 : x \mapsto x$ є мономорфізмом адитивної напівгрупи $(N,+)$ в $(N^0,+)$. Згідно з твердженням 1.53, $N \times N^0(\eta)$ є абелевим тріоїдом. Позначимо операції цього тріоїда через $\dashv'$, $\vdash'$ та $\perp'$, тобто, $N \times N^0(\eta) = (N \times N^0, \dashv', \vdash', \perp')$.

Твердження 1.57 ([96], твердження 6). *Вільний абелевий тріоїд* $(FAt(X),\dashv,\vdash,\perp)$ *рангу 1 є ізоморфним тріоїду* $N \times N^0(\eta)$.

Представимо далі найменшу абелеву конгруенцію на вільному тріоїді.

Конгруенція ρ на тріоїді $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ називається абелевою, якщо фактор-тріоїд $(T,\dashv,\vdash,\perp)/\rho$ є абелевим. Якщо $f : T_1 \to T_2$ є гомоморфізмом тріоїдів, то відповідну конгруенцію на T_1 будемо позначати через Δ_f.

Вільний тріоїд $(Ft(X),\dashv,\vdash,\perp)$, розглянутий у підрозділі у 1.2, позначимо через $Ft(X)$.

Відомо (див., наприклад, [99]), що кожен елемент $w \in Ft(X)$ можна однозначно представити в канонічній формі одним із таких способів:

$$w = (\overline{u_1^{(0)}} \vdash \ldots \vdash \overline{u_{k_0}^{(0)}}) \vdash (\overline{u_1^{(1)}} \dashv \ldots \dashv \overline{u_{k_1}^{(1)}}) \perp \ldots \perp (\overline{u_1^{(j)}} \dashv \ldots \dashv \overline{u_{k_j}^{(j)}}),$$

де $u_l^{(i)} \in X$, $1 \le l \le k_i$ для всіх $i \in \{0,1,\ldots,j\}$, або

$$w = (\overline{u_1^{(1)}} \dashv \ldots \dashv \overline{u_{k_1}^{(1)}}) \perp (\overline{u_1^{(2)}} \dashv \ldots \dashv \overline{u_{k_2}^{(2)}}) \perp \ldots \perp (\overline{u_1^{(j)}} \dashv \ldots \dashv \overline{u_{k_j}^{(j)}}),$$

де $u_l^{(i)} \in X$, $1 \le l \le k_i$ для всіх $i \in \{1,2,\ldots,j\}$.

Для кожного $w \in Ft(X)$ вищеописаної канонічної форми покладемо

$$\Theta(w) = u_1^{(1)} u_1^{(2)} ... u_1^{(j)} \quad \text{та}$$

$$\Omega(w) = u_1^{(0)} ... u_{k_0}^{(0)} u_2^{(1)} ... u_{k_1}^{(1)} u_2^{(2)} ... u_{k_2}^{(2)} ... u_{k_{j-1}}^{(j-1)} u_2^{(j)} ... u_{k_j}^{(j)}$$

або

$$\Omega(w) = u_2^{(1)} ... u_{k_1}^{(1)} u_2^{(2)} ... u_{k_2}^{(2)} ... u_{k_{j-1}}^{(j-1)} u_2^{(j)} ... u_{k_j}^{(j)},$$

якщо $w \ne \Theta(w)$, та $\Omega(w) = \varepsilon$, якщо $w = \Theta(w)$. Крім того, позначимо через $q_{\bar{x}}(w)$, $x \in X$, кількість усіх елементів $\bar{x} \in \overline{X}$, які входять до канонічної форми w.

Тепер визначимо бінарне відношення σ на $Ft(X)$ наступним чином: u та v з $Ft(X)$ є σ- еквівалентними, якщо для всіх $x \in X$ маємо

$$q_{\bar{x}}(u) = q_{\bar{x}}(v) \text{ та } \Theta(u) = \Theta(v).$$

Зауважимо, що з $q_{\bar{x}}(u) = q_{\bar{x}}(v)$ для всіх $x \in X$ випливає $l(u) = l(v)$.

Наприклад, якщо $u = \bar{d}ab\bar{b}ac$, тоді канонічна форма елементу u є таким представленням: $u = (\bar{d} \dashv \bar{a} \dashv \bar{b}) \perp (\bar{b} \dashv \bar{a} \dashv \bar{c}).$ Крім того, $\Theta(u) = db,$ $\Omega(u) = abac$, та $q_{\bar{a}}(u) = q_{\bar{b}}(u) = 2$, $q_{\bar{d}}(u) = q_{\bar{c}}(u) = 1$.

Теорема 1.58 ([96], теорема 2). *Бінарне відношення* σ *є найменшою абелевою конгруенцією на вільному тріоїді* $(Ft(X), \dashv, \vdash, \perp)$.

1.6. Вільні трисполуки

У цьому підрозділі представлено вільну трисполуку, породжену довільною множиною. Результати цього підрозділу опубліковано у роботі [19] та належать Ж. Хуангу, Ю. Баю, Ю. Чену, З. Жангу. Будемо використовувати термінологію та позначення роботи [19].

Для формулювання основних результатів цього підрозділу наведено деякі допоміжні відомості.

Нормальні форми елементів вільної сполуки дуже близькі до форм вільної дісполуки або трисполуки. Пригадаємо деякі властивості вільної сполуки, що детально описані в роботах Дж. Гріна, Д. Ріса, Дж. Хауї, Дж. Герхарда та М. Лотара [14, 16, 18, 38].

Напівгрупа B називається сполукою, якщо $xx = x$ для кожного $x \in B$ Позначимо через B_A вільну сполуку, породжену множиною A, і через A^* (відповідно, A^+) вільний моноїд (відповідно, вільну напівгрупу), породжений (відповідно, породжену) A, де порожнє слово в A^* позначається через ε. Визначимо ρ_1 як конгруенцію на вільній напівгрупі A^+, породжену множиною $\{(u^2, u) \in A^+ \times A^+ \mid u \in A^+\}$. Тоді маємо $B_A = A^+ / \rho_1$.

Для кожного слова $u = a_1 a_2 \ldots a_n$ в A^+, де $a_1, \ldots, a_n \in A$, позначимо довжину u через $l(u)$, яка дорівнює n та визначимо зміст u, який позначимо через $C(u)$, як множину $\{a_i \mid 1 \le i \le n\}$. Далі для довільної множини Y позначимо через $|Y|$ потужність множини Y. Наприклад, для слова $u = abacadbc \in A^+$, де a, b, c, d попарно різні елементи в A, маємо $l(u) = 8$ та $C(u) = \{a, b, c, d\}$.

Загалом, нелегко розпізнати, чи є два елементи в фактор-напівгрупі рівні. Але для випадку вільної сполуки існує алгоритм для визначення рівності двох елементів. Щоб запровадити цей алгоритм, потрібно згадати більше понять про слова.

Для всіх слів $u, v, w \in A^*$, якщо $u = vw$, то v називається префіксом u, а w – суфікс u. Для кожного $u \in A^+$ визначаємо $u(0)\overline{u}(0)$ як найкоротший префікс u такий, що $C(u) = C(u(0)\overline{u}(0))$, і визначимо $\overline{u}(1)u(1)$ як найкоротший суфікс u такий, що $C(u) = C(\overline{u}(1)u(1))$, де $u(0), u(1)$ знаходяться в A^* та $\overline{u}(0), \overline{u}(1)$ є літерами в A. У термінології Дж. Гріна та Д. Ріса [16] $\overline{u}(0)$ називається початковою відміткою, а $\overline{u}(1)$ – кінцевою відміткою, тоді як $u(0)$ називається початковим словом, $u(1)$ – кінцевим словом.

Тепер згадаємо позначення, введені Дж. Герхардом [14]. Нехай $\Omega = \{0,1\}$ – множина, що складається з літер 0 та 1. Для кожного слова $\alpha = i_1 \ldots i_t \in \Omega^+$, де $i_1, \ldots, i_t \in \Omega$ і для кожного слова $u \in A^+$, якщо $t = 1$, то $\overline{u}(\alpha)$ та $u(\alpha)$ вже визначені раніше; якщо $t \geq 2$, то покладемо

$$\overline{u}(\alpha) = \overline{u(i_1 \ldots i_{t-1})}\ (i_t),$$

$$u(\alpha) = u(i_1 \ldots i_{t-1})(i_t).$$

Приклад 1.59 ([19], приклад 2.1). Нехай $u = abacabc$ слово в A^+, де a, b, c попарно різні елементи в A. Тоді маємо

$$u(0) = aba,\ \overline{u}(0) = c,\ \overline{u}(1) = a,\ u(1) = bc,$$

$$u(00) = a,\ \overline{u}(00) = b,\ \overline{u}(01) = b,\ u(01) = a,$$

$$u(10) = b,\ \overline{u}(10) = c,\ \overline{u}(11) = b,\ u(11) = c.$$

Для всіх непорожніх підмножин $U, V \in A^+$ визначимо добуток $UV = \{uv \mid u \in U, v \in V\}$. Нехай P – непорожня скінченна підмножина A. Тоді визначимо U_P індуктивно наступним чином:

(i) Якщо $P = \{a\} \subseteq A$, тоді покладемо $U_P = \{a\} \subseteq A^+$.

(ii) Якщо $P=\{a_1,\ldots,a_n\}$, де $a_1,\ldots,a_n$ довільні n різних букв у A, визначимо U_P у такий спосіб:

$$U_P=\bigcup_{b,c\in P}U_{P\setminus\{b\}}\{bc\}U_{P\setminus\{c\}},$$

де b та c можуть бути однаковими буквами.

Наприклад, маємо $U_{\{b,c\}}=\{cbbc,cbcb,bcbc,bccb\}$. Тепер нагадаємо важливу лему про запис нормальної форми довільного елемента у вільній сполуці.

Лема 1.60 ([38], розділ 2.4). *Для кожного* $u\in A^+$ *маємо* $u\rho_1=u(0)\overline{u}(0)\overline{u}(1)u(1)\rho_1$ *в* B_A. *Зокрема, множина*

$$\bigcup_P\{u\rho_1\mid u\in U_P\}$$

утворює множину нормальних форм B_A, *де об'єднання здійснюється за усіма непорожніми скінченними підмножинами множини* A. *Крім того, для кожного слова* $u\in U_P$ *маємо* $C(u)=P$, *а для всіх* $u\neq v\in U_P$ *отримуємо* $u\rho_1\neq v\rho_1$.

Зауваження 1.61 ([19], зауваження 2.3). *Лема 1.60 пропонує алгоритм перезапису довільного елемента* $u\rho_1$ *у його нормальну форму* $N(u)\rho_1$ *таку, що* $N(u)\in U_{C(u)}$.

Припустимо $C(u)=P$. Якщо $|C(u)|=1$, скажімо, $u=a^n$ для деякого цілого числа $n\geq 1$ та літери $a\in A$. Тоді маємо $N(u)=a$, що задовольняє $a\in U_{\{a\}}$ та $u\rho_1=a\rho_1$.

Якщо $|C(u)|>1$, то $u\rho_1=u(0)\overline{u}(0)\overline{u}(1)u(1)\rho_1$ за лемою 1.60. Оскільки $|C(u(0))|=|C(u(1))|=|C(u)|-1$ то за індукцією по $|C(u)|$ можна легко знайти слова $N(u(0))\in U_{P\setminus\{\overline{u}(0)\}}$ та $N(u(1))\in U_{P\setminus\{\overline{u}(1)\}}$ такі, що $u(0)\rho_1=N(u(0))\rho_1$ та $u(1)\rho_1=N(u(1))\rho_1$. Нарешті отримуємо (єдине) слово

$$N(u)=N(u(0))\overline{u}(0)\overline{u}(1)N(u(1))\in U_P$$

таке, що $u\rho_1 = N(u)\rho_1$. Очевидно, що для всіх $u,v \in A^+$ маємо $N(uv)\rho_1 = N(u)N(v)\rho_1$. Зокрема, з цього випливає, що проблема рівності слів у B_A є розв'язною. Вперше її було доведено в [16], див. також [18,38].

Лема 1.62 ([19], лема 2.6). *Нехай P – довільна непорожня підмножина множини A, що складається з k елементів. Тоді* $\left|U_P\right| = \prod_{1\le i\le k}\left(k-i+1\right)^{2^i}$. *Позначимо це число через* c_k.

Нагадаємо, що дімоноїд $(D,\dashv,\vdash)$ називається дісполукою (див., наприклад, [72]) або ідемпотентним дімоноїдом, якщо обидві напівгрупи $(D,\dashv)$ і $(D,\vdash)$ є сполуками, а саме

$$x \vdash x = x = x \dashv x \text{ для кожного } x \in D.$$

Позначимо через DB_A вільну дісполуку (або вільний ідемпотентний дімоноїд), породжений множиною A. Згідно з позначеннями в [5],

$$[u]_n := a_1 \vdash \ldots \vdash a_{n-1} \vdash a_n \dashv a_{n+1} \dashv \ldots \dashv a_{n+t}$$

називається нормальним дісловом над A, де $a_1,\ldots,a_{n+t}$ належать A. Елемент a_n називається серединним входженням $[u]_n$ і позначається через $\mathrm{mid}([u]_n)$. Для зручності позначимо $[a]_1$ через a для кожного $a \in A$.

Нехай $\left[A^+\right]_\omega = \{[u]_n \mid u \in A^+, 1 \le n \le l(u)\}$ − множина всіх нормальних діслів над A.

Відповідно до [37], $Di(A) := ([\mathrm{A}^+]_\omega, \vdash, \dashv)$ є вільним дімоноїдом, породженим A, де операції $\vdash$ та $\dashv$ визначаються за правилами:

$$[u]_n \vdash [v]_m = [uv]_{l(u)+m}, \quad [u]_n \dashv [v]_m = [uv]_n.$$

За домовленістю, для кожного $[u]_n \in [A^+]_\omega$ покладемо

$$[\varepsilon]_1 \vdash [u]_n = [u]_n, \quad [u]_n \dashv [\varepsilon]_1 = [u]_n.$$

Зауважимо, що $[\varepsilon]_1 \notin [A^+]_\omega$ та $[u]_n \vdash [\varepsilon]_1$ і $[\varepsilon]_1 \dashv [u]_n$ невизначені. Далі покладемо

$$[A^*]_\omega = [A^+]_\omega \cup \{[\varepsilon]_1\}.$$

Позначимо через ρ_2 конгруенцію на вільному дімоноїді $Di(A)$, породжену множиною

$$B_2 := \{([u]_n \delta [u]_n, [u]_n) \mid [u]_n \in [A^+]_\omega, \delta \in \{\vdash, \dashv\}\}$$

з $[A^+]_\omega \times [A^+]_\omega$. Зрозуміло, що $DB_A = Di(A) / \rho_2$.

Нагадаємо, що для довільної напівгрупи G, якщо покласти $x \vdash y = x \dashv y = xy$ для всіх $x, y \in G$, то $(G, \vdash, \dashv)$ є дімоноїдом, який позначається через $G^{[2]}$.

Нагадаємо [65], що для кожного дімоноїда $(D, \vdash, \dashv)$ відношення η_2 є конгруенцією на D, породженою множиною $\{(x \vdash y, x \dashv y) \mid x, y \in D\}$. Тоді напівгрупа D / η_2 називається асоційованою напівгрупою дімоноїда $(D, \vdash, \dashv)$. Покажемо, що B_A є асоційованою напівгрупою дісполуки DB_A.

Лема 1.63 ([19], лема 3.2). *Нехай* $S_2 = \{([u]_n \vdash [v]_m, [u]_n \dashv [v]_m) \mid [u]_n, [v]_m \in [A^+]_\omega\}$ *– підмножина з* $[A^+]_\omega \times [A^+]_\omega$, *а* ρ *– конгруенція на вільному дімоноїді* $Di(A)$, *породжена підмножиною* $B_2 \cup S_2$, *де* B_2 *визначено в [5]. Тоді* $B_A \cong Di(A) / \rho$ *як напівгрупи. Зокрема, для всіх* $[u]_n, [v]_m \in [A^+]_\omega$, *якщо* $[u]_n \rho_2 = [v]_m \rho_2$, *то* $u\rho_1 = v\rho_1$.

Лема 1.64 ([19], лема 3.3). *Для всіх* $a \in A$, $[u]_n \in [A^*]_\omega$ *маємо*

$$(a \vdash ([u]_n \vdash a))\rho_2 = ((a \dashv [u]_n) \dashv a)\rho_2.$$

Нагадаємо, що визначення тріоїду можна знайти в підрозділі 1.1.

Тріоїд $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ називається ідемпотентним тріоїдом або трисполукою [78], якщо напівгрупи $(T, \dashv)$, $(T, \vdash)$ і $(T, \perp)$ – сполуки, а саме

$$x \vdash x = x \dashv x = x \perp x = x$$

для всіх $x \in T$.

Позначимо через TB_A вільну трисполуку (або вільний ідемпотентний тріоїд), породжену (або породжений) A.

Деякі приклади трисполук можна знайти, наприклад, у [78]. Використовуючи позначення, наведені у праці [35], для всіх $a_1, \ldots, a_{m_r+t} \in A$ мономіал

$$(a_1 \vdash \ldots \vdash a_{m_1-1}) \vdash (a_{m_1} \dashv \ldots \dashv a_{m_2-1}) \perp \ldots \perp (a_{m_r} \dashv \ldots \dashv a_{m_r+t}),$$

який позначається

$$\left[u\right]_U \text{ або } a_1 \ldots a_{m_1-1} a_{m_1} \ldots a_{m_2-1} a_{m_2} \ldots a_{m_r} \ldots a_{m_r+t},$$

називається нормальним трисловом над A, де $u = a_1 a_2 \ldots a_{m_r+t}$, $1 \le m_1 < \ldots < m_r$, $r \ge 1$, $t \ge 0$ та $U = \left\{m_1, \ldots, m_r\right\}$. Елементи $a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots, a_{m_r}$ називаються серединними входженнями трислова $\left[u\right]_U$. Позначимо $\left[u\right]_{[m_1]}$ через $\left[u\right]_{m_1}$.

Нехай $P(N)$ – множина всіх підмножин множини натуральних чисел N. Нехай

$$\left[A^+\right]_{P(N)} = \left\{\left[u\right]_U \mid u \in A^+,\ \varnothing \ne U \subseteq \left\{1, \ldots, l(u)\right\}\right\}$$

є множиною всіх нормальних трислів над A. Для кожного цілого $k \in Z$ та $\varnothing \ne U \in P(\mathrm{N})$ покладемо

$$k + U = \left\{k + m \mid m \in U\right\}.$$

Відповідно до [35, 78], $Tri(A) := (\left[A^+\right]_{P(N)}, \vdash, \dashv, \perp)$ – це вільний тріоїд, породжений A та наділений наступними операціями:

$$[u]_U \vdash [v]_V = [uv]_{l(u)+V},$$

$$[u]_U \dashv [v]_V = [uv]_U,$$

$$[u]_U \perp [v]_V = [uv]_{U \cup (l(u)+V)}$$

для всіх $\left[v\right]_V \in \left[A^+\right]_{P(N)}$.

Для кожного $\left[u\right]_U \in \left[A^+\right]_{P(N)}$ покладемо

$$[\varepsilon]_1 \vdash [u]_U = [u]_U = [u]_U \dashv [\varepsilon]_1.$$

Зауважимо, що $[\varepsilon]_1 \in \left[A^+\right]_{P(N)}$ та $[u]_U \vdash [\varepsilon]_1$, $[\varepsilon]_1 \dashv [u]_U$, $[u]_U \perp [\varepsilon]_1$, $[\varepsilon]_1 \perp [u]_U$ є невизначеними. Нарешті, покладемо

$$\left[A^*\right]_{P(N)} = \left[A^+\right]_{P(N)} \cup \left\{[\varepsilon]_1\right\}.$$

Тепер розглянемо відображення

$$\dot{\pi}_3 : \left[A^*\right]_{P(N)} \to A^*,\ a_1 \ldots a_{m_1-1} a_{m_1} \ldots a_{m_2-1} a_{m_2} \ldots a_{m_r} \ldots a_{m_r+t}$$

$$\mapsto a_{m_1} a_{m_2} \ldots a_{m_r},\ [\varepsilon]_1 \mapsto \varepsilon.$$

За визначенням, $\dot{\pi}_3$ відображає кожне нормальне трислово $\left[u\right]_U$ у слово, утворене її серединним входженням в A^+ і відображає $[\varepsilon]_1$ у ε.

Будемо використовувати запис $\left[v\right]_V^{v_1}$, який означає звичайне трислово $\left[v\right]_V$, що задовольняє властивість $\dot{\pi}_3([v]_V) = v_1$. Крім того, покладемо $[\varepsilon]_1^{\varepsilon} = [\varepsilon]_1$, і для кожного непорожнього слова v позначення $\left[v\right]_V^{\varepsilon}$ є невизначеним.

Лема 1.65 ([19], лема 4.2). *Нехай* $\left[u\right]_U^{v_1 w_1} = a_1 \ldots a_{m_1-1} \dot{a}_{m_1} \ldots a_{m_2-1} \dot{a}_{m_2} \ldots \dot{a}_{m_r} \ldots a_{m_r+t}$ *(див. [16]), де* $a_1, \ldots, a_{m_r+t}$ *належать* A*, а* v_1, w_1 *належать* A^*. *Тоді існує операція* $\delta \in \{\vdash, \dashv, \perp\}$, $v, w \in A^*$ *та* V, $W \in P(N)$ *такі, що* $\left[u\right]_U^{v_1 w_1} = \left[v\right]_V^{v_1} \delta [w]_W^{w_1}$.

Позначимо через ρ_3 конгруенцію на вільному тріоїді $Tri(A)$, породжену множиною

$$B_3 = \{(\left[u\right]_U \delta \left[u\right]_U, \left[u\right]_U) \mid \left[u\right]_U \in [A^+]_{P(N)}, \delta \in \{\vdash, \dashv, \perp\}\}$$

з $[A^+]_{P(N)} \times [A^+]_{P(N)}$. Безпосередньо перевіряється, що $TB_A = [A^+]_{P(N)} / \rho_3$.

Наступна лема показує, що вільна сполука B_A є фактором вільної трисполуки.

Лема 1.66 ([19], лема 4.3). *Нехай*

$$s_3 = \{([u]_U \vdash [v]_V,\ [u]_U \dashv [v]_V),\ ([u]_U \perp [v]_V,\ [u]_U \dashv [v]_V) \mid [u]_U,\ [v]_V \in [A^+]_{P(N)}\}$$

є підмножиною з $[A^+]_\omega \times [A^+]_\omega$, *та нехай* ρ' *– конгруенція на вільному тріоїді* $Tri(A)$, *породжена підмножиною* $B_3 \cup S_3$ *з* $[A^+]_{P(N)} \times [A^+]_{P(N)}$, *де* B_3 *визначено в [24]. Тоді* $B_A \cong Tri(A)/\rho'$ *як напівгрупи. Зокрема, якщо* $[u]_U \rho_3 = [v]_V \rho_3$, *то* $u\rho_1 = v\rho_1$.

Лема 1.67 ([19], лема 4.4). *Для всіх* $a \in A$ *та* $[u]_U \in [A^+]_{P(N)}$ *маємо*

$$(a \vdash [u]_U \vdash a)\rho_3 = (a \dashv [u]_U \dashv a)\rho_3.$$

Тепер визначимо частковий порядок $\prec$ на $P(N)$. Для всіх непорожніх скінченних множин $U,\ V \in P(N)$ таких, що $|U| = |V| = r$ та $U = \{m_1, \ldots, m_r\}$, $V = \{n_1, \ldots, n_r\}$, які задовольняють умовам $1 \le m_1 < \ldots < m_r$ та $1 \le n_1 < \ldots < n_r$, визначимо таке відношення:

$$U \prec V \text{, якщо } (m_1, \ldots, m_r) < (n_1, \ldots, n_r) \text{ лексикографічно.}$$

Нарешті, для кожного нормального трислова $[u]_U \in \left[A^+\right]_{P(N)}$ нехай V – мінімальна множина в $P(N)$ така, що $\dot{\pi}_3([u]_U) = \dot{\pi}_3([u]_V)$. Зауважимо, що така множина V єдина. Тоді покладемо

$$([u]_U)^L = [u]_V.$$

У роботі [19] доведення теореми 1.72 розділено на кілька випадків, які перераховані нижче у вигляді серії лем.

Лема 1.68 ([19], лема 4.5). *Нехай* $[u]_U,\ [u]_{U'} \in \left[A^+\right]_{P(N)}$. *Якщо* $\dot{\pi}_3([u]_U)\rho_1 = \dot{\pi}_3([u]_{U'})\rho_1$, *то* $[u]_U \rho_3 = [u]_{U'} \rho_3$.

Наслідок 1.69 ([19], наслідок 4.6). *Якщо* $\dot{\pi}_3([v]_V)\rho_1 = \dot{\pi}_3([v^i]_{V'})\rho_1$ *для кожного нормального трислова* $[v]_V \in \left[A^+\right]_{P(N)}$, *для кожного натурального числа* i *та для кожної непорожньої множини* $V' \in P(N)$, *то* $[v]_V \rho_3 = [v^i]_{V'} \rho_3$.

Лема 1.70 ([19], лема 4.7). *Нехай* $u_1,\, u_2 \in A^*,\; w \in A^+$. *Якщо* $\{u, v\} = \{u_1 w w u_2, u_1 w u_2\}$, *то для всіх натуральних і та непорожньої множини* $U \in P(N)$ *такої, що* $[u^i]_U \in \left[A^+\right]_{P(N)}$, *існує непорожня множина* $V \in P(N)$ *така, що* $[u^i]_U\, \rho_3 = [v^{3i}]_V\, \rho_3$.

Лема 1.71 ([19], лема 4.8). *Якщо* $\dot{\pi}_3([u]_U)\rho_1 = \dot{\pi}_3([v]_V)\rho_1$ *для всіх* $[u]_U,\, [v]_V,\, [w]_W \in \left[A^+\right]_{P(\mathbb{N})}$ *та* $\delta \in \{\vdash, \dashv, \perp\}$, *то*

(i) $\dot{\pi}_3([w]_W\, \delta [u]_U)\rho_1 = \dot{\pi}_3([w]_W\, \delta [v]_V)\rho_1$,

(ii) $\dot{\pi}_3([u]_U\, \delta [w]_W)\rho_1 = \dot{\pi}_3([v]_V\, \delta [w]_W)\rho_1$,

(iii) $\dot{\pi}_3([u]_U\, \delta [u]_U)\rho_1 = \dot{\pi}_3([u]_U)\rho_1$.

Як наслідок отримуємо, що якщо $[u]_U\, \rho_3 = [v]_V\, \rho_3$ для всіх $[u]_U,\, [v]_V \in \left[A^+\right]_{P(N)}$, то $\dot{\pi}_3([u]_U)\rho_1 = \dot{\pi}_3([v]_V)\rho_1$.

Далі надамо характеристику класів еквівалентності у вільній трисполуці. Оскільки існує алгоритм, що розв'язує проблему рівності слів для вільних сполук, наступна теорема вказує на алгоритм розв'язування проблеми рівності слів для вільних трисполук.

Теорема 1.72 ([19], теорема 4.9). *Для всіх* $[u]_U,\, [v]_V \in \left[A^+\right]_{P(N)}$ *маємо* $[u]_U\, \rho_3 = [v]_V\, \rho_3 \in TB_A$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$u\rho_1 = v\rho_1 \text{ та } \dot{\pi}_3([u]_U)\rho_1 = \dot{\pi}_3([v]_V)\rho_1.$$

Зокрема, проблема рівності слів для вільної трисполуки TB_A є розв'язною.

Зауваження 1.73 ([19], зауваження 4.10). Комбінуючи теорему 1.72 і зауваження 1.61, отримуємо алгоритм для запису нормальної форми довільного елементу у вільній трисполуці і, таким чином, маємо розв'язок проблеми рівності слів для вільних трисполук. Точніше, для будь-якого слова $[u]_U \in \left[A^+\right]_{P(N)}$ такого, що $\dot{\pi}_3([u]_U) = v$, спочатку пишемо єдині слова $N(u) \in U_{C(u)}$ та

$N(v) \in U_{C(v)}$ такі, що $u\rho_1 = N(u)\rho_1$ та $v\rho_1 = N(v)\rho_1$. Зауважимо, що не існує такої множини $V \in P(N)$, що $\dot{\pi}_3([\mathrm{N}(u)]_V) = N(v)$ в загальному випадку. Припустимо, що i є найменшим натуральним числом, для якого існує непорожня множина $V \in P(N)$, що задовольняє умову $\dot{\pi}_3([\mathrm{N}(u)^i]_V) = N(v)$. Тоді можна вибрати $([\mathrm{N}(u)^i]_V)^L \rho_3$ як нормальну форму $[u]_U \rho_3$, а саме маємо $[u]_U \rho_3 = ([\mathrm{N}(u)^i]_V)^L \rho_3$. Наприклад, припустимо, що $A = \{a, b\}$ та $[u]_U = [bababa]_{\{1,2,3\}} = \dot{b}\dot{a}\dot{b}aba$. Тоді $v = \dot{\pi}_3([u]_U) = bab$. Отже, дійдемо висновку, що $N(u) = baba$ та $N(v) = baab$. Опираючись на описані вище міркування, покладемо $i = 2$, $V = \{1, 2, 4, 5\}$. Тоді маємо

$$([\mathrm{N}(u)^i]_V)^L = [babababa]_{\{1,2,4,5\}} = \dot{b}\dot{a}b\dot{a}\dot{b}aba$$

і таким чином,

$$[u]_U \rho_3 = ([N(u)^i]_V)^L \rho_3 = \dot{b}\dot{a}b\dot{a}\dot{b}aba\rho_3.$$

Зазначимо також, що не існує множини $W \in P(N)$ такої, що $\dot{\pi}_3([baba]_W) = baab$.

Далі пропонуємо альтернативний спосіб побудови вільної трисполуки. Для всіх непорожніх скінченних підмножин P, P' з A таких, що $P' \subseteq P \subseteq A$, покладемо

$$U_P \times U_{P'} := \{(u, u') \mid u \in U_P \text{ та } u' \in U_{P'}\}$$

та

$$TB(A) = \bigcup_{P' \subseteq P \subseteq A} (U_P \times U_{P'}),$$

де об’єднання здійснюється за усіма непорожніми скінченними підмножинами P, P' з A такими, що $P' \subseteq P$. Тоді визначимо операції на $TB(A)$ наступним чином: для всіх (u, u'), $(v, v') \in TB(A)$ маємо:

$$\begin{cases} (u,u') \dashv (v,v') = (N(uv),u'), \\ (u,u') \vdash (v,v') = (N(uv),v'), \\ (u,u') \perp (v,v') = (N(uv),N(u'v')), \end{cases}$$

де для всіх слів $u,v \in A^{+}$ слово $N(uv)$ визначено у зауваженні 1.61. Зокрема, для всіх слів $u,\ v,\ u',\ v' \in A^{+}$ із $C(u') \subseteq C(u)$ та $C(v') \subseteq C(v),$ використовуючи [39] та зауваження 1.61, маємо

$$\begin{cases} N(u),N(u')) \dashv (N(v),N(v')) = (N(uv),N(u')), \\ N(u),N(u')) \vdash (N(v),N(v')) = (N(uv),N(v')), \\ (N(u),N(u')) \perp (N(v),N(v')) = (N(uv),N(u'v')). \end{cases}$$

Теорема 1.74 ([19], теорема 4.11). *Використовуючи операції* $\vdash,\ \dashv,\ \perp$ *визначені в [39], маємо* $(TB(A),\vdash,\dashv,\perp) \cong TB_A,$ *а саме* $(TB(A),\vdash,\dashv,\perp)$ *є вільною трисполукою, породженою* A.

Приклад 1.75 ([19], приклад 4.12). Нехай $A = \{a,b\}$. За теоремою 1.74 маємо

$$TB(A) = (U_{\{a\}} \times U_{\{a\}}) \cup (U_{\{b\}} \times U_{\{b\}}) \cup (U_{\{a,b\}} \times U_{\{a\}})$$
$$\cup (U_{\{a,b\}} \times U_{\{b\}}) \cup (U_{\{a,b\}} \times U_{\{a,b\}}).$$

Тому $TB(A)$ складається з таких 26 елементів: $(a,a),(b,b)$ та

$$\begin{gathered} (abab,a),(abab,b),(abab,abab),(abab,baba),(abab,abba),(abab,baab), \\ (baba,a),(baba,b),(baba,abab),(baba,baba),(baba,abba),(baba,baab), \\ (abba,a),(abba,b),(abba,abab),(abba,baba),(abba,abba),(abba,baab), \\ (baab,a),(baab,b),(baab,abab),(baab,baba),(baab,abba),(baab,baab). \end{gathered}$$

Теорема 1.76 ([19], теорема 4.13). *Нехай* A *— непорожня множина з* n *елементів. Тоді*

$$|TB_A| = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} c_i\right) c_k,$$

де $c_j = \prod_{1 \le l \le j} (j-l+1)^{2^l}$ *визначено в лемі 1.62 та є потужністю* U_P *для довільної підмножини* P *з* A, *що складається з* j *елементів.*

1.7. Конгруенції на вільних тріоїдах

Цей підрозділ присвячений розгляду конгруенцій на тріоїдах, що досліджувалися А. В. Жучком, Юл. В. Жучок та Ю. В. Жучком у праці [91]. Тут охарактеризовано найменші дімоноїдні конгруенції і найменші напівгрупові конгруенції на вільному (комутативному, прямокутному) тріоїді. Матеріал цього підрозділу базується на роботах [71, 91, 103].

Розглянемо один клас тріоїдів [91].

Нехай X – алфавіт, а $F[X]$ – вільна напівгрупа на X. Для всіх $h=(p,q)\in X\times X$ припустимо $[h]=pq\in F[X]$. Для кожного $*\in\{\dashv,\vdash,\perp\}$ нехай

$$\gamma_*: X\times X\to (X\times X)\bigcup\{a_1a_2\in F[X]\,|\,a_1,a_2\in X\}:(p,q)\mapsto (p,q)\gamma_* \;-$$

довільне відображення таке, що $(p,q)\gamma_*=pq\in F[X]$ або $(p,q)\gamma_*=(p,q)\in X\times X$. Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ на $F[X]\bigcup(X\times X)$, поклавши

$$a_1\ldots a_m * b_1\ldots b_k = a_1\ldots a_m b_1\ldots b_k,$$

$$w*h=w[h],\quad h*w=[h]w,\; h*f=[h][f],$$

$$p\dashv q=(p,q)\gamma_\dashv,\quad p\vdash q=(p,q)\gamma_\vdash,\; p\perp q=(p,q)\gamma_\perp$$

для всіх $a_1\ldots a_m,\ b_1\ldots b_k\in F[X]$ таких, що $mk>1$, $w\in F[X]$, $h,\ f\in X\times X$, $p,q\in X$ та $*\in\{\dashv,\vdash,\perp\}$. Алгебру $(F[X]\bigcup(X\times X),\dashv,\vdash,\perp)$ позначимо через $X[\gamma_*]$.

Твердження 1.77 ([91], твердження 2.1). *$X[\gamma_*]$ – тріоїд.*

Нагадаємо, що тріоїди, дімоноїди та напівгрупи пов'язані між собою: якщо дві операції $\dashv$ та $\perp$ чи $\vdash$ та $\perp$ тріоїда збігаються, отримаємо поняття дімоноїда; якщо всі операції тріоїда збігаються, маємо поняття напівгрупи. Детальну інформацію про дімоноїди можна знайти у [56, 57, 71, 87].

Зауваження 1.78 ([91], зауваження 2.2). *(i) Якщо $\gamma_\dashv,\gamma_\vdash$ та $\gamma_\perp$ попарно різні, то операції на $X[\gamma_*]$ попарно різні.*

(ii) Якщо $\gamma_{\dashv}=\gamma_{\vdash}=\gamma_{\perp}$, *то операції на* $X[\gamma_*]$ *збігаються, і* $X[\gamma_*]$ *є напівгрупою.*

(iii) Якщо $\gamma_{\vdash}=\gamma_{\perp}$, *то операції* $\vdash$ *та* $\perp$ *на* $X[\gamma_*]$ *збігаються, і* $X[\gamma_*]$ *є дімоноїдом.*

(iv) Якщо $\gamma_{\dashv}=\gamma_{\perp}$, *то операції* $\dashv$ *та* $\perp$ *на* $X[\gamma_*]$ *збігаються, і* $X[\gamma_*]$ *є дімоноїдом.*

(v) Якщо $\gamma_{\dashv}=\gamma_{\vdash}$, *то операції* $\dashv$ *та* $\vdash$ *на* $X[\gamma_*]$ *збігаються, і* $X[\gamma_*]$ *є дімоноїдом.*

Нагадаємо, що напівгрупа S є прямокутною сполукою, якщо $xyx=x$ для всіх $x,y\in S$. Тріоїд $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ називається прямокутним тріодом чи прямокутною трисполукою [103], якщо $(T,\dashv)$, $(T,\vdash)$ та $(T,\perp)$ – прямокутні сполуки. Дімоноїд $(D,\dashv,\vdash)$ називається прямокутним дімоноїдом чи прямокутною дісполукою [71], якщо обидві напівгрупи $(D,\dashv)$, $(D,\vdash)$ – прямокутні сполуки. Вільні прямокутні дімоноїди розглянуто в [56, 67, 71].

Конструкції вільного комутативного тріоїда та вільного комутативного дімоноїда були розглянуті у підрозділі 1.3. Далі будемо використовувати визначення та позначення підрозділу 1.3.

Теорема 1.79 ([91], теорема 3.3). *Нехай* $FCT(X)$ *– вільний комутативний тріоїд,* $(w_1,u_1),(w_2,u_2)\in FCT(X)$. *Нехай* $FCD(X)$ *– вільний комутативний дімоноїд, та* $F^{\star}[X]$ *– вільна комутативна напівгрупа.*

(i) Визначимо відношення $\tilde{\pi}_{\dashv}^{\perp}$ на $FCT(X)$, поклавши

$$(w_1,u_1)\tilde{\pi}_{\dashv}^{\perp}(w_2,u_2)$$

тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:

1) $w_1=w_2$ та $u_1=u_2=b$;

2) $w_1=w_2$ та $u_1\neq b$, $u_2\neq b$.

Тоді $\tilde{\pi}_{\dashv}^{\perp}$ – найменша $d_{\dashv}^{\perp}$ конгруенція на $FCT(X)$.

(ii) Визначимо відношення $\tilde{\pi}_{\vdash}^{\perp}$ на $FCT(X)$, поклавши

$$(w_1,u_1)\tilde{\pi}_{\vdash}^{\perp}(w_2,u_2)$$

тоді і тільки тоді, коли виконується одна з таких умов:

1) $w_1 = w_2$ та $u_1, u_2 \in \{b,c\}$;

2) $w_1 = w_2$ та $u_1, u_2 \notin \{b,c\}$.

Тоді $\tilde{\pi}_{\vdash}^{\perp}$ – найменша комутативна $d_{\vdash}^{\perp}$-конгруенція на $FCT(X)$.

(iii) Визначимо відношення $\tilde{\pi}$ на $FCT(X)$, поклавши

$$(w_1,u_1)\tilde{\pi}(w_2,u_2)$$

тоді і тільки тоді, коли $w_1 = w_2$. Тоді $\tilde{\pi}$ – найменша комутативна напівгрупова конгруенція на $FCT(X)$.

Охарактеризовано найменші дімоноїдні конгруенції та найменшу комутативну напігрупову конгруенцію на вільному тріоїді. Вільний дімоноїд довільного рангу був представлений в підрозділі 1.3. Будемо його використовувати у наступній теоремі.

Теорема 1.80 ([91], теорема 4.1). *Нехай $FT(X)$ – вільний тріоїд, $(w,L),(\omega,R) \in FT[X]$. Нехай $\breve{F}[X]$ – вільний дімоноїд і $F[X]$ – вільна напівгрупа.*

(i) Визначимо відношення $\tilde{\sigma}_{\dashv}^{\perp}$ на $FT(X)$, поклавши

$$(w,L)\tilde{\sigma}_{\dashv}^{\perp}(\omega,R)$$

тоді і тільки тоді, коли

$$w = \omega \text{ та } L_{\min} = R_{\min}.$$

Тоді $\tilde{\sigma}_{\dashv}^{\perp}$ – найменша $d_{\dashv}^{\perp}$ конгруенція на $FT(X)$.

(ii) Визначимо відношення $\tilde{\sigma}_{\vdash}^{\perp}$ на $FT(X)$, поклавши

$$(w,L)\tilde{\sigma}_{\vdash}^{\perp}(\omega,R)$$

тоді і тільки тоді, коли

$$w=\omega \text{ та } L_{\max}=R_{\max}.$$

Тоді $\tilde{\sigma}_{\vdash}^{\perp}$ – найменша комутативна $d_{\vdash}^{\perp}$-конгруенція на $FT(X)$.

(iii) Визначимо відношення $\tilde{\sigma}$ на $FT(X)$, поклавши

$$(w,L)\tilde{\sigma}(\omega,R)$$

тоді і тільки тоді, коли $w=\omega$. Тоді $\tilde{\sigma}$ – найменша комутативна напівгрупова конгруенція на $FT(X)$.

Далі охарактеризовано найменші дімоноїдні конгруенції та найменшу напівгрупову конгруенцію на вільному прямокутному тріоїді. Будемо використовувати визначення та позначення підрозділу 1.4.

Нагадаємо конструкцію вільного прямокутного тріоїда ([103], див. також підрозділ 1.4).

Нехай X – довільна непорожня множина та $X^4=X\times X\times X\times X$. Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ на X^4 за правилами:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\dashv(y_1,y_2,y_3,y_4)=(x_1,x_2,x_3,y_4),$$

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\vdash(y_1,y_2,y_3,y_4)=(x_1,y_2,y_3,y_4),$$

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\perp(y_1,y_2,y_3,y_4)=(x_1,x_2,y_3,y_4)$$

для всіх $(x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)\in X^4$. Алгебру $(X^4,\dashv,\vdash,\perp)$ позначають через $FRT(X)$.

Теорема 1.81 ([103], теорема 1). $FRT(X)$ – вільна прямокутна трисполука.

Тепер нагадаємо конструкцію вільного прямокутного дімоноїда [56, 67, 72].

Визначимо операції $\dashv$ та $\vdash$ на $X^3=X\times X\times X$ за правилами:

$$(x_1,x_2,x_3)\dashv(y_1,y_2,y_3)=(x_1,x_2,y_3),$$

$$(x_1,x_2,x_3)\vdash(y_1,y_2,y_3)=(x_1,y_2,y_3)$$

для всіх (x_1, x_2, x_3), $(y_1, y_2, y_3) \in X^3$. Алгебру $(X^3, \dashv, \vdash, \perp)$ позначають через $FRct(X)$.

Теорема 1.82 ([71], теорема 5.1). $FRct(X)$ – *вільний прямокутний дімоноїд.*

Розглянемо конструкцію вільної прямокутної сполуки.

Визначимо операцію на $X^2 = X \times X$ за правилом:

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1, y_2)$$

для всіх (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in X^2$. Отриману алгебру позначають через X_{rb}. Відомо, що X_{rb} є вільною прямокутною сполукою.

Якщо ρ – конгруенція на тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ така, що операції фактор-тріоїду $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$ збігаються, то говорять, що ρ є напівгруповою конгруєнцією.

Має місце теорема.

Теорема 1.83 ([91], теорема 5.3). *Нехай* $FRT(X)$ *– вільний прямокутний тріоїд,* (x_1, x_2, x_3, x_4), $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in FRT(X)$. *Нехай* $FRct(X)$ *– вільний прямокутний дімоноїд і* X_{rb} *– вільна прямокутна сполука.*

(i) Визначимо відношення $\tilde{\psi}_{\dashv}^{\perp}$ на $FRT(X)$, поклавши

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)\tilde{\psi}_{\dashv}^{\perp}(y_1, y_2, y_3, y_4)$$

тоді і тільки тоді, коли

$$(x_1, x_2, x_4) = (y_1, y_2, y_4).$$

Тоді $\tilde{\psi}_{\dashv}^{\perp}$ – найменша $d_{\dashv}^{\perp}$-конгруенція на $FRT(X)$.

(ii) Визначимо відношення $\tilde{\psi}_{\vdash}^{\perp}$ на $FRT(X)$, поклавши

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)\tilde{\psi}_{\vdash}^{\perp}(y_1, y_2, y_3, y_4)$$

тоді і тільки тоді, коли

$$(x_1, x_3, x_4) = (y_1, y_3, y_4).$$

Тоді $\tilde{\psi}_{\vdash}^{\perp}$ – найменша комутативна $d_{\vdash}^{\perp}$-конгруенція на $FRT(X)$.

(iii) Визначимо відношення $\tilde{\psi}$ на $FRT(X)$, поклавши

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)\tilde{\psi}(y_1, y_2, y_3, y_4)$$

тоді і тільки тоді, коли

$$(x_1, x_4) = (y_1, y_4).$$

Тоді $\tilde{\psi}$ – найменша напівгрупова конгруенція на $FRT(X)$.

Висновки до розділу 1

У цьому розділі розглянуто конструкцію вільної асоціативної триалгебри, приклади асоціативних триалгебр і їх зв'язки з некомутативною версією алгебри Пуасона. Представлено вільні тріоїди та їх декомпозиції у трисполуки підтріоїдів, наведено напівгрупу, яка є ізоморфною моноїду ендоморфізмів вільного моногенного тріоїда. Розглянуто вільні комутативні тріоїди довільного рангу та рангу 1. Представлено вільні прямокутні трисполуки та описано їх стрктуру. Охарактеризовано вільні абелеві тріоїди та вільні трисполуки. Презентовано деякі найменші конгруенції на вільному (комутативному, прямокутному) тріоїді.

РОЗДІЛ 2
НІЛЬПОТЕНТНІСТЬ У ВІДНОСНО ВІЛЬНИХ ТРІОЇДАХ

Нільпотентність в алгебраїчних структурах вивчалася багатьма математиками. Для напівгруп поняття нільпотентності було введено А. І. Мальцевим [110] та самостійно Б. Нейманом і Т. Тейлором [40]. Е. Джеспер і Я. Окнінський в [21] досліджували взаємов'язки між нільпотентними напівгрупами і напівгруповими алгебрами. Нільпотентність у кільцях розглядалася в роботі Р. С. Крузе та Д. Т. Прайса [26]. Вивченню (ді)нільпотентних дімоноїдів присвячені роботи А. В. Жучка та Юл. В. Жучок [62, 63, 87]. Ді(ні)льпотентність у допельнапівгрупах розглянуто у [61, 66, 79]. Питанням нільпотентності у n-кратних напівгрупах присвячено статті А. В. Жучка, Й. Коппіца, Юл. В. Жучок, О. О. Одінцової [73, 82, 89, 90]. Нільпотентність у g-дімоноїдах досліджувалася Юл. В. Жучок [104]. Однобічні нільпотентні напівгрупи вивчалися Б. М. Шайном [49]. Отже, наведені результати свідчать про актуальність даного напрямку алгебри.

Цей розділ присвячено вивченню нільпотентності у тріоїдах. У ньому наведено декілька визначень нільпотентності для класу тріоїдів та приклади нільпотентних тріоїдів. Представлено вільний n-нільпотентний тріоїд та описано його структуру. Ці результати про вільні n-нільпотентні тріоїди належать Юл. В. Жучок [102]. Нарешті, побудовано конструкцію вільного лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда [83]. Цей результат є основним у цьому розділі. Він розвиває теорію многовидів тріоїдів.

2.1. Поняття нільпотентності у тріоїдах

У цьому підрозділі розглянуто поняття n-нільпотентного тріоїда, n-тринільпотентного тріоїда та лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда.

Наведено приклади нільпотентних тріоїдів індексу нільпотентності 2. Результати цього підрозділу опубліковано в [83, 84, 102].

Нагадаємо, що непорожня множина T, наділена трьома бінарними асоціативними операціями $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$, які задовольняють вісім аксіом:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \tag{T1}$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \tag{T2}$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \tag{T3}$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z), \tag{T4}$$

$$(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z), \tag{T5}$$

$$(x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z), \tag{T6}$$

$$(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z), \tag{T7}$$

$$(x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \tag{T8}$$

називається тріоїдом [35]. Деякі приклади тріоїдів можна знайти в [74, 78, 102, 103].

Як і раніше, через $\mathbb{N}$ позначаємо множину натуральних чисел. Елемент 0 тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ називається нулем [107], якщо

$$x * 0 = 0 = 0 * x$$

для всіх $x, \in T$ і $* \in \{\dashv, \vdash, \perp\}$. Тріоїд $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ з нулем називається нільпотентним [102], якщо для деякого $n \in \mathbb{N}$ і будь-яких $x_i \in T$, $1 \le i \le n+1$, $*_j \in \{\dashv, \vdash, \perp\}$, $1 \le j \le n$, будь-яка розстановка дужок у $x_1 *_1 x_2 *_2 \ldots *_n x_{n+1}$ дає $0 \in T$. Найменше серед таких n називається індексом нільпотентності тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$. Для $k \in \mathbb{N}$ нільпотентний тріоїд індексу нільпотентності $\le k$ називається k-нільпотентним [102].

Відомо, що операції кожного 1-нільпотентного тріоїда збігаються і він є напівгрупою з нульовим множенням. У [102] побудовано деякі приклади нільпотентних тріоїдів індексу нільпотентності 2. Розглянемо їх детальніше.

Нехай X_1 і X_2 – довільні множини, які не перетинаються, $0 \in X_1$, і нехай

$$\varphi_1 : X_2 \times X_2 \to X_1,\ \varphi_2 : X_2 \times X_2 \to X_1,\ \varphi_3 : X_2 \times X_2 \to X_1 -$$

довільні різні відображення. Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ і $\perp$ на $X_1 \cup X_2$, поклавши

$$x \dashv y = \begin{cases} (x,y)\varphi_1, & x,y \in X_2, \\ 0 & \textit{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$x \vdash y = \begin{cases} (x,y)\varphi_2, & x,y \in X_2, \\ 0 & \textit{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$x \perp y = \begin{cases} (x,y)\varphi_3, & x,y \in X_2, \\ 0 & \textit{в інших випадках} \end{cases}$$

для всіх $x, y \in X_1 \cup X_2$.

Твердження 2.1 ([102], твердження 2). $(X_1 \cup X_2, \dashv, \vdash, \perp)$ – *нільпотентний тріоїд індексу нільпотентності 2.*

Нагадаємо, що тріоїд є комутативним [77], якщо три його операції комутативні.

Нехай Y – довільна множина така, що $0, a, b, c, d, e, f \in Y$ і $a \neq b,\ b \neq c$, $c \neq d,\ d \neq a,\ b \neq e,\ d \neq e,\ f \neq e,\ a \neq f,\ c \neq f$. Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ на Y, поклавши

$$x \dashv y = \begin{cases} b, & x = y = a, \\ 0 & \textit{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$x \vdash y = \begin{cases} d, & x = y = c, \\ 0 & \textit{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$x \perp y = \begin{cases} f, & x = y = e, \\ 0 & \textit{в інших випадках} \end{cases}$$

для всіх $x,\ y \in Y$.

Твердження 2.2 ([102], твердження 3). *Якщо* $b \neq 0$ *або* $d \neq 0$, *або* $f \neq 0$, *то* $(Y,\dashv,\vdash,\perp)$ – *нільпотентний комутативний тріоїд індексу нільпотентності 2.*

Зазначимо, що тріоїд $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ вперше був побудований в [77].

Напівгрупа S з нулем 0 називається нільпотентною, якщо $S^{n+1}=0$ для деякого $n\in N$. Найменше серед таких n називається індексом нільпотентності S. Для $k\in N$ нільпотентна напівгрупа індексу нільпотентності $\leq k$ називається k-нільпотентною. Тріоїд $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ з нулем будемо називати тринільпотентним, якщо $(T,\dashv)$, $(T,\vdash)$ та $(T,\perp)$ – нільпотентні напівгрупи, а тринільпотентний тріоїд $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ – n-тринільпотентним, якщо $(T,\dashv)$, $(T,\vdash)$ та $(T,\perp)$ є n-нільпотентними напівгрупами [84].

Поняття тринільпотентного тріоїда є аналогом понять дінільпотентного дімоноїда [62] і дінільпотентної допельнапівгрупи [79]. Зрозуміло, що операції будь-якого 1-тринільпотентного тріоїда збігаються і він є напівгрупою з нульовим множенням. Клас усіх n-тринільпотентних тріоїдів утворює підмноговид многовиду тріоїдів.

У [49] Б. М. Шайн розглядав ліві (праві) нільпотентні напівгрупи рангу n. Нагадаємо, що напівгрупа G називається лівою (правою) нільпотентною напівгрупою рангу n, якщо добуток будь-яких n елементів цієї напівгрупи дає лівий (правий) нуль. Клас усіх лівих нільпотентних напівгруп рангу n характеризується тотожністю $g_1g_2...g_ng_{n+1}=g_1g_2...g_n$. Ця тотожність еквівалентна тотожності $g_1g_2...g_ng_{n+m}=g_1g_2...g_n$. Тотожність, яка характеризує праві нільпотентні напівгрупи рангу n, визначається дуально. За лемою 1 з [49] ліва (права) нільпотентна напівгрупа рангу n також є лівою (правою) нільпотентною напівгрупою будь-якого рангу m більшого за n.

У теорії автоматів з’являються праві нільпотентні напівгрупи, які є напівгрупами самоадаптивних автоматів (див. [15, 29]). Аналоги лівої (правої) нільпотентної напівгрупи рангу n були введені в многовидах дімоноїдів [87], допельнапівгруп [61], *n*-кратних напівгруп [90], а також в цих роботах були побудовані вільні ліві (праві) *n*-дінільпотентні дімоноїди, вільні ліві (праві) *n*-дінільпотентні допельнапівгрупи, вільні ліві (праві) *k*-нільпотентні *n*-кратні напівгрупи.

Для тріоїдів природним є питання про введення аналога лівої (правої) нільпотентної напівгрупи рангу *n*.

Наведемо визначення вільного лівого *n*-тринільпотентного тріоїда [83].

Через Ω позначимо сигнатуру тріоїда. Нехай $a_1,\ldots,a_n$ – індивідуальні змінні. Через $P(a_1,\ldots,a_n)$ будемо позначати множину всіх термів алгебр сигнатури Ω, які мають вигляд $a_1 \circ_1 \ldots \circ_{n-1} a_n$ з розстановкою дужок, де $\circ_1,\ldots,\circ_{n-1} \in \Omega$. Тріоїд $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ називається лівим триніпольтентним, якщо для деякого $n \in \mathbb{N}$, будь-якого $a \in T$ та будь-якого $p(a_1,\ldots,a_n) \in P(a_1,\ldots,a_n)$ мають місце наступні тотожності:

$$p(a_1,\ldots,a_n) * a = p(a_1,\ldots,a_n), \tag{2.1}$$

$$p(a_1,\ldots,a_n) \vdash a = a_1 \vdash \ldots \vdash a_n, \tag{2.2}$$

де $* \in \{\dashv,\perp\}$. Найменше серед таких n називається індексом лівої тринільпотентності тріоїда $(T,\dashv,\vdash,\perp)$. Для $k \in \mathbb{N}$ лівий тринільпотентний тріоїд з індексом лівої тринільпотентності $\leq k$ називається лівим k-тринільпотентним. Очевидно, що в будь-якому тріоїді $(T,\dashv,\vdash,\perp)$, за аксіомами $(T3)$, $(T8)$ та асоціативністю операції $\vdash$, маємо

$$p(a_1,\ldots,a_n) \vdash a = a_1 \vdash \ldots \vdash a_n \vdash a.$$

Отже, якщо $(T,\vdash)$ є ліва нільпотентна напівгрупа рангу *n*, то отримаємо тотожність (2.2). Це пояснює як одержано третю тотожність у визначенні лівого тринільпотентного тріоїда. Праві k-тринільпотентні тріоїди визначаються двоїстим чином [83].

Зрозуміло, що операції будь-якого лівого (правого) 1-тринільпотентного тріоїда збігаються та він є напівгрупою лівих (правих) нулів.

2.2. Вільні *n*-нільпотентні тріоїди

У цьому підрозділі представлено вільні *n*-нільпотентні тріоїди. Використовуючи конструкцію 0-трисполуки підтріоїдів, описано структуру вказаних вільних алгебр. Крім того, охарактеризовано найменшу *n*-нільпотентну конгруенцію на вільному тріоїді. Результати цього підрозділу опубліковано у статті Юл. В. Жучок [102].

Неважко побачити, що клас усіх *n*-нільпотентних тріоїдів є підмноговидом многовиду тріоїдів. Вільним *n*-нільпотентним тріоїдом називається тріоїд, який є вільним у многовиді *n*-нільпотентних тріоїдів.

Будемо використовувати позначення підрозділу 1.2. Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $P_n \subset P$ є множиною, яка містить слова w з довжиною не більше, ніж n. Визначимо операції $\prec, \succ$ і $\uparrow$ на множині $P_n \cup \{0\}$ за правилами:

$$w \prec u = \begin{cases} w\tilde{u}, & l_{wu} \le n, \\ 0, & l_{wu} > n, \end{cases}$$

$$w \succ u = \begin{cases} \tilde{w}u, & l_{wu} \le n, \\ 0, & l_{wu} > n, \end{cases}$$

$$w \uparrow u = \begin{cases} wu, & l_{wu} \le n, \\ 0, & l_{wu} > n, \end{cases}$$

$$w * 0 = 0 * w = 0 * 0 = 0$$

для всіх $w, u \in P_n$ та $* \in \{\prec, \succ, \uparrow\}$. Алгебру $(P_n \cup \{0\}, \prec, \succ, \uparrow)$ позначимо через $P_n^0(Y)$.

Теорема 2.3 ([102], теорема 1). $P_n^0(Y)$ *– вільний n-нільпотентний тріоїд.*

У [77] введено аналог поняття трисполуки підтріоїдів для класу тріоїдів. Нагадаємо це визначення.

Тріоїд S з нулем 0 називається 0-трисполукою підтріоїдів S_β, $\beta \in B$, де B – ідемпотентний тріоїд, якщо $S = \bigcup_{\beta \in B} S_\beta$, $S_\beta \cap S_\gamma = \{0\}$ для $\beta \neq \gamma$ і $S_\beta \dashv S\gamma \subseteq S_{\beta \dashv \gamma}$, $S_\beta \vdash S\gamma \subseteq S_{\beta \vdash \gamma}$, $S_\beta \perp S\gamma \subseteq S_{\beta \perp \gamma}$ для будь-яких $\beta, \gamma \in B$. Якщо B є напівгрупою ідемпотентів (сполукою), то говорять, що S – 0-сполука підтріоїдів S_β, $\beta \in B$.

Зазначимо, що поняття 0-трисполуки підтріоїдів узагальнює поняття 0-дісполуки піддімоноїдів [55] і поняття 0-сполуки напівгруп [111].

Нехай $\omega \in F[X]$ і $w \in P_n^0(Y) \setminus \{0\}$. Позначатимемо першу (відповідно, останню) літеру слова ω через $\omega^{(0)}$ (відповідно, $\omega^{(1)}$). Припустимо, що u є початковим (відповідно, кінцевим) підсловом слова w мінімальної довжини таке, що $u^{(1)} \in \overline{Y}$ (відповідно, $u^{(0)} \in \overline{Y}$). У цьому випадку $\tilde{u}^{(1)}$ (відповідно, $\tilde{u}^{(0)}$) позначатимемо через $w^{(0)}$ (відповідно, $w^{(1)}$).

Нехай

$$Q_{(i,j)} = \{w \in P_n^0(Y) \setminus \{0\} \mid (\tilde{w}^{(0)}, \tilde{w}^{(1)}) = (i, j)\} \cup \{0\},$$

$$Q_{(i)} = \{w \in P_n^0(Y) \setminus \{0\} \mid \tilde{w}^{(0)} = i\} \cup \{0\},$$

$$Q_{[i]} = \{w \in P_n^0(Y) \setminus \{0\} \mid \tilde{w}^{(1)} = i\} \cup \{0\}$$

для всіх $i, j \in Y$, $n > 1$ та $|Y| > 1$.

Наступна структурна теорема дає декомпозиції $P_n^0(Y)$ в 0-сполуки підтріоїдів.

Теорема 2.4 ([102], теорема 2). *Вільний n-нільпотентний тріоїд $P_n^0(Y)$ є 0-сполукою підтріоїдів*

(i) $Q_{(i,j)}, (i, j) \in Y_{rb}$, якщо $n > 1$ та $|Y| > 1$;

(ii) $Q_{(i)}$, $i \in Y_{lz}$, якщо $n > 1$ та $|Y| > 1$;

$(iii)\, Q_{[i]},\ i \in Y_{rz}$, *якщо* $n > 1$ *та* $|Y| > 1$.

Покладемо

$$Q_{(i,j,k,s)} = \{w \in P_n^0(Y) \setminus \{0\} \mid (\tilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \tilde{w}^{(1)}) = (i,j,k,s)\} \bigcup \{0\}$$

для $i,\ j,\ k,\ s \in Y,\ n > 3$ та $|Y| > 1$;

$$Q_{(i,j,k)} = \{w \in P_n^0(Y) \setminus \{0\} \mid (\tilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}) = (i,j,k,)\} \bigcup \{0\},$$

$$Q_{[i,j,k]} = \{w \in P_n^0(Y) \setminus \{0\} \mid (w^{[0]}, w^{[1]}, \tilde{w}^{(1)}) = (i,j,k,)\} \bigcup \{0\},$$

для $i,\ j,\ k \in Y,\ n > 2$ та $|Y| > 1$;

$$Q_{[i,j]} = \{w \in P_n^0(Y) \setminus \{0\} \mid (w^{[0]}, w^{[1]}) = (i,j)\} \bigcup \{0\}$$

для $i,\ j \in Y,\ n > 1$ та $|Y| > 1$.

Наступні дві структурні теореми дають декомпозиції тріоїда $P_n^0(Y)$ в 0-трисполуки підтріоїдів.

Теорема 2.5 ([102], теорема 3). *Вільний n-нільпотентний тріоїд* $P_n^0(Y)$ *є 0-трисполукою підтріоїдів*

$(i)\, Q_{(i,j,k,s)},\ (i,\ j,\ k,s) \in FRT(Y)$, *якщо* $n > 3$ *та* $|Y| > 1$;

$(ii)\, Q_{(i,j,k)},\ (i,j,k) \in Y_{lz,rd}$, *якщо* $n > 2$ *та* $|Y| > 1$;

$(iii)\, Q_{[i,j,k]},\ (i,j,k) \in Y_{rd,rz}$, *якщо* $n > 2$ *та* $|Y| > 1$;

$(iv)\, Q_{[i,j]},\ (i,j) \in Y_{lz,rz}^{rb}$, *якщо* $n > 1$ *та* $|Y| > 1$.

Нехай

$$W_{(i,j,k)} = \{w \in P_n^0(Y) \setminus \{0\} \mid (\tilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, \tilde{w}^{(1)}) = (i,j,k)\} \bigcup \{0\},$$

$$W_{[i,j,k]} = \{w \in P_n^0(Y) \setminus \{0\} \mid (\tilde{w}^{(0)}, w^{[1]}, \tilde{w}^{(1)}) = (i,j,k)\} \bigcup \{0\}$$

для $i,\ j,\ k \in Y,\ n > 2$ та $|Y| > 1$;

$$W_{(i,j)} = \{w \in P_n^0(Y) \setminus \{0\} \mid (\tilde{w}^{(0)}, w^{[0]}) = (i,j)\} \bigcup \{0\},$$

$$W_{[i,j]} = \{w \in P_n^0(Y) \setminus \{0\} \mid (\tilde{w}^{(0)}, w^{[1]}) = (i,j)\} \bigcup \{0\},$$

$$W_{(i,j]}=\{w\in P_n^0(Y)\setminus\{0\}\,|\,(w^{[0]},\tilde{w}^{(1)})=(i,j)\}\cup\{0\},$$

$$W_{[i,j)}=\{w\in P_n^0(Y)\setminus\{0\}\,|\,(w^{[1]},\tilde{w}^{(1)})=(i,j)\}\cup\{0\},$$

$$W_{(i)}=\{w\in P_n^0(Y)\setminus\{0\}\,|\,w^{[0]}=i\}\cup\{0\},$$

$$W_{[i]}=\{w\in P_n^0(Y)\setminus\{0\}\,|\,w^{[1]}=i\}\cup\{0\}$$

для $i,j\in Y,\ n>1$ та $|Y|>1$.

Теорема 2.6 ([102], теорема 4). *Вільний n-нільпотентний тріоїд $P_n^0(Y)$ є 0-трисполукою підтріоїдів*

$(i)\,W_{(i,j,k)},\ (i,j,k)\in(FRct(Y))^{\dashv}$, *якщо* $n>2$ *та* $|Y|>1$;

$(ii)\,W_{[i,j,k]},\ (i,j,k)\in(FRct(Y))^{\vdash}$, *якщо* $n>2$ *та* $|Y|>1$;

$(iii)\,W_{(i,j)},\ (i,j)\in(Y_{lz,rb})^{\dashv}$, *якщо* $n>1$ *та* $|Y|>1$;

$(iv)\,W_{[i,j]},\ (i,j)\in(Y_{lz,rb})^{\vdash}$, *якщо* $n>1$ *та* $|Y|>1$;

$(v)\,W_{(i,j]},\ (i,j)\in(Y_{rb,rz})^{\dashv}$, *якщо* $n>1$ *та* $|Y|>1$;

$(vi)\,W_{[i,j)},\ (i,j)\in(Y_{rb,rz})^{\vdash}$, *якщо* $n>1$ *та* $|Y|>1$;

$(vii)\,W_{(i)},\ i\in(Y_{lz,rz})^{\dashv}$, *якщо* $n>1$ *та* $|Y|>1$;

$(viii)\,W_{[i]},\ i\in(Y_{lz,rz})^{\vdash}$, *якщо* $n>1$ *та* $|Y|>1$.

Далі представимо найменшу *n*-нільпотентну конгруенцію на вільному тріоїді.

Якщо $f:T_1\to T_2$ – гомоморфізм тріоїдів, то відповідну конгруенцію на T_1 позначатимемо через Δ_f. Якщо α – конгруенція на тріоїді $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ така, що $(T,\dashv,\vdash,\perp)/\alpha$ – *n*-нільпотентний тріоїд, то говорять, що α є *n*-нільпотентною конгруенцією.

Нехай $Frt(Y)$ – вільний тріоїд. Зафіксуємо $n\in\mathbb{N}$ і визначимо відношення ν_n на $Frt(Y)$, поклавши

$w_1 v_n w_2$ тоді і тільки тоді, коли $w_1 = w_2$ або $l_{w_1} > n,\ l_{w_2} > n.$

Теорема 2.7 ([102], теорема 5). *Відношення* v_n *є найменшою* n*-нільпотентною конгруенцією на вільному тріоїді* $Frt(Y)$.

2.3. Будова вільних лівих *n*-тринільпотентних тріоїдів

Ж.-Л. Лоде і М. О. Ронко ввели поняття тріоїда та представили вільний тріоїд рангу 1. У цьому підрозділі введено многовид лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів, які є аналогами лівих (правих) нільпотентних напівгруп рангу n, розглянутих Б. М. Шайном. Побудовано вільний лівий (правий) n-тринільпотентний тріоїд довільного рангу та окремо розглянуто вільні ліві (праві) n-тринільпотентні тріоїди рангу 1. Крім того, показано, що група автоморфізмів вільного лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда є ізоморфною симетричній групі. Результати цього підрозділу опубліковано у [83].

Клас усіх лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів (див. підрозділ 2.1) утворює підмноговид многовиду тріоїдів. Тріоїд, який є вільним у многовиді лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів, будемо називати вільним лівим (правим) n-тринільпотентним тріоїдом.

Нехай $n,k \in \mathbb{N}$ та $L \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$. Покладемо $L+k = \{m+k \mid m \in L\}$. Зрозуміло, що $\varnothing + k = \varnothing$. Для $L \neq \varnothing$ покладемо $L^{k,n} = \{m \in L \mid k+m \leq n\}$, і позначимо найменше число множини L через L_{min}. Очевидно, $L^{k,n} = \varnothing$, якщо $k+m > n$ для всіх $m \in L$.

Нам знадобиться наступна лема.

Лема 2.8. *Нехай* $n,\ m,\ s \in \mathbb{N}$ *та* $K \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$, $K \neq \varnothing$. *Тоді*

$$K^{m+s,n} + m + s = (K^{s,n} + s)^{m,n} + m.$$

Доведення. Нехай $x\in K^{m+s,n}+m+s$. Тоді $x=y+m+s,$ де $m+s+y\le n$ для $y\in K.$ З $m+s+y\le n$ випливає, що $s+y<n$ для $y\in K.$ Таким чином,

$$x=y+s+m\in(K^{s,n}+s)^{m,n}+m.$$

І навпаки, нехай $x\in(K^{s,n}+s)^{m,n}+m.$ Тоді $x=y+s+m,$ де $s+y\le n$ та $m+y+s\le n$ для $y\in K.$ Отже, $m+s+y\le n$ для $y\in K$ і

$$x=y+m+s\in K^{m+s,n}+m+s.$$

Лему доведено.

Нехай X – довільна непорожня множина та $F[X]$ – вільна напівгрупа на X, а також $w\in F[X]$. Як і раніше, довжину слова w позначаємо через l_w. Зафіксуємо $n\in\mathbb{N}$. Якщо $l_w\ge n$, то через $\overset{\xrightarrow{n}}{w}$ позначатимемо початкове підслово довжини n слова w, і якщо $l_w<n$, то нехай $\overset{\xrightarrow{n}}{w}=w$. Зрозуміло, що $\overset{\xrightarrow{n}}{\overset{\xrightarrow{n}}{wu}v}=\overset{\xrightarrow{n}}{wuv}=\overset{\xrightarrow{n}}{w\overset{\xrightarrow{n}}{uv}}$ для всіх $w,u,v\in F[X]$. Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ на

$$V_n=\{(w,L)\mid w\in F[X],\ l_w\le n,\ L\subseteq\{1,2,\ldots,l_w\},\ L\ne\varnothing\}$$

за такими правилами:

$$(w,L)\dashv(u,R)=(\overset{\xrightarrow{n}}{wu},L),$$

$$(w,L)\vdash(u,R)=\begin{cases}(\overset{\xrightarrow{n}}{wu},\{n\}), & n<l_w+R_{min},\\ (\overset{\xrightarrow{n}}{wu},R^{l_w,n}+l_w) & \textit{в інших випадках},\end{cases}$$

$$(w,L)\perp(u,R)=(\overset{\xrightarrow{n}}{wu},L\cup(R^{l_w,n}+l_w))$$

для всіх $(w,L),(u,R)\in V_n$. Алгебру $(V_n,\dashv,\vdash,\perp)$ позначимо через $FT_n^l(X)$.

Сформулюємо основний результат підрозділу 2.3.

Теорема 2.9. $FT_n^l(X)$ – *вільний лівий n-тринільпотентний тріоїд.*

Доведення. Доведення випливає з лем (2.10) – (2.18).

Лема 2.10. $FT_n^l(X)$ *задовольняє аксіоми* $(T1)$, $(T4)$ *тріоїда та операція* $\dashv$ *на* $FT_n^l(X)$ *асоціативна.*

Доведення. Нехай $(w,L),\ (u,R),\ (v,K)\in FT_n^l(X)$. Маємо

$$((w,L)\dashv(u,R))\dashv(v,K)=(\overset{n}{\overrightarrow{wu}},L)\dashv(v,K)=(\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}v}},L)$$

$$=(\overset{n}{\overrightarrow{w\overset{n}{\overrightarrow{uv}}}},L)=(w,L)\dashv(\overset{n}{\overrightarrow{uv}},F_*)=(w,L)\dashv((u,R)*(v,K))$$

для деякого $F_*\subseteq\{1,2,\ldots,l_{\overset{n}{\overrightarrow{uv}}}\}$ та всіх $*\in\{\dashv,\vdash,\perp\}$.

Лему доведено.

Лема 2.11. $FT_n^l(X)$ *задовольняє аксіому* $(T2)$ *тріоїда.*

Доведення. Візьмемо $(w,L),\ (u,R),\ (v,K)\in FT_n^l(X)$ та розглянемо два наступні випадки:

$$l_w+R_{min}\le n,\tag{2.3}$$

$$l_w+R_{min}>n.\tag{2.4}$$

Якщо випадок (2.3) справджується, то

$$((w,L)\vdash(u,R))\dashv(v,K)=(\overset{n}{\overrightarrow{wu}},R^{l_w,n}+l_w)\dashv(v,K)=(\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}v}},R^{l_w,n}+l_w)$$

$$=(\overset{n}{\overrightarrow{w\overset{n}{\overrightarrow{uv}}}},R^{l_w,n}+l_w)=(w,L)\vdash(\overset{n}{\overrightarrow{uv}},R)=(w,L)\vdash((u,R)\dashv(v,K)).$$

Нехай далі (2.4) виконується. Отримуємо

$$((w,L)\vdash(u,R))\dashv(v,K)=(\overset{n}{\overrightarrow{wu}},\{n\})\dashv(v,K)=(\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}v}},\{n\})$$

$$=(\overset{n}{\overrightarrow{w\overset{n}{\overrightarrow{uv}}}},\{n\})=(w,L)\vdash(\overset{n}{\overrightarrow{uv}},R)=(w,L)\vdash((u,R)\dashv(v,K)).$$

Отже, $FT_n^l(X)$ задовольняє аксіому $(T2)$.

Лему доведено.

Лема 2.12. *Операція* $\perp$ *на* $FT_n^l(X)$ *асоціативна.*

Доведення. Зауважимо, що для $(w,L),\ (u,R),\ (v,K)\in FT_n^l(X)$ маємо

$$K^{l_{wu},n}+l_{wu}=(K^{l_u,n}+l_u)^{l_w,n}+l_w \tag{2.5}$$

за лемою 2.8, та

$$(K^{l_u,n}+l_u)^{l_w,n}+l_w=\varnothing, \tag{2.6}$$

якщо $l_{\overrightarrow{wu}^{n}}=n$. Використовуючи (2.5) та (2.6), отримаємо

$$((w,L)\perp(u,R))\perp(v,K)=(\overrightarrow{wu}^{n},L\cup(R^{l_w,n}+l_w))\perp(v,K)$$

$$=(\overrightarrow{\overrightarrow{wu}^{n}v}^{n},(L\cup(R^{l_w,n}+l_w))\cup(K^{l_{\overrightarrow{wu}^{n}},n}+l_{\overrightarrow{wu}^{n}}))$$

$$=\begin{cases}(\overrightarrow{\overrightarrow{wu}^{n}v}^{n},(L\cup(R^{l_w,n}+l_w))\cup(K^{l_{wu},n}+l_{wu})), & l_{\overrightarrow{wu}^{n}}=l_{wu},\\ (\overrightarrow{\overrightarrow{wu}^{n}v}^{n},L\cup(R^{l_w,n}+l_w)), & l_{\overrightarrow{wu}^{n}}=n\end{cases}$$

$$=(\overrightarrow{w\overrightarrow{uv}^{n}}^{n},L\cup(R^{l_w,n}+l_w)\cup((K^{l_u,n}+l_u)^{l_w,n}+l_w))$$

$$=(\overrightarrow{w\overrightarrow{uv}^{n}}^{n},L\cup((R^{l_w,n}\cup(K^{l_u,n}+l_u)^{l_w,n})+l_w))$$

$$=(\overrightarrow{w\overrightarrow{uv}^{n}}^{n},L\cup((R\cup(K^{l_u,n}+l_u))^{l_w,n}+l_w))$$

$$=(w,L)\perp(\overrightarrow{uv}^{n},R\cup(K^{l_u,n}+l_u))=(w,L)\perp((u,R)\perp(v,K)).$$

Таким чином, операція $\perp$ асоціативна.

Лему доведено.

Лема 2.13. $FT_n^l(X)$ *задовольняє аксіому* $(T5)$ *тріоїда.*

Доведення. Для $(w,L),\ (u,R),\ (v,K)\in FT_n^l(X)$ маємо

$$((w,L)\perp(u,R))\dashv(v,K)=(\overset{n}{\overrightarrow{wu}},L\cup(R^{l_w,n}+l_w))\dashv(v,K)$$

$$=(\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}v}},L\cup(R^{l_w,n}+l_w))=(\overset{n}{\overrightarrow{w\overset{n}{\overrightarrow{uv}}}},L\cup(R^{l_w,n}+l_w))$$

$$=(w,L)\perp(\overset{n}{\overrightarrow{uv}},R)=(w,L)\perp((u,R)\dashv(v,K)).$$

Лему доведено.

Лема 2.14. $FT_n^l(X)$ *задовольняє аксіому* $(T6)$ *тріоїда.*

Доведення. Для $(w,L),\ (u,R),\ (v,K)\in FT_n^l(X)$ розглянемо такі два випадки:

$$l_u+K_{min}\le n, \tag{2.7}$$

$$l_u+K_{min}>n. \tag{2.8}$$

Припустимо, що (2.7) виконується. Використовуючи (2.5) та (2.6), маємо

$$((w,L)\dashv(u,R))\perp(v,K)=(\overset{n}{\overrightarrow{wu}},L)\perp(v,K)=(\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}v}},L\cup(K^{l_{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}},n}+l_{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}}))$$

$$=\begin{cases}(\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}v}},L\cup(K^{l_{wu},n}+l_{wu})), & l_{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}}=l_{wu},\\[2ex] (\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}v}},L), & l_{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}}=n\end{cases}$$

$$=(\overset{n}{\overrightarrow{w\overset{n}{\overrightarrow{uv}}}},L\cup((K^{l_u,n}+l_u)^{l_w,n}+l_w))$$

$$=(w,L)\perp(\overset{n}{\overrightarrow{uv}},K^{l_u,n}+l_u)=(w,L)\perp((u,R)\vdash(v,K)).$$

Перейдемо до випадку (2.8). Зауважимо, що з (2.8) випливає $K^{l_{wu},n}+l_{wu}=\varnothing$. Використовуючи цей факт та обчислення, наведені вище, отримаємо

$$((w,L)\dashv(u,R))\perp(v,K)=$$

$$=\begin{cases}(\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}v}},L\cup(K^{l_{wu},n}+l_{wu})), & l_{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}}=l_{wu},\\ (\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}v}},L), & l_{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}}=n\end{cases}$$

$$=(\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}v}},L)=(\overset{n}{\overrightarrow{w\overset{n}{\overrightarrow{uv}}}},L\cup(\{n\}^{l_w,n}+l_w))$$

$$=(w,L)\perp(\overset{n}{\overrightarrow{uv}},\{n\})=(w,L)\perp((u,R)\vdash(v,K)).$$

Отже, $FT_n^l(X)$ задовольняє аксіому $(T6)$.

Лему доведено.

Лема 2.15. $FT_n^l(X)$ *задовольняє аксіоми* $(T3)$, $(T8)$ *тріоїда та операція* $\vdash$ *на* $FT_n^l(X)$ *асоціативна.*

Доведення. Нехай

$$l_{wu}+K_{min}\le n \tag{2.9}$$

для (w,L), (u,R), $(v,K)\in FT_n^l(X)$. З (2.9) випливає, що $l_{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}}+K_{min}\le n$, а отже, $l_{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}}=l_{wu}<n$. Використовуючи це та (2.5), отримаємо

$$((w,L)\dashv(u,R))\vdash(v,K)=(\overset{n}{\overrightarrow{wu}},L)\vdash(v,K)=(\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}v}},K^{l_{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}},n}+l_{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}})$$

$$=(\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}v}},K^{l_{wu},n}+l_{wu})=(\overset{n}{\overrightarrow{w\overset{n}{\overrightarrow{uv}}}},(K^{l_u,n}+l_u)^{l_w,n}+l_w)$$

$$= (w,L)\vdash(\overrightarrow{uv}^{n}, K^{l_u,n} + l_u) = (w,L)\vdash((u,R)\vdash(v,K)),$$

$$((w,L)\vdash(u,R))\vdash(v,K)$$

$$= \left(\begin{cases} (\overrightarrow{wu}^{n},\{n\}), & n < l_w + R_{min}, \\ (\overrightarrow{wu}^{n}, R^{l_w,n} + l_w) & в\ інших\ випадках \end{cases}\right)\vdash(v,K) = (\overrightarrow{\overrightarrow{wu}^{n}v}^{n}, K^{l_{\overrightarrow{wu}^{n}},n} + l_{\overrightarrow{wu}^{n}}),$$

$$((w,L)\perp(u,R))\vdash(v,K) = (\overrightarrow{wu}^{n}, L\cup(R^{l_w,n} + l_w))\vdash(v,K) = (\overrightarrow{\overrightarrow{wu}^{n}v}^{n}, K^{l_{\overrightarrow{wu}^{n}},n} + l_{\overrightarrow{wu}^{n}}).$$

Перейдемо до випадку

$$l_{wu} + K_{min} > n. \qquad (2.10)$$

З випадку (2.10) випливає, що $l_{\overrightarrow{wu}^{n}} + K_{min} > n$, та маємо

$$((w,L)\dashv(u,R))\vdash(v,K) = (\overrightarrow{wu}^{n}, L)\vdash(v,K) = (\overrightarrow{\overrightarrow{wu}^{n}v}^{n},\{n\})$$

$$= (\overrightarrow{w\overrightarrow{uv}^{n}}^{n},\{n\}) = (w,L)\vdash\begin{cases} (\overrightarrow{uv}^{n},\{n\}), & n < l_u + K_{min}, \\ (\overrightarrow{uv}^{n}, K^{l_u,n} + l_u) & в\ інших\ випадках \end{cases}$$

$$= (w,L)\vdash((u,R)\vdash(v,K)),$$

$$((w,L)\vdash(u,R))\vdash(v,K)$$

$$= \left(\begin{cases} (\overrightarrow{wu}^{n},\{n\}), & n < l_w + R_{min}, \\ (\overrightarrow{wu}^{n}, R^{l_w,n} + l_w) & в\ інших\ випадках \end{cases}\right)\vdash(v,K) = (\overrightarrow{\overrightarrow{wu}^{n}v}^{n},\{n\}),$$

$$((w,L)\perp(u,R))\vdash(v,K) = (\overrightarrow{wu}^{n}, L\cup(R^{l_w,n} + l_w))\vdash(v,K) = (\overrightarrow{\overrightarrow{wu}^{n}v}^{n},\{n\}).$$

Отже, $FT_n^l(X)$ задовольняє аксіоми (T3), (T8) тріоїда та операція $\vdash$ є асоціативною.

Лему доведено.

Лема 2.16. $FT_n^l(X)$ *задовольняє аксіому* $(T7)$ *тріоїда.*

Доведення. Візьмемо довільні елементи $(w,L),\ (u,R),\ (v,K)\in FT_n^l(X)$ та розглянемо випадки (2.3) та (2.4).

Припустимо (2.3) виконується. Очевидно, $l_u \ge R_{min}$ дає

$$(R\cup(K^{l_u,n}+l_u))_{min}=R_{min}. \qquad (2.11)$$

Використовуючи (2.5), (2.6) та (2.11), отримаємо

$$((w,L)\vdash(u,R))\perp(v,K)=(\overset{n}{\overrightarrow{wu}},R^{l_w,n}+l_w)\perp(v,K)$$

$$=(\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}v}},(R^{l_w,n}+l_w)\cup(K^{l_{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}},n}+l_{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}}))$$

$$=\begin{cases}(\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}v}},(R^{l_w,n}+l_w)\cup(K^{l_{wu},n}+l_{wu})), & l_{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}}=l_{wu},\\[2ex] (\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}v}},R^{l_w,n}+l_w), & l_{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}}=n\end{cases}$$

$$=(\overset{n}{\overrightarrow{w\overset{n}{\overrightarrow{uv}}}},(R^{l_w,n}+l_w)\cup((K^{l_u,n}+l_u)^{l_w,n}+l_w))$$

$$=(\overset{n}{\overrightarrow{w\overset{n}{\overrightarrow{uv}}}},(R^{l_w,n}\cup(K^{l_u,n}+l_u)^{l_w,n})+l_w)$$

$$=(\overset{n}{\overrightarrow{w\overset{n}{\overrightarrow{uv}}}},(R\cup(K^{l_u,n}+l_u))^{l_w,n}+l_w)=(w,L)\vdash(\overset{n}{\overrightarrow{uv}},R\cup(K^{l_u,n}+l_u))$$

$$=(w,L)\vdash((u,R)\perp(v,K)).$$

Нехай (2.4) виконується. Очевидно, що з (2.4) випливає $l_w+l_u>n$, а отже, $l_{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}}=n$. Використовуючи це та (2.11), маємо

$$((w,L)\vdash(u,R))\perp(v,K)=(\overset{n}{\overrightarrow{wu}},\{n\})\perp(v,K)=(\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}v}},\{n\}\cup(K^{l_{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}},n}+l_{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}}))$$

$$= (\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{wu}}v}}, \{n\} \cup (K^{n,n} + n)) = (\overset{n}{\overrightarrow{w\overset{n}{\overrightarrow{uv}}}}, \{n\})$$

$$= (w, L) \vdash (\overset{n}{\overrightarrow{uv}}, R \cup (K^{l_u, n} + l_u)) = (w, L) \vdash ((u, R) \perp (v, K)).$$

Отже, $FT_n^l(X)$ задовольняє аксіому $(T7)$.

Лему доведено.

Лема 2.17. $FT_n^l(X)$ *– лівий n-тринільпотентний тріоїд.*

Доведення. За лемами (2.10) – (2.16), $FT_n^l(X)$ – тріоїд. Покажемо, що він лівий n-тринільпотентний.

Нехай $(w_1, L_1), \ldots, (w_n, L_n) \in FT_n^l(X)$. Візьмемо будь-який терм $p(a_1, \ldots, a_n) \in P(a_1, \ldots, a_n)$ (див підрозділ 2.1) і замінимо a_i елементами (w_i, L_i) для $1 \le i \le n$, а також символи операцій із сигнатури Ω відповідними операціями $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ з $FT_n^l(X)$. Таким чином, отримаємо елемент з $FT_n^l(X)$, який позначимо через (u, R). Зрозуміло, що $l_u = n$. Тоді для будь-якого $(v, K) \in FT_n^l(X)$,

$$(u, R) \dashv (v, K) = (\overset{n}{\overrightarrow{uv}}, R) = (u, R),$$

$$(u, R) \perp (v, K) = (\overset{n}{\overrightarrow{uv}}, R \cup (K^{l_u, n} + l_u)) = (u, R \cup (K^{n,n} + n)) = (u, R).$$

Крім того, якщо $n = 1$, то

$$p((w_1, L_1)) \vdash (v, K) = (w_1, L_1) \vdash (v, K) = (w_1, L_1)$$

згідно з $l_{w_1} = 1$ та $L_1 = \{1\}$. Для $n > 1$, використовуючи аксіоми $(T3)$, $(T8)$ та асоціативність операції $\vdash$, маємо

$$p((w_1, L_1), \ldots, (w_n, L_n)) \vdash (v, K)$$

$$= (w_1, L_1) \vdash \ldots \vdash (w_{n-1}, L_{n-1}) \vdash (w_n, L_n) \vdash (v, K) = (w', L') \vdash (w_n, L_n) \vdash (v, K)$$

для деякого $(w', L') \in FT_n^l(X)$. Очевидно, що $l_{w'} = n$ або $n-1$. Нехай $l_{w'} = n$. Тоді

$$(w',L')\vdash(w_n,L_n)\vdash(v,K)=(w',\{n\})\vdash(v,K)=(w',\{n\}).$$

Тепер розглянемо випадок $l_{w'}=n-1$. Розділимо його на підвипадки:

$$l_{w_n}=1;\ l_{w_n}>1 \text{ та } (L_n)_{min}>1;\ l_{w_n}>1, \text{ а також } (L_n)_{min}=1.$$

Якщо $l_{w_n}=1$, то

$$(w',L')\vdash(w_n,L_n)\vdash(v,K)=(w'w_n,\{n\})\vdash(v,K)=(w'w_n,\{n\})$$

оскільки $L_n=\{1\}$. У випадку $l_{w_n}>1$ та $(L_n)_{min}>1$ отримаємо

$$(w',L')\vdash(w_n,L_n)\vdash(v,K)=(\overrightarrow{w'w_n}^{n},\{n\})\vdash(v,K)=(\overrightarrow{w'w_n}^{n},\{n\}).$$

Для $l_{w_n}>1$ та $(L_n)_{min}=1$ маємо

$$(w',L')\vdash(w_n,L_n)\vdash(v,K)=(\overrightarrow{w'w_n}^{n},(L_n)^{l_{w',n}}+l_{w'})\vdash(v,K)$$

$$=(\overrightarrow{w'w_n}^{n},\{1\}+(n-1))\vdash(v,K)=(\overrightarrow{w'w_n}^{n},\{n\})\vdash(v,K)=(\overrightarrow{w'w_n}^{n},\{n\}).$$

Отже,

$$p\big((w_1,L_1),\ldots,(w_n,L_n)\big)\vdash\big(v,K\big)=(w_1,L_1)\vdash\ldots\vdash(w_n,L_n)$$

для будь-якого $\big(v,K\big)\in FT_n^l(X)$.

Таким чином, за визначенням, $FT_n^l(X)$ – лівий тринільпотентний тріоїд.

Водночас, для $n>1$, будь-якого $(x_i,\{1\})\in FT_n^l(X)$, де $x_i\in X$, $1\le i\le n$, і будь-якого

$$p((x_1,\{1\}),\ldots,(x_{n-1},\{1\}))\in P((x_1,\{1\}),\ldots,(x_{n-1},\{1\}))$$

(див. підрозділ 2.1) отримаємо

$$p((x_1,\{1\}),\ldots,(x_{n-1},\{1\}))\vdash(x_n,\{1\})=(x_1,\{1\})\vdash\ldots\vdash(x_{n-1},\{1\})\vdash(x_n,\{1\})$$

$$=(x_1\ldots x_{n-1},\{n-1\})\vdash(x_n,\{1\})=(x_1\ldots x_n,\{n\})\ne(x_1,\{1\})\vdash\ldots\vdash(x_{n-1},\{1\}).$$

Це означає, що $FT_n^l(X)$ має індекс лівої тринільпотентності n.

Лему доведено.

Лема 2.18. *$FT_n^l(X)$ є вільним у многовиді лівих n-тринільпотентних тріоїдів.*

Доведення. Для $L \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ нехай

$$L_{od} = j_1 j_2 \ldots j_p, \text{ якщо } L = \{j_1, j_2, \ldots, j_p\} \text{ та } j_1 < j_2 < \ldots < j_p.$$

Далі нехай $(T, \dashv', \vdash', \perp')$ – довільний лівий n-тринільпотентий тріоїд, та нехай $\varphi : X \to T$ – довільне відображення. Визначимо відображення

$$\phi : FT_n^l(X) \to (T, \dashv', \vdash', \perp') : w_1 \mapsto w_1\phi,$$

поклавши

$$w_1\phi = (x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_{j_1-1}\varphi) \vdash' (x_{j_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_{j_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (x_{j_p}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_k\varphi)$$

для $w_1 = (x_1 \ldots x_k, \{j_1, j_2, \ldots, j_p\}) \in FT_n^l(X)$, де $\{j_1, j_2, \ldots, j_p\}_{od} = j_1 j_2 \ldots j_p$. Якщо $j_1 = 1$, будемо вважати, що $x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_{j_1-1}\varphi$ є зовнішньо приєднаною одиницею напівгрупи $(T, \vdash')$. За аксіомами тріоїда ϕ є коректно визначеним відображенням.

Тепер покажемо, що ϕ – гомоморфізм. Маємо

$$w_2\phi = (y_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_{i_1-1}\varphi) \vdash' (y_{i_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (y_{i_s}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi)$$

для $w_2 = (y_1 \ldots y_r, \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}) \in FT_n^l(X)$, де $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}_{od} = i_1 i_2 \ldots i_s$.

Розглянемо два випадки:

$$k + r \le n, \tag{2.12}$$

$$k + r > n. \tag{2.13}$$

У випадку (2.12) отримаємо

$$(w_1 \dashv w_2)\phi = (x_1 \ldots x_k y_1 \ldots y_r, \{j_1, j_2, \ldots, j_p\})\phi$$

$$= (x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_{j_1-1}\varphi) \vdash' (x_{j_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_{j_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp'$$

$$\perp' (x_{j_p}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_k\varphi \dashv' y_1\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi) = ((x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_{j_1-1}\varphi) \vdash'$$

$$\vdash' (x_{j_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_{j_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (x_{j_p}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_k\varphi)) \dashv' (y_1\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi)$$

$$= ((x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_{j_1-1}\varphi) \vdash' (x_{j_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_{j_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp'$$

$$\perp' (x_{j_p}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_k\varphi)) \dashv' ((y_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_{i_1-1}\varphi) \vdash'$$

$$\vdash' (y_{i_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (y_{i_s}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi)) = w_1\phi \dashv' w_2\phi$$

за аксіомами $(T1)$, $(T4)$ та $(T5)$.

Розглянемо випадок (2.13). Поклавши $k + f = n$ для деякого $f \in \mathbb{N}$, маємо

$$(w_1 \dashv w_2)\phi = (x_1x_2\ldots x_k y_1\ldots y_f\,,\ \{j_1, j_2, \ldots, j_p\})\phi$$

$$= (x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_{j_1-1}\varphi) \vdash' (x_{j_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_{j_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp'$$

$$\perp' (x_{j_p}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_k\varphi \dashv' y_1\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_f\varphi)$$

$$= ((x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_{j_1-1}\varphi) \vdash' (x_{j_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_{j_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp'$$

$$\perp' (x_{j_p}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_k\varphi)) \dashv' (y_1\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_f\varphi)$$

$$= (((x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_{j_1-1}\varphi) \vdash' (x_{j_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_{j_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp'$$

$$\perp' (x_{j_p}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_k\varphi)) \dashv' (y_1\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_f\varphi)) \dashv' (y_{f+1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi)$$

$$= ((x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_{j_1-1}\varphi) \vdash' (x_{j_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_{j_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp'$$

$$\perp' (x_{j_p}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_k\varphi)) \dashv' (y_1\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi)$$

$$= ((x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_{j_1-1}\varphi) \vdash' (x_{j_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_{j_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp'$$

$$\perp' (x_{j_p}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_k\varphi)) \dashv' ((y_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_{i_1-1}\varphi) \vdash'$$

$$\vdash' (y_{i_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (y_{i_s}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi)) = w_1\phi \dashv' w_2\phi$$

відповідно до тотожності (2.1) лівого n-тринільпотентного тріоїда, асоціативності операції $\dashv'$ та аксіом $(T1)$, $(T4)$, $(T5)$.

Перейдемо до операції $\vdash$. Розглянемо такі випадки:

$$k + \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}_{min} = k + i_1 < n, \tag{2.14}$$

$$k + i_1 = n, \tag{2.15}$$

$$k = n, \tag{2.16}$$

$$k + i_1 > n, \quad k \neq n. \tag{2.17}$$

Зауважимо, що $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}_{min} = i_1$, оскільки $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}_{od} = i_1 i_2 \ldots i_s$.

Розглянемо випадок (2.14). Нехай $k + f = n$ для деякого $f \in \mathbb{N}$ та нехай i_ε, $1 \le \varepsilon \le s$ є максимальним числом з множини $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ таким, що $i_\varepsilon \le f$. Тоді

$$(w_1 \vdash w_2)\phi = (\overrightarrow{x_1 \ldots x_k y_1 \ldots y_r}^{n},\ \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}^{k,n} + k)\phi$$
$$= (x_1 \ldots x_k y_1 \ldots y_f,\ \{i_1, i_2, \ldots, i_\varepsilon\} + k)\phi = (x_1 \ldots x_k y_1 \ldots y_f,\ \{i_1 + k, i_2 + k, \ldots, i_\varepsilon + k\})\phi$$
$$= (x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_k\varphi \vdash' y_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_{i_1 - 1}\varphi) \vdash' (y_{i_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2 - 1}\varphi) \perp' \ldots \perp'$$
$$\perp' (y_{i_\varepsilon}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_f\varphi)$$
$$= (((x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_k\varphi \vdash' y_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_{i_1 - 1}\varphi) \vdash' (y_{i_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2 - 1}\varphi) \perp' \ldots \perp'$$
$$\perp' (y_{i_\varepsilon}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_f\varphi)) \dashv' (y_{f+1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_{\varepsilon+1} - 1}\varphi)) \perp'$$
$$\perp' (y_{i_{\varepsilon+1}}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_{\varepsilon+2} - 1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (y_{i_s}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi)$$
$$= ((x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_k\varphi \vdash' y_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_{i_1 - 1}\varphi) \vdash' (y_{i_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2 - 1}\varphi) \perp' \ldots \perp'$$
$$\perp' (y_{i_\varepsilon}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_f\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_{\varepsilon+1} - 1}\varphi)) \perp'$$
$$\perp' (y_{i_{\varepsilon+1}}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_{\varepsilon+2} - 1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (y_{i_s}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi)$$
$$= (x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_k\varphi \vdash' y_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_{i_1 - 1}\varphi) \vdash' ((y_{i_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2 - 1}\varphi) \perp' \ldots \perp'$$
$$\perp' (y_{i_s}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi))$$
$$= (x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_k\varphi) \vdash' ((y_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_{i_1 - 1}\varphi) \vdash' (y_{i_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2 - 1}\varphi) \perp' \ldots \perp'$$
$$\perp' (y_{i_s}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi))$$
$$= ((x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_{j_1 - 1}\varphi) \vdash' (x_{j_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_{j_2 - 1}\varphi) \perp' \ldots \perp'$$
$$\perp' (x_{j_p}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_k\varphi)) \vdash' ((y_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_{i_1 - 1}\varphi) \vdash' (y_{i_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2 - 1}\varphi) \perp' \ldots \perp'$$

$$\perp' (y_{i_s}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi)) = w_1\phi \vdash' w_2\phi$$

відповідно до тотожності (2.1) лівого n-тринільпотентного тріоїда, асоціативності операції $\vdash'$ та аксіом $(T3)$, $(T5)$, $(T7)$, $(T8)$.

Дослідимо випадок (2.15):

$$(w_1 \vdash w_2)\phi = (\overrightarrow{x_1 \ldots x_k y_1 \ldots y_r}^{\,n},\ \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}^{k,n} + k)\phi$$

$$= (x_1 \ldots x_k y_1 \ldots y_{i_1},\ \{i_1\} + k)\phi = (x_1 \ldots x_k y_1 \ldots y_{i_1},\ \{i_1 + k\})\phi$$

$$= x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_k\varphi \vdash' y_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_{i_1}\varphi$$

$$= ((x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_k\varphi \vdash' y_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_{i_1}\varphi) \dashv' (y_{i_1+1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2-1}\varphi)) \perp'$$

$$\perp' (y_{i_2}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_3-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (y_{i_s}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi)$$

$$= ((x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_{i_1-1}\varphi) \vdash' (y_{i_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2-1}\varphi)) \perp'$$

$$\perp' (y_{i_2}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_3-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (y_{i_s}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi) = (x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_k\varphi) \vdash'$$

$$\vdash' ((y_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_{i_1-1}\varphi) \vdash' (y_{i_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (y_{i_s}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi))$$

$$= ((x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_{j_1-1}\varphi) \vdash' (x_{j_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_{j_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (x_{j_p}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_k\varphi)) \vdash'$$
$$\vdash' ((y_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_{i_1-1}\varphi) \vdash' (y_{i_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (y_{i_s}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi))$$

$$= w_1\phi \vdash' w_2\phi$$

відповідно до тотожності (2.1) лівого n-тринільпотентного тріоїда, асоціативності операції $\vdash'$ та аксіом $(T2)$, $(T3)$, $(T7)$, $(T8)$.

Якщо випадок (2.16) має місце, то

$$(w_1 \vdash w_2)\phi = (\overrightarrow{x_1 \ldots x_k y_1 \ldots y_r}^{\,n},\ \{n\})\phi = (x_1 \ldots x_k,\ \{n\})\phi = x_1\varphi \vdash' x_2\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_k\varphi$$

$$= (x_1\varphi \vdash' x_2\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_k\varphi) \vdash' ((y_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_{i_1-1}\varphi) \vdash' (y_{i_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2-1}\varphi) \perp'$$

$$\perp' \ldots \perp' (y_{i_s}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi)) = ((x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_{j_1-1}\varphi) \vdash'$$

$$\vdash' (x_{j_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_{j_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (x_{j_p}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_k\varphi)) \vdash' ((y_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_{i_1-1}\varphi) \vdash'$$

$$\vdash' (y_{i_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (y_{i_s}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi)) = w_1\phi \vdash' w_2\phi$$

згідно з тотожністю (2.2) лівого n-тринільпотентного тріоїда та аксіомами $(T3)$, $(T8)$.

Припустимо, що (2.17) виконується. Далі скористаємось тотожностями (2.1), (2.2) лівого n-тринільпотентного тріоїда, асоціативністю операції $\vdash'$ та аксіомами $(T3)$, $(T7)$, $(T8)$. Нехай $k+f=n$ для деякого $f\in\mathbb{N}$. Отримуємо

$$(w_1 \vdash w_2)\phi = (\overrightarrow{x_1 \ldots x_k y_1 \ldots y_r}^{\,n},\ \{n\})\phi$$

$$= (x_1 \ldots x_k y_1 \ldots y_f,\ \{n\})\phi = x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_k\varphi \vdash' y_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_f\varphi$$

$$= (((x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_k\varphi \vdash' y_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_f\varphi) \vdash' (y_{f+1}\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_{i_1-1}\varphi)) \vdash'$$

$$\vdash' (y_{i_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2-1}\varphi)) \perp' ((y_{i_2}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_3-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (y_{i_s}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi))$$

$$= ((x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_k\varphi) \vdash' ((y_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_{i_1-1}\varphi) \vdash' (y_{i_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2-1}\varphi))) \perp'$$

$$\perp' ((y_{i_2}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_3-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (y_{i_s}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi))$$

$$= (x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_k\varphi) \vdash' ((y_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_{i_1-1}\varphi) \vdash' (y_{i_1}\varphi \dashv \ldots \dashv' y_{i_2-1}\varphi)) \perp'$$

$$\perp' ((y_{i_2}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_3-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (y_{i_s}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi))$$

$$= ((x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_{j_1-1}\varphi) \vdash' (x_{j_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_{j_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp'$$

$$\perp' (x_{j_p}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_k\varphi)) \vdash' ((y_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' y_{i_1-1}\varphi) \vdash'$$

$$\vdash' (y_{i_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (y_{i_s}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi)) = w_1\phi \vdash' w_2\phi$$

оскільки $k+i_1 > k+f$, тобто, $i_1 > f$. Зазначимо, що у випадку (2.17) $i_1 \neq 1,$ тоді, як $k+1>n,$ якщо $k=n,$ але $k\neq n$ за умови (2.17).

Далі перейдемо до операції $\perp$. Припустимо, що

$$k+f=\begin{cases} n, & k+r>n, \\ k+r, & k+r\leq n \end{cases}$$

для деякого $f \in \mathbb{N}$. Нехай i_ε, $1 \le \varepsilon \le s$ – найбільше число множини $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ таке, що $i_\varepsilon \le f$, якщо (2.13) виконується, і нехай $i_\varepsilon = i_s$, якщо (2.12) має місце. Розіб'ємо випадок для операції $\perp$ на такі підвипадки:

$$i_1 = 1, \tag{2.18}$$

$$i_1 \ne 1. \tag{2.19}$$

Розглянемо випадок (2.18). Якщо (2.13) виконується, то

$$(w_1 \perp w_2)\phi = (\overrightarrow{x_1 \ldots x_k y_1 \ldots y_r}^{\,n},\ \{j_1, j_2, \ldots, j_p\} \cup (\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}^{k,n} + k))\phi$$

$$= (x_1 \ldots x_k y_1 \ldots y_f,\ \{j_1, j_2, \ldots, j_p\} \cup (\{i_1, i_2, \ldots, i_\varepsilon\} + k))\phi$$

$$= (x_1 \ldots x_k y_1 \ldots y_f,\ \{j_1, j_2, \ldots, j_p\} \cup \{i_1 + k, i_2 + k, \ldots, i_\varepsilon + k\})\phi$$

$$= (x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_{j_1-1}\varphi) \vdash' (x_{j_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_{j_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (x_{j_p}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_k\varphi) \perp'$$

$$\perp' (y_1\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (y_{i_\varepsilon}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_f\varphi)$$

$$= (((x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_{j_1-1}\varphi) \vdash' (x_{j_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_{j_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (x_{j_p}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_k\varphi) \perp'$$

$$\perp' (y_{i_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (y_{i_\varepsilon}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_f\varphi)) \dashv'$$

$$\dashv' (y_{f+1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_{\varepsilon+1}-1}\varphi)) \perp' (y_{i_{\varepsilon+1}}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_{\varepsilon+2}-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (y_{i_s}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi)$$

$$= ((x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_{j_1-1}\varphi) \vdash' (x_{j_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_{j_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (x_{j_p}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_k\varphi) \perp'$$

$$\perp' (y_{i_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (y_{i_\varepsilon}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_f\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_{\varepsilon+1}-1}\varphi)) \perp'$$

$$\perp' (y_{i_{\varepsilon+1}}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_{\varepsilon+2}-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (y_{i_s}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi)$$

$$= (x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_{j_1-1}\varphi) \vdash' (x_{j_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_{j_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp'$$

$$\perp' (x_{j_p}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_k\varphi) \perp' (y_{i_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp'$$

$$\perp' (y_{i_\varepsilon}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_f\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_{\varepsilon+1}-1}\varphi) \perp' \ldots \perp' (y_{i_s}\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_r\varphi)$$

$$= ((x_1\varphi \vdash' \ldots \vdash' x_{j_1-1}\varphi) \vdash' (x_{j_1}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_{j_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp'$$

$$\perp' (x_{j_p}\varphi \dashv' \ldots \dashv' x_k\varphi)) \perp' ((y_1\varphi \dashv' \ldots \dashv' y_{i_2-1}\varphi) \perp' \ldots \perp'$$

$$\perp'(y_{i_s}\varphi\dashv'\ldots\dashv' y_r\varphi)) = w_1\phi\perp' w_2\phi$$

згідно з тотожністю (2.1) лівого n-тринільпотентного тріоїда, аксіомою $(T5)$ та асоціативністю операції $\perp'$. Застосовуючи останні обчислення, можна перевірити підвипадок (2.12).

Нехай (2.19) справджується. Для (2.13) отримаємо

$$(w_1\perp w_2)\phi = (\overrightarrow{x_1\ldots x_k y_1\ldots y_r}^{\,n},\ \{j_1,j_2,\ldots,j_p\}\cup(\{i_1,i_2,\ldots,i_s\}^{k,n}+k))\phi$$

$$= (x_1\ldots x_k y_1\ldots y_f,\ \{j_1,j_2,\ldots,j_p\}\cup(\{i_1,i_2,\ldots,i_\varepsilon\}+k))\phi$$

$$= (x_1\ldots x_k y_1\ldots y_f,\ \{j_1,j_2,\ldots,j_p\}\cup\{i_1+k,i_2+k,\ldots,i_\varepsilon+k\})\phi$$

$$= (x_1\varphi\vdash'\ldots\vdash' x_{j_1-1}\varphi)\vdash'(x_{j_1}\varphi\dashv'\ldots\dashv' x_{j_2-1}\varphi)\perp'\ldots\perp'(x_{j_p}\varphi\dashv'\ldots\dashv' x_k\varphi\dashv'$$

$$\dashv' y_1\varphi\dashv'\ldots\dashv' y_{i_1-1}\varphi)\perp'(y_{i_1}\varphi\dashv'\ldots\dashv' y_{i_2-1}\varphi)\perp'\ldots\perp'(y_{i_\varepsilon}\varphi\dashv'\ldots\dashv' y_f\varphi)$$

$$= (x_1\varphi\vdash'\ldots\vdash' x_{j_1-1}\varphi)\vdash'(x_{j_1}\varphi\dashv'\ldots\dashv' x_{j_2-1}\varphi)\perp'\ldots\perp'$$

$$\perp'((x_{j_p}\varphi\dashv'\ldots\dashv' x_k\varphi)\perp'((y_1\varphi\vdash'\ldots\vdash' y_{i_1-1}\varphi)\vdash'(y_{i_1}\varphi\dashv'\ldots\dashv' y_{i_2-1}\varphi)\perp'\ldots\perp'$$

$$\perp'(y_{i_\varepsilon}\varphi\dashv'\ldots\dashv' y_f\varphi))) = (x_1\varphi\vdash'\ldots\vdash' x_{j_1-1}\varphi)\vdash'(x_{j_1}\varphi\dashv'\ldots\dashv' x_{j_2-1}\varphi)\perp'\ldots\perp'$$

$$\perp'(x_{j_p}\varphi\dashv'\ldots\dashv' x_k\varphi)\perp'((y_1\varphi\vdash'\ldots\vdash' y_{i_1-1}\varphi)\vdash'(y_{i_1}\varphi\dashv'\ldots\dashv' y_{i_2-1}\varphi)\perp'\ldots\perp'$$

$$\perp'(y_{i_\varepsilon}\varphi\dashv'\ldots\dashv' y_f\varphi)) = (((x_1\varphi\vdash'\ldots\vdash' x_{j_1-1}\varphi)\vdash'(x_{j_1}\varphi\dashv'\ldots\dashv' x_{j_2-1}\varphi)\perp'\ldots\perp'$$

$$\perp'(x_{j_p}\varphi\dashv'\ldots\dashv' x_k\varphi)\perp'((y_1\varphi\vdash'\ldots\vdash' y_{i_1-1}\varphi)\vdash'(y_{i_1}\varphi\dashv'\ldots\dashv' y_{i_2-1}\varphi)\perp'\ldots\perp'$$

$$\perp'(y_{i_\varepsilon}\varphi\dashv'\ldots\dashv' y_f\varphi)))\dashv'(y_{f+1}\varphi\dashv'\ldots\dashv' y_{i_{\varepsilon+1}-1}\varphi))\perp'$$

$$\perp'(y_{i_{\varepsilon+1}}\varphi\dashv'\ldots\dashv' y_{i_{\varepsilon+2}-1}\varphi)\perp'\ldots\perp'(y_{i_s}\varphi\dashv'\ldots\dashv' y_r\varphi)$$

$$= ((x_1\varphi\vdash'\ldots\vdash' x_{j_1-1}\varphi)\vdash'(x_{j_1}\varphi\dashv'\ldots\dashv' x_{j_2-1}\varphi)\perp'\ldots\perp'$$

$$\perp'(x_{j_p}\varphi\dashv'\ldots\dashv' x_k\varphi))\perp'((y_1\varphi\vdash'\ldots\vdash' y_{i_1-1}\varphi)\vdash'(y_{i_1}\varphi\dashv'\ldots\dashv' y_{i_2-1}\varphi)\perp'\ldots\perp'$$

$$\perp'(y_{i_s}\varphi\dashv'\ldots\dashv' y_r\varphi)) = w_1\phi\perp' w_2\phi$$

згідно з аксіомами $(T3)$, $(T5)$, $(T6)$, асоціативністю операції $\perp'$ та тотожністю (2.1) лівого n-тринільпотентного тріоїда. Скориставшись аксіомами $(T1)$, $(T6)$

та асоціативністю операції $\perp'$, подібно до останніх міркувань, можна розглянути підвипадок (2.12).

Таким чином, ϕ є гомоморфізмом.

Лему доведено.

Нарешті, побудуємо тріоїд, ізоморфний вільному лівому n-тринільпотентному тріоїду рангу 1.

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ нехай $\overset{n}{\overrightarrow{m}} = \begin{cases} m, & m \le n, \\ n, & m > n. \end{cases}$

Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ на

$$M_n = \{(k, L) \mid k \in \mathbb{N},\ k \le n,\ L \subseteq \{1, 2, \ldots, k\},\ L \ne \varnothing\}$$

за такими правилами:

$$(k_1, L) \dashv (k_2, R) = (\overset{n}{\overrightarrow{k_1 + k_2}},\ L),$$

$$(k_1, L) \vdash (k_2, R) = \begin{cases} (n, \{n\}), & n < k_1 + R_{min}, \\ (\overset{n}{\overrightarrow{k_1 + k_2}},\ R^{k_1, n} + k_1) & \textit{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$(k_1, L) \perp (k_2, R) = (\overset{n}{\overrightarrow{k_1 + k_2}}, L \cup (R^{k_1, n} + k_1))$$

для всіх $(k_1, L),\ (k_2, R) \in M_n$. Позначимо $(M_n, \dashv, \vdash, \perp)$ через $F_1T_n^l$.

З теореми 2.9 випливає таке твердження.

Наслідок 2.19. *Якщо* $|X| = 1$, *то* $FT_n^l(X) \cong F_1T_n^l$.

Доведення. Нехай $X = \{x\}$. Визначимо відображення $\pi : FT_n^l(X) \to F_1T_n^l$, поклавши $h\pi = (k, L)$, якщо $h = (x^k, L)$. Можна показати, що π є ізоморфізмом.

Наслідок доведено.

Неважко побачити, що вільний лівий n-тринільпотентний тріоїд $FT_n^l(X)$ визначається однозначно з точністю до ізоморфізму потужністю множини X. Отже, група автоморфізмів $FT_n^l(X)$ є ізоморфною симетричній групі на X.

Зауважимо, що для побудови вільних правих n-тринільпотентних тріоїдів використовуємо принцип двоїстості.

Асоціативні триалгебри [35] є лінійними аналогами тріоїдів, тому результати, отримані у цьому підрозділі для тріоїдів, справедливі і для асоціативних триалгебр.

Висновки до розділу 2

У цьому розділі розглянуто декілька визначень нільпотентності у тріоїдах. Наведено приклади нільпотентних тріоїдів. Розглянуто вільний n-нільпотентний тріоїд та описано його структуру. Побудовано конструкцію вільного лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда довільного рангу та окремо розглянуто однопороджені вільні ліві (праві) n-тринільпотентні тріоїди. Показано, що група автоморфізмів вільного лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда є ізоморфною симетричній групі.

РОЗДІЛ 3
ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ВІЛЬНИХ ТРІОЇДІВ ТА ВІЛЬНИХ ЛІВИХ *n*-ТРИНІЛЬПОТЕНТНИХ ТРІОЇДІВ

Існує багато наукових праць, присвячених дослідженню проблеми рівності слів у алгебрах (див., наприклад, [3, 8, 9, 11, 23, 50, 51]). Для тріоїда $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ проблема рівності слів – це питання визначення того, чи є два слова в $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ рівними. У статті [83] було побудовано вільний об'єкт у многовиді лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів, а у науковій праці [85] була розв'язана проблема рівності слів для вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів. Ця задача еквівалентна задачі характеризації найменшої лівої (правої) n-тринільпотентної конгруенції на вільному тріоїді. Окремі типи найменших конгруенцій на вільному тріоїді досліджено й у інших наукових публікаціях, наприклад, у роботах А. В. Жучка, Юл. В. Жучок, Ю. В. Жучка [59, 75, 76, 91, 102]. Спираючись на дослідження Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко [35], А. В. Жучока, Юл. В. Жучок, Ю. В. Жучка [78, 91], мета цього розділу – надати характеристику найменшої лівої (правої) n-тринільпотентної конгруенції на вільному тріоїді. Крім того, у цьому розділі описано всі ідемпотентні та всі регулярні елементи вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів, охарактеризовано всі максимальні підтріоїди вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів $(n>1)$ та показано, що вільний лівий n-тринільпотентий тріоїд містить підтріоїд, який може бути представлений у вигляді лівої сполуки піддімоноїдів. Крім того, підраховано потужність напівгрупи ендоморфізмів вільного лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда та кількість всіх ідемпотентів та регулярних елементів вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів у скінченному випадку. Результати цього розділу опубліковано в роботах [85, 108, 109].

3.1. Опис найменшої лівої *n*-тринільпотентної конгруенції на вільному тріоїді

Якщо ρ є конгруенцією на тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ такою, що $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$ є лівим (правим) n-тринільпотентним тріоїдом, то говоримо, що ρ є лівою (правою) n-тринільпотентною конгруенцією. У цьому підрозділі охарактеризовано найменшу ліву (праву) n-тринільпотентну конгруенцію на вільному тріоїді. Цей результат опубліковано у [85]. Будемо використовувати поняття та позначення з розділу 2.

Теорія многовидів тріоїдів була розроблена в роботах Ж.-Л. Лоде, М. О. Ронко, А. В. Жучка, Ю. В. Жучка, Юл. В. Жучок, Ж. Хуанга, Ю. Бая, Ю. Чена, З. Жанга [19, 35, 59, 78, 83, 99, 102, 103].

У наукових працях Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко [35], Ю. В. Жучка [99] були побудовані вільні тріоїди рангу 1, у роботах А. В. Жучка – вільні тріоїди довільного рангу [78], вільні комутативні тріоїди [59]; у роботах Юл. В. Жучок – вільні n-нільпотентні тріоїди [102], вільні прямокутні трисполуки [103]; вільні ліві (праві) n-тринільпотентні тріоїди розглянуті у статті [83], а результати про вільні трисполуки належать Ж. Хуангу, Ю. Баю, Ю. Чену, З. Жангу [19]. Нагадаємо конструкцію вільного тріоїда довільного рангу.

Нехай $n, k \in \mathbb{N}$ та $L \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Вважаємо, що $L + k = \{m + k \mid m \in L\}$. Зрозуміло, що $\varnothing + k = \varnothing$. Для $L \neq \varnothing$ покладемо $L^{k,n} = \{m \in L \mid k + m \leq n\}$, та позначимо найменше число множини L через L_{min}. Очевидно, що $L^{k,n} = \varnothing$, якщо $k + m > n$ для всіх $m \in L$.

Нехай X – довільна непорожня множина та $F[X]$ – вільна напівгрупа на X. Як і раніше, довжина слова $w \in F[X]$ позначається через l_w. Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ на множині

$$F=\{(w,L)\mid w\in F[X],\, L\subseteq\{1,2,\ldots,l_w\},\, L\neq\varnothing\}$$

за правилами:

$$(w,L)\dashv(u,R)=(wu,L),\quad (w,L)\vdash(u,R)=(wu,R+l_w),$$

$$(w,L)\perp(u,R)=(wu,L\cup(R+l_w))$$

для всіх $(w,L),(u,R)\in F$. Відповідно до ([78], лема 7.1 та теорема 7.1) $(F,\dashv,\vdash,\perp)$ є вільним тріоїдом. Його позначають через $FT(X)$.

Зафіксуємо $n\in\mathbb{N}$. Нехай $w\in F[X]$. Відповідно до [83], якщо $l_w\geq n$, то через $\overset{n}{\vec{w}}$ позначаємо початкове підслово довжини n слова w, і якщо $l_w<n$, то $\overset{n}{\vec{w}}=w$. Неважко пересвідчитись, що

$$\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\vec{w}}\overset{n}{\vec{u}}}}=\overset{n}{\overrightarrow{wu}} \tag{3.1}$$

для всіх $w,\ u\in F[X]$. Нехай

$$L^{(n)}=\begin{cases}\{n\}, & n\leq L_{min},\\ \{m\in L\mid m\leq n\}, & n>L_{min}\end{cases}$$

для будь-якої непорожньої множини $L\subseteq\{1,2,\ldots,k\}$ та $k\in\mathbb{N}$.

Нехай далі $(w,L),\ (u,R)\in FT(X)$. Для кожного $n\in\mathbb{N}$ визначимо бінарне відношення $\tilde{d}_n$ на $FT(X)$ за правилом:

$$(w,L)\tilde{d}_n(u,R)\quad \text{тоді і тільки тоді, коли}\quad \overset{n}{\vec{w}}=\overset{n}{\vec{u}}\quad \text{і}\quad L^{(n)}=R^{(n)}.$$

Основним результатом цього підрозділу є наступна теорема:

Теорема 3.1. *Відношення* $\tilde{d}_n$ *є найменшою лівою* n*-тринільпотентною конгруенцією на вільному тріоїді* $FT(X)$.

Щоб довести цю теорему, потрібно довести наступні три леми. Будемо використовувати конструкцію вільного лівого n-тринільпотентного тріоїда довільного рангу (див. підрозділ 2.3).

Нехай $d_n : FT(X) \to FT_n^l(X)$ – відображення, визначене за правилом:

$$(w,L) \mapsto (w,L)d_n = (\overset{n}{\overrightarrow{w}}, L^{(n)}).$$

Лема 3.2. *Відображення* d_n *є гомоморфізмом напівгрупи* $(F,\dashv)$ *в напівгрупу* $(F_n,\dashv)$.

Доведення. Нехай $(w,L),(u,R) \in F$. Використовуючи (3.1), маємо

$$((w,L)\dashv(u,R))d_n = (wu,L)d_n = (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, L^{(n)}) = (\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{w}}\overset{n}{\overrightarrow{u}}}},\ L^{(n)})$$

$$= (\overset{n}{\overrightarrow{w}}, L^{(n)}) \dashv (\overset{n}{\overrightarrow{u}}, R^{(n)}) = (w,L)d_n \dashv (u,R)d_n.$$

Лему доведено.

Лема 3.3. *Відображення* d_n *є гомоморфізмом напівгрупи* $(F,\vdash)$ *в напівгрупу* $(F_n,\vdash)$.

Доведення. Для всіх $(w,L),(u,R) \in F$ отримуємо

$$((w,L)\vdash(u,R))d_n = (wu, R+l_w)d_n = (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, (R+l_w)^{(n)}),$$

$$(w,L)d_n \vdash (u,R)d_n = (\overset{n}{\overrightarrow{w}}, L^{(n)}) \vdash (\overset{n}{\overrightarrow{u}}, R^{(n)})$$

$$= \begin{cases} (\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{w}}\overset{n}{\overrightarrow{u}}}}, \{n\}), & n < l_{\overset{n}{\overrightarrow{w}}} + (R^{(n)})_{min}, \\ (\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{w}}\overset{n}{\overrightarrow{u}}}}, (R^{(n)})^{l_{\overset{n}{\overrightarrow{w}}},n} + l_{\overset{n}{\overrightarrow{w}}}) & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Зауважимо, що $\overset{n}{\overrightarrow{wu}} = \overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{w}}\overset{n}{\overrightarrow{u}}}}$ згідно з (3.1), і покажемо, що

$$(R+l_w)^{(n)} = \begin{cases} \{n\}, & n < l_{\overset{n}{\overrightarrow{w}}} + (R^{(n)})_{min}, \\ (R^{(n)})^{l_{\overset{n}{\overrightarrow{w}}},n} + l_{\overset{n}{\overrightarrow{w}}} & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Можливі наступні два випадки:

$$l_w \geq n, \tag{3.2}$$

$$l_w < n. \tag{3.3}$$

У випадку (3.2),

$$l_{\underset{w}{\overset{n}{\rightarrow}}} = n, \quad l_{\underset{w}{\overset{n}{\rightarrow}}} + (R^{(n)})_{min} = n + (R^{(n)})_{min} > n,$$

$$(R + l_w)_{min} = R_{min} + l_w > n, \tag{3.4}$$

і маємо $(R + l_w)^{(n)} = \{n\}$.

Перейдемо до випадку (3.3). У цьому випадку $l_{\underset{w}{\overset{n}{\rightarrow}}} = l_w$. Розіб'ємо випадок (3.3) на такі підвипадки:

$$n \leq R_{min}, \tag{3.5}$$

$$n > R_{min}. \tag{3.6}$$

Для (3.5) маємо

$$R^{(n)} = \{n\}, \; l_{\underset{w}{\overset{n}{\rightarrow}}} + (R^{(n)})_{min} = l_w + n > n$$

і (3.4) виконується. Отже, $(R + l_w)^{(n)} = \{n\}$.

Якщо випадок (3.6) має місце, то розглянемо підвипадки:

$$(R + l_w)_{min} > n, \tag{3.7}$$

$$(R + l_w)_{min} < n, \tag{3.8}$$

$$(R + l_w)_{min} = n. \tag{3.9}$$

Припустимо, що (3.7) виконується. Тоді

$$l_{\underset{w}{\overset{n}{\rightarrow}}} + (R^{(n)})_{min} = l_w + \{r \in R \mid r \leq n\}_{min} > n$$

та $(R + l_w)^{(n)} = \{n\}$.

Для підвипадку (3.8), використовуючи (3.6), отримаємо

$$(R + l_w)_{min} = R_{min} + l_w < n,$$

$$l_{\overset{n}{\overrightarrow{w}}} + (R^{(n)})_{min} = l_w + \{r \in R \mid r \leq n\}_{min} = l_w + R_{min} < n$$

та

$$(R + l_w)^{(n)} = \left\{ t \in R + l_w \middle| \ t \leq n \right\}$$

$$= \left\{ r + l_w \middle| \ r \in R, \ r + l_w \leq n \right\}$$

$$= \left\{ r \in R \middle| \ r \leq n, \ l_w + r \leq n \right\} + l_w$$

$$= \{r \in R | \ r \leq n\}^{l_w, n} + l_w = (R^{(n)})^{l_w, n} + l_w.$$

Нарешті, якщо підвипадок (3.9) виконується, то

$$(R + l_w)_{min} = R_{min} + l_w = n.$$

У цьому випадку

$$l_w + (R^{(n)})_{min} = l_w + R_{min} = (R + l_w)_{min} = n$$

та

$$(R + l_w)^{(n)} = \left\{ n \right\} = \{n - l_w\} + l_w = (R^{(n)})^{l_w, n} + l_w,$$

оскільки $R_{min} = n - l_w$. Тому

$$((w, L) \vdash (u, R))d_n = (w, L)d_n \vdash (u, R)d_n$$

для всіх $(w, L), (u, R) \in F$.

Лему доведено.

Лема 3.4. *Відображення* d_n *є гомоморфізмом напівгрупи* $(F, \perp)$ *в напівгрупу* $(F_n, \perp)$.

*Доведення***.** Для всіх (w, L), $(u, R) \in F$ отримаємо

$$((w, L) \perp (u, R))d_n = (wu, L \cup (R + l_w))d_n = (\overset{n}{\overrightarrow{wu}}, (L \cup (R + l_w))^{(n)}),$$

$$(w, L)d_n \perp (u, R)d_n = (\overset{n}{\overrightarrow{w}}, L^{(n)}) \perp (\overset{n}{\overrightarrow{u}}, R^{(n)}) = (\overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{w}}\overset{n}{\overrightarrow{u}}}}, L^{(n)} \cup ((R^{(n)})^{l_{\overset{n}{\overrightarrow{w}}}, n} + l_{\overset{n}{\overrightarrow{w}}})).$$

За умовою (3.1), $\overset{n}{\overrightarrow{wu}} = \overset{n}{\overrightarrow{\overset{n}{\overrightarrow{w}}\,\overset{n}{\overrightarrow{u}}}}$. Покажемо, що

$$\left(L \cup \left(R + l_w\right)\right)^{(n)} = L^{(n)} \cup ((R^{(n)})^{l_{\overset{n}{\overrightarrow{w}}},n} + l_{\overset{n}{\overrightarrow{w}}}).$$

Для цього розглянемо випадки (3.2) та (3.3).

Випадок (3.2). З $l_w \geq n$ випливає, що $l_{\overset{n}{\overrightarrow{w}}} = n$, та $\left(L \cup \left(R + l_w\right)\right)_{min} = L_{min}$, оскільки $L \subseteq \{1, 2, \ldots, l_w\}$. Використовуючи ці обчислення, отримуємо

$$L^{(n)} = L^{(n)} \cup \varnothing = L^{(n)} \cup ((R^{(n)})^{n,n} + n) = L^{(n)} \cup ((R^{(n)})^{l_{\overset{n}{\overrightarrow{w}}},n} + l_{\overset{n}{\overrightarrow{w}}}),$$

$$(L \cup \left(R + l_w\right))^{(n)} = \begin{cases} \{n\}, & n \leq L_{min}, \\ \{s \in L \cup (R + l_w) \mid s \leq n\}, & n > L_{min} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \{n\}, & n \leq L_{min}, \\ \{s \in L \mid s \leq n\}, & n > L_{min} \end{cases} = L^{(n)}.$$

Випадок (3.3). З $l_w < n$ випливає, що $l_{\overset{n}{\overrightarrow{w}}} = l_w$. До того ж, $L \subseteq \{1, 2, \ldots, l_w\}$ означає $L_{min} < (R + l_w)_{min}$ і таким чином,

$$(L \cup (R + l_w))_{min} = L_{min} \leq l_w < n.$$

Використовуючи це, отримуємо

$$(L \cup \left(R + l_w\right))^{(n)} = \left\{s \in L \cup \left(R + l_w\right) \middle| \; s \leq n\right\}$$

$$= \left\{s \in L \middle| \; s \leq n\right\} \cup \left\{t \in R + l_w \middle| \; t \leq n\right\},$$

$$L^{(n)} \cup ((R^{(n)})^{l_{\overset{n}{\overrightarrow{w}}},n} + l_{\overset{n}{\overrightarrow{w}}}) = L^{(n)} \cup ((R^{(n)})^{l_w,n} + l_w).$$

Порівнюючи отримані вирази, робимо висновок, що

$$\left(L \cup \left(R + l_w\right)\right)^{(n)} = L^{(n)} \cup ((R^{(n)})^{l_{\overset{n}{\overrightarrow{w}}},n} + l_{\overset{n}{\overrightarrow{w}}}).$$

Отже, $((w,L)\perp(u,R))d_n=(w,L)d_n\perp(u,R)d_n$ для всіх $(w,L),(u,R)\in F$.

Лему доведено.

Якщо $f:T_1\to T_2$ є гомоморфізмом тріоїдів, то ядро f позначається через Δ_f, тобто $\Delta_f=\{(x,y)\in T_1\times T_1 \mid xf=yf\}$.

Підсумовуючи все вищевикладене, наведемо доведення теореми 3.1:

За лемами 3.2–3.4, d_n є гомоморфізмом тріоїдів. Очевидно, d_n – сюр'єкція. Оскільки за теоремою 2.9 тріоїд $FT_n^l(X)$ є вільним лівим n-тринільпотентним тріоїдом, то Δ_{d_n} – найменша ліва n-тринільпотентна конгруенція на $FT(X)$. З визначення d_n випливає, що $\Delta_{d_n}=\tilde{d}_n$.

Теорему доведено.

Зауваження 3.5. *Для того, щоб охарактеризувати найменшу праву n-тринільпотентну конгруенцію на вільному тріоїді, використовуємо принцип двоїстості.*

3.2. Ідемпотентні та регулярні елементи вільних лівих *n*-тринільпотентних тріоїдів

У цьому підрозділі продовжено вивчення вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів. А саме, охарактеризовано всі ідемпотентні та всі регулярні елементи вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів, а також підраховано кількість всіх ідемпотентів та регулярних елементів вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів у скінченному випадку.

Результат цього підрозділу опубліковано у [108].

Нагадаємо, що елемент x тріоїда $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ називається ідемпотентом [78], якщо $x\dashv x=x\vdash x=x\perp x=x$. Елемент a напівгрупи S називається регулярним, якщо існує такий $b \in S$, що $aba = a$. Елемент x тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ будемо називати регулярним, якщо x є регулярним у $(T, \dashv)$, $(T, \vdash)$ та $(T, \perp)$.

Твердження 3.6. *Множиною всіх ідемпотентів (регулярних елементів) в* $FT_n^l(X)$ *є* $E = \{(w, \{n\}) \mid l_w = n\}$. *Крім того, операції* $\dashv$, $\vdash$ *та* $\perp$ *на* E *збігаються, та* E *– напівгрупа лівих нулів. Якщо* X *– скінченна множина, то* $|E| = |X|^n$.

Доведення. Нехай $(w, L) \in FT_n^l(X)$. Припустимо, що (w, L) є ідемпотентом. Тоді

$$(w,L) \vdash (w,L) = \begin{cases} (\overrightarrow{ww}^{n}, \{n\}), & n < l_w + L_{min}, \\ (\overrightarrow{ww}^{n}, L^{l_w, n} + l_w) & \text{в інших випадках} \end{cases} = (w,L).$$

Отже, з $\overrightarrow{ww}^{n} = w$ випливає, що $l_w = n$, а $l_w + L_{min} = n + L_{min} > n$ дає $L = \{n\}$. І навпаки, для $(w, \{n\}) \in E$ і $* \in \{\dashv, \vdash, \perp\}$ отримаємо

$$(w,\{n\}) * (w,\{n\}) = (w,\{n\}).$$

Таким чином, E є множиною всіх ідемпотентів у $FT_n^l(X)$. Очевидно, що будь-який елемент з E є регулярним.

Далі неважко перевірити, що $(w,\{n\}) * (w',\{n\}) = (w,\{n\})$ для всіх $(w,\{n\})$, $(w',\{n\}) \in E$ та $* \in \{\dashv, \vdash, \perp\}$. Тому $\dashv = \vdash = \perp$ і E є напівгрупою лівих нулів. З визначення E випливає, що $|E| = |X|^n$ для скінченної множини X.

Наприкінці, покажемо, що $FT_n^l(X)$ не містить регулярних елементів, крім ідемпотентів. Від супротивного припустимо, що елемент $(w, L) \notin E$ є регулярним. Якщо $l_w < n$, то

$$(w,L) \dashv (u,R) \dashv (w,L) = (\overrightarrow{wuw}^{n}, L) = (w,L)$$

для деякого $(u,R)\in FT_n^l(X)$. Отже, $\overrightarrow{wuw}^{n} = w$ неможливо, оскільки $l_{\overrightarrow{wuw}^{n}} \neq l_w$.

Нехай $l_w = n$. Тоді $L \neq \{n\}$, оскільки (w, L) не є ідемпотентом. У цьому випадку отримуємо

$$(w,L)\vdash(u',R')\vdash(w,L)=(w,\{n\})\vdash(w,L)=(w,\{n\})=(w,L)$$

для деякого $(u',R')\in FT_n^l(X)$ і отже, $L = \{n\}$. Тому маємо протиріччя. Підсумовуючи, дійдемо висновку, що будь-який елемент $(w,L)\notin E$ не є регулярним.

Твердження доведено.

Зауваження 3.7. *Для того, щоб описати всі ідемпотенти (регулярні елементи) вільних правих n-тринільпотентних тріоїдів та підрахувати їх кількість, використовуємо принцип двоїстості.*

3.3. Підтріоїди вільних лівих *n*-тринільпотентних тріоїдів

У цьому підрозділі охарактеризовано всі максимальні підтріоїди вільних лівих *n*-тринільпотентних тріоїдів ($n>1$) та показано, що вільний лівий *n*-тринільпотентий тріоїд містить підтріоїд, який може бути представлений у вигляді лівої сполуки піддімоноїдів. Також підраховано потужності вільного лівого *n*-тринільпотентного тріоїда та його напівгрупи ендоморфізмів у скінченному випадку. Опис відповідних властивостей для вільного правого *n*-тринільпотентного тріоїда можна отримати двоїстим чином. Результати цього підрозділу опубліковано у [85, 108].

Опишемо спочатку всі максимальні підтріоїди тріоїда $FT_n^l(X)$.

Підтріоїд тріоїда G є власним, якщо він не дорівнює G. Підтріоїд тріоїда G називається максимальним, якщо він є власним підтріоїдом тріоїда G, який не міститься в будь-якому іншому власному підтріоїді тріоїда G.

Теорема 3.8. *Нехай* F *– підтріоїд вільного лівого* n*-тринільпотентного тріоїда* $FT_n^l(X)$, $n>1$. *Тоді* F *є максимальним тоді і тільки тоді, коли існує* $x \in X$ *такий, що* $F = V_n \setminus \{(x,\{1\})\}$.

Доведення. Зауважимо що, якщо $n=1$, то операції тріоїда $FT_n^l(X)$ збігаються та він є напівгрупою лівих нулів. Тому припустимо, що $n>1$.

Нехай $x \in X$ та (w,L), $(u,R) \in V_n \setminus \{(x,\{1\})\}$. Неважко пересвідчитись, що $(w,L)*(u,R) \in V_n \setminus \{(x,\{1\})\}$ для будь-якої операції $* \in \{\dashv, \vdash, \perp\}$. Дійсно, оскільки $n>1$, то довжина слова $\overset{n}{\overrightarrow{wu}}$ буде більше ніж 1, і отже, $\overset{n}{\overrightarrow{wu}} \neq x$. Це означає, що $V_n \setminus \{(x,\{1\})\}$ є підтріоїдом тріоїда $FT_n^l(X)$. Очевидно, що він є максимальним.

Навпаки, нахай F – максимальний підтріоїд тріоїда $FT_n^l(X)$. Оскільки $X \times \{1\}$ є найменшою породжуючою множиною тріоїда $FT_n^l(X)$, то $\{(x,\{1\}) \mid x \in X\} \not\subseteq F$, тобто існує $x \in X$ такий, що $(x,\{1\}) \notin F$. Таким чином, $F \subseteq V_n \setminus \{(x,\{1\})\}$. Оскільки F є максимальним підтріоїдом тріоїда $FT_n^l(X)$, то отримуємо, що $F = V_n \setminus \{(x,\{1\})\}$.

Теорему доведено.

Нагадаємо, що дісполука або дімоноїд ідемпотентів – це дімоноїд, у якого обидві операції ідемпотентні [55]. У роботі А. В. Жучка [55] було введено поняття дісполуки піддімоноїдів. Наведемо його визначення.

Якщо $\psi : D_1 \to D_2$ – гомоморфізм дімоноїдів, то через Δ_ψ позначатимемо відповідну конгруенцію на дімоноїді D_1.

Якщо D – довільний дімоноїд, J – деякий дімоноїд ідемпотентів та $\beta : D \to J : x \mapsto x\beta$ – гомоморфізм, то кожний клас конгруенції Δ_β є піддімоноїдом дімоноїду D, а сам дімоноїд D є об'єднанням таких дімоноїдів D_ξ, $\xi \in J$, що

$$x\beta = \xi \Leftrightarrow x \in D_\xi = \Delta_\beta^x = \{t \in D \mid (x;t) \in \Delta_\beta\},$$

$$D_\xi \dashv D_\varepsilon \subseteq D_{\xi \dashv \varepsilon}, \quad D_\xi \vdash D_\varepsilon \subseteq D_{\xi \vdash \varepsilon},$$

$$\xi \neq \varepsilon \Rightarrow D_\xi \cap D_\varepsilon = \varnothing.$$

У цьому випадку говорять, що D розкладається в дісполуку піддімоноїдів (або D є дісполукою J піддімоноїдів $D_\xi, \xi \in J$). У разі, коли J є напівгрупою ідемпотентів (сполукою), то кажуть, що D є сполукою J піддімоноїдів $D_\xi, \xi \in J$. Якщо ж J є напівгрупою лівих (правих) нулів, то кажуть, що D є лівою (правою) сполукою J піддімоноїдів $D_\xi, \xi \in J$.

Застосовуючи поняття дісполуки піддімоноїдів, охарактеризуємо один важливий підтріоїд тріоїду $FT_n^l(X)$.

Теорема 3.9. *Нехай* $n > 1$. *Множина* $R_n = \{(w,L) \in FT_n^l(X) \mid l_w = n\}$ *є підтріоїдом тріоїда* $FT_n^l(X)$. *Крім того, операції* $\dashv$ *та* $\perp$ *на* R_n *збігаються та* R_n *є лівою сполукою піддімоноїдів, кожен із яких утворюється з напівгрупи лівих нулів та напівгрупи з нульовим множенням.*

Доведення. У випадку $n=1$ операції тріоїда $FT_n^l(X)$ збігаються та $R_n = FT_n^l(X)$ є напівгрупою лівих нулів. Тому розглядаємо випадок $n > 1$.

Нехай $(w,L), (u,R) \in R_n$. Тоді $(w,L) * (u,R) \in R_n$ для будь-якої операції $* \in \{\dashv, \vdash, \perp\}$, оскільки $\overrightarrow{wu}^{n} = w$. Звідси випливає, що R_n є підтріоїдом тріоїда $FT_n^l(X)$. Враховуючи, що $l_w = l_u = n$, маємо

$$(w,L) \dashv (u,R) = (w,L) \perp (u,R) = (\overrightarrow{wu}^{n}, L) = (w,L),$$

$$(w,L) \vdash (u,R) = (\overrightarrow{wu}^{n}, \{n\}) = (w, \{n\}).$$

Отже, операції $\dashv$ та $\perp$ на R_n збігаються і R_n є дімоноїдом.

Покажемо, що R_n є лівою сполукою піддімоноїдів. Для цього розглянемо множину

$$K=\{w\in F[X]\mid\ l_w=n\}.$$

Визначивши на множині K операцію за правилом: $wu=w$ для всіх $w,\ u\in F[X]$, отримаємо напівгрупу лівих нулів. Позначимо її через K_l. Визначимо далі відображення

$$f:R_n\to K_l:(w,L)\mapsto w.$$

Безпосередньо перевіряється, що f є сюр'єктивним гомоморфізмом. Зрозуміло, що класами конгруенції Δ_f є піддімоноїди

$$\{(w,L)\mid L\subseteq\{1,2,\ldots,n\},\ L\neq\varnothing\},\ w\in K_l.$$

Покладемо $B_w=\{(w,L)\mid L\subseteq\{1,2,\ldots,n\},L\neq\varnothing\},\ w\in K_l$. Звідси R_n є лівою сполукою K_l піддімоноїдів $B_w,\ w\in K_l$. Очевидно, що кожний дімоноїд $B_w,w\in K_l$, є ізоморфним дімоноїду

$$(\{L\mid L\subseteq\{1,2,\ldots,n\},\ L\neq\varnothing\},\prec,\succ)$$

з операціями, визначеними за правилами:

$$L\prec R=L,\quad L\succ R=\{n\}.$$

Теорему доведено.

У роботі [83] (див. також підрозділ 2.3) показано, що група автоморфізмів вільного лівого n-тринільпотентного тріоїда $FT_n^l(X)$ є ізоморфною симетричній групі на множині X. Природньо розглянути ендоморфізми вільного лівого n-тринільпотентного тріоїда $FT_n^l(X)$. Через $End(FT_n^l(X))$ позначимо напівгрупу всіх ендоморфізмів тріоїда $FT_n^l(X)$.

Кількість класів конгруенції $\tilde{d}_n$ для скінченної множини X встановлює таке твердження, яке випливає з визначення множини V_n, див. підрозділ 2.3.

Твердження 3.10. *Вільний лівий n-тринільпотентний тріоїд* $FT_n^l(X)$, *породжений скінченною множиною* $X\times\{1\}$, *є скінченним. Зокрема,* $|FT_n^l(X)|=\sum_{i=1}^n(2^i-1)\cdot|X|^i$.

Твердження 3.11. *Нехай* X *– непорожня скінченна множина. Тоді*

$$\left|End(FT_n^l(X))\right|=(\sum_{i=1}^n(2^i-1)\cdot|X|^i)^{|X|}.$$

*Доведення***.** Оскільки $X\times\{1\}$ є найменшою породжуючою множиною тріоїда $FT_n^l(X)$, то кожне відображення $\varphi: X\times\{1\}\to V_n$ індукує ендоморфізм тріоїда $FT_n^l(X)$. Навпаки, кожний ендоморфізм тріоїда $FT_n^l(X)$ однозначно визначається відображенням із множини $X\times\{1\}$ в тріоїд $FT_n^l(X)$. Добре відомо, що кількість всіх відображень із множини з k елементів у множину з m елементів дорівнює m^k. Отже, попередні міркування приводять нас до такої формули:

$$\left|End(FT_n^l(X))\right|=|V_n|^{|X|}.$$

Далі, застосовуючи твердження 3.10, дійдемо висновку, що

$$\left|End(FT_n^l(X))\right|=(\sum_{i=1}^n(2^i-1)\cdot|X|^i)^{|X|}.$$

Твердження доведено.

Зауваження 3.12. *Для того, щоб охарактеризувати відповідні властивості вільного правого n-тринільпотентного тріоїда, використвовуємо принцип двоїстості.*

Висновки до розділу 3

Цей розділ присвячено вивченню деяких властивостей вільних тріоїдів та вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів. Охарактеризовано найменшу ліву (праву) n-тринільпотентну конгруенцію на вільному тріоїді. Описано всі ідемпотентні та всі регулярні елементи вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів. Підраховано кількість всіх ідемпотентів та регулярних елементів вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів у скінченному випадку. Охарактеризовано всі максимальні підтріоїди вільних лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів $(n > 1)$ та показано, що вільний лівий (правий) n-тринільпотентний тріоїд містить підтріоїд, який може бути представлений у вигляді дісполуки піддімоноїдів. Підраховано потужності вільного лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда та його напівгрупи ендоморфізмів у скінченному випадку.

ВИСНОВКИ

У дисертації одержано наступні основні нові результати:

1. Побудовано вільну алгебру в многовиді лівих (правих) n-тринільпотентних тріоїдів; окремо побудовано тріоїд, ізоморфний вільному лівому (правому) n-тринільпотентному тріоїду рангу 1.

2. Охарактеризовано найменшу ліву (праву) n-тринільпотентну конгруенцію на вільному тріоїді.

3. Підраховано потужності вільного лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда та його напівгрупи ендоморфізмів у скінченному випадку.

4. Описано всі ідемпотентні та всі регулярні елементи вільного лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда, а також підраховано їх кількість у скінченному випадку.

5. Знайдено всі максимальні підтріоїди вільного лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда $(n > 1)$.

6. Показано, що вільний лівий (правий) n-тринільпотентний тріоїд містить підтріоїд, який може бути представлений у вигляді дісполуки піддімоноїдів.

7. Встановлено, що група автоморфізмів вільного лівого (правого) n-тринільпотентного тріоїда є ізоморфною симетричній групі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Bagherzadeha F. Jordan trialgebras and post-Jordan algebras. *Journal of Algebra,* 2017. 486. P. 360–395.
2. Bokut L.A., Chen Y., Liu C. Gröbner-Shirshov bases for dialgebras. *Int. J. Algebra Comput.,* 2010. 20. no. 3. P. 391–415.
3. Book R. V., Liu H-N. Rewriting systems and word problems in a free partially commutative monoid. *Information Processing Letters,* 1987. Volume 26, Issue 1. P. 29–32.
4. Casas J.M. Trialgebras and Leibniz 3-algebras. *Boletn de la Sociedad Matemática Mexicana*, 2006. V. 12. no. 2. P. 165–178.
5. Chen Y.Q., Zhang G.L., A new composition-diamond lemma for dialgebras, *Algebra Colloq.*, 2017. 24(1). P. 323–350.
6. Clifford A. H. Bands of semigroups. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 1954. Vol. 5. P. 499–504.
7. Clifford A.H., Preston G.B. The algebraic theory of semigroups. *Amer. Math. Soc.,* 1961. 1. 224 p.
8. Cori R., Perrin D. Automates et commutations partielles. *RAIRO Inform. Theor.*, 1985. 19. P. 21–32.
9. Dershowitz N., Jouannaud J.-P. Rewrite Systems. In: J. Van Leeuwen (ed.) *Handbook of Theoretical Computer Science*, 1990. Vol. B. (Elsevier Science Publishers, Amsterdam). P. 243–320.
10. Ebrahimi-Fard K. J. Loday-type algebras and the Rota-Baxter relation. *Lett. Math. Phys.*, 2002. V. 61. no. 2. P. 139–147.
11. Evans T. Word problems. *Bulletin of Amer. Math. Soc.,* 1978. 84. P. 789–802.
12. Felipe R. Digroups and their linear presentations. *East-West J. Math.*, 2006. 8 (1). P. 27–48.
13. Felipe R. Generalized Loday Algebras and Digroups. *Comunicaciones del CIMAT,* 2004. No. I-04-01/21-01-2004.

14. Gerhard J.A. The lattice of equational classes of idempotent semigroups. *J. Algebra*, 1970. 15. P. 195–224.
15. Glushkov V.M. The abstract theory of automata. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1961. 16:5 (101). P. 3–62.
16. Green J.A., Rees D. On semi-groups in which $xr = x$. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1952. 48(1). P. 35–40.
17. Gubarev V., Kolesnikov P. Embedding of dendriform algebras into Rota-Baxter algebras. *Cent. Eur. J. Math.*, 2013.V.11. no. 2. P. 226–245. DOI: 10.2478/s11533-012-0138-z
18. Howie J. Fundamentals of Semigroup Theory. *Claredon Press*, Oxford. 1996.
19. Huang J., Bai, Y., Chen, Y. et al. Constructions of free dibands and tribands. *Semigroup Forum*, 2022. 104. 647–666. doi:10.1007/s00233-022-10270-w
20. Huang J., Chen Yu., Gröbner-Shirshov bases theory for trialgebras. *Mathematics*, 9. 2021. 1207. DOI:10.3390/math9111207
21. Jespers E., Okninski J. Nilpotent semigroups and semigroup algebras. *Journal of Algebra*, 1994. Vol. 169. P. 984–1011.
22. Kinyon M. K. Leibniz algebras, Lie racks, and digroups. *J. Lie Theory* 2007. 17 (1). P. 99–114.
23. Knuth D. E., Bendix P. B. Simple word problems in universal algebras. *In: J. Leech, editor*, *Computational Problems in Abstract Algebra* (Pergamon Press, Elmsford). 1970. P. 263–297.
24. Kolesnikov P. S. Varieties of dialgebras and conformal algebras. *Sib. Math. J.*, 2008. V. 49. no. 2. P. 257–272.
25. Kolesnikov P. S., Voronin V.Yu. On special identities for dialgebras. *Linear and Multilinear Algebra*, 2013. V. 61. no. 3. P. 377–391.
26. Kruse R. S., Price D. T. On the classification of nilpotent rings. *Mathematische Zeitschrift*, 1970. Vol. 113, no. 3. P. 215–223.
27. Kryklia Y. A. On free *n*-trinilpotent trioids. *International mathematical conference*

dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv 14-17 July. 2020. P. 42.

28. Leroux P. Ennea-algebras. *J. Algebra,* 2004. 281. no. 1. P. 287–302. doi: 10.1016/j.jalgebra.2004.06.022
29. Levenshtein V.I. Self-adaptive automata for decoding messages. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 1961. 141. no. 6. P. 1320–1323.
30. Liu K. A class of group-like objects. doi:10.48550/arXiv.math/0311396
31. Liu K. The generalizations of groups. *Research Monographs in Math. Publishing:* Burnaby, 2004. 1. 153.
32. Liu K. Transformation digroups. doi:10.48550/arXiv.math/0409265
33. Loday J.-L. Algèbres ayant deux opérations associatives (digèbres). *C. R. Acad. Sci*. Paris, 1995. Vol. 321. no. 2. P.141–146.
34. Loday J.-L. Dialgebras. *Dialgebras and related operads*: Lect. Notes Math. Springer–Verlag, Berlin. 2001. Vol. 1763. P. 7–66.
35. Loday J.-L., Ronco M. O. Trialgebras and families of polytopes. *Contemp. Math.*, 2004. Vol. 346. P. 369–398.
36. Loday J.-L., Ronco M. O. Hopf algebra of the planar binary trees. *Adv. Math*., 1998. Vol. 139. no. 2. P. 293–309.
37. Loday, J.-L., Frabetti, A., Chapoton, F., Goichot, F.: Dialgebras and Related Operads. Lecture Notes in Mathematics, 2001. vol. 1763. Springer, Berlin.
38. Lothaire M. Combinatorics on Words. *Cambridge University Press*. 1983.
39. McLean D. Idempotent semigroups. *Amer. Math. Mon*., 1954. 61. P. 110–113.
40. Neumann B. H., Taylor T. Subsemigroups of nilpotent groups. *Proc. Royal Soc.*, 1963. London, Ser. A. Vol. 274. P. 1–4.
41. Novelli J.-C., Thibon J.-Y. Construction of dendriform. *C. R., Math. Acad. Sci*., 2006. Paris. Vol. 342. no. 6. P. 365–369.
42. Novelli J.-C., Thibon J.-Y. Polynomial realizations of some trialgebras. *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics. Series Formelles et Combinatoire*

Algébrique. 2006. San Diego, California. Available at: arXiv:math/0605061v1

43. Novikov B. V. On decomposition of Moufang groupoids. *Quasigroups and Related Systems,* 2008. Vol. 16. no. 1. P. 97–101.
44. Pozhidaev A.P. Dialgebras and related triple systems. *Sib. Math. J.,* 2008. V. 49. no. 4. P. 696–708.
45. Rodríguez-Nieto J.G., Salazar-Díaz O.P., Velásquez R. Abelian and symmetric generalized digroups. *Semigroup Forum,* 2021. 102. P. 861–884. doi:10.1007/s00233-021-10162-5
46. Rodríguez-Nieto J.G., Salazar- Díaz O.P., Velásquez R. Augmented, free and tensor generalized digroups. *Open Math.,* 2019. 17 (1). P. 71–88. doi:10.1515/math-2019-0010
47. Salazar-Díaz O.P., Velásquez R., Wills-Toro L.A. Generalized digroups. *Comm. Algebra*, 2016. 44 (7). P. 2760–2785. doi:10.1080/00927872.2015.1065841
48. Sanchez-Ortega J. On the definitions of nucleus for dialgebras. *J. Algebra*, 2013. 392. no. 15. P. 244–264.
49. Schein B.M. One-sided nilpotent semigroups. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1964. 19:1(115). P. 187–189.
50. Wrathall G. Free partially commutative groups. *In: D.Z. Du and G. Hu, editors, Combinatorics, Complexity and Computing,* (Kluwer, Dordrecht). 1989. P. 195–216.
51. Wrathall G. The word problem for free partially commutative groups. *Journal of Symbolic Computation*, 1988. 6. P. 99–104.
52. Zhang G., Chen Y. A construction of the free digroup. *Semigroup Forum,* 2021. 102. P. 553–567. doi:10.1007/s00233-021-10161-6
53. Zhuchok A. V. Certain congruences on g-dimonoids. *Asian-Eur. J. Math.,* 2250021 (12 p.). 2021. doi: 10.1142/S1793557122500218
54. Zhuchok A. V. Commutative dimonoids. *Algebra Discrete Math.,* 2009. V. 2. P. 116–127.
55. Zhuchok A. V. Dibands of subdimonoids. *Matematychni Studii,* 2010. Vol. 33. no. 2.

P. 120–124.

56. Zhuchok A.V. Dimonoids and bar-units. *Sib. Math. J.,* 2015. V. 56. no. 5. P. 827–840.
57. Zhuchok A. V. Elements of dimonoid theory. *Mathematics and its Applications,* 2014. vol. 98. Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Monograph, Kiev (in Ukrainian). 304 p.
58. Zhuchok A. V. Free commutative dimonoids. *Algebra Discrete Math.*, 2010. V. 9. no. 1. P. 109–119.
59. Zhuchok A. V. Free commutative trioids. *Semigroup Forum*, 2019. Vol. 98. no. 2. P. 355–368. DOI: 10.1007/s00233-019-09995-y
60. Zhuchok A. V. Free dimonoids. *Ukr. Math. J.,* 2011. V. 63. no. 2. P. 196–208.
61. Zhuchok A. V. Free left n-dinilpotent doppelsemigroups. *Commun. Algebra*, 2017. 45. no. 11. P. 4960–4970. doi: 10.1080/00927872.2017.1287274
62. Zhuchok A. V. Free n-dinilpotent dimonoids. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2013. Vol. 17. no. 4. P. 43–46.
63. Zhuchok A. V. Free n-nilpotent dimonoids. *Algebra Discrete Math.,* 2013. Vol. 16. no. 2. P. 299–310.
64. Zhuchok A. V. Free n-tuple semigroups. *Math. Notes,* 2018. 103. no. 5. P. 737–744 doi: 10.1134/S0001434618050061
65. Zhuchok A. V. Free products of dimonoids. *Quasigroups Relat. Syst.*, 2013. 21 no. 2. P. 273–278.
66. Zhuchok A. V. Free products of doppelsemigroups. *Algebra Univers.*, 2017. 77. no. 3. P. 361–374. doi: 10.1007/s00012-017-0431-6
67. Zhuchok A. V. Free rectangular dibands and free dimonoids. *Algebra Discrete Math.*, 2011. Vol. 11. no. 2. P. 92–111.
68. Zhuchok A. V. Free rectangular n-tuple semigroups. *Chebyshevskii Sb.,* 2019. 20. no. 3. P. 261–271. doi: 10.22405/2226-8383-2019-20-3-261-271
69. Zhuchok A. V., Gorbatkov A.B. On the structure of dimonoids. *Semigroup Forum,* 2017. V. 94. no. 2. P. 194–203. doi: 10.1007/s00233-016-9795-8

70. Zhuchok A. V. Semilattices of subdimonoids. *Asian-Eur. J. Math.*, 2011. Vol. 4. no.2. P. 359–371. doi: 10.1142/S1793557111000290
71. Zhuchok A. V. Some congruences on trioids. *Journal of Mathematical Sciences*, 2012. 187. no. 2. P. 138–145.
72. Zhuchok A. V. Structure of relatively free dimonoids. *Commun. Algebra*, 2017. 1 V. 45. no. 4. P. 1639–1656. doi: 10.1080/00927872.2016.1222404
73. Zhuchok A. V. Structure of relatively free *n*-tuple semigroups. *Algebra Discrete Math.*, 2023. V. 36. no. 1. P. 109–128. doi:10.12958/adm2173
74. Zhuchok A. V. Structure of relatively free trioids. *Algebra Discrete Math.*, 2021. V. 31. no. 1. P. 152–166. doi: http://dx.doi.org/10.12958/adm1732
75. Zhuchok A. V. The least dimonoid congruences on free *n*-nilpotent trioids. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020. 41(9). P. 1747–1753.
76. Zhuchok A. V. The least dimonoid congruences on relatively free trioids. *Matematychni Studii*, 2022. 57(1). P. 23–31.
77. Zhuchok A. V. Tribands of subtrioids. *Труды Ин-та прикладной математики и механики*, 2010. Т. 21. С. 98–106.
78. Zhuchok A. V. Trioids. *Asian-Eur. J. Math.*, 2015. Vol. 8. no. 4. 1550089 (23 p.). doi: 10.1142/S1793557115500898
79. Zhuchok A. V., Demko M.: Free *n*-dinilpotent doppelsemigroups. *Algebra Discrete Math.*, 22. 2016. no. 2. P. 304–316.
80. Zhuchok A. V., Knauer K. Abelian doppelsemigroups. *Algebra Discrete Math.*, 2018. 26. no. 2. P. 290–304.
81. Zhuchok A. V., Koppitz J. Free products of *n*-tuple semigroups. *Ukrainian Math. J.*, 2019. 70. no. 11. P. 1710–1726 doi: 10.1007/s11253-019-01601-2
82. Zhuchok A. V., Koppitz J. Free weakly *k*-nilpotent *n*-tuple semigroups. 2023. Submitted.
83. Zhuchok A. V., Kryklia Y. A. Free left *n*-trinilpotent trioids. *Commun. Algebra*, 2021. 49. no. 2. P. 467–481. doi: 10.1080/00927872.2020.1802472

84. Zhuchok A. V., Kryklia Y. A. On free left *n*-trinilpotent trioids. *International Conference «Mal'tsev Meeting»*. Abstracts. 2018. P. 219.

85. Zhuchok A. V., Kryklia Y. A. The least left *n*-trinilpotent congruence on the free trioid. *Algebra Univers.*, 2022. 83. no. 4. doi: 10.1007/s00012-021-00758-x

86. Zhuchok A. V., Pilz G.F. New models for some free algebras of small ranks *Carpathian Math.*, Publ. 2023. 15 (1). P. 295–305. doi:10.15330/cmp.15.1.295-305

87. Zhuchok A. V., Zhuchok Yul. V. Free left *n*-dinilpotent dimonoids. *Semigroup Forum,* 2016. Vol. 93. no. 1. P. 161–179. doi: 10.1007/s00233-015-9743-z

88. Zhuchok A. V., Zhuchok Yu. V. On two classes of digroups. *São Paulo J. Math. Sci.*, 2017. 11 (1). P. 240–252. doi:10.1007/s40863-016-0038-4

89. Zhuchok A. V., Zhuchok Yul.V. Free *k*-nilpotent *n*-tuple semigroups. *Commun. Algebra,* 2023. 51. no. 9. P. 3972–3980. doi: 10.1080/00927872.2023.2195000

90. Zhuchok A. V., Zhuchok Yul.V., Odintsova O.O. Free left *k*-nilpotent *n*-tuple semigroups. *Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat.*, 2020. 94. no. 3. P. 29–38.

91. Zhuchok A. V., Zhuchok Yul.V., Zhuchok Yu.V. Certain congruences on free trioids. *Commun. Algebra*, 2019. 47. no. 12. P. 5471–5481. doi: 10.1080/00927872.2019.1631322

92. Zhuchok Yu. V. Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free abelian diband. *Algebra Discrete Math.*, 2018. 25. no. 2. P. 322–332.

93. Zhuchok Yu. V. Endomorphisms of free abelian monogenic digroups. *Matematychni Studii*. 2015. 43 (2). P. 144–152. doi:10.15330/ms.43.2.144-152

94. Zhuchok Yu. V. Free abelian dibands. *Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math.,* 2017. 84. P. 15–21.

95. Zhuchok Yu. V. Free abelian dimonoids. *Algebra Discrete Math.,* 2015. 20. no. 2. P. 330–342.

96. Zhuchok Yu. V. Free abelian trioids. *Algebra Discrete Math.*, 2021. 32. no. 1. P. 147–160.

97. Zhuchok Yu. V. On free abelian trioids. *Book of Abstracts of the 13th Intern. Algeb.*

Conf. in Ukraine, Kyiv, 6-9 July 2021. P. 89.

98. Zhuchok Yu. V. On the determinability of free trioids by semigroups of endomorphisms. *Reports of the NAS of Ukraine*, 2015. 4. P. 7–11.
99. Zhuchok Yu. V. The endomorphism monoid of a free troid of rank 1. *Algebra Universalis*, 2016. Vol. 76. no. 3. P. 355–366.
100. Zhuchok Yu. V., Pilz G. F. A new model of the free monogenic digroup. *Matematychni Studii*, 2023. 59(1). P. 12–19. doi: 10.30970/ms.59.1.12-19
101. Zhuchok Yul. V. Decompositions of free trioids. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, 2014. no. 4. P. 28–34.
102. Zhuchok Yul. V. Free *n*-nilpotent trioids. *Matematychni Studii*, 2015. Vol. 43. no. 1. P. 3–11.
103. Zhuchok Yul. V. Free rectangular tribands. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*, 2015. Vol. 78. no. 2. P. 61–73.
104. Zhuchok Yul. V. On one class of algebras. *Algebra Discrete Math.*, 2014. 18.no. 2. P. 306–320.
105. Жучок А. В. Вільні тріоїди. *Вісник Київського національного ун-ту*. Серія: фіз.-мат. науки. 2010. № 4. С. 23–26.
106. Жучок А. В. Некоторые конгруэнции на триоидах. Фундаментальная и прикладная математика. 2011/2012. Т. 17. № 3. С. 39–49.
107. Жучок А. В. Про комбінаторні властивості операцій тріоїдів. Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. 1. Фізико-математичні науки. 2013. № 14. С. 77–83.
108. Крикля Я. А. *Про деякі властивості вільних лівих n-тринільпотентних тріоїдів. Науковий вісник Ужгородського університету,* 2023. вип.43. № 2. С. 34–41. doi:10.24144/2616-7700.2023.43(2).34-41
109. Крикля Я. А. Про один клас відносно вільних тріоїдів. *Матеріали IV Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих*

*здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу – ІТМ*плюс-2023 Форум молодих дослідників»*, Суми. 17 листопада 2023. С. 45–46.

110. Мальцев А. И. Нильпотентные полугруппы. Уч. зап. Ивановского гос. пед. ин-та. 1953. Т. 4. С. 10 –111.
111. Шеврин Л. Н. и др.. Полугруппы. В кн: «Общая алгебра». М.: Наука, 1991. Т. 2. гл. 4. С. 11–191.