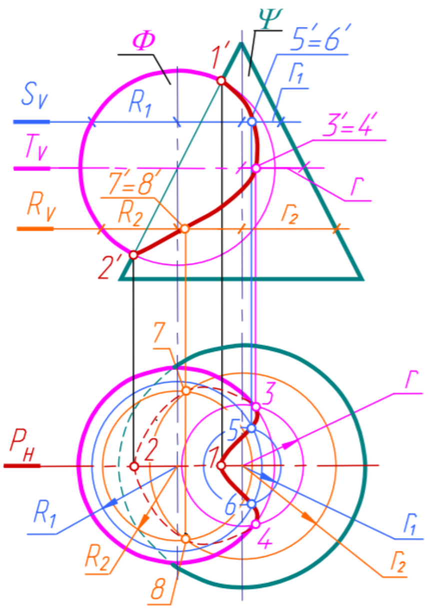
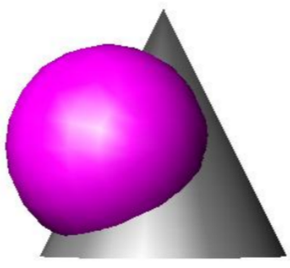
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД
«ЛУГАНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
З НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчально-методичний посібник при вивчені курсів
«Нарисна геометрія та проєктна графіка»,
«Нарисна геометрія та креслення»,
«Інженерна та комп'ютерна графіка»
для здобувачів освіти спеціальностей «Дизайн»,
«Середня освіта. Трудове навчання та технології» «Професійна освіта»
денної та заочної форм навчання





Старобільск
ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка»
2021

УДК 514.18(075)

Р 32

Рецензенти:

Меняйленко О.С. – доктор технічних наук, професор, проректор з науково-педагогічної роботи, професор кафедри інформаційних технологій та систем ДЗ «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»

Маслійов С.В. – доктор сільськогосподарських наук, професор, завідувач кафедри біології та агрономії ДЗ «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка».

Р 32 Конспект лекцій з нарисної геометрії: Навчально-методичний посібник для здобувачів освіти спеціальностей «Дизайн», «Середня освіта. Трудове навчання та технології» «Професійна освіта» денної та заочної форм навчання / Укладачі: О. О. Ревякіна, О. О. Беседа; Держ. закл. «Луган. нац. ун-т імені Тараса Шевченка». – Старобільск: Вид-во ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка», 2021. – 120 с.

У навчально-методичному посібнику висвітлені основні відомості з тем нарисної геометрії, типові приклади та хід розв'язання графічних задач, питання для самоконтролю. Видання сприяє розвитку логічного та просторового мислення, його геометричного та графічного кругозору. Посібник підготовлено відповідно до програм вивчення курсів «Нарисна геометрія та проєктна графіка», «Нарисна геометрія та креслення» та «Інженерна та комп'ютерна графіка» для здобувачів освіти спеціальностей «Дизайн», «Середня освіта. Трудове навчання та технології» «Професійна освіта» усіх форм навчання.

УДК 514.18(075)

Рекомендовано до друку навчально-методичною радою
ДЗ «Луганського національного університету імені Тараса Шевченка)
(протокол № 7 від 26.03.2021 р.)

ЗМІСТ

	ВСТУП………………………………………………………..		5
1.	**НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ ЯК НАВЧАЛЬНА ДИСЦИПЛІНА**		6
	1.1.	Короткий історичний огляд розвитку дисципліни……	6
	1.2.	Геометричні фігури. Геометричний простір. Відображення……………………………………………	8
	1.3.	Методи проєціювання…………………………………..	9
	1.4.	Ортогональні проєкції. Ортогональна система двох і трьох площин проєкцій………………………………	11
	1.5.	Ортогональні проєкції точки……………………..	12
2.	**ПРЯМА ЛІНІЯ. ВІДНОСНЕ ПОЛОЖЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ, ТА ПРЯМОЇ ДО ПЛОЩИНИ ПРОЄКЦІЙ. ВИЗНАЧЕННЯ ЇЇ НАТУРАЛЬНОЇ ВЕЛИЧИНИ ВІДРІЗКА ПРЯМОЇ**………………………………………………………		16
	2.1.	Пряма лінія…………………………………………….	16
	2.2.	Класифікація прямих………………………………….	16
		2.2.1. Прямі рівня……………………………………..	17
		2.2.2. Проєціюючі прямі……………………………..	19
		2.2.3. Прямі загального положення…………………	21
	2.3.	Взаємне положення прямої і точки…………………….	23
	2.4.	Взаємне положення двох прямих………………………	24
	2.5.	Проєкції лінійних кутів………………………………	25
	2.6.	Сліди прямої…………………………………………..	26
3.	**ПЛОЩИНА. СПОСОБИ ЗАВДАННЯ ПЛОЩИНИ. КЛАСИФІКАЦІЯ ПЛОЩИН**…………………………………..		27
	3.1.	Площина………………………………………………	27
	3.2.	Належність точки і прямої площині……………………	28
	3.3.	Класифікація площин…………………………………	29
		3.3.1. Площина загального положення……………...	29
		3.3.2. Проєціюючі площини…………………………	30
		3.3.3. Площини рівня…………………………………	32
	3.4.	Особливі лінії площини………………………………	33
4.	**ВЗАЄМНЕ ПОЛОЖЕННЯ ДВОХ ПЛОЩИН, ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ**…………………………………………………….		37
	4.1.	Пряма паралельна площині……………………………..	37
	4.2.	Паралельність площин………………………………..	38
	4.3.	Перетин площин………………………………………	39
	4.4.	Перетин прямої і площини…………………………….	43
	4.5.	Пряма перпендикулярна площині………………………	45
	4.6.	Взаємно перпендикулярні площини……………………	48

5. СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ……………………………………………………….. 50
5.1. Спосіб заміни площини проєкцій…………………… 50
5.2. Спосіб обертання навколо осей, перпендикулярних до площин проєкцій……………………………………… 53
5.3. Плоскопаралельне переміщення……………………….. 57
5.4. Обертання навколо ліній рівня………………………… 58
5.5. Спосіб суміщення……………………………………….. 59
6. БАГАТОГРАННИКИ. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН БАГАТОГРАННИКІВ………………………………………… 62
6.1. Багатогранник. Точки і прямі на поверхні багатогранників……………………………………… 62
6.2. Переріз багатогранників площиною…………………… 64
6.3. Взаємний перетин багатогранних поверхонь………… 68
7. КРИВІ ЛІНІЇ. КРИВІ ПОВЕРХНІ…………………………... 73
7.1. Криві лінії……………………………………………….... 73
7.2. Криві поверхні………………………………………….... 75
7.3. Лінійчасті нерозгортні поверхні……………………….. 76
7.4. Поверхні обертання……………………………………... 78
7.5. Гвинтові поверхні……………………………………….. 81
8. ПЕРЕРІЗ КРИВИХ ПОВЕРХОНЬ ПЛОЩИНОЮ І ПРЯМОЮ ЛІНІЄЮ………………………………………… 83
8.1. Переріз кривих поверхонь площиною………………… 83
8.2. Переріз конічних поверхонь…………………………… 84
8.3. Перерізи циліндричних поверхонь…………………….. 87
8.4. Перетин прямої і поверхні……………………………… 89
9. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ………………….. 93
9.1. Взаємний перетин кривих поверхонь………………….. 93
9.2. Побудова лінії перетину поверхонь за допомогою кривих поверхонь (сфер)…………………………….. 96
9.3. Побудова лінії перетину поверхонь за допомогою площин загального положення……………………… 102
9.4. Часткові випадки перетинання поверхонь……………. 103
9.5. Вплив відносин розмірів поверхонь на лінію їх перетину…………………………………………………. 105
10. РОЗГОРТКА ПОВЕРХНІ………………………………….. 108
10.1. Розгортка поверхні правильної піраміди, прямого конуса…………………………………………………. 109
10.2 Спосіб нормального перерізу…………………………... 110
10.3. Спосіб розгортання……………………………………… 112
10.4. Спосіб трикутників (тріангуляції)……………………... 114
10.5. Умовні розгортки……………………………………….. 115
ЛІТЕРАТУРА…………………………………………………… 118

Вступ

Нарисна геометрія – розділ геометрії, в якому просторові фігури (оригінали) вивчають за допомогою зображень їхніх графічних моделей на площині рисунка.

Рисунок має нести геометричну інформацію про форму та розміри оригіналу, має бути наочним, простим і точним.

Предмет нарисної геометрії – це розроблення методів побудови та читання рисунків, розв'язування на рисунках геометричних задач, а також геометричного моделювання, тобто створення предмета чи оригіналу, який відповідав би наперед заданим умовам. Формоутворювальними елементами простору є основні геометричні фігури – *точка, пряма* та *площина,* з яких утворюються складніші фігури.

Вивчення нарисної геометрії сприяє розвиткові у здобувачів освіти просторових представлень і просторової уяви – якостей, що характеризують високий рівень інженерного мислення та необхідних для вирішення прикладних задач. У процесі вивчення нарисної геометрії досягаються і інші цілі, розширюється загальнонауковий кругозір здобувачів освіти, розвиваються навички логічного мислення, уважність, спостережливість, акуратність та інші якості, розвиток яких є однією з задач навчання і виховання у вищій школі.

Науково-технічний прогрес, створення нових технологій потребують внесення до курсу нарисної геометрії нових питань, методів та задач, зокрема, останнім часом у різних галузях техніки зросло застосування складних кривих поверхонь. Це зумовило необхідність вивчення і конструювання таких поверхонь каркасно-нараметричним та іншими методами, в яких використовуються досягнення аналітичної та диференціальної геометрії.

1. НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ ЯК НАВЧАЛЬНА ДИСЦИПЛІНА

1.1. Короткий історичний огляд розвитку дисципліни

Перші рисунки, виконані з використанням прямокутних проєкцій, трапляються вже на стінах стародавніх храмів та палаців Єгипту та Ассирії. В часи Давньої Греції та Давнього Риму для побудови зображень також використовували прямокутні та центральні проєкції на одну площину. В Росії плани Пскова (XVI ст.), Москви (XVII ст.) свідчать про те, що вже тоді було уявлення не тільки про способи виконання фасадів і планів, а й про аксонометрію. Починаючи з часів Петра І, технічні рисунки для кораблебудування, гідротехніки й архітектури виконували в прямокутних проєкціях. Проєкти архітекторів В. В. Растреллі, В. І. Баженова, М. Ф. Казакова, проєкт палацового мосту І. П. Кулібіна, рисунки винахідника парової машини І. І. Ползунова – все це збереглося до наших днів і вражає своєю проєкційною бездоганністю.

У період Київської Русі зодчі створили всесвітньо відомі пам'ятки архітектури, такі як Софія Київська, яка й нині викликає захоплення нащадків, Золоті ворота тощо. Дістали визнання місцеві зодчі Петро Милоніг з Києва, Іван Більчинський з Полоцька та інші майстри. Правила будівництва були опубліковані в «Будівельному статуті» та в Руській Правді (1020 р.) Ярослава Мудрого.

На архітектуру України значний вплив мала доба Відродження. Вперше з кінця XVI ст. крім моделей почали застосовувати будівельні рисунки, а з середини XIX ст. – рисунки «зразкових фасадів» будинків, тобто прообрази типових проєктів.

Давньоруські зодчі рисунків не мали, хоча є підстави вважати, що майстри користувалися схематичними рисунками. Винятковий інтерес становить рисунок будівлі, виконаний гострим предметом на лесовому ґрунті біля Десятинної церкви (Київ), який, можливо, і був схемою розбиття на місцевості фундаментів цієї будівлі.

У XVIII ст. в Україні майже всі відповідальні споруди будували за

рисунками. Відомі, наприклад, рисунки проєкта Великої Лаврської дзвіниці, Андріївської церкви, воріт, порохових погребів та інших об'єктів Старокиївської та Печерської фортець.

Окремі види проєкцій використовували в техніці до кінця XVIII ст., а в 1795 р. з'явилася славетна «Geometrie descriptive» Гаспара Монжа (1746 – 1818), яка виникла як аналог координатного способу Декарта при розв'язуванні геометричних задач. У книзі окремі прямокутні проєкції на вертикальні та горизонтальні площини зв'язувалися в одну систему.

Перший курс нарисної геометрії в Росії було прочитано у 1810 р. в Інституті (корпусі) інженерів шляхів сполучення учнем Г. Монжа інженером К. І. Потьє. У 1821 р. професор Я. О. Севастьянов (1796 – 1849) написав та видав перший російський підручник з нарисної геометрії з великою кількістю задач прикладного характеру. Схему курсу Я. О. Севастьянова використав М.І. Макаров (1824 – 1904) та удосконалив В. І. Курдюмов (1853 – 1904). Продовжувачами цього напрямку в нарисній геометрії були професори М. О. Ринін (1877 – 1942) і О. І. Добряков (1895 – 1947).

Новий етап у розвитку нарисної геометрії та інженерної графіки почався в 40-х роках XX ст., коли в Москві професор М. Ф. Четверухін (1891 – 1974), а в Києві професор С. М. Колотов (1880 – 1965) опублікували наукові праці, які започаткували розвиток наукових і науково-методичних досліджень у цій галузі знань.

Заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, професор С. М. Колотов є засновником української школи в галузі теорії зображень. У 1933 р. він видав підручник «Начертательная геометрия», в якому вперше було показано новий оригінальний метод допоміжного проєкціювання, що відіграв помітну роль у розвитку теорії зображень та у її застосуванні в архітектурно-будівельній практиці. Ця та інші його праці вплинули як на наукові дослідження, так і на зміст навчальних курсів. Характерною ознакою їх є гнучке використання проєкційного апарату в теорії та практиці, вільний підхід до проєкціювання, який істотно розширив арсенал

способів перетворення проєкцій. Один із перших підручників українською мовою вийшов у 1967 р. Його автори С. М. Колотов, М. Ф. Євстіфеев, В. Є. Михайленко, О. Л. Підгорний і А. М. Пономарьов.

Професор В. Є. Михайленко удосконалив наукову школу, створену його вчителем професором С. М. Колотовим. Сфери його основних наукових інтересів – геометричне моделювання та оптимізація поверхонь щодо конструювання тонкостінних покриттів у архітектурі, архітектурна біоніка, дослідження теоретичних проблем технічної естетики. Професор О. Л. Підгорний плідно працює в теорії зображень, конструктивній геометрії, використовуючи геометричне моделювання для формоутворення просторових конструкцій та задач будівельної фізики (акустика, інсоляція, штучне освітлення тощо). Вагомі наукові результати мають професори С. М. Ковальов і К. О. Сазонов.

Слід відзначити велику наукову роботу в галузі геометричного моделювання для авіа- та сільськогосподарського машинобудування професорів А. В. Павлова та В. В. Ваніна.

1.2. Геометричні фігури. Геометричний простір. Відображення

Будь-яку непорожню множину точок називають ***геометричною фігурою.*** Геометричних фігур безліч, але до основних належать лише три: точка, пряма та площина. Між основними фігурами існують різні співвідношення, які можна визначити словами: належати, бути паралельними, розміститися між, бути конгруентними тощо. Якщо перші три співвідношення характеризують позиційні властивості геометричних фігур, то вираз «бути конгруентним» характеризує метричну властивість.

Геометричним простором сучасна геометрія називає сукупність однорідних фігур (об'єктів). Наприклад, геометричний простір може складатися з множини точок, прямих чи площин. Залежно від характеру реальних об'єктів геометричному простору надають різних властивостей. Так, якщо взяти за основу систему аксіом Евкліда – Гільберта, то можна дістати так званий евклідів

простір. Простір розглядають з нескінченно віддаленими чи невласними елементами. Вважається, що простір має одну нескінченно віддалену площину. В перетині з цією площиною кожна пряма має одну нескінченно віддалену точку, а кожна площина – одну нескінченно віддалену пряму. Отже, паралельні прямі перетинаються у нескінченно віддаленій точці, а паралельні площини перетинаються по нескінченно віддаленій прямій.

Основою нарисної геометрії є метод проєкцій, який дає змогу отримувати зображення просторових фігур на площині чи поверхні. За цим методом кожній точці тривимірного простору відповідає певна точка двовимірного простору (площини). На площині зображують усі фігури, розміщені в просторі. Якщо взяти в просторі довільну точку $\boldsymbol{S}$ та сполучити її прямими з усіма точками простору, то можна заповнити цими прямими весь простір. Точку $\boldsymbol{S}$ називають *центром.* Якщо центр задано, то через нього і кожну точку простору, яка не збігається з центром, можна провести єдину пряму, яку називають *проєкціювальним променем.* Перетин проєкціювального променя з площиною проєкцій дає проєкцію точки.

1.3. Методи проєціювання

Нарисна геометрія, як і інші науки вивчає об'єкти навколишнього світу. Нас цікавлять геометричні закономірності та їх відображення на кресленні.

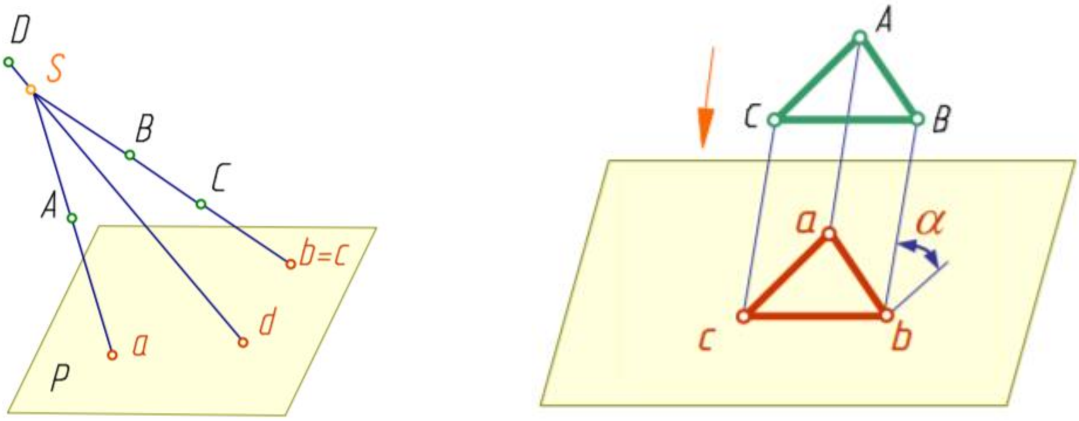
Одною з основних задач нарисної геометрії – є створення метода відображення трьохмірних фігур на площину та розроблення способів рішення позиційних й метричних задач, пов'язаних з цими фігурами по їх площинним зображенням.

Нарисна геометрія являє собою теоретичну базу для створення креслення. Рішення задач способами нарисної геометрії відбувається графічним шляхом.

В основі нарисної геометрії лежить метод проєціювання.

Якщо у просторі визначити об'єкт проєціювання наприклад, точки, задати центр проєціювання та площину проєкцій, то проєкціями точок будуть точки

перетину проєціюючих променів, що проходять через відновні точки з площиною проєкцій (рис.1.1, а)



а) б)

Рис. 1.1.

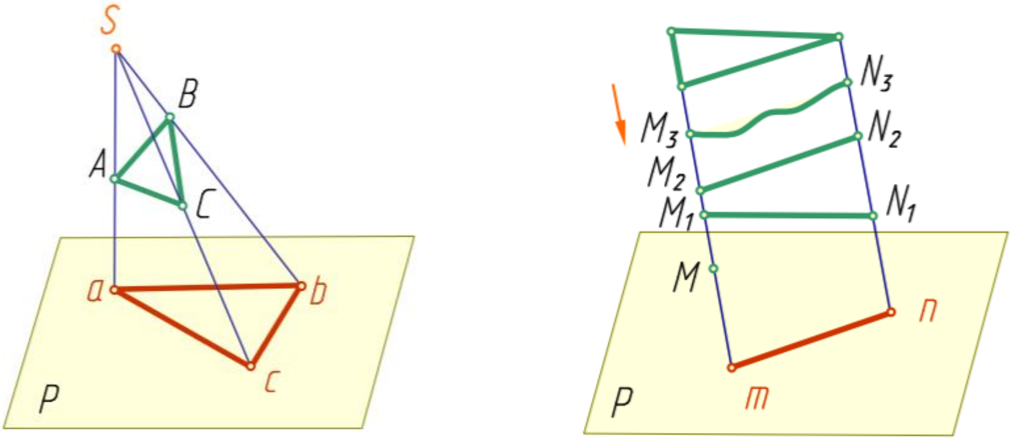
Якщо центр проєціювання видалити в нескінченність, то проєціюючі промені стануть паралельними (рис. 1.1, б). Промені паралельного проєціювання можуть утворювати з площиною проєкцій косі та прямі кути. Залежно від цього розрізняють прямокутне (ортогональне) та косокутне проєціювання. Відповідно до способу проєціювання проєкції називають центральними чи паралельними.

Центральні та паралельні проєкції характеризуються певними властивостями. Оскільки проєкцією точки є точка на площині проєкцій, то проєкцією фігури є множина проєкцій всіх її точок. При проєціюванні сукупність проєційних променів утворює різноманітні геометричні фігури. При проєціюванні прямої – це площина, кривої лінії – конічна або циліндрична поверхня (рис. 1.2, а, б).

Проєкцією прямої є пряма.

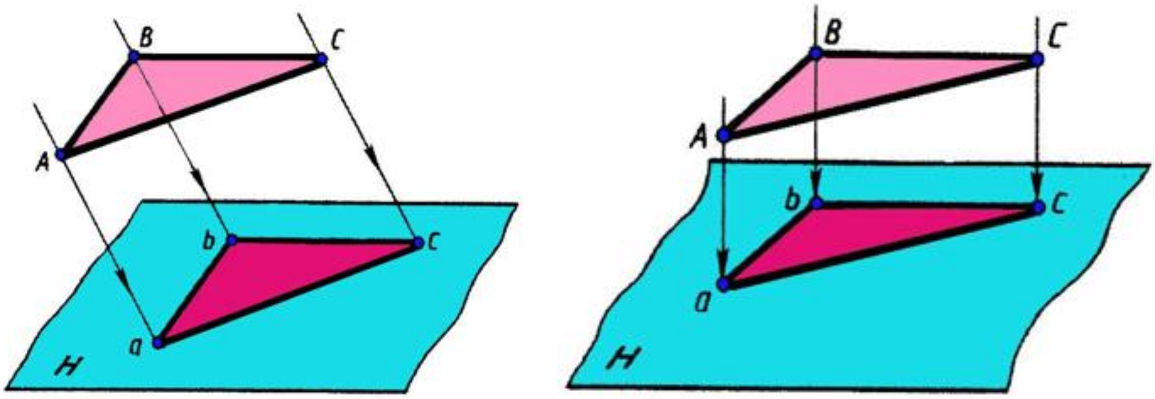
Проєкція прямої визначена, якщо відомі проєкції двох її точок. Якщо у просторі пряма паралельна площині проєкцій $\boldsymbol{\Pi_1}$, то її проєкція при центральному проєціюванні пропорційна самій прямій, а при паралельному – рівна.

Напрям проєціювання при побудові паралельних проєкцій може бути задано під косим кутом до площини проєкцій (косокутне) (рис. 1.3, а), або під прямим – прямокутне (ортогональне) проєціювання (рис. 1.3, б).



а) б)

Рис. 1.2.



а) б)

Рис. 1.3.

1.4. Ортогональні проєкції. Ортогональна система двох і трьох площин проєкцій

Суть метода ортогонального проєціювання складається в тому, що об'єкт проєціюється на дві або три взаємно перпендикулярні площини проєкцій прямими, напрям яких перпендикулярний до площини проєкцій. Одна з них позначена ***H* (*П*$_1$)** розташована горизонтально та має назву горизонтальна. Площина ***V* (*П*$_2$)** – фронтальна площина проєкцій, а третя ***W* (*П*$_3$)** – профільна площина проєкцій.

Площини ***H***, ***V***, ***W*** при перетинанні поділяють простір на вісім тригранних кута, їх називають октантами. На рис. 1.4 показаний прийнятий порядок

рахування октантів, лінія перетину площин проєкцій має назву – вісь проєкцій. При перетинанні горизонтальної та фронтальної площин проєкцій утворюється вісь ***OX***, фронтальної і профільної – ***OZ***, горизонтальної і профільної – вісь ***OY***.

За напрямом осей проєкцій відносно точки ***O*** легко уявити кожний октант (табл. 1)

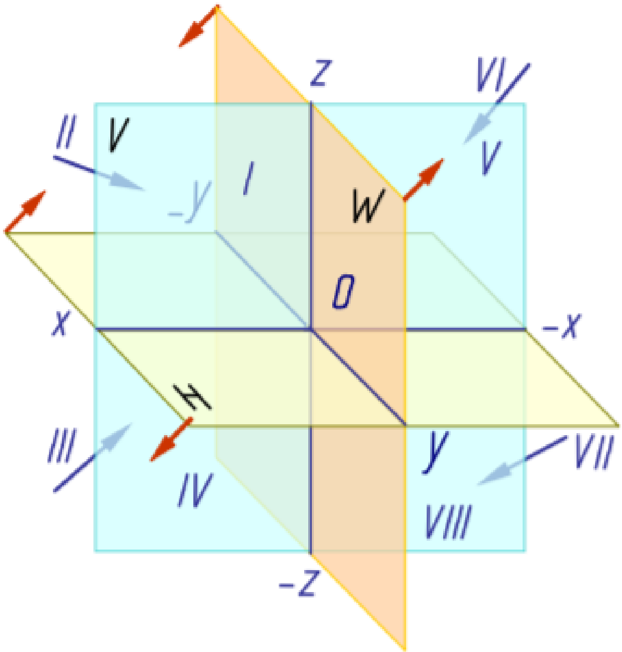


Рис. 1.4

Таблиця 1.

Система знаків для визначення координат ***X***, ***Y***, ***Z*** точок в октантах

Октанти	Знаки координати		
	X	*Y*	*Z*
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-
V	-	+	+
VI	-	-	+
VII	-	-	-
VIII	-	+	-

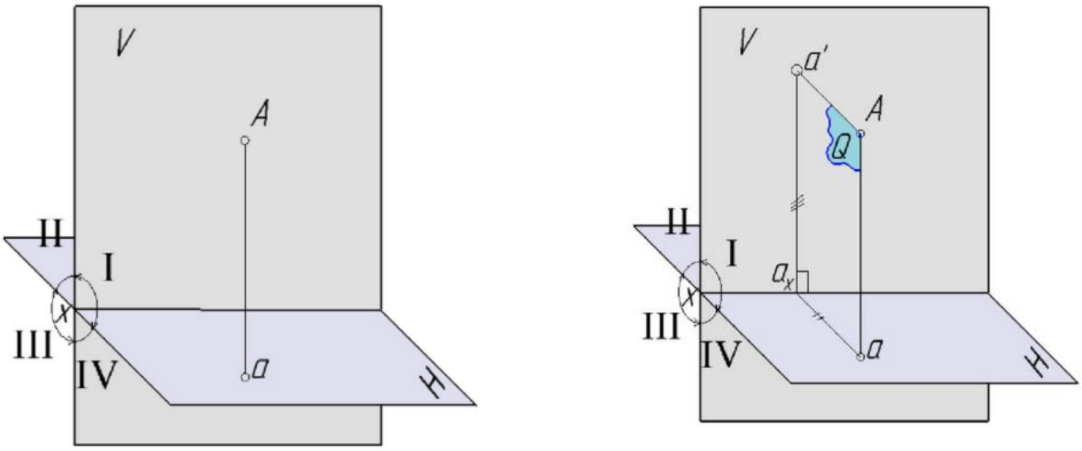
1.5. Ортогональні проєкції точки

Ортогональною проєкцією точки називають точку перетину перпендикуляра з площиною проєкцій.

Одна проєкція не визначає положення точки у просторі. В цьому легко переконатися, якщо розглянути рис. 1.5, а. На якому зображена т. ***A*** та її прямокутна (ортогональна) проєкція на площину ***H (П₁)***.

На проєційному промені проведеному з т. А перпендикулярно до площини ***$П_1$*** можна взяти кількість точок, усі вони проєціюються у одну й ту ж точку а, так що визначити височину точки ***A***, маючи тільки одну проєкцію не можливо.

Положення точки у просторі можна визначити, якщо побудувати її проєкції на дві взаємно перетинаючи площини (рис. 1.5, б).



а)   б)

Рис. 1.5.

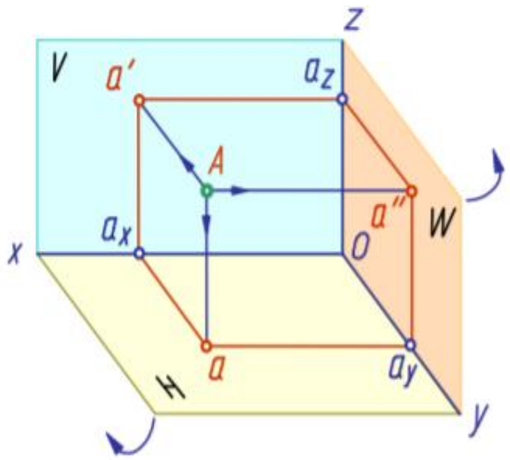
Зображення точки у двох проєкціях визначає її положення у просторі. Такі креслення виявляються метрично визначені. Однак, у ряді випадків застосовують зображення на трьох площинах проєкцій. Внаслідок того, що просторові форми тримірні, то креслення їх у трьох проєкціях більш зрозумілі.

Розглянемо приклад проєціювання точки, розташованої у 1 октанті на три площини проєкцій (рис. 1.6).

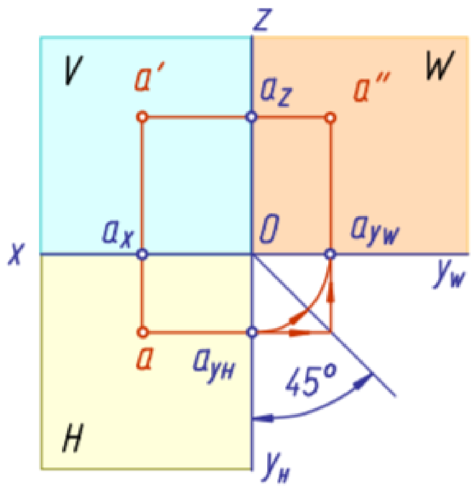
Розглянувши наочне відображення точки (рис. 1.6), ми бачимо, що запропонована модель є складною з виробничої точки зору. Французький математик Гаспар Монж запропонував перейти від наочного зображення до комплексного креслення.

Метод Монжа – полягає в тому, що зображений об’єкт прямокутно проєктується на дві взаємо-перпендикулярні площини: горизонтальну $\boldsymbol{\Pi_1}$ та фронтальну $\boldsymbol{\Pi_2}$. Зображення, що при цьому утворюються називають відповідно горизонтальною та фронтальною проєкціями. Потім горизонтальну площину проєкцій повертають навколо лінії перетину цих площин (***OX***) до суміщення з фронтальною площиною проєкцій. Після суміщення утворюється двокоординатне зображення (епюр Монжа), в якому дві проєкції точки обов’язково лежать на одній лінії зв’язку, перпендикулярно до осі обертання. Епюр Монжа як креслення має позиційну і метричну повноту, тобто за ним можна визначити взаємне розміщення елементів і знайти величини цих

елементів.



а)



б)

Рис. 1.6.

H (П₁) – горизонтальна площина; ***V (П₂)*** – фронтальна площина

W (П₃) – профільна площина; $\boldsymbol{П_1 \perp П_2 \perp П_3}$; ***OX***, ***OУ***, ***OZ*** – осі проєкцій

O – початок розрахунку; ***a*** – горизонтальна проєкція точки ***A***

a′ – фронтальна проєкція точки ***A***; ***a″*** – профільна проєкція точки ***A***

При необхідності застосовується третя, профільна площина, що суміщується з площиною $\boldsymbol{П_2}$, утворюючи трикартинне, позиційно і метрично визначене креслення.

На рис. 1.6 (б) побудовані три проєкції точки ***A***: ***a a′*** – вертикальна лінія зв’язку; ***a′ a″*** – горизонтальна лінія зв’язку; ***a a′*** $\perp$ ***OX***; ***a′ a″*** $\perp$ ***OZ***.

Отримане в наслідок цього поєднання площин креслення, має назву комплексного**.**

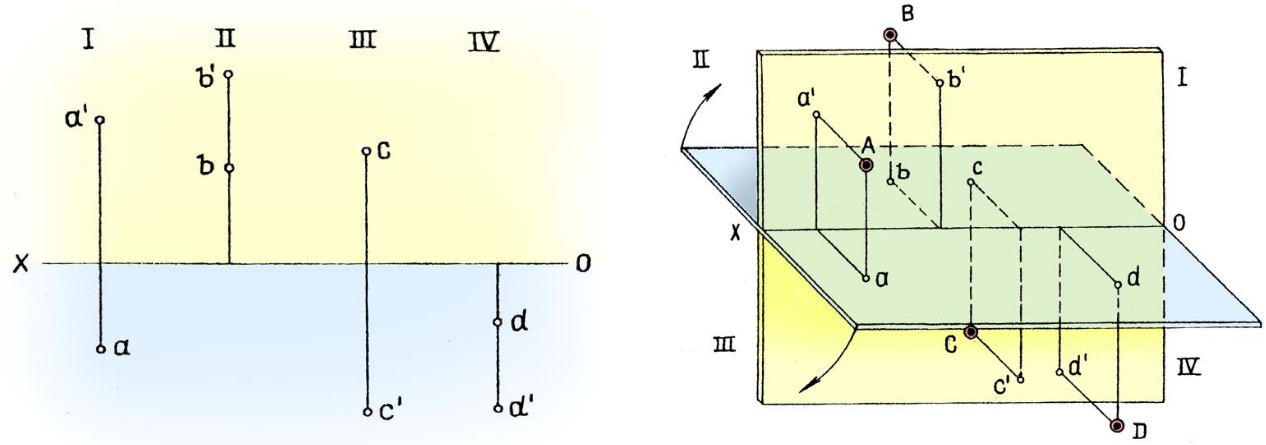
Для утворення третьої проєкції точки можна примінити три метода: проєкційний, координатний, за допомогою прямої, проведеної під кутом 45°.

Ці методи зведені на рис. 1.6 (б).

Лінія, що сполучає проєкції точки, має назву лінії зв’язку. Дві проєкції точки завжди розташовані на одній лінії зв’язку, паралельно осі проєкцій. Дві проєкції точки завжди визначають її положення у просторі. Якщо третя площина у просторі не використовується, то площини $\boldsymbol{П_1}$ та $\boldsymbol{П_2}$ при перетинанні

утворюють чотири двогранних кута, їх називають октантами, або чвертями простору. На рис. 1.4 показаний прийнятий порядок рахування чвертей. Вісь проєкцій поділяє кожну з площин $\boldsymbol{\Pi_1}$ та $\boldsymbol{\Pi_2}$ на півплощини, умовно позначені $\boldsymbol{\Pi_1}$ *і* $-\boldsymbol{\Pi_1}$, $\boldsymbol{\Pi_2}$ *і* $-\boldsymbol{\Pi_2}$.

На рис. 1.7 показані точки, розташовані у різних чвертях простору.



а) б)

Рис. 1.7.

Запитання для самоконтролю:

1. Чим характеризується евклідів простір?
2. Який метод є основою нарисної геометрії?
3. Визначити геометричну модель об'єкта та її особливості.
4. Що називають геометричним простором?
5. Що таке чверті простору, або квадранти?
6. Чому одне зображення об'єкта не дає уявлення про його форму та розміри?
7. Який основний недолік системи прямокутних проєкцій (методу Монжа)?
8. Якими способами можна дістати горизонтальну проєкцію за методом Монжа?
9. Що таке лінія зв'язку?
10. Як побудувати профільну проєкцію точки по її горизонтальній і фронтальній проєкціям?

2. ПРЯМА ЛІНІЯ. ВІДНОСНЕ ПОЛОЖЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ, ТА ПРЯМОЇ ДО ПЛОЩИН ПРОЄКЦІЙ. ВИЗНАЧЕННЯ НАТУРАЛЬНОЇ ВЕЛИЧИНИ ВІДРІЗКА ПРЯМОЇ

2.1. Пряма лінія

Пряма лінія утворюється при прямолінійному русі точки без зміни напрямку руху. Пряму можна розглядати і як наслідок перетинання двох площин. Вона безмежна у просторі. Обмежена з обох боків частина прямої-відрізок (рис. 2.1). Відрізок позначається літерами, поставленими біля його кінців.

Пряма є визначеною, якщо відомі проєкції двох її точок. На комплексному кресленні пряма задається проєкцією двох точок (рис. 2.2), або точкою і напрямком.

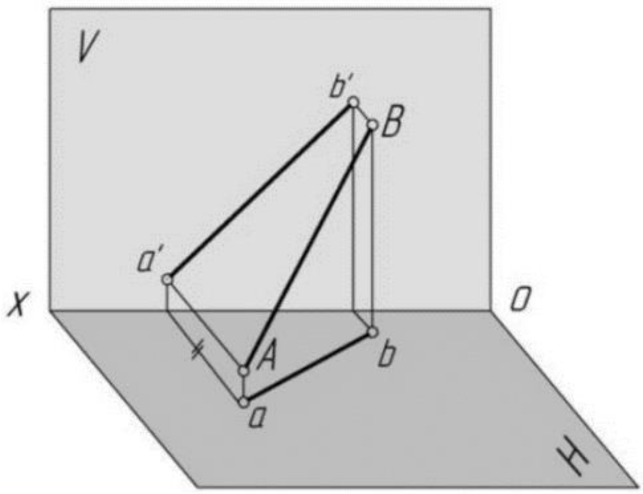


Рис. 2.1.

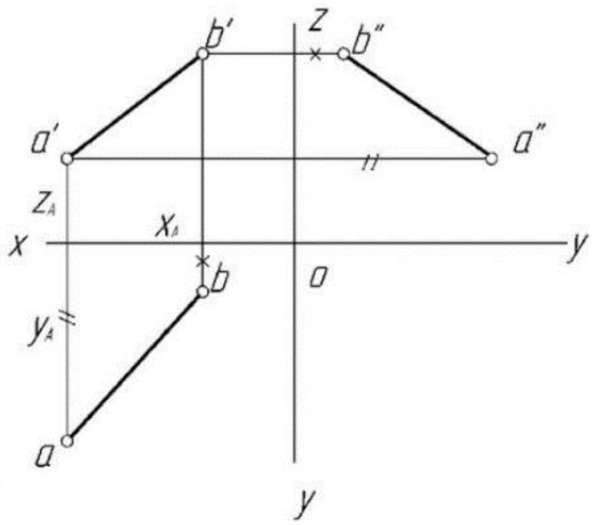


Рис. 2.2.

2.2. Класифікація прямих

Прямі у просторі поділяються на прямі загального і часткового положення. Останні в свою чергу поділяються на проєціюючі прямі та прямі рівня.

2.2.1. Прямі рівня

Прямі рівня, це прямі, які паралельні площинам проєкцій. Вони зображуються на ту площину, якій паралельні у натуральну величину, а на дві інші площини відрізком зменшеного розміру. Прямі рівня складають з однією з площин проєкцій кут рівний 0º градусів, а сума двох інших кутів рівна 90º градусів. Якщо прямі рівня розміщуються у площинах $\boldsymbol{\Pi_1}$ та $\boldsymbol{\Pi_2}$, то вони мають назву нульова горизонталь та нульова фронталь.

На рис. 2.3 показана пряма, паралельна горизонтальній площині проєкцій ***H*** ($\boldsymbol{\Pi_1}$), вона має назву прямої горизонтального рівня; оскільки всі точки прямої горизонтального рівня однаково віддалені від площини $\boldsymbol{\Pi_1}$, то фронтальна проєкція прямої горизонтального рівня ***a'b'*** паралельна осі ***OX***, а горизонтальна проєкція – натуральна величина відрізка **|*AB*| = *ab***. Кут між прямою і площиною, визначається кутом між прямою та її проєкцією на площину.

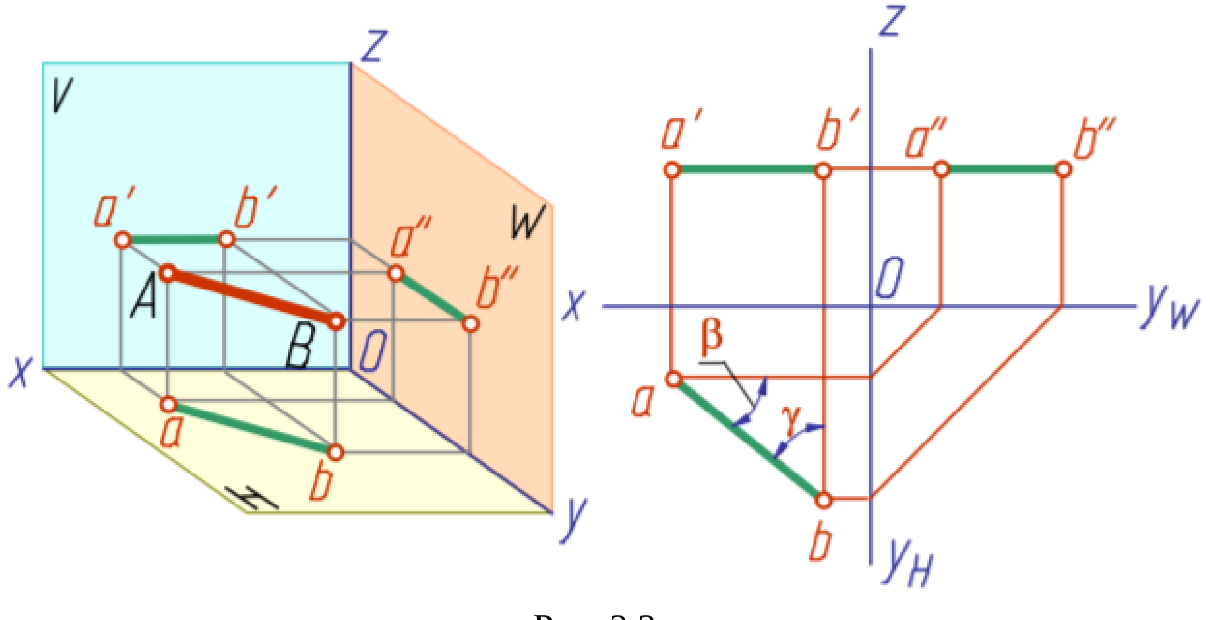


Рис. 2.3.

Кут ***β*** між прямою, паралельною осі ***OX*** і горизонтальною проєкцією ***ab*** на комплексному кресленні дорівнюється куту нахилу самої прямої горизонтального рівня до фронтальної площини проєкцій $\boldsymbol{\Pi_2}$.

Пряма, паралельна фронтальній площині проєкцій має назву прямої фронтального рівня (рис. 2.4).

Так як всі точки цієї прямої однаково віддалені від площини Π_2, то горизонтальна проєкція ***cd*** паралельна осі ***OX***. Фронтальна проєкція прямої фронтального рівня дорівнює натуральній величині проєціюючого відрізка $c'd' = |CD|$.

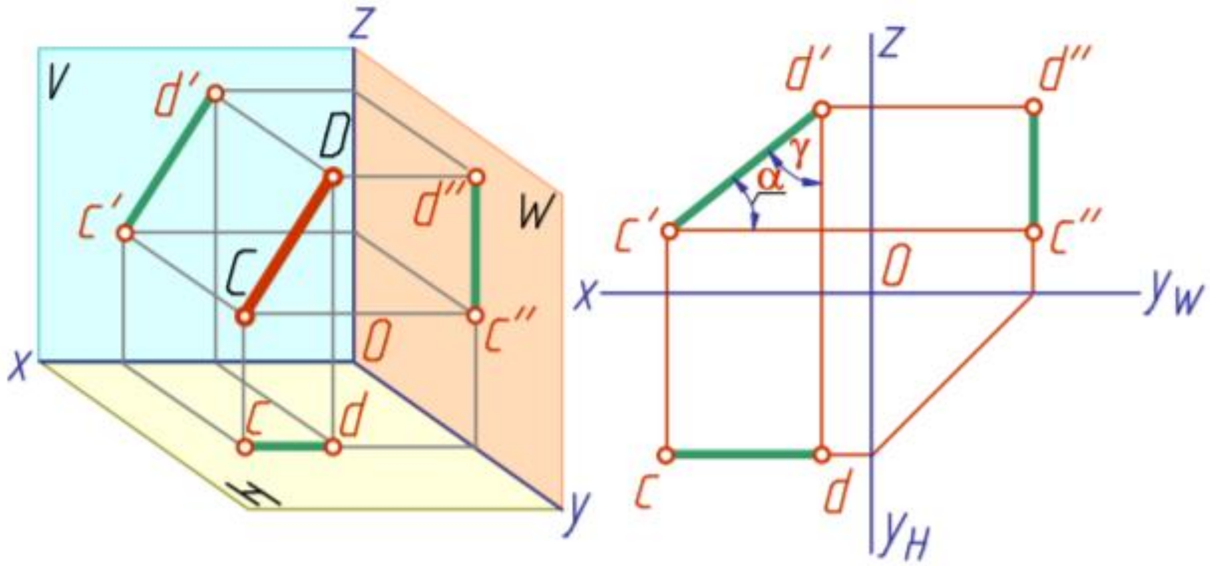


Рис. 2.4.

Кут α між прямою паралельною осі ***OX*** та фронтальною проєкцією $c'd'$ дорівнюється дійсному розміру кута нахилу самої прямої фронтального рівня до горизонтальної площини проєкцій Π_1.

Пряма, паралельна профільній площині проєкцій Π_3 має назву прямої профільного рівня (рис. 2.5). Так як всі точки прямої профільного рівня однаково віддалені від площини Π_3, то горизонтальна ***ef*** та фронтальна $e'f'$ проєкції прямої профільного рівня перпендикулярні до осі ***OX***, а профільна проєкція $e''f''$ дорівнюється натуральній величині відрізка ***EF***. Кути α та β вимірюють дійсний розмір кута нахилу відрізка ***EF*** до площин Π_1 (кут α) та Π_2 (кут β), причому $\alpha + \beta = 90°$.

У нульових горизонталів та фронталів одна проєкція збігається з самою прямою, а дві інших розташовані на осях координат.

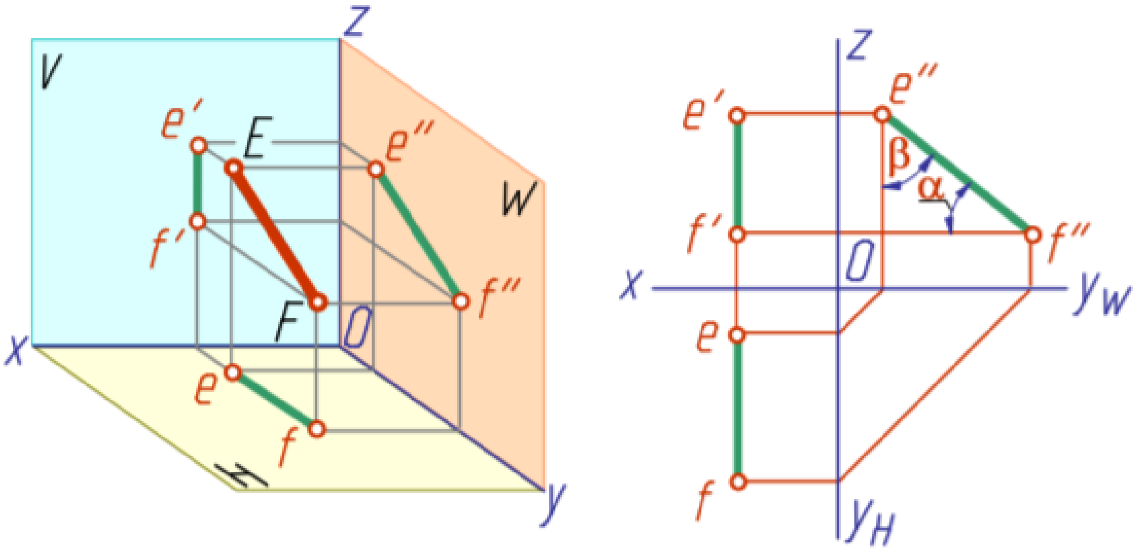


Рис. 2.5.

2.2.2. *Проєціюючі прямі*

Проєціюючі прямі – це прямі, перпендикулярні до площин проєкцій. Вони зображаються на одній із площин точкою, а на двох інших площинах відрізками натуральної величини цих прямих, тому, що вони паралельні двом площинам проєкцій.

На рис. 2.6 зображена пряма ***AB*** паралельна площинам проєкцій $\boldsymbol{\Pi_2}$ та $\boldsymbol{\Pi_3}$, тому відрізок ***AB*** цієї прямої зображується на $\boldsymbol{\Pi_2}$ та $\boldsymbol{\Pi_3}$ натуральною величиною, а на площину $\boldsymbol{\Pi_1}$ — точкою. На рис. 2.6 $\boldsymbol{AB} \perp \boldsymbol{\Pi_1}$ – горизонтально-проєціююча пряма $\boldsymbol{a'b'} \| \boldsymbol{OZ}$, $\boldsymbol{a'b'} = |\boldsymbol{AB}|$.

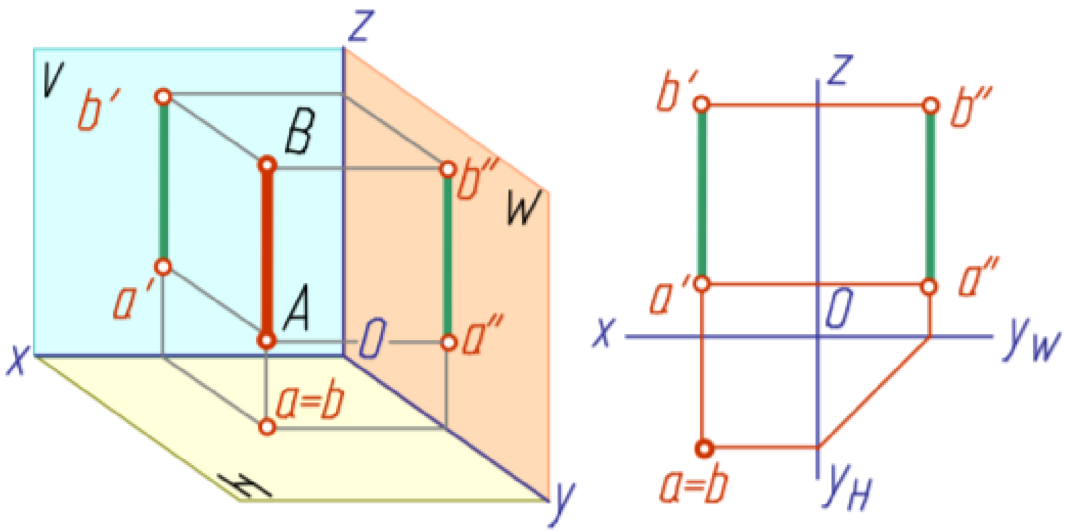


Рис. 2.6.

Відрізок $\boldsymbol{EF}$ (рис. 2.7) паралельний площинам $\boldsymbol{\Pi_1}$ та $\boldsymbol{\Pi_3}$, проєціюється на ці площини проєкцій у натуральну величину, а на площину $\boldsymbol{\Pi_2}$ – точкою. На рис. 2.7 $\boldsymbol{CD} \perp \boldsymbol{\Pi_2}$ – фронтально-проєціююча пряма $\boldsymbol{cd} \parallel \boldsymbol{OY}$, $\boldsymbol{ef} = |\boldsymbol{EF}|$.

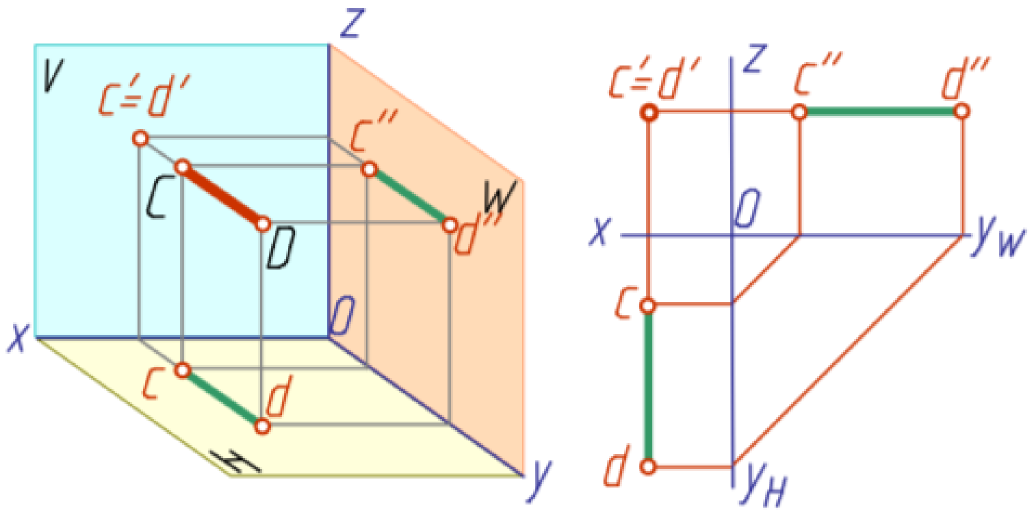


Рис. 2.7.

Відрізок $\boldsymbol{ED}$ паралельний площинам $\boldsymbol{\Pi_1}$ та $\boldsymbol{\Pi_2}$ (рис. 2.8) проєціюється на $\boldsymbol{\Pi_1}$ та $\boldsymbol{\Pi_2}$ у натуральну величину, а на $\boldsymbol{\Pi_3}$ – точкою. На рис. 2.8 $\boldsymbol{EF} \perp \boldsymbol{\Pi_3}$ – профільно-проєціююча пряма. $e'f' = ef = |EF|$, $ef \parallel OX$, $e'f' \parallel OX$.

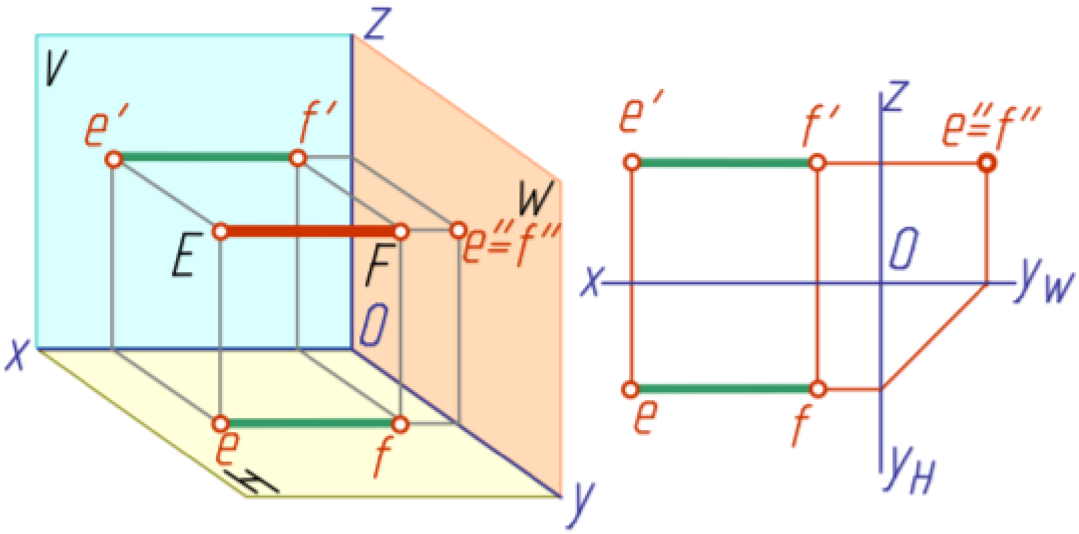


Рис. 2.8.

Проєціюючі прямі складають з однією з площин кут рівний 90°, а з двома іншими площинами кути дорівнюються 0°.

2.2.3. Прямі загального положення

Прямі, які не паралельні і не перпендикулярні до площин проєкцій мають назву прямих загального положення. Вони проєціюються викривлено на три площини проєкцій. Кути нахилу прямої загального положення також проєціюються викривлено. На кресленні проєкції цієї прямої завжди схилені до осі проєкцій (рис. 2.9).

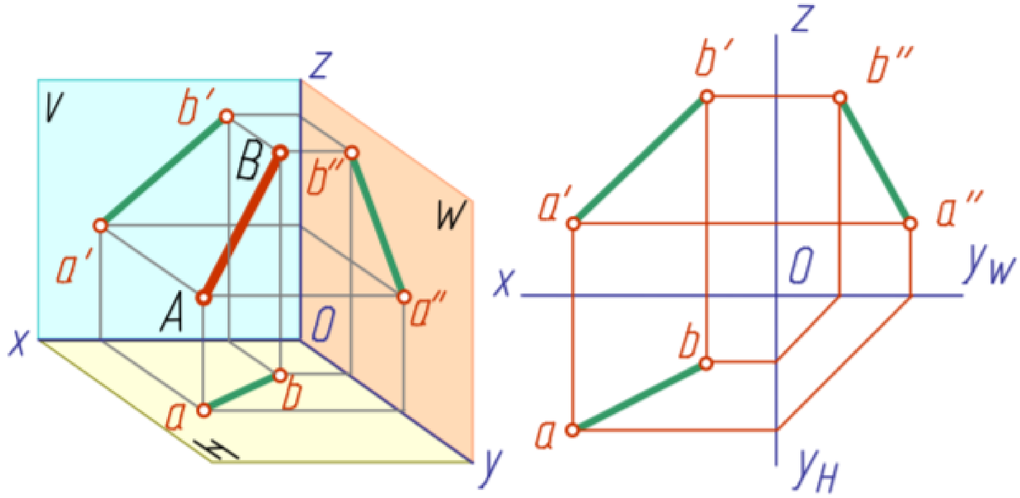


Рис. 2.9.

Для визначення натуральної величини прямої застосовують спосіб прямокутного трикутника. Відрізок прямої ***AB*** (рис. 2.10) можна розглядати, як гіпотенузу прямокутного трикутника ***B'B₀ A'***, прямий кут ***A'B'B₀*** який утворений проєціюючим лучем ***A'B'*** та прямою ***B'B₀***, проведеної перпендикулярно горизонтальній проєкції ***A'B'*** відрізка ***AB***.

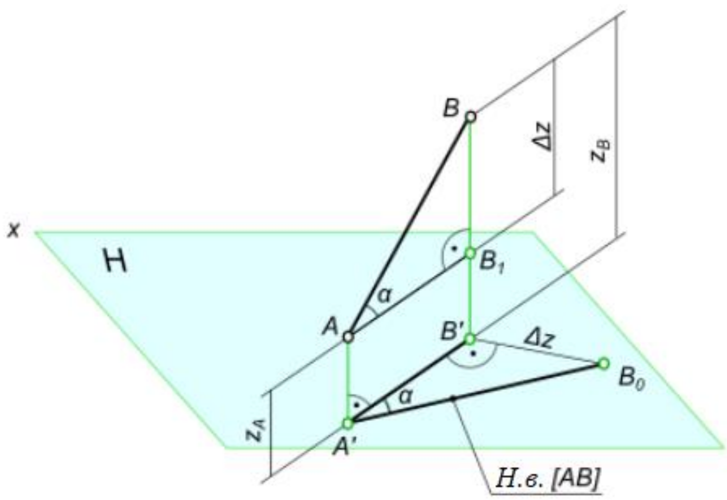
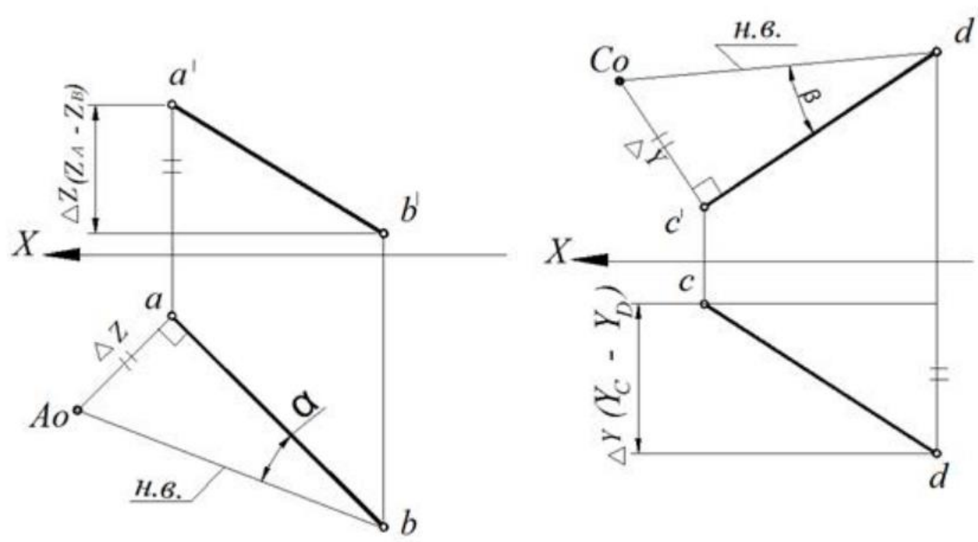


Рис. 2.10.

Отже один із катетів ($\boldsymbol{A'B'}$) трикутника $\boldsymbol{B'B_0A'}$ дорівнюється горизонтальній проєкції $\boldsymbol{A'B'}$, а другий катет ($\boldsymbol{B'B_0}$) дорівнює різниці координат $\boldsymbol{Z}$ точок $\boldsymbol{A}$ й $\boldsymbol{B}$.

На основі вище приведеного, побудову на комплексному кресленні (рис. 2.11, а) натуральної величини відрізка $\boldsymbol{AB}$ проводимо так: приймаємо горизонтальну проєкцію $\boldsymbol{ab}$ за перший катет прямокутного трикутника, проводимо через точку $\boldsymbol{a}$ перпендикуляр до $\boldsymbol{ab}$, відкладаємо на ньому від точки $\boldsymbol{a}$ відрізок $\boldsymbol{aA_0}$ який дорівнює різниці координат $\boldsymbol{Z}$ точок $\boldsymbol{A}$ й $\boldsymbol{B}$, і отриману точку $\boldsymbol{A_0}$ сполучаємо з точкою $\boldsymbol{b}$. Гіпотенуза $\boldsymbol{bA_0}$ побудованого прямокутного трикутника дорівнюється натуральній величині відрізка $\boldsymbol{AB}$.



а) б)

Рис. 2.11.

Натуральна величина відрізка може бути визначена способом прямокутного трикутника, якщо за перший катет візьмемо фронтальну проєкцію відрізка, тоді другий катет повинен дорівнювати різниці координат точок $\boldsymbol{C}$ та $\boldsymbol{D}$ відрізка $\boldsymbol{CD}$. Ця побудова показана на рис. 2.11 (б). Отже натуральна величина відрізка прямої – це гіпотенуза прямокутного трикутника, у якого один катет рівний одній із проєкцій прямої, а другий – це різниця координат відстані кінців відрізка від тієї площини проєкції, на якої визначаємо її натуральну величину.

Дійсний розмір кута нахилу прямої до площини проєкцій визначають використавши спосіб прямокутного трикутника. На рис. 2.10 – α є кутом між прямою ***BC*** та площиною Π_1.

Дійсний розмір кута α нахилу прямої ***AB*** до площини проєкцій на рис. 2.11 (а) – це кут abA_0 тобто гострий кут α, утворений горизонтальною проєкцією ***ab*** та гіпотенузою прямокутного трикутника abA_0, за допомогою якого був знайдений дійсний розмір відрізка ***AB***.

Дійсний розмір кута β нахилу прямої ***CD*** до площини проєкцій Π_2 було знайдено на рис. 2.11 (б). Побудували прямокутний трикутник, у якому одним з катетів є фронтальна проєкції.

2.3. Взаємне положення прямої і точки

Якщо точка належить прямої, то проєкції точки належать однойменним проєкціям цієї прямої. Точка ***F*** належить до відрізка ***AB*** (рис. 2.12).

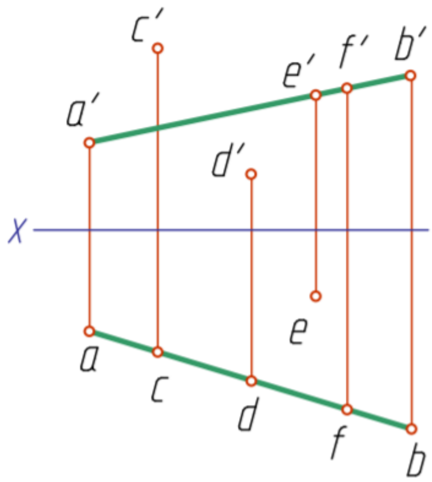


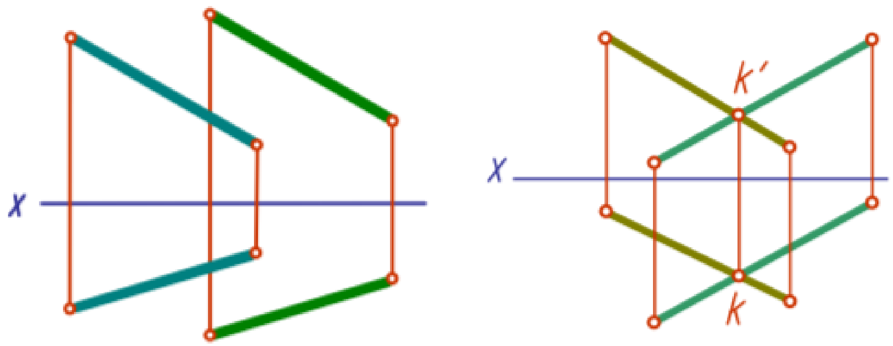
Рис. 2.12.

Якщо одна проєкція точки належить до однойменної з нею проєкції прямої, а друга проєкція точки не знаходиться на однойменної з нею проєкції прямої, то така точка в просторі прямій не належить. Точки ***C***, ***D***, ***E*** не належать до відрізка ***AB*** (рис. 2.12).

2.4. Взаємне положення двох прямих

Прямі у просторі можуть бути паралельні, пересічні та перехресні.

Паралельні прямі – дві прямі, що лежать в одній площині і не мають спільних точок (|| – знак паралельності). Якщо прямі паралельні, то їх одноймені проєкції теж паралельні (рис. 2.13, а)



а) б)

Рис. 2.13.

Пересічні прямі – дві прямі, що лежать в одній площині та мають одну спільну точку. На комплексному кресленні проєкції цієї точки розташовані на одній лінії зв'язку (рис. 2.13, б).

Перехресні прямі – дві прямі, що не лежать в одній площині і не мають спільної точки. (рис. 2.14).

Видимість перехресних прямих визначаємо за допомогою конкуруючих точок. З двох конкуруючих точок видна буде та, яка далі віддалена від площини проєкцій, тобто знаходиться ближче до спостерігача. Розглянемо приклад (рис. 2.14). Для визначення видимості на горизонтальній проєкції прямих ***AB*** та ***CD*** виділяємо точки ***3=4***. Знаходимо їх фронтальні проєкції. Із рисунка видно, що точка ***3′*** має більшу височину, тобто вона знаходиться ближче до спостерігача, отже вона на $\boldsymbol{\Pi_1}$ буде видима. Для визначення видимості на $\boldsymbol{\Pi_2}$ виділяємо точки ***1′*** та ***2′***. Знаходимо їх горизонтальні проєкції. Точка ***2*** більш віддалена від площини $\boldsymbol{\Pi_2}$ тобто вона знаходиться ближче до спостерігача, отже на $\boldsymbol{\Pi_2}$ вона буде видима.

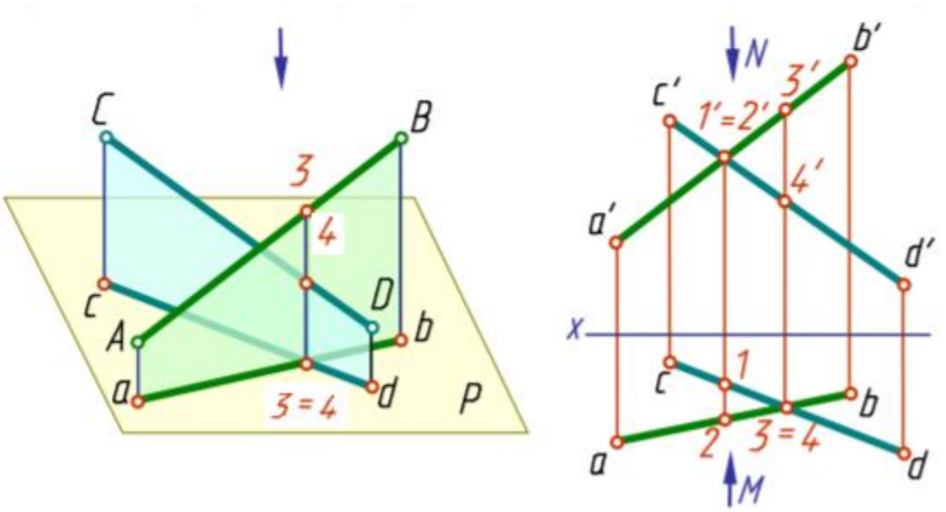


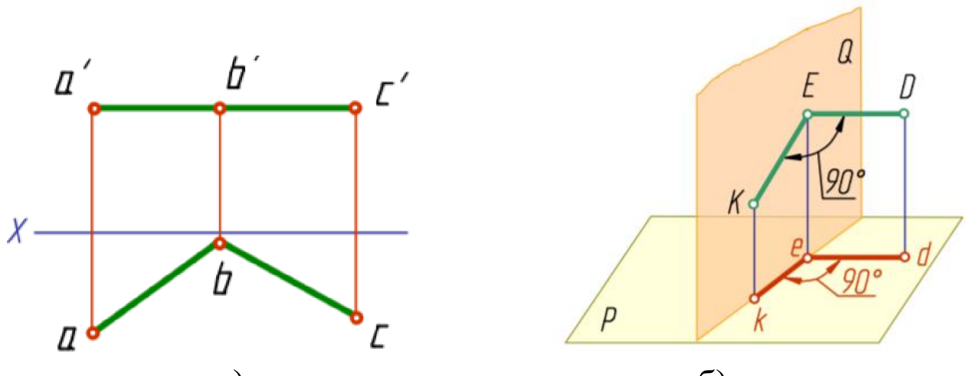
Рис. 2.14.

2.5. Проєкції лінійних кутів

Лінійний кут незалежно від його розміру (гострий, прямий чи тупий) проєціюється на площину проєкцій в дійсний розмір в двох випадках:

1. Коли обидва боки прямого кута паралельні будь-якої площині проєкцій. На рис. 2.15 (а) зображені дві пересічні під прямим кутом прямі ***AB*** та ***BC***, які паралельні горизонтальній площині проєкцій $\boldsymbol{\Pi_1}$.

Це положення випливає з теореми елементарної геометрії, що кути утворені взаємно паралельними прямими, які мають однаковий напрям сторін, рівні між собою.



а) б)

Рис. 2.15.

2. Якщо один бік прямого кута паралельний площині проєкцій, а другий не перпендикулярний їй, то прямий кут буде проєціюватися на цю площину

проєкцій у дійсний розмір (рис. 2.15, б).

Якщо обидва боки прямого кута є прямі загального положення, то прямий кут буде проєціюватися на площини проєкцій викривлено.

2.6. Сліди прямої

Перетин прямої з площинами проєкцій називають слідами прямої (***M*** – горизонтальний, ***N*** – фронтальний), назви яких залежать від відповідної площини проєкцій (рис. 2.16).

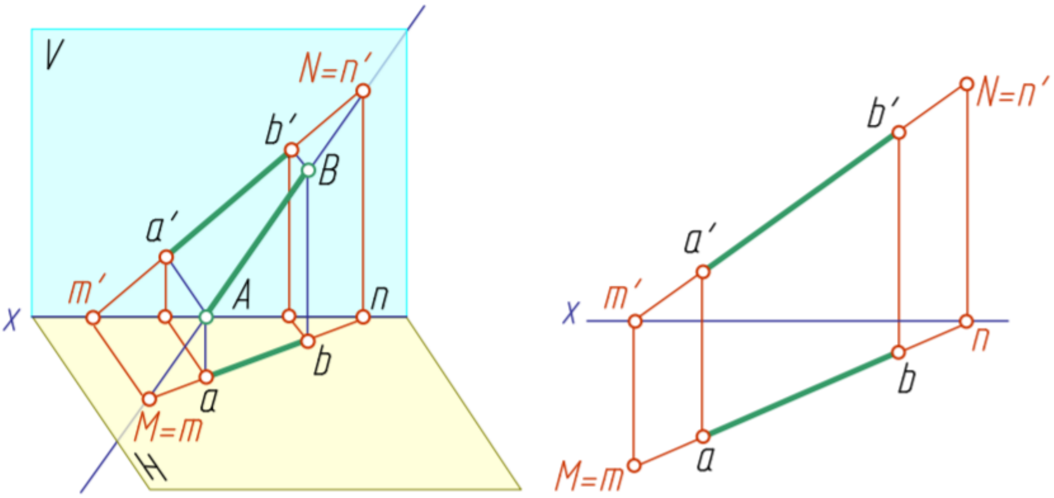


Рис. 2.16

Запитання для самоконтролю:

1. Яка пряма має назву прямої загального положення?
2. Які прямі мають назву прямі часткового положення?
3. Як визначити дійсний розмір відрізка прямої загального положення?
4. Як визначити кут нахилу прямої до площини проєкцій?
5. Коли точка належить до прямої?
6. Як поділити відрізок прямої у заданому відношення?
7. Які прямі називаються пересічними?
8. Які прямі називаються паралельними?
9. Як визначити видимість перехресних прямих?

3. ПЛОЩИНА. СПОСОБИ ЗАВДАННЯ ПЛОЩИНИ. КЛАСИФІКАЦІЯ ПЛОЩИН

3.1. Площина

Площина – це поверхня, положення якої в просторі визначається трьома точками, що не лежать на одній прямій.

На комплексному кресленні площину можна завдати :

а) трьома точками, що не належать прямій (рис. 3.1, а);

б) прямою і точкою (рис. 3.1, б);

в) двома пересічними прямими (рис. 3.1, в);

г) двома паралельними прямими (рис. 3.1, г);

д) трикутником (рис. 3.1, д);

е) слідами (рис. 3.1, е).

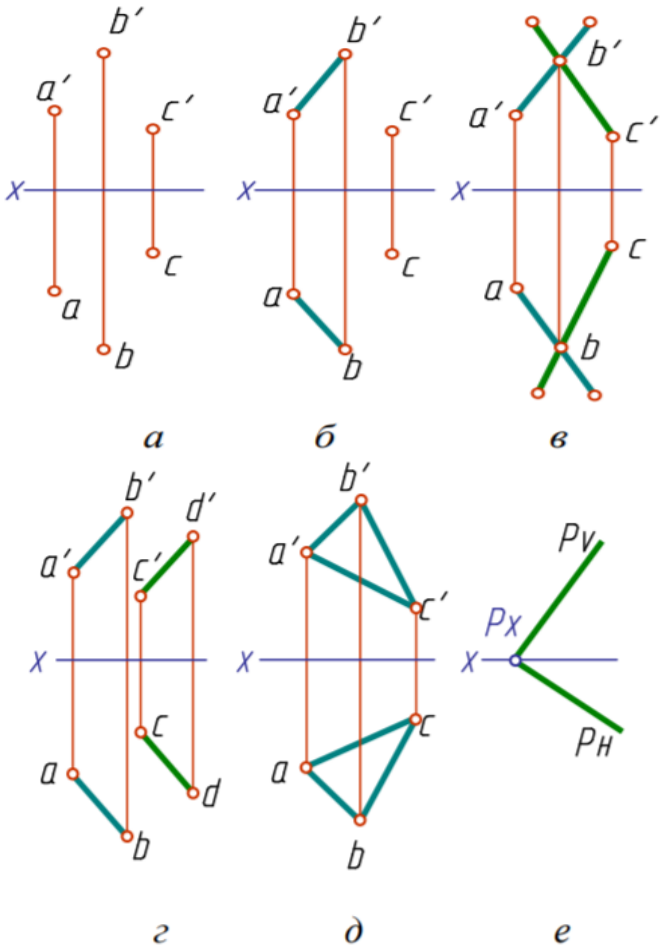


Рис. 3.1.

Площини позначаються буквами (***Σ, Θ, T, Ω, Ψ***).

Слід площини – це пряма, по якій площина перетинається з площиною проєкцій (рис. 3.2). Якщо площина перетинає ось проєкцій, то на цій осі утворюється точка перетину слідів площин – точка збігу слідів.

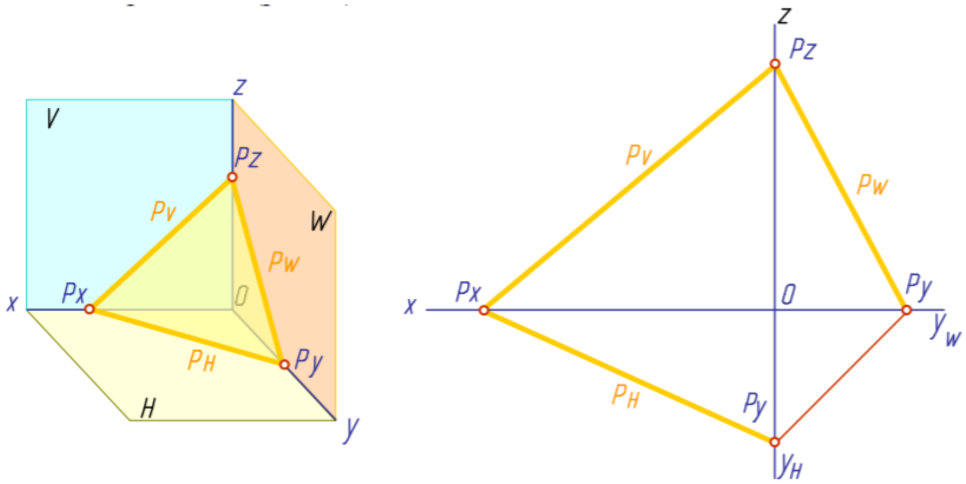


Рис. 3.2.

Якщо розглядати площину в системі ***V***, ***H***, ***W***, то в загальному випадку площина буде перетинати кожну з осей проєкцій. Така площина називається площиною загального положення.

P – площина загального положення;

$\boldsymbol{P_V}$ – фронтальний слід площини;

$\boldsymbol{P_H}$ – горизонтальний слід площини;

$\boldsymbol{P_W}$ – профільний слід площини;

$\boldsymbol{P_X}$, $\boldsymbol{P_Y}$, $\boldsymbol{P_Z}$ – точки збігу слідів.

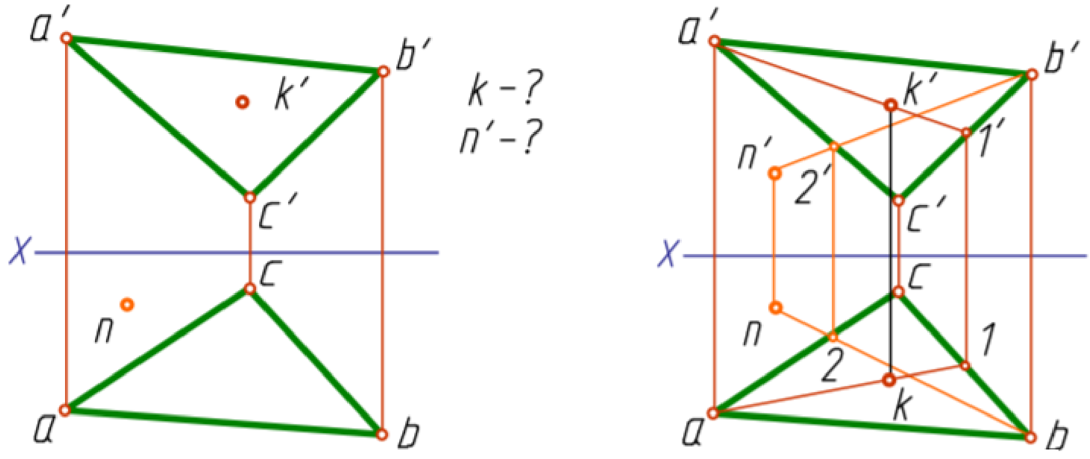
3.2. Належність точки і прямої площині

1. Пряма належить до площини, якщо вона має з площиною дві спільні точки або одну спільну точку і паралельна прямої, яка належить площині.

2. Точка належить площині, якщо вона належить прямій, яка належить площині.

Розглянемо приклади на визначення проєкцій точки та прямої, які належать площині.

На рис. 3.3 (а) показана площина, котра завдана трикутником ***ABC*** та фронтальна проєкція точки ***K***, яка належить до площини трикутника ***ABC***. Необхідно визначити горизонтальну проєкцію точки ***D***.



а) б)

Рис. 3.3.

План розв’язки:

1. Через фронтальну проєкцію точки ***K*** (***k′***) проводимо пряму ***A–1*** (***a′ – 1′***) та знаходимо її горизонтальну проєкцію.

2. На цю проєкцію прямої ***A – 1*** (***a – 1***) проєціюємо точку ***K*** (***k***).

Аналогічно знаходимо точку ***N***, яка належить до площини трикутника ***ABC***.

3.3. Класифікація площин

3.3.1. Площина загального положення

Площиною загального положення називають площину похило розташовану до площини проєкцій ***П₁, П₂, П₃***.

На рис. 3.1 приведено приклади площин загального положення.

3.3.2. Проєціюючі площини

Проєціюючі площини – проєціюються на одну з площин прямою (слід – проєкція площини) розташованою похило до осі координат, а на дві інші площини проєкцій – викривлено.

Проєціюючи площини можна задавати тільки їх слідом – проєкцією. Ці площини складають з однією площиною проєкцій кут рівний 90°, а з двома іншими площинами проєкцій суму кутів рівних 90°. На рис. 3.4 – 3.6 приведений приклад розташування проєціюючих площин на комплексному кресленні.

Горизонтально-проєціюючою площиною називають площину перпендикулярну до горизонтальної площини проєкції ***H*** (***П₁***) (рис. 3.4). Внаслідок перпендикулярності площини ∆***ABC*** до площини ***П₁*** горизонтальні проєкції всіх точок площини ∆***ABC*** будуть розташовані на горизонтальному сліді цієї площини. Назвемо цю властивість горизонтального сліду площини ∆***ABC*** – збиральним, а слід володіючий цією властивістю, слідом – проєкцією площини.

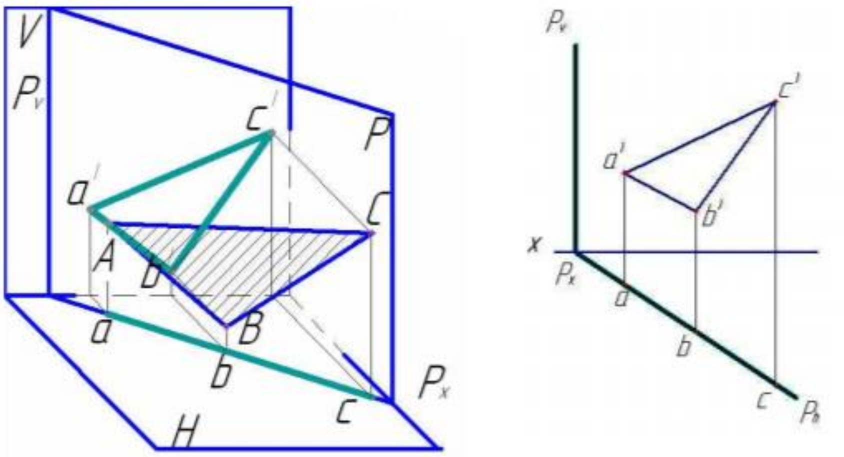


Рис. 3.4.

Так як площина ∆***ABC*** та ***V*** (***П₂***) перпендикулярні до однієї площини ***П₁***, то лінією їх перетину буде пряма, перпендикулярна до **П₁**. Це означає, що фронтальний слід площини ∆***ABC*** перпендикулярний до всякої прямої на ***П₁***, яка перетинає його, а також, перпендикулярний до осі ***OX***. Профільний слід цієї площини ∆***ABC*** також буде перпендикулярний до осі ***OУ***.

На рис. 3.5 зображена фронтально-проєціююча площина.

Фронтально-пороекціюючою площиною називають площину перпендикулярну до фронтальної площини проєкцій. Її фронтальний слід $\boldsymbol{P_V}$ – володіє збиральною властивістю.

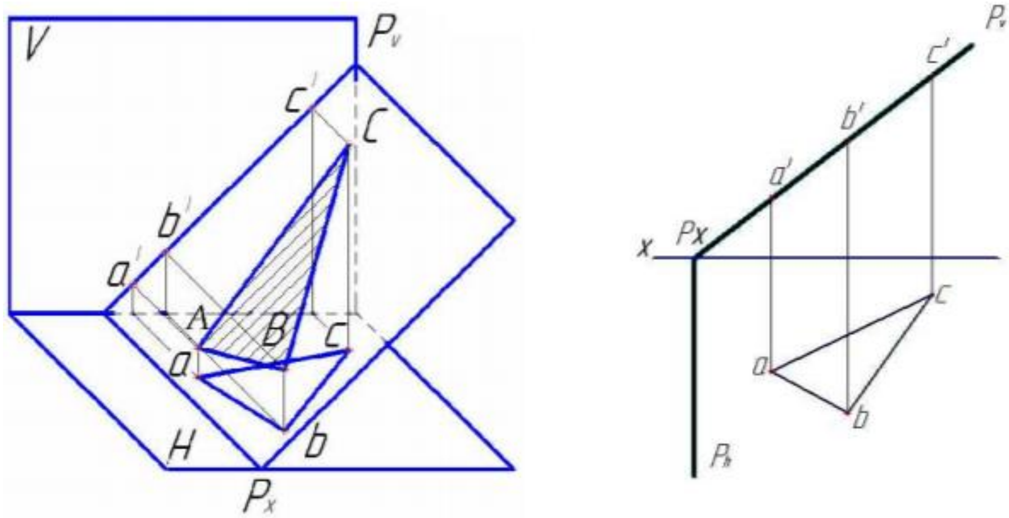


Рис. 3.5.

Профільно-проєціюючою площиною називають площину перпендикулярну до профільної площини проєкцій. На рис. 3.6 зображена профільно-проєціююча площина. Профільний слід – проєкція площини $\boldsymbol{\Delta ABC}$ володіє збиральною властивістю, тобто профільна проєкція любої точки, яка належить площині, збігається з профільним слідом проєкції. Інші два сліди профільно-проєціюючої площини перпендикулярні до осі ***ОУ*** та ***OZ***.

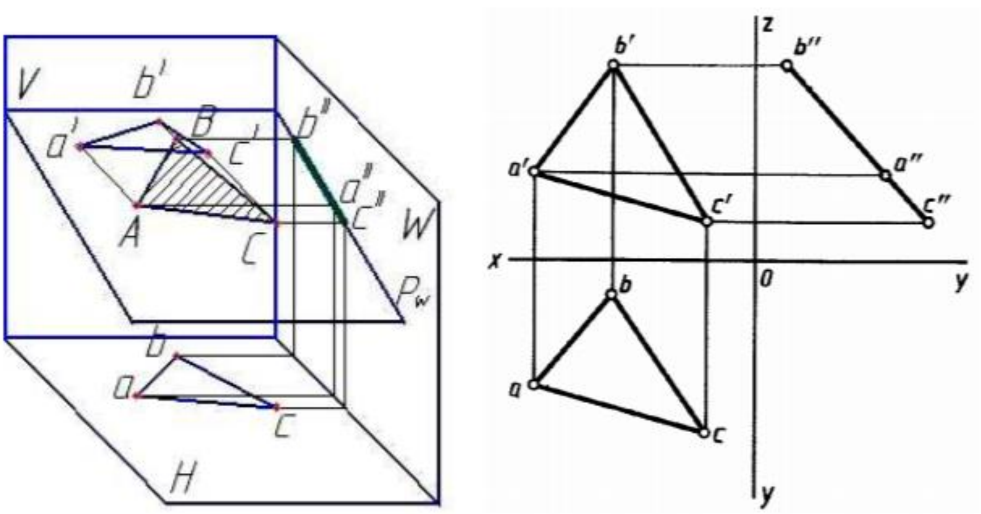


Рис. 3.6.

3.3.3. *Площини рівня*

Площина рівня являє собою частковий випадок проєціюючих площини. Оскільки ця площина, будучи паралельною одній з площин проєкцій одночасно перпендикулярна до двох інших площин, то її сліди на дві ці площини проєкцій будуть паралельні, або перпендикулярні до осі координат і володіти збиральною властивістю.

Площини рівня – проєціюються на одну з площин проєкцій в дійсний розмір, а на дві інших – прямою (слід площини).

Слід площини – лінія перетину якоїсь площини з площиною проєкцій.

Слід – проєкція площини рівня розташована паралельно осі координат.

Площина горизонтального рівня (рис. 3.7). Будь-яка площинна фігури паралельна горизонтальній площині проєкції $\boldsymbol{\Pi_1}$ проєціюється на $\boldsymbol{\Pi_1}$ у натуральну величину, а фронтальна проєкція збігається зі слідом-проєкцією площини.

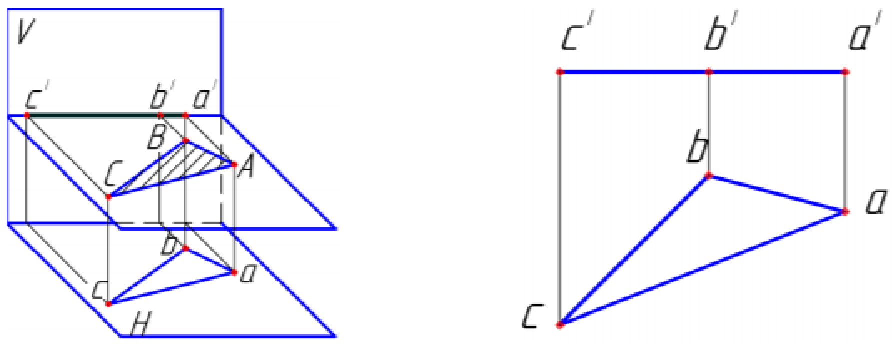


Рис. 3.7.

Площина фронтального рівня (рис. 3.8).

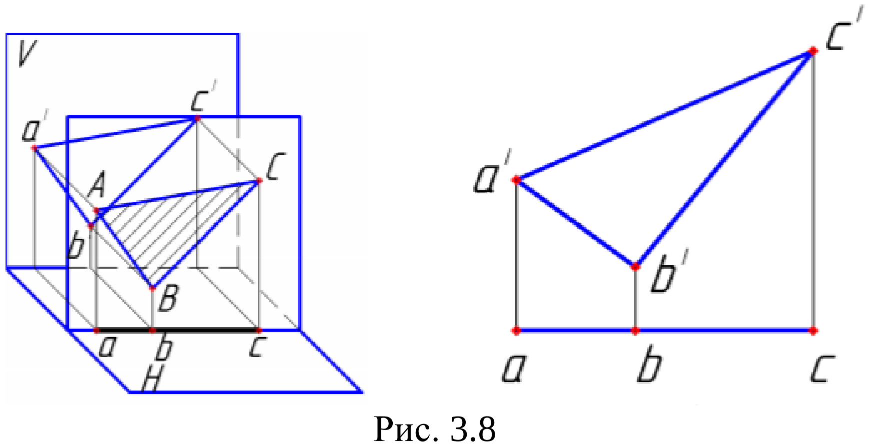


Рис. 3.8

Площина профільного рівня (рис. 3.9).

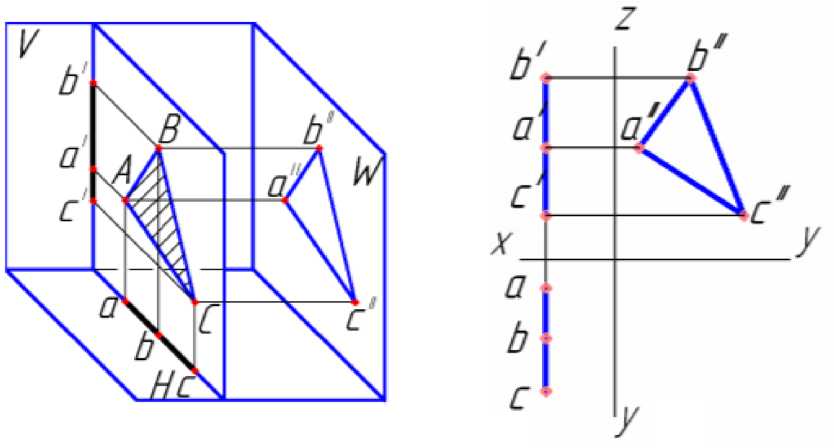


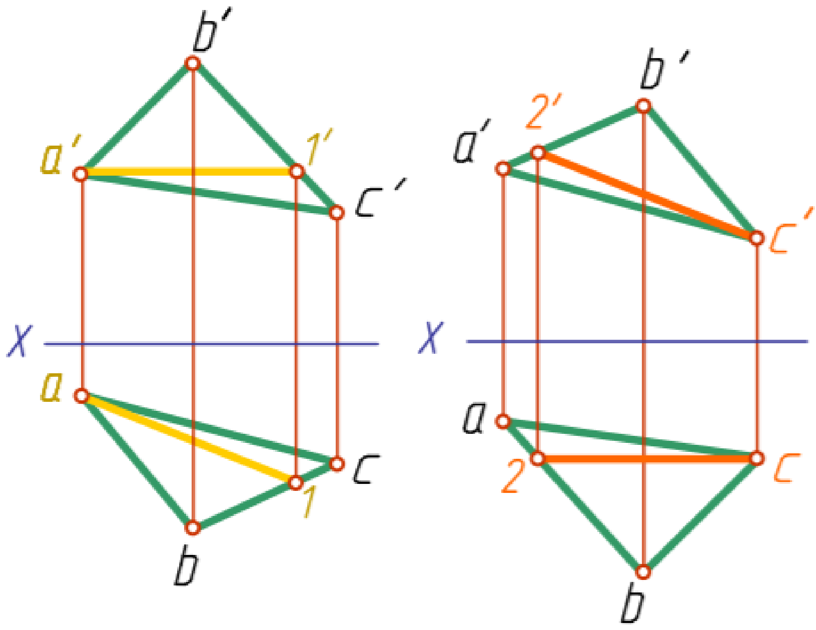
Рис. 3.9.

Площина фронтального рівня і площина профільного рівня являють собою часткові випадки проєціюючих площин. Сліди-проєкції площини фронтального рівня паралельні осям ***OX*** та ***OZ***, а сліди-проєкції площини профільного рівня на комплексному кресленні збігаються в одну пряму, перпендикулярну до осі ***OX***. Кожен з указаних слідів володіє збиральною властивістю.

3.4. Особливі лінії площини

Горизонталь – пряма, яка належить площині і паралельна горизонтальній площині проєкцій $\boldsymbol{\Pi_1}$.

На фронтальну площину проєкцій $\boldsymbol{\Pi_2}$ горизонталь площини, як і люба горизонталь, розташована у просторі, проєціюється прямою, паралельною осі ***OX***. На рис. 3.10 (а) задані дві проєкції трикутника ***ABC***. Для побудови проєкцій горизонталі, яка належить площині трикутника ***ABC***, через фронтальну проєкцію вершини ***A*** проводимо фронтальну проєкцію ***a'1'*** горизонталі паралельно осі ***OX***, а потім за допомогою лінії зв’язку знаходимо ***1***. Сполучив ***a1*** одержуємо горизонтальну проєкцію горизонталі ***h*** площини трикутника ***ABC***.



а) б)

Рис. 3.10.

Фронталь площини – пряма, яка належить площині і паралельна фронтальній площині проєкцій (Π_2).

Побудову фронталі починаємо з горизонтальної проєкції (***f*** || ***OX***).

На рис. 3.10 (б) показана побудова фронталі ***f*** у площині трикутника ***ABC***. Побудову фронталі починаємо з горизонтальної проєкції. Через точку ***C*** паралельно осі ***OX*** проводимо пряму ***f***, яка перетинає ***ab*** у точці ***2***. Знаходимо ***2′*** за допомогою лінії зв’язку. Сполучая ***c′2′*** знаходимо фронтальну проєкцію фронталі ***f′*** площини трикутника ***ABC***.

Профільна пряма площини – пряма, яка належить площині і паралельна профільній площині проєкцій (Π_3) (рис. 3.11).

Лінія найбільшого нахилу площини – лінія, що належить даній площині й утворює з площиною проєкції найбільший кут.

Лінія найбільшого скату площини – лінія площини, що утворює найбільший кут з горизонтальною площиною проєкцій.

На рис. 3.12 зображена площина трикутника ***ABC*** і побудова лінії найбільшого нахилу його до площини проєкцій Π_1. Побудову лінії найбільшого скату площини до Π_1 розпочинаємо з побудови горизонталі ***AK*** (***h***) площини. Так

як лінія найбільшого нахилу завжди перпендикулярна сліду площини, то проводимо у площині трикутника ***ABC*** пряму ***BD*** перпендикулярно ***ak*** (***h***) та знаходимо її фронтальну проєкцію.

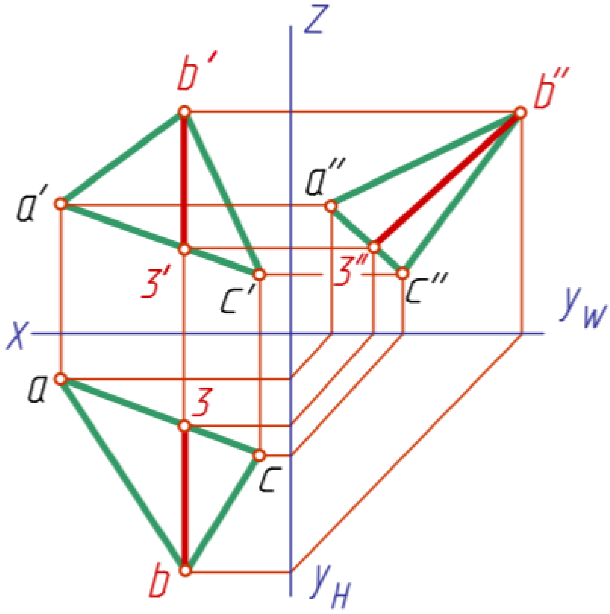


Рис. 3.11.

Для визначення кута нахилу площини трикутника до ***П₁*** знаходимо дійсний розмір відрізка ***BD*** за допомогою прямокутного трикутника. Кут ***α*** між катетом та гіпотенузою і є кутом нахилу площини трикутника до площини ***П₁***.

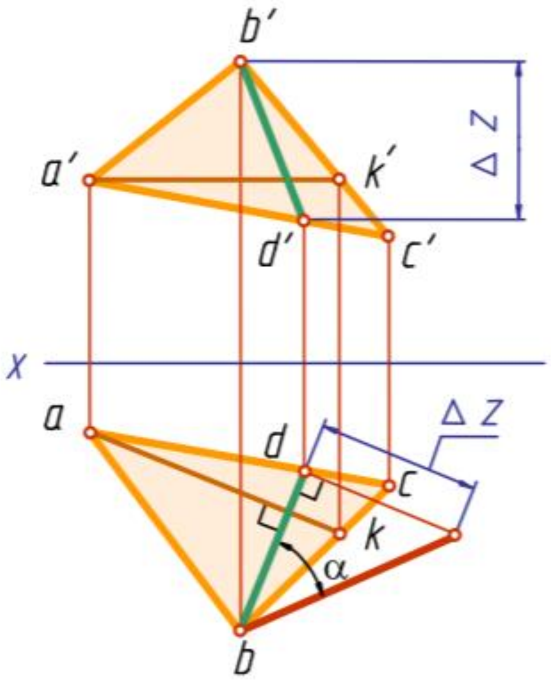


Рис. 3.12.

Запитання для самоконтролю:

1. Як на комплексному кресленні можна завдати площину?
2. Яка площина має назву площини рівня?
3. Яка лінія має назву слід площини?
4. Які площини мають назву проєціюючі?
5. Як проєціюються на площини проєкцій площини загального положення?
6. Коли пряма належить площині?
7. Назвіть особливі лінії у площині?
8. З якої проєкції починаємо побудову горизонталі і фронталі площини?
9. Яка лінія площини має назву лінії найбільшого нахилу?

4. ВЗАЄМНЕ ПОЛОЖЕННЯ ДВОХ ПЛОЩИН, ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Розглянемо випадки взаємного положення прямої лінії та площини. Взаємне положення прямої та площини у просторі може бути:

а) пряма належить площині,

б) пряма перетинає площину,

в) пряма паралельна площині.

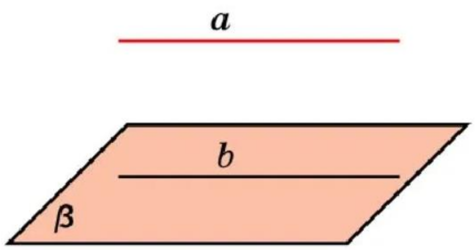
Якщо з умови неможливо визначити взаємного положення прямої та площини, то звертаються до додаткових побудов, які будуть розглянуті далі.

Дві площини у просторі можуть бути паралельні, або перетинатися між собою.

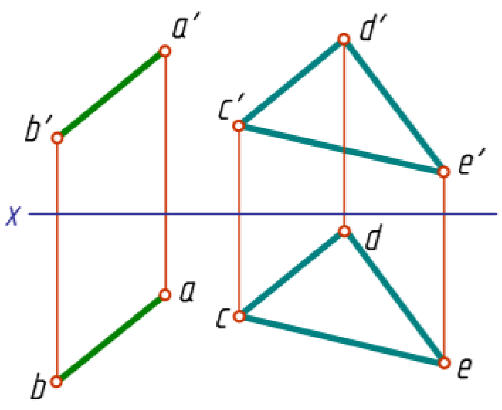
4.1. Пряма паралельна площині

Як відомо із елементарної геометрії, пряма лінія паралельна площині, якщо вона паралельна будь-якій прямій цієї площини, або якщо ця пряма розташована у площині, яка паралельна заданій.

На рис. 4.1 (а) пряма а паралельна площині ***β***, тому що вона паралельна прямій ***b***, яка належить площині ***β***.



а)



б)

Рис. 4.1.

Якщо необхідно через точку провести пряму, паралельну площині, то необхідно у площині провести пряму і через задану точку проводимо пряму, яка буде їй паралельна, тобто якщо необхідно через точку провести пряму, паралельну площині, то у площині проводимо пряму і через задану точку проводимо пряму, яка буде їй паралельна.

Розглянемо приклад (рис. 4.1, б)

Завдана площина ***ΔCDE***. Через точку ***A*** провести пряму паралельну площині ***ΔCDE***. У площині ***ΔCDE*** обираємо пряму ***CD***, через точку ***A*** проводимо пряму ***AB***, паралельну ***CD*** (***ab*** || ***cd***, ***a'b'*** || ***c'd'***). Тобто, щоб їх однойменні проєкції були паралельні.

Побудова площини, паралельної заданій прямій утворюється за допомогою допоміжної прямої. Площина, проведена через допоміжну пряму, яка паралельна заданій, буде паралельна цій прямій.

4.2. Паралельність площин

Площина паралельна іншій площині являє собою геометричне місце точок (численність) прямих простору, паралельних даній площині і відстояних від неї на однаковій відстані.

Розглянемо випадки взаємної паралельності двох площин. Якщо площини P і Q паралельні, то завжди у кожній з них можна побудувати по дві пересічні прямі так, щоб прямі однієї площини були паралельні двом прямим другої площини. Це являє собою ознаку для визначення паралельності двох площин. (рис. 4.2, а, в).

Дві площини часткового положення паралельні, якщо паралельні їх сліди-проєкції (рис. 4.2, б, г).

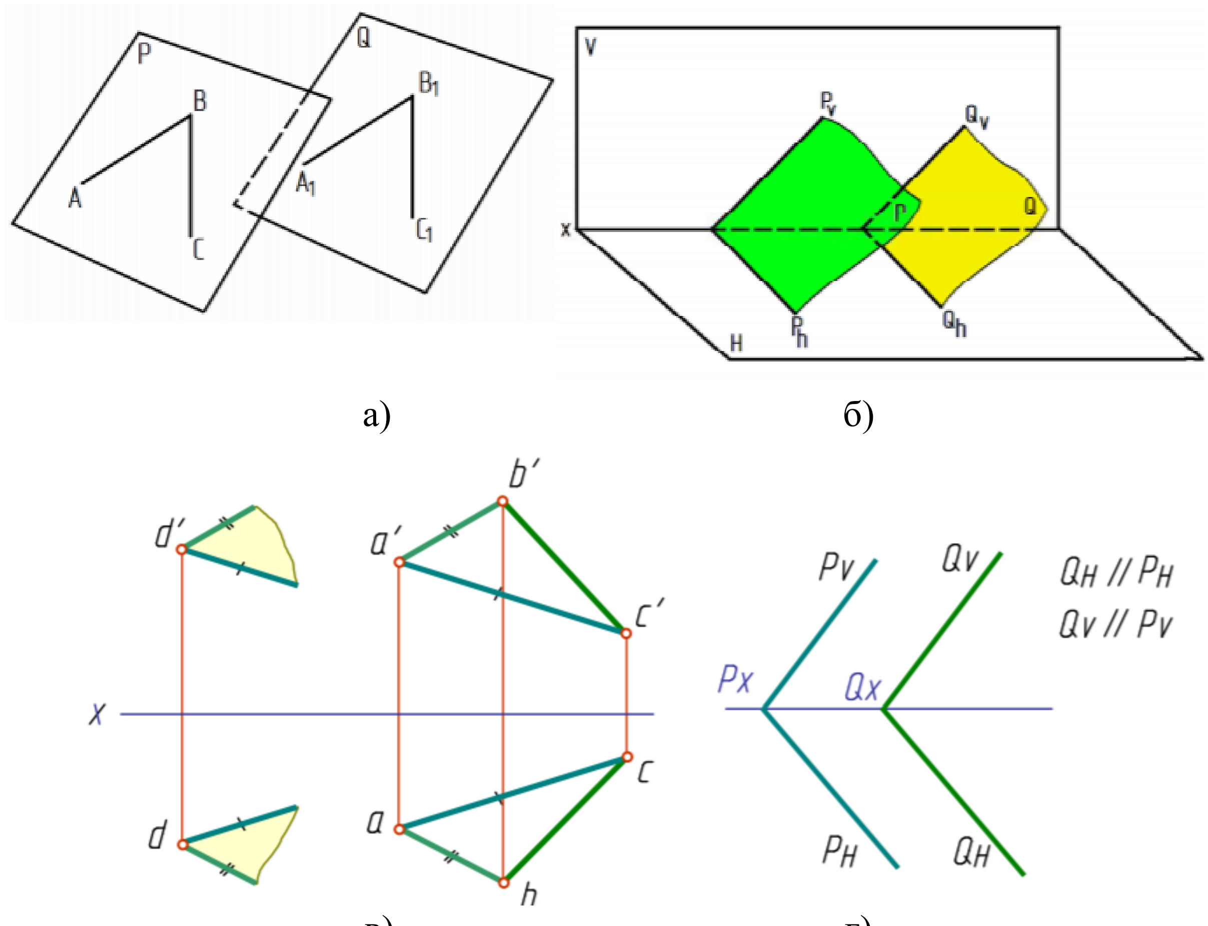
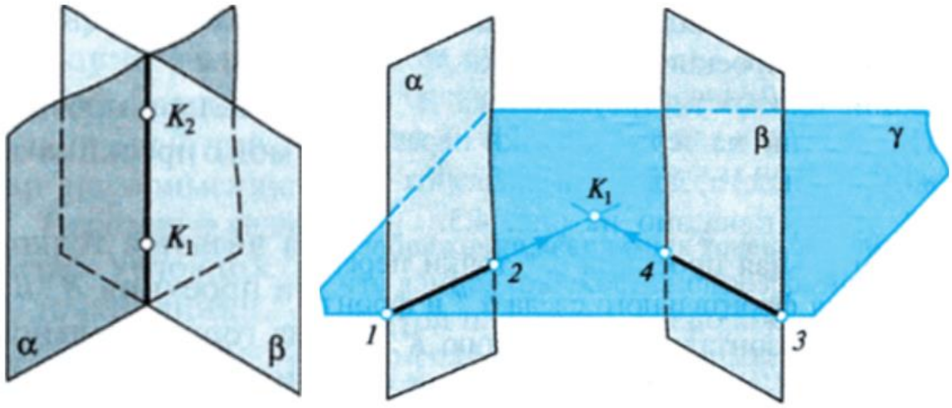


Рис. 4.2.

4.3. Перетин площин

Дві площини перетинаються по прямій лінії, а положення прямої у просторі визначається двома точками, тому розв'язання задачі на побудову проєкції лінії перетину двох площин зводиться до знаходження проєкцій двох точок, які одночасно належать обом перетинаючимся площинам. Лінія перетину цих площин пройде через ці точки рис. 4.3 (а).

Спосіб за допомогою, якого визначають точки, які належать прямій перетину двох площин, має назву спосіб допоміжних січних площин рис. 4.3 (б).



а) б)

Рис. 4.3.

Розглянемо випадки взаємного перетину площин.

В випадку завдання площин їх слідами, коли площини перпендикулярні одній з площин проєкцій, легко визначити, що ці площини перетинаються. Так на рис. 4.4 площини ***P*** та **Q** перетинаються. Лінія перетину – пряма ***MN***.

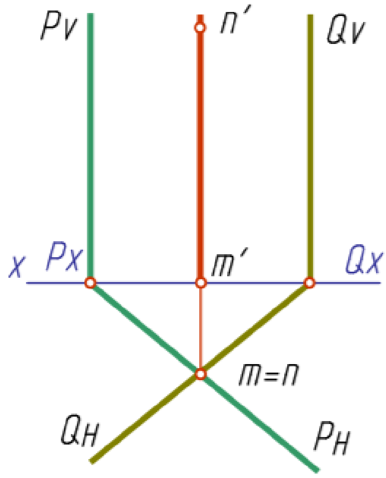


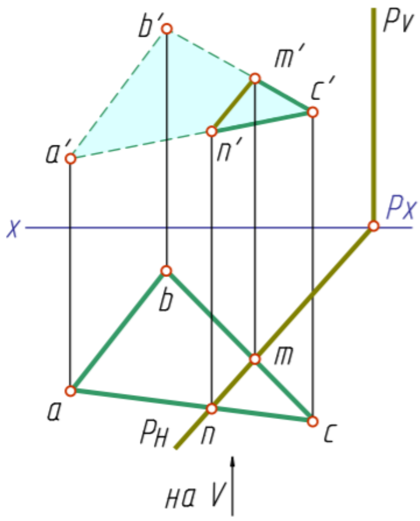
Рис. 4.4.

Якщо обидві площини мають на $\boldsymbol{\Pi_1}$ та $\boldsymbol{\Pi_2}$ сліди, які паралельні осі ***OX***, то ці площини можуть перетинатися і бути паралельними. Для вирішення питання про взаємне положення таких площин треба побудувати третій слід: якщо сліди обох площин паралельні на третій площині то ці площини паралельні; якщо треті сліди перетинаються, то площини перетинаються.

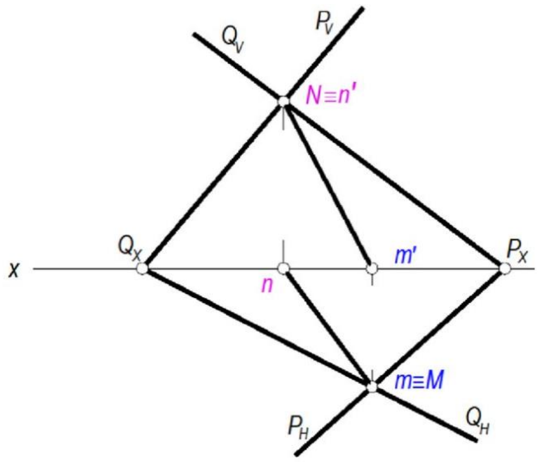
Якщо площини завдані не слідами, то для визначення їх положення у просторі треба вводити допоміжні площини, що буде розглянуто далі.

При перетині двох площин, одна з них загального положення, а друга часткового – лінія перетину збігається зі слідом-проєкцією проєціюючої площини (рис. 4.5, а).

Якщо площини задані своїми слідами, лінія перетину визначається точками перетину однойменних слідів (рис. 4.5, б)



а)



б)

Рис. 4.5.

Для визначення лінії перетину двох площин загального положення застосовуємо площини посередники. Цими площинами можуть бути площини рівня, або проєціюючі. Розглянемо приклад (рис. 4.6). Перетинаються дві площини загального положення.

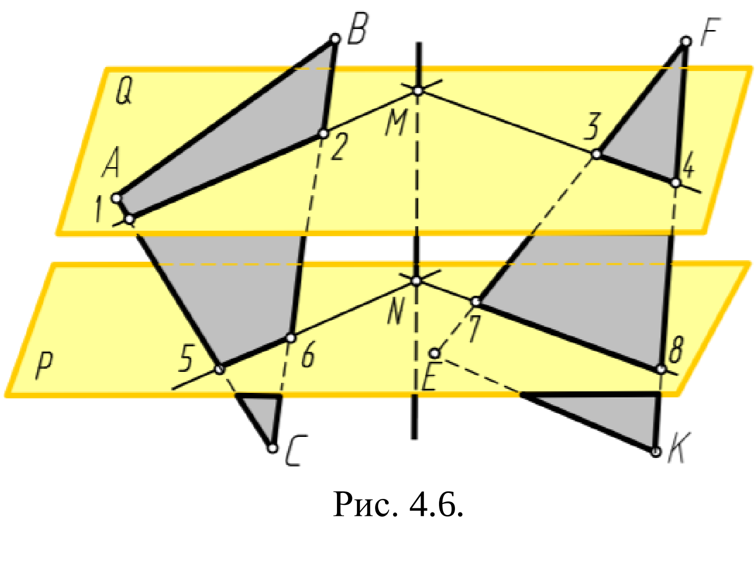


Рис. 4.6.

Використання способу допоміжних січних площин (посередників) показано на рис. 4.6, на якому зображені площини трикутників ABC та EFK. Знаходження спільних для площин точок M та N проводиться шляхом використання допоміжних площин (посередників) **Q** та P. Площина **Q** перетинає задані площини по прямим ***1–2*** та ***3–4***. Прямі ***1–2*** та ***3–4*** перетинаються у точці M, яка є спільною для обох площин. Аналогічно знаходять точку N. MN – лінії перетину двох площин.

Використовуємо цій спосіб допоміжних січних площин для розв'язання задачі на комплексному кресленні (рис. 4.7).

Перетинаємо обидві площини допоміжною площиною (посередником) горизонтального рівня R_V. Площина R_V перетинає площини по горизонталям ***1–2*** та ***3–4***, фронтальні проєкції $1'–2'$ та $3'–4'$ збігаються зі слідом R_V, а горизонтальна ***1–2*** та ***3–4*** легко будується за допомогою ліній зв'язку. В перетині горизонтальних проєкцій ***1–2*** та ***3–4*** побудованих горизонталів отримуємо точку m, яка є горизонтальною проєкцією точки M, яка належить до лінії перетину двох площин. Фронтальну проєкцію m' цієї точки M отримуємо після проведення лінії зв'язку до перетину зі слідом R_V (збиральна властивість сліду площини).

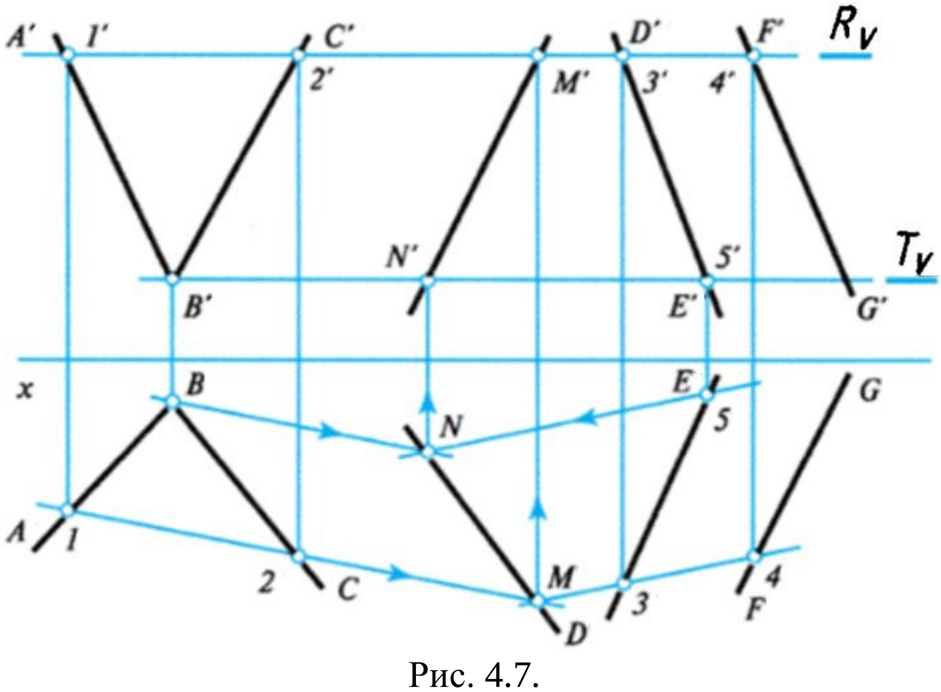


Рис. 4.7.

Для побудови другої точки, яка належить лінії перетину площин, використовуємо другу площину – посередник горизонтального рівня T_V, яка також перетинає площини по горизонталям. Так як горизонталі однієї площини паралельні між собою, то для побудови горизонталів по яких площина T_V перетинає площини досить визначити по одній точці. Побудував на Π_1 точки ***b*** та ***5*** проводимо через них горизонтальні проєкції цих горизонталів які паралельні ***1–2*** та ***3–4*** раніше побудованих горизонталів і в перетині прямих, проведених через точки ***b*** та ***5*** одержуємо ***n*** – горизонтальна проєкція точки ***N***. Фронтальну проєкцію ***n'*** точки ***N*** знаходимо за допомогою лінії зв'язку проведену через ***n*** до перетину зі слідом T_V, з'єднуємо однойменні проєкції точки ***M*** та ***N*** отримуємо проєкції лінії перетину двох площин.

Якщо на комплексному кресленні проєкції площини накладені, для визначення лінії їх перетину площинами-посередниками вибирають проєціюючі площини.

4.4. Перетин прямої і площини

На рис. 4.8 зображена площина **Q** та пряма ***AB*** перетинаюча цю площину. Проведемо через пряму ***AB*** площину ***P***. Якщо знайти пряму ***M–N*** перетину площин **Q** та ***P***, то точка ***K*** перетину прямої ***AB*** та ***M–N*** – є точка в якій ***AB*** перетинає площину **Q**. Дійсно, пряма ***M–N*** являє собою геометричне місце точок спільних для площин **Q** та ***P***. Тому точка ***K*** перетину прямих ***AB*** та ***M–N***, належить цим площинам. Цю точку часто називають точкою зустрічі прямої з площиною.

Таким чином, побудова точки перетину прямої і площини складається з трьох операцій:

1) проведення через пряму допоміжної площини;
2) знаходження лінії перетину завданої площини з допоміжною площиною;

3) визначення точки перетину даної прямої з найденою лінією перетину двох площин.

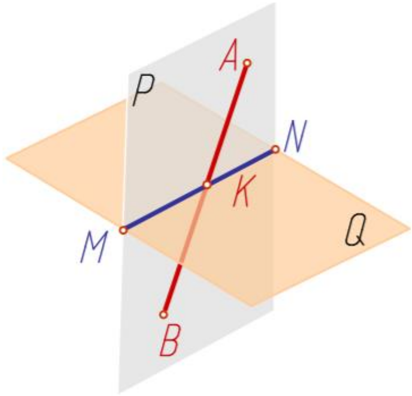
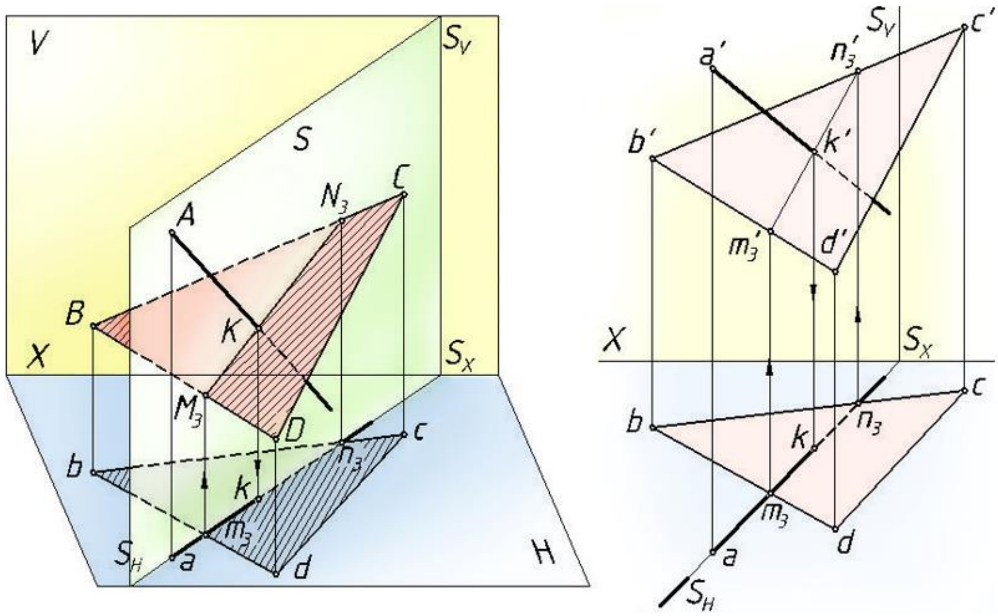


Рис. 4.8.

Як допоміжну площину звичайно використовують проєціюючи площини, внаслідок простоти проведення їх через прямі.

На рис. 4.9 (а) показана пряма а і площина ***ΔBCD***.



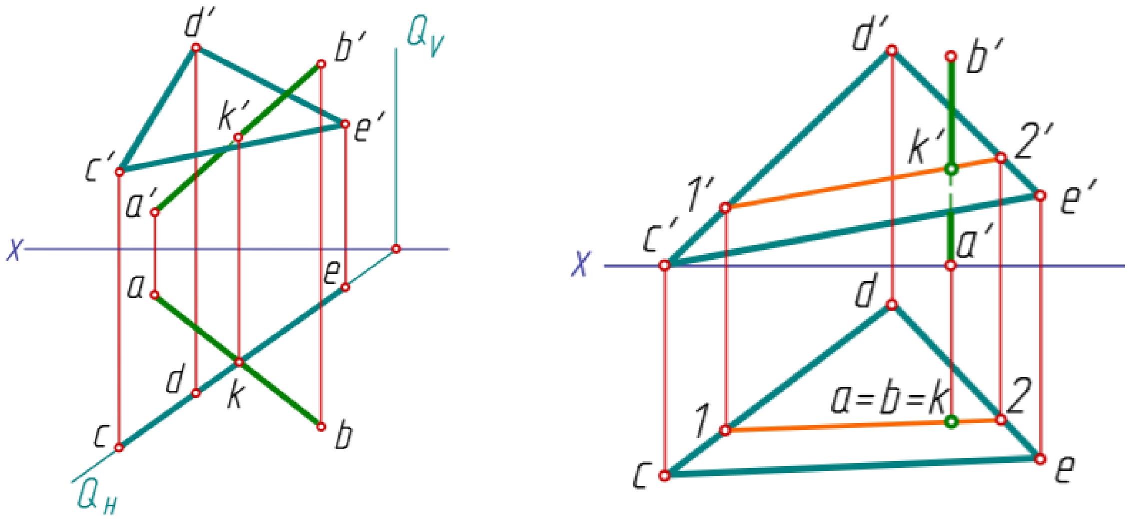
а) б)

Рис. 4.9.

На рис. 4.9 (б) показано як знайдено точку перетину прямої а з площиною ***ΔBCD***. Через пряму а проводимо допоміжну горизонтально-проєкційну площину $\boldsymbol{S_H}$. Будуємо проєкції $\boldsymbol{m_3}$–$\boldsymbol{n_3}$ та $\boldsymbol{m_3'}$–$\boldsymbol{n_3'}$ лінії перетину цієї площини з площиною трикутника (за горизонтальними проєкціями точок $\boldsymbol{m_3}$ та $\boldsymbol{n_3}$ знаходимо

фронтальні проєкції точок m_3' та n_3'). Знаходимо проєкції точки перетину заданої прямої з площиною трикутника. Для цього в перетині фронтальних проєкцій прямої a' та лінії m_3'–n_3' визначаємо фронтальну проєкцію шуканої точки K (k') та за допомогою лінії зв‘язку будуємо її горизонтальну проєкцію k на проєкції m_3–n_3 прямої. Визначаємо видимі частини прямої a.

Якщо пряма або площина у просторі займають часткове положення, то точка їх перетину збігається зі слідом-проєкцією прямої та площини (рис. 4.10).



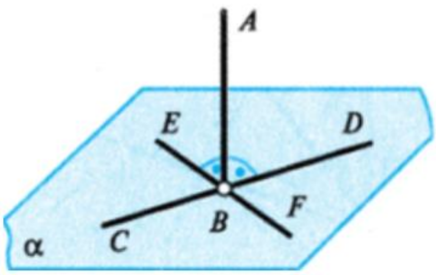
а) б)

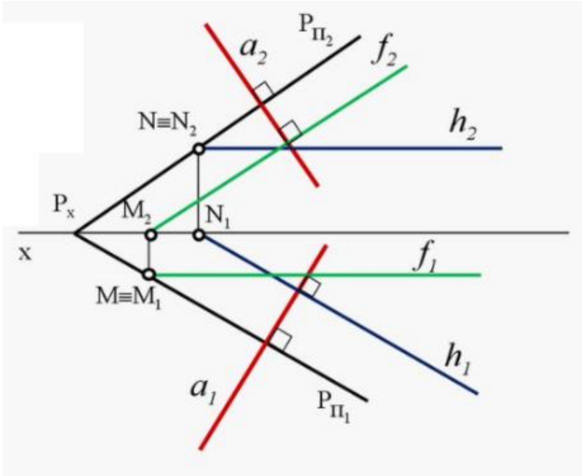
Рис. 4.10.

4.5. Пряма перпендикулярна площині

Пряма, перпендикулярна площині, якщо вона перпендикулярна двом пересічним прямим цієї площини (рис. 4.11). Ця теорема відома із стереометрії. Якщо в площині брати не довільні прямі, а її горизонталь і фронталь, то з’являється можливість скористуватися теоремою про проєціювання прямого кута на площину проєкцій.

Пряма перетинає площину під прямим кутом, якщо її горизонтальна проєкція, перпендикулярна горизонталі площини, а фронтальна – фронталі (рис. 4.11, б).





а) б)

Рис. 4.11.

Для того, щоб побудувати пряму перпендикулярну площині ***ΔABC***, необхідно у площині побудувати прямі рівня (горизонталь ***A1*** та фронталь ***A2***), а потім провести під прямим кутом до однойменних проєкцій горизонталі і фронталі проєкції перпендикуляра (рис. 4.12).

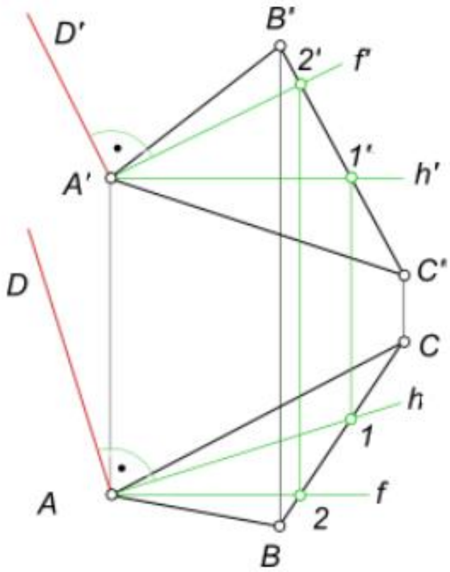


Рис. 4.12.

Якщо пряма перпендикулярна двом пересічним прямим, які належать площині, то вона перпендикулярна і самій площині.

Приведене положення дає можливість вирішувати ряд метричних задач на визначення відстані між точкою та площиною (двома площинами), а також вирішити обернену задачу на побудову площини, перпендикулярної прямій.

Якщо треба визначити відстань від точки до площини, необхідно визначити довжину перпендикуляра, опущеного з точки на площину (рис. 4.13).

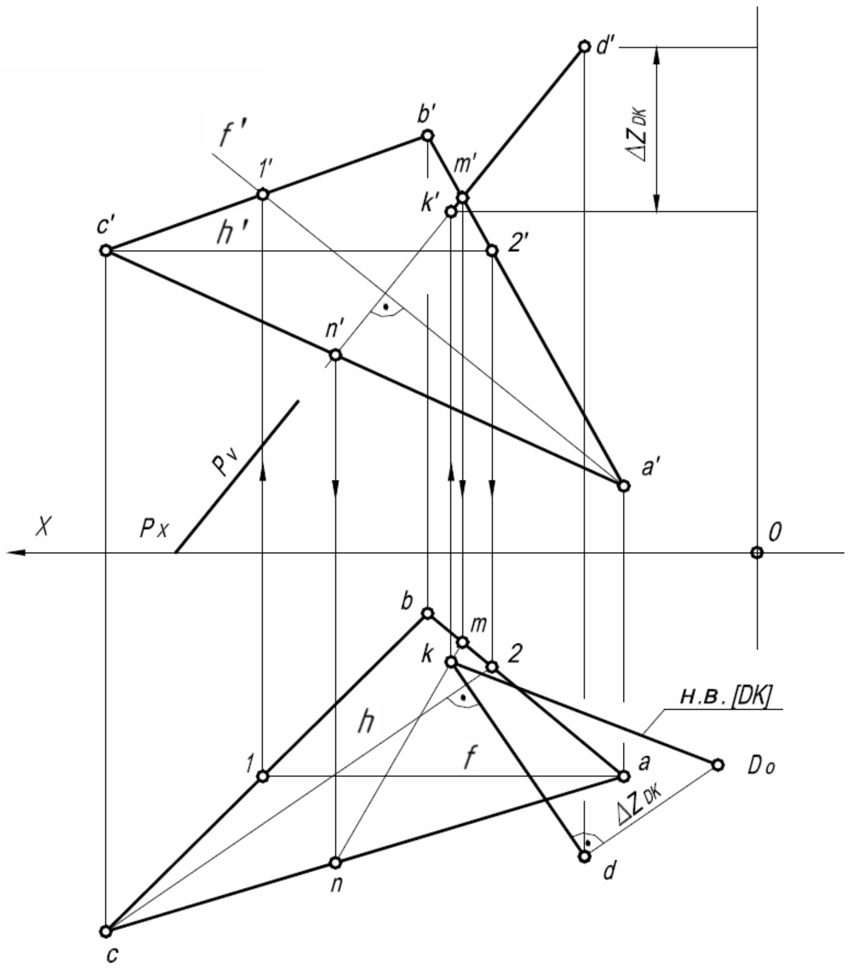


Рис. 4.13.

Задача вирішується в три етапи, кожний являє собою одну з розв’язаних раніше задач:

1) з точки ***D*** (***d, d′***) проводимо пряму ***a*** (***a, a′***) перпендикулярно лініям рівня ***h*** (***c2***), ***f′*** (***a′1′***);

2) знаходимо точку перетину прямої та площини, тобто точку ***K*** (***k, k′***);

3) находимо натуральну величину відрізка (н.в. ***DK***) методом прямокутного трикутника.

4.6. Взаємно перпендикулярні площини

Ознакою двох взаємно перпендикулярних площин є те, що в кожній з них можна провести перпендикуляр до другої.

Отже, щоб провести через точку ***A*** площину перпендикулярну площині ***Σ*** (рис. 4.14), треба спочатку опустити з точки ***A*** перпендикуляр n до площини ***Σ***. Площина, яка містить у собі цей перпендикуляр буде перпендикулярна до площини ***Σ***.

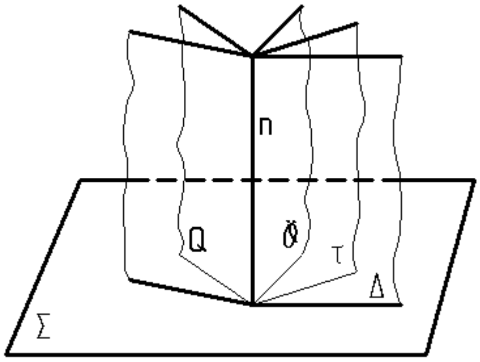


Рис. 4.14.

Розглядаючи рис. 4.15, є можливість бачити, що до площини ***Σ*** можна провести безліч перпендикулярних площин і всі вони будуть містить у собі пряму ***n***. Для рішення конкретної задачі необхідно запроваджувати додаткові умови.

Розглянемо приклад. Через пряму ***ab*** провести площину перпендикулярну до площини ***ΔCDE*** (рис. 4.15).

Для рішення даної задачі необхідно:

1) у площині ***ΔABC*** провести лінії рівня горизонталь ***A1*** та фронталь ***C2***;

2) через точку ***K*** провести пряму ***b*** перпендикулярно горизонтальній проєкції горизонталі й фронтальній проєкції фронталі: ***b*** ⊥ ***A1***, ***b'***⊥ ***C'2'***;

3) пересічні у точці ***K*** прямі ***a*** та ***b*** утворюють площину ⊥ площині ***ΔABC***.

Питання про перпендикулярність між собою двох площин, вирішується шляхом проведення через точку, взяту в одній з цих площин, перпендикуляра до

другої площини. Якщо виявиться, що побудований перпендикуляр належить першій площині, то такі площини взаємно перпендикулярні.

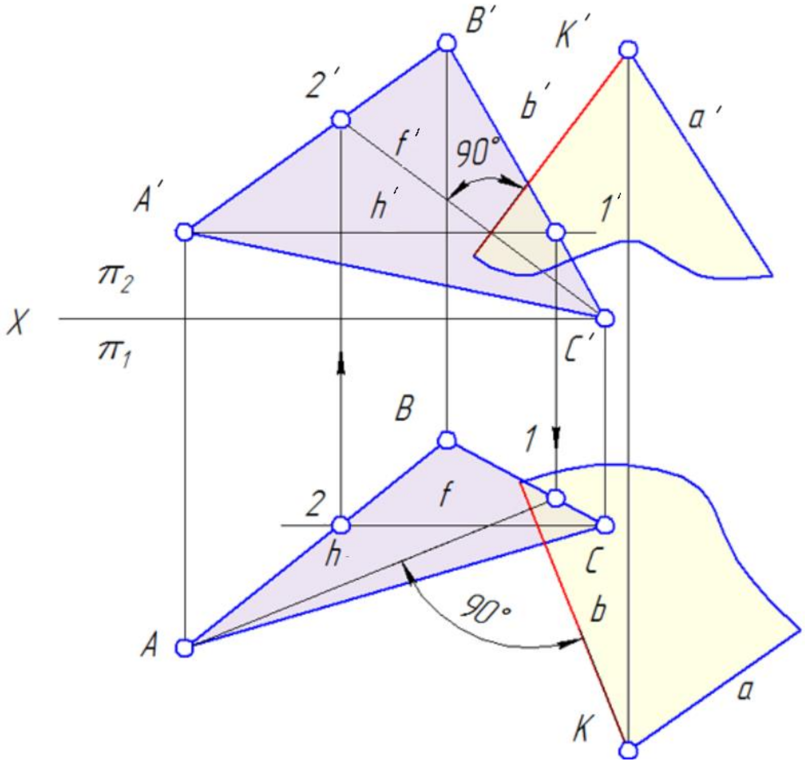


Рис. 4.15.

Запитання для самоконтролю:

1. Які площини мають назву паралельних?
2. Як визначити лінію перетину двох площин, якщо одна з них займає часткове положення?
3. Як визначити лінію перетину двох площин загального положення?
4. Дати алгоритм перетину прямої і площини загального положення.
5. Коли пряма паралельна площині?
6. Назвіть умови паралельності двох площин.
7. Коли пряма перпендикулярна до площини?
8. Назвати умови перпендикулярності двох площин.

5. СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

Для розв'язання більшості метричних та деяких позиційних задач геометричні фігури загального положення треба привести в окреме положення. Це перш за все стосується прямих ліній, площини, багатогранних та криволінійних поверхонь.

Після перетворення комплексного креслення додаткові проєкції дають можливість розв'язати задачі найпростішими графічними способами. Методи перетворення проєкцій спираються на два основні принципи:

1) заміна взаємного положення об'єкта проєціювання та площин проєкцій;
2) зміна напрямку проєціювання.

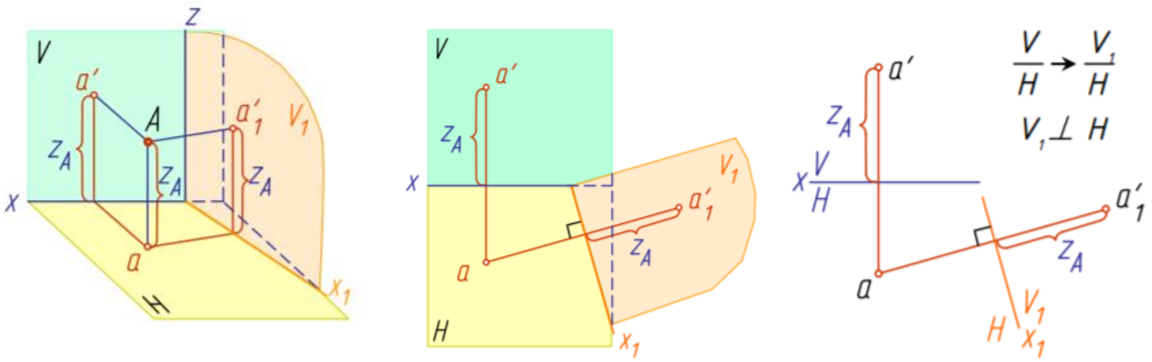
На першому принципі ґрунтуються два способи перетворення проєкцій – заміна площин проєкцій та метод обертання, а на другому – спосіб допоміжного проєціювання.

5.1. Спосіб заміни площин проєкцій

Якщо прямі лінії чи площини розташовані паралельно, або перпендикулярно до площин проєкцій, то визначення на комплексному кресленні відстаней, кутів, а також розташування окремих геометричних елементів у просторі визначаємо без додаткових побудов. Якщо прямі, площини чи фігури займають у просторі загальне положення, то для визначення дійсних їх розмірів застосовують способи перетворення проєкцій. Розглянемо спосіб заміни площин проєкцій.

Сутність цього способу складається у тому, що положення точок, ліній, площин у просторі не змінюється, а змінюється положення площин проєкцій (рис. 5.1).

В системі площин проєкцій ***V–H*** зображена точка ***A*** (рис. 5.1, б, в). Введемо взамін фронтальної площини ***H*** додаткову площину проєкцій ***V_1***, перпендикулярну до площини ***H***. Тоді площини ***H*** та ***V_1*** складають нову систему взаємно перпендикулярних площин проєкцій, а пряма ***x_1*** (***H–V_1***), буде вісь проєкцій цієї нової системи. Побудуємо ортогональні проєкції точки ***A*** в системі ***H–V_1***. Горизонтальна проєкція т. ***A*** зберігається і у нової системи ***H–S***, тому що площина ***H*** не заміняється другою площиною. Для визначення проєкції т. ***A*** на ***V_1*** треба опустити перпендикуляр з т. ***A*** на площину ***V_1*** та побудувати відстань нової проєкції ***a_1'*** до осі ***H–V_1***, яка дорівнюється відстані від заміняємої проєкції ***a'*** до осі ***V–H***.



а) б) в)

Рис. 5.1.

Розглянемо основні способи перетворення: перетворити відрізок ***AB*** загального положення у пряму рівня (рис. 5.2).

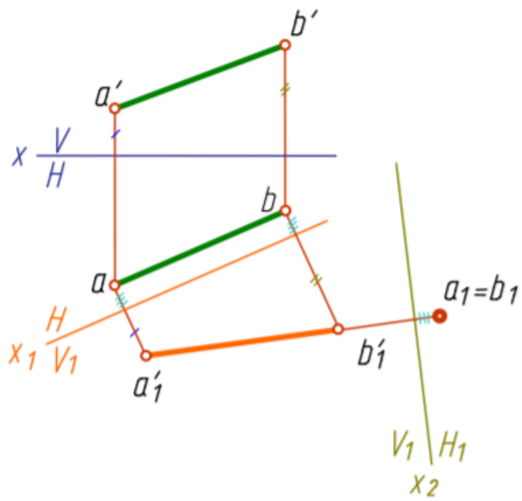


Рис. 5.2.

У прямої рівня одна проєкція повинна бути паралельна осі координат, а друга проєкція – натуральна величина відрізка. Площину ***V*** заміняємо площиною ***V₁***, $H \perp V_1$. Площини ***H*** та V_1 перетинаються по осі x_1 (H–V_1), якщо H–V_1 провести паралельно ***ab***, то на V_1 пряма ***AB*** ($a_1'b_1'$) спроєціюється у натуральну величину. Для перетворення відрізка ***AB*** у проєціюючу пряму треба виконати два перетворення. Спочатку ***AB*** перетворити у пряму рівня, а потім у проєціюючу.

За допомогою таких перетворень можна розв'язувати задачі на визначення відстані між: двома паралельними прямими; від прямої до точки; між двома перехресними прямими; між двома площинами.

Перетворити площину загального положення у площину рівня (рис. 5.3).

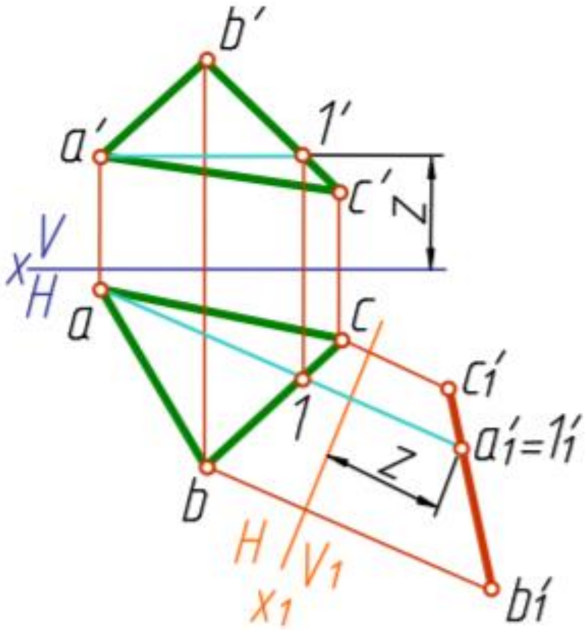


Рис. 5.3.

У площини рівня одна проєкція пряма лінія (слід-проєкція площини). Для того щоб площина спроєціювалась у пряму, вона повинна бути проєціюючою площиною. Побудову виконують за допомогою однієї з лінії особливого положення, наприклад, горизонталі з проєкціями ***a'1'***, ***a1***. Нову площину проєкцій у цьому випадку обираємо перпендикулярно до горизонталі ***A1*** (ось H/V_1 перпендикулярна до проєкції ***a1***) і відповідно перпендикулярно до площини ***H***. У проєціюючій площині одна проєкція лінії рівня перпендикулярна осі

проєкцій. Змінивши площину проєкцій ***V*** на V_1 перетворюємо площину ΔABC в проєціюючу. На площину проєкцій ***S*** площина ΔABC проєціюється у пряму $c_1'a_1'1_1'b_1'$ (слід-проєкція площини).

Для визначення справжньої величини плоскої фігури ΔABC переходимо від системи площин проєкцій ***H–V*** до $V_1 – H_1$ (рис. 5.4). На площину проєкцій H_1 – площина ΔABC спроєціюється справжньою величиною.

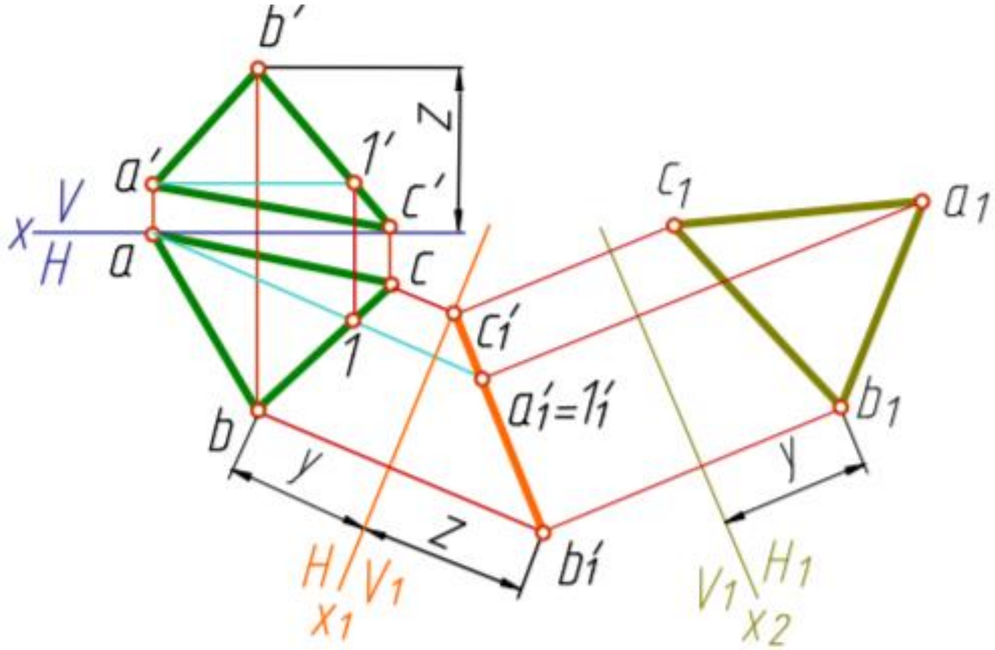


Рис. 5.4.

На рис. 5.5 показано визначення відстані між відрізками двох перехресних прямих ***AB*** та ***CD***. Для цього подвійною заміною площин проєкцій пряму ***CD*** спроєціюється у точку, а пряма ***AB*** спроєціюється при цьому у відрізок A_2B_2. Перпендикуляр, опущений з $C_2 \equiv D_2$ на A_2B_2, дає шукану відстань N_2M_2.

5.2. Спосіб обертання навколо осей, перпендикулярних до площин проєкцій

Якщо при способі заміни площин проєкцій геометричні фігури залишаються на місці, а до них підбираються площини проєкцій, то при способі

обертання роблять навпаки: площини проєкцій ***H*** та ***V*** залишаються незмінними, а геометричні фігури переміщуються певним чином.

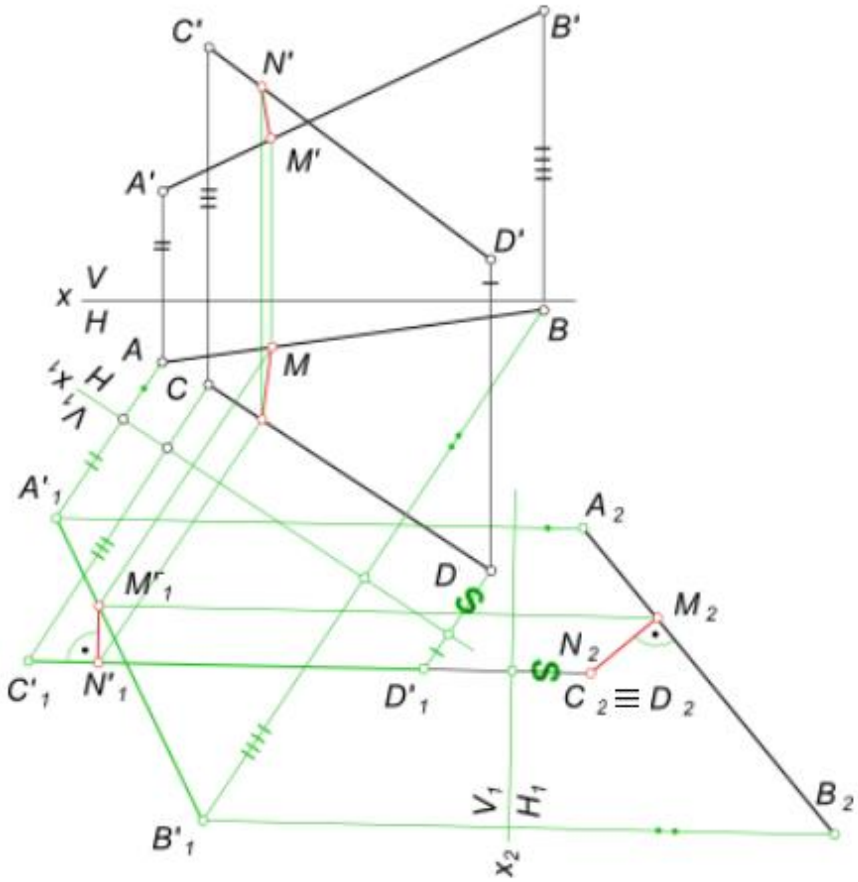


Рис. 5.5.

При обертанні навколо деякої нерухомої прямої (вісь обертання) кожна точка обертаємої фігури переміщується у площині, перпендикулярної до осі обертання (площина обертання). Точка переміщується по колу, центр якого знаходиться у точці перетину вісі з площиною обертання (центр обертання), а радіус кола дорівнюється відстані від обертаємої точки до центра (це радіус обертання).

Якщо деяка з точок даної системи розташована на осі обертання, то при обертанні системи ця точка нерухома.

Вісь обертання може бути завдана, або вибрана в останньому випадку вигідно розташовувати вісь перпендикулярно до однієї з площин проєкцій.

Цей спосіб застосовується для знаходження натуральної величини відрізків ліній і плоских фігур, а також для приведення геометричних елементів у положення, зручне для розв'язування задач. Розрізняють обертання навколо осей, перпендикулярних до площин проєкцій, навколо ліній рівня, слідів площин, а також обертання без визначення осей обертання (плоско-паралельне переміщення).

При рішенні задач цим способом необхідно виділити чотири основні елементи обертання:

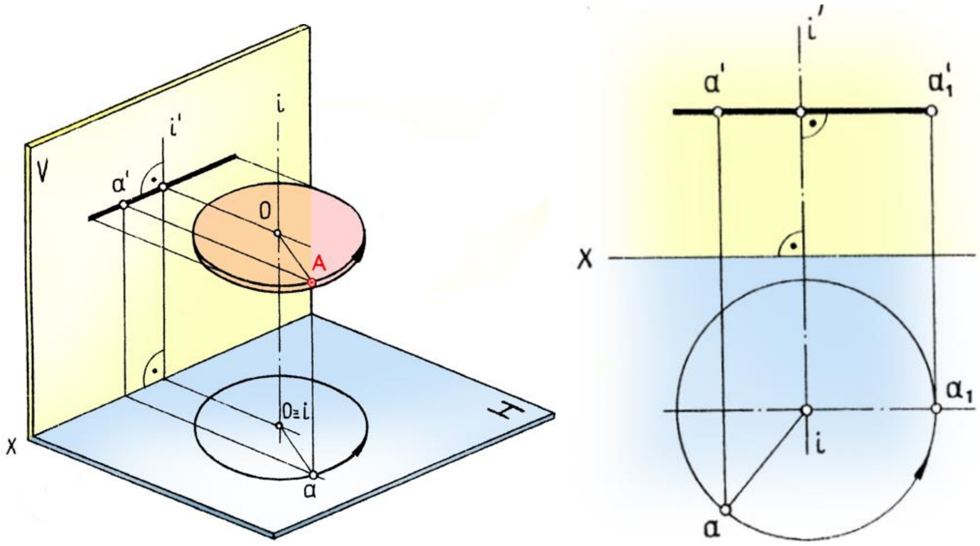
а) вісь обертання;

б) площина обертання направлена перпендикулярно до осі обертання;

в) центр обертання, знаходиться на перетині осі й площини обертання;

г) радіус обертання, відстань від точки до центра обертання.

Розглянемо приклад: повернути точку ***A*** навколо осі, перпендикулярній ***H*** (рис. 5.6).



а) б)

Рис. 5.6.

Через точку ***A*** проведена площина, перпендикулярна до осі обертання ***i***, отож паралельна ***H***. При обертанні точка ***A*** описує у площині коло радіусом ***R=OA=ia***. Величина радіуса виявляється довжиною перпендикуляра, проведеного з точки ***A*** на вісь. Коло, описане у просторі точкою ***A*** проєктюється на площину ***H*** без викривлення. Так як площина перпендикулярна до площини

V, то проєкція того кола на ***V*** розташується на прямій, перпендикулярній до фронтальної проєкції осі обертання.

З рис. 5.6 видно, що при обертанні точки навколо осі перпендикулярної до будь якої із площин проєкцій, одна із проєкцій обертаємої точки переміщується по прямій, перпендикулярній до проєкції осі обертання.

Розглянемо приклад на перетворення відрізка прямої ***AB*** загального положення у прямому рівня.

Якщо вісь обертання вибрати так, щоб вона проходила через один із кінців відрізка ***AB***, то побудова спрощується, так як точка, через яку проходить вісь обертання буде «нерухомою» і для обертання відрізка треба побудувати нове положення проєкції тільки однієї точки – другого кінця.

На рис. 5.7 показаний випадок, коли для обертання відрізка ***AB*** вибрана вісь обертання перпендикулярно до площини ***H*** яка проходить через точку ***B***.

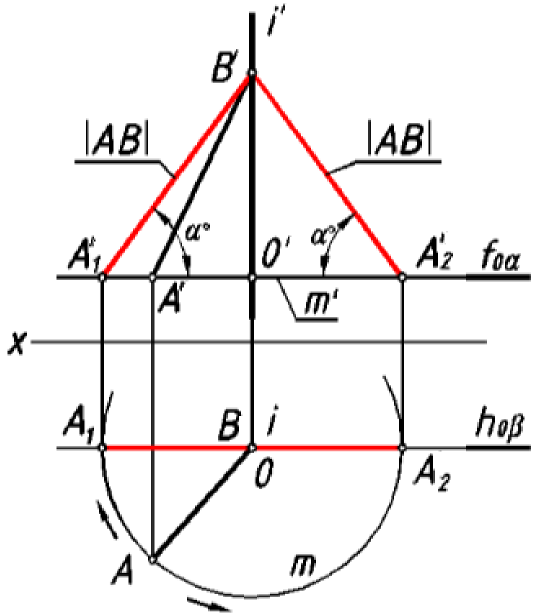


Рис. 5.7.

При обертанні навколо такої осі, можливо розташувати відрізок паралельно площині ***V***. Горизонтальна проєкція відрізка у своєму новому положенні перпендикулярна до лінії зв'язку ***BB'***. Отримавши точку A_1 та побудувавши відрізок $A_1'B'$ отримуємо фронтальну проєкцію відрізка ***AB*** в його

новому положенні. Він є натуральною величиною відрізка ***AB***. Кут ***O'A₁'B'*** дорівнюється куту між прямою ***AB*** і площиною ***H***. Якщо необхідно визначити кут нахилу відрізка ***AB*** до площини ***V***, то треба вісь обертання вибрати перпендикулярно до ***V*** та повернути пряму так, щоб вона зайняла положення паралельне до площини проєкцій ***H***.

5.3. Плоскопаралельне переміщення

Якщо за способу заміни площин проєкцій геометричні фігури залишають на місці, а до них підбирають площини проєкцій, то за способу плоскопаралельного переміщення роблять навпаки: площини проєкцій ***H*** та ***V*** залишають незмінними, а геометричні фігури переміщують.

На рис. 5.7 зображено відрізок прямої загального положення ***AB***. Для визначення натуральної величини відрізка через його кінцеву точку ***B*** проводять вертикальну вісь, навколо якої відрізок ***AB*** повертають у фронтальне положення. Точка ***A*** при цьому переміщується по дузі кола. Отримуємо натуральну величину відрізка ***AB***–$A_1'B'$.

Цю саму натуральну величину можна отримати без використання зафіксованої осі обертання, досить розмістити пряму паралельно одній з площин проєкцій. Тобто цей спосіб, що називають ***плоскопаралельним переміщенням,*** є обертанням навколо уявних осей, перпендикулярних до ***H*** та ***V*** (рис. 5.8).

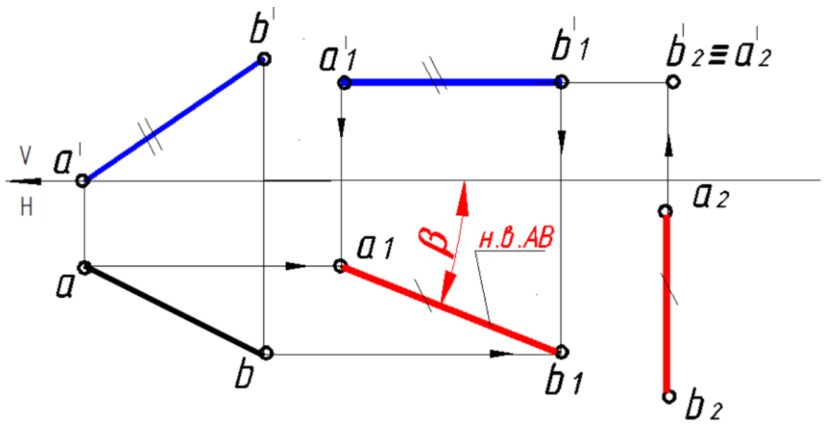


Рис. 5.8.

Визначення натуральної величини ΔABC показано на рис. 5.9. Для цього щоб площина ΔABC спроєціювалась у пряму, ставлять проєкція лінії c_1 рівня перпендикулярно осі проєкцій, тобто у проєкціювальне положення. Спочатку проєкцію лінії рівня a_1 повертають навколо уявної вертикальної осі так, щоб a_1 розмістилася перпендикулярно осі. На фронтальну площину проєкцій V площина ΔABC проєціюється у пряму $b_1'a_1'c_1'$ (слід-проєкція площини). Другим поворотом навколо уявної фронтально проєкціювальної осі ставлять пряму $c_2'a_2'b_2'$ (слід-проєкція площини) у горизонтальне положення. При цьому на площину проєкцій H площина ΔABC зобразиться в натуральну величину.

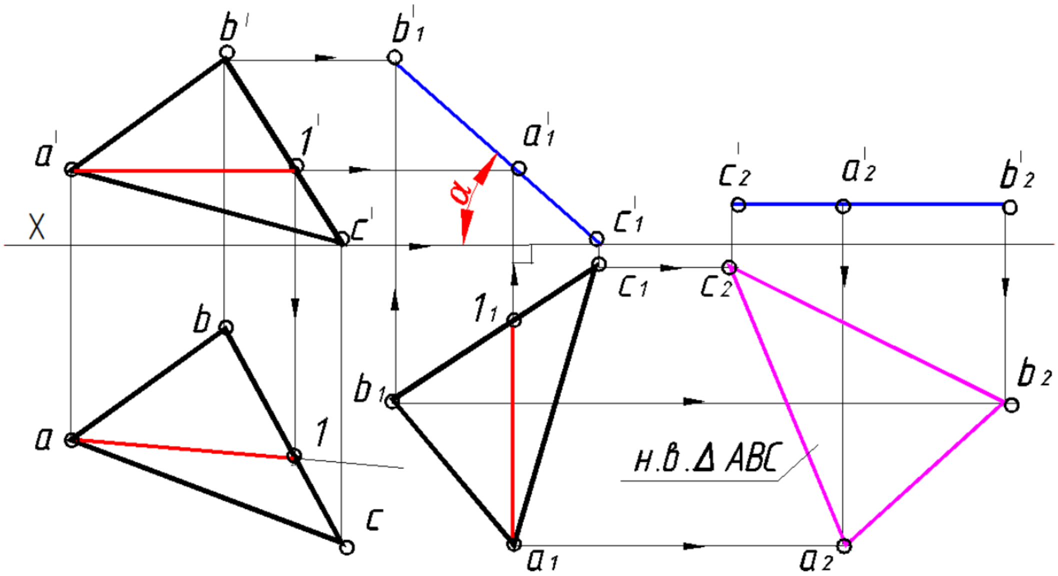


Рис. 5.9.

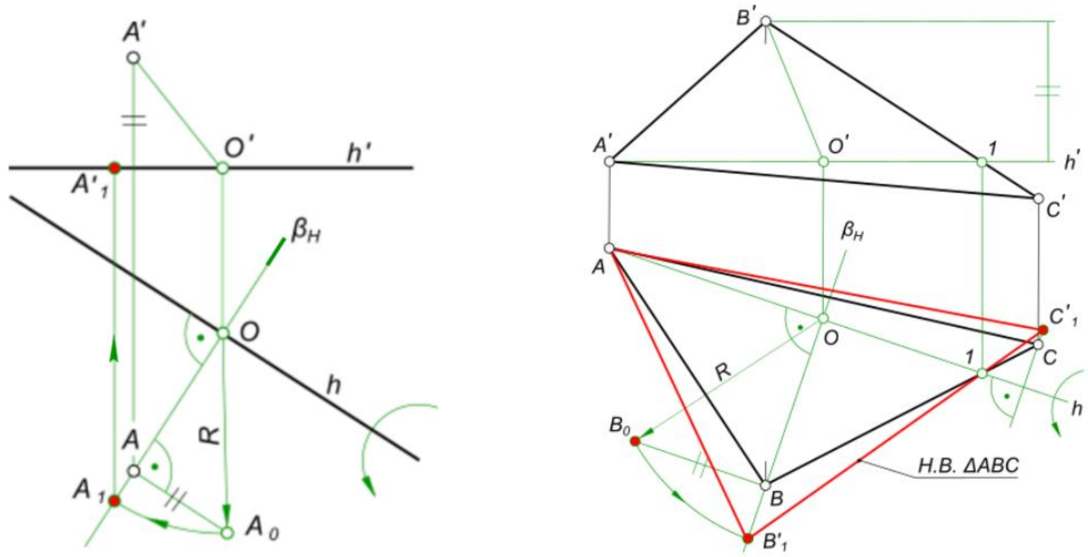
5.4. Обертання навколо ліній рівня

Крім обертання навколо осей, перпендикулярних до площин проєкцій, для розв'язування деяких метричних задач користуються обертанням навколо ліній рівня площин.

Відносно нерухомих площин проєкцій, проводиться лінія рівня h' (пряма, паралельна площині проєкцій) (рис. 5.10, а). Точка A обертається навколо цієї лінії і описує коло, що лежить у площині β_H. Ця площина перпендикулярна до

осі обертання ***i***, відповідно, є горизонтально-проєкційною. Отже, горизонтальна проєкція кола, яке описується точкою ***A***, знаходиться на $\boldsymbol{\beta_H}$.

На рис. 5.10 (б) обертанням навколо горизонталі знайдено натуральну величину трикутника ***ABC***. Для цього в площині ***ΔABC*** проведено горизонталь ***A′1′***. Площину ***ΔABC*** обертають навколо горизонталі до положення, паралельного ***H***; при цьому вершини відсіку ***B*** та ***C*** обертатимуться у вертикальних площинах, перпендикулярних до ***A1***. Способом прямокутного трикутника визначають дійсну величину радіуса обертання для точки ***B***. Оскільки точки ***A*** та ***1*** залишаються на місці, точку ***C*** знаходять на перетині траєкторії обертання точки ***C*** навколо горизонталі та прямої $\boldsymbol{B_1 1}$.



а) б)

Рис. 510.

5.5. Спосіб суміщення

Спосіб суміщення є окремим випадком обертання площини навколо горизонталі або фронталі, якщо за вісь обертання беруть не довільну горизонталь чи фронталь площини, а її горизонтальний або фронтальний слід («нульові» горизонталь чи фронталь). У цьому випадку внаслідок обертання площини вона збігається з площиною ***H***, якщо обертання здійснюється навколо

горизонтального сліду площини, або з площиною проєкцій V – при обертанні навколо її фронтального сліду.

Будемо обертати площину α навколо її горизонтального сліду α_H до суміщення з площиною проєкцій H (рис. 5.11).

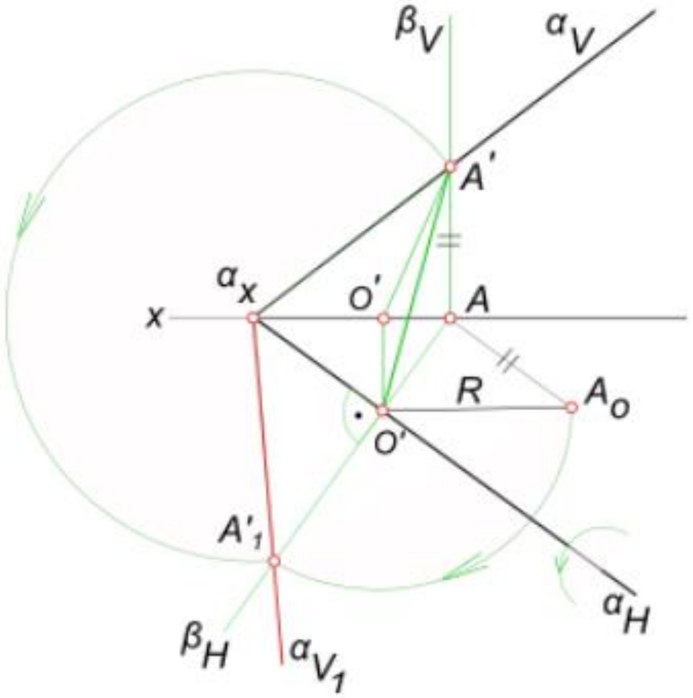


Рис. 5.11.

Оскільки вісь обертання – горизонтальний слід α_H – лежить у горизонтальній площині проєкцій, то залишається сумістити з площиною H лише фронтальний слід α_V. Одна точка, а саме α_X**,** лежить на осі обертання і сліду α_V. Отже, досить взяти на сліді α_V довільну точку A, обернути її навколо осі α_H до суміщення з площиною H. Через її горизонтальну проєкцію A проводимо пряму AO, перпендикулярну до вісі обертання – сліду α_H. На цій прямій знаходимо точку A_1', тобто точку A після суміщення з площиною H. Її знаходимо на відстані $\alpha_X A_1' = \alpha_X A'$ від точки α_X або на відстані OA_0 від точки O, що дорівнює радіусу обертання точки A. Довжину радіуса OAo визначаємо, як гіпотенузу прямокутного трикутника з катетами AO та AA_0 $(AA_0 = AA')$. Пряма Pvo, що проходить через точки Px та No, – суміщене положення сліду Pv.

Запитання для самоконтролю:

1. В чому складається сутність способу заміни площин проєкцій?
2. Скільки перетворень треба виконати для визначення відстані між двома паралельними прямими загального положення?
3. Скільки перетворень треба виконати для визначення дійсного розміру площини, яка задається трикутником ΔABC загального положення?
4. В чому складається сутність способу обертання навколо осей перпендикулярних до площин проєкцій?
5. Назвіть основні елементи обертання.
6. Як переміщуються проєкції точок при обертанні навколо осі перпендикулярної до площини Π_1?
7. Яким способом простіше визначити відстань між двома перехресними прямими?

6. БАГАТОГРАННИК. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН БАГАТОГРАННИКІВ

6.1. Багатогранник. Точки і прямі на поверхні багатогранників

Багатогранник – геометричне тіло, з усіх боків обмежене багатокутниками – гранями. Їх елементами є грані, ребра і вершини. Частини площин, що утворюють багатогранну поверхню, називаються гранями, лінії перетину суміжних граней – ребрами, точки перетину не менш ніж трьох граней – вершинами (рис. 6.1).

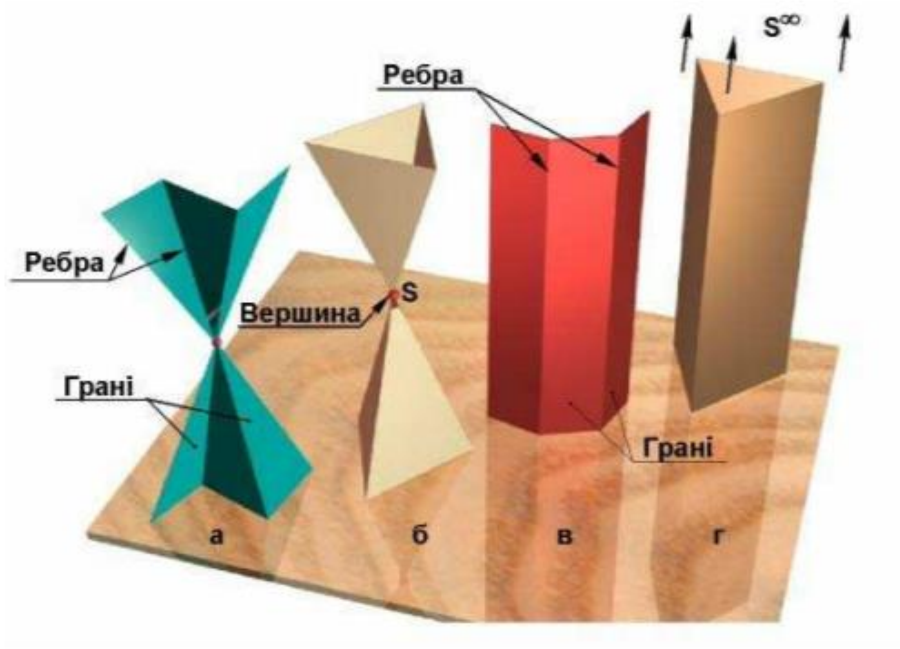


Рис. 6.1.

Якщо кожне ребро багатогранної поверхні належить одночасно двом її граням, її називають замкненою (рис. 6.1, б, г), у протилежному випадку – незамкненою (рис. 6.1, а, в). Багатогранна поверхня називається пірамідальною, якщо всі її ребра перетинаються в одній точці – вершині (рис. 6.1, б). Багатогранна поверхня називається призматичною, якщо всі її ребра паралельні між собою (рис. 6.1, г).

Простішими багатогранниками є піраміди та призми. За кількістю граней розрізняють 4-гранники, 6-гранники тощо. Багатогранник називається опуклим, якщо він увесь розміщений з одного боку, від кожної його грані. Опуклий багатогранник, називається правильним, якщо всі його грані правильні багатогранники і всі багатогранні кути при вершинах однакові.

Якщо необхідно на обох проєкціях багатогранника побудувати точку, що лежить на одній з його граней, то слід «зв'язати» точку з відповідною гранню за допомогою будь-якої прямої (рис. 6.2).

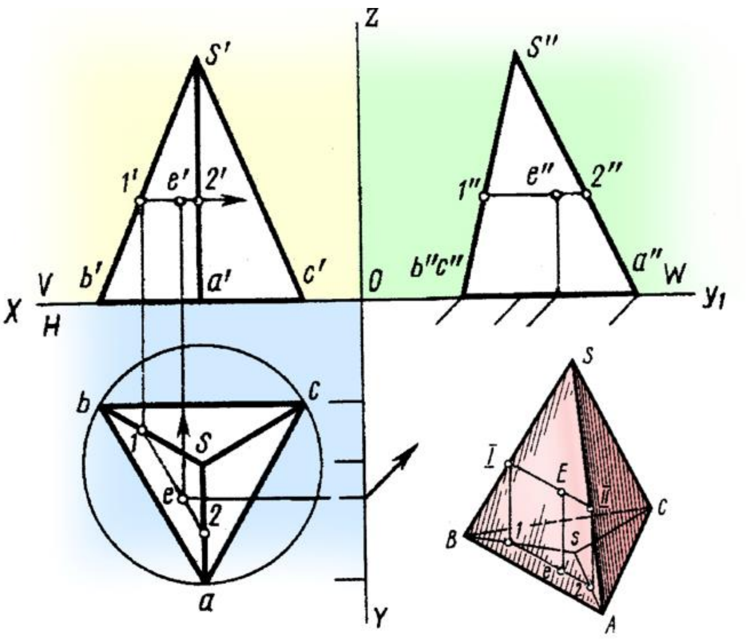
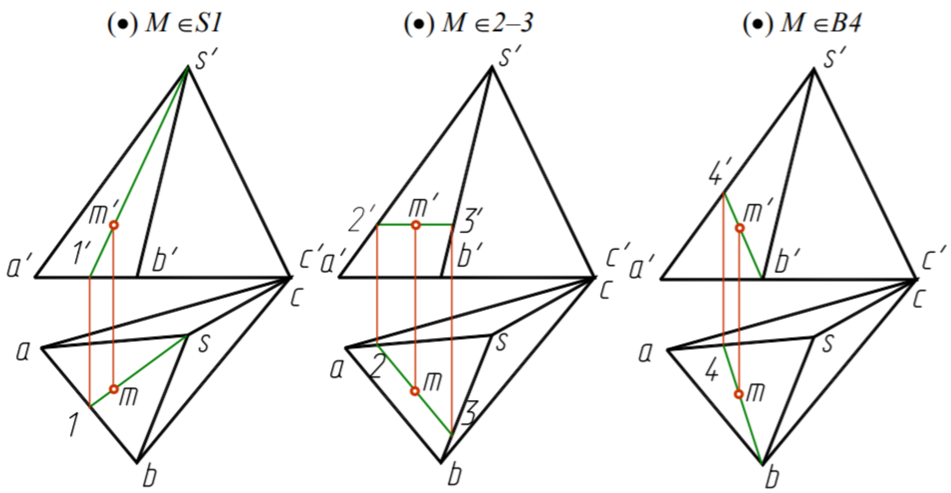
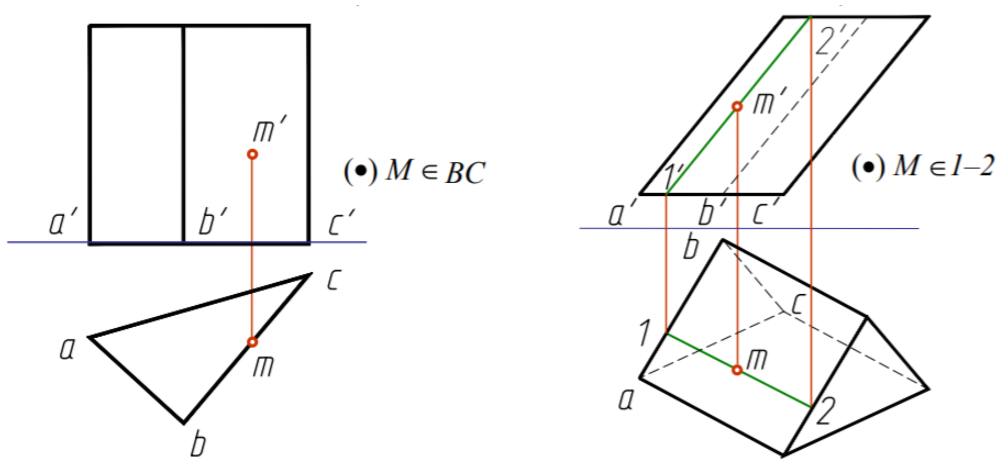


Рис. 6.2.

Прямі на поверхні багатогранників визначаються аналогічно (рис. 6.3).



а)



б) в)

Рис. 6.3.

6.2. Перетин багатогранників площиною і прямою лінією

При перетині поверхні багатогранника площиною утворюється багатокутник, вершини якого належать ребрам багатогранника, а сторони – граням (рис. 6.4). Для побудови лінії перерізу багатогранних поверхонь застосовується спосіб граней, коли визначають лінії перетину граней із січною площиною. Або спосіб ребер, яким визначають точки перетину багатогранника площиною.

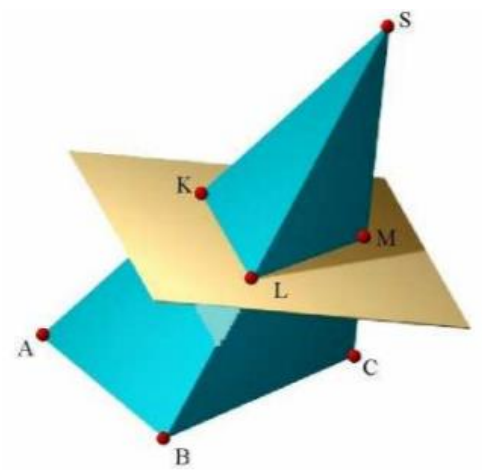
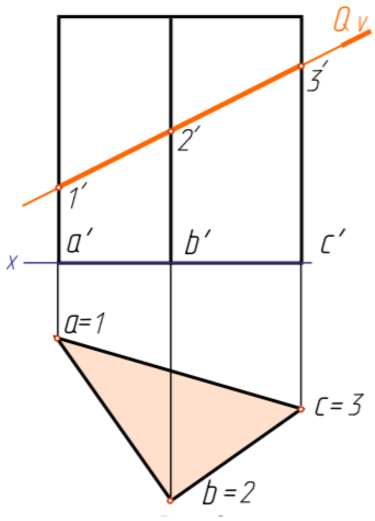


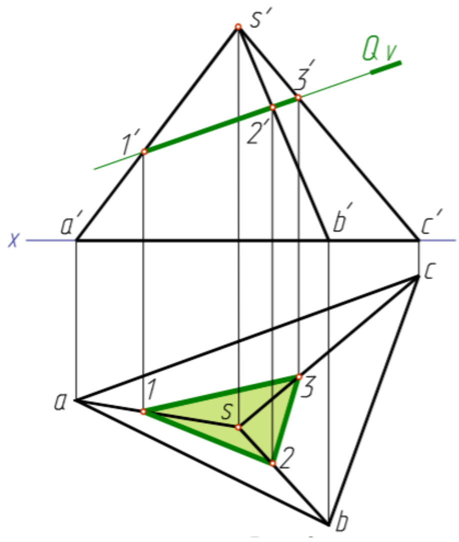
Рис. 6.4.

Перетин багатогранників площиною особливого положення.

Визначити фігуру перерізу тригранної піраміди площиною особливого положення. Піраміда ***SABC*** (рис. 6.5, б) перетинається фронтально-проєкційною площиною Q. Основа піраміди паралельна горизонтальній площині проєкцій, ***a'b'c'*** – фронтальна проєкція основи – відрізок прямої лінії. Фронтальна проєкція фігури перерізу піраміди ***1'2'3'*** – відрізок прямої і розміщується на сліді $\mathbf{Q_V}$, тому що площина **Q** – фронтально-проєкційна. Горизонтальні проєкції точок ***1, 2, 3*** знаходяться в точках перетину вертикальних ліній зв'язку з відповідними горизонтальними проєкціями ребер піраміди. Сполучивши визначені точки, отримуємо фігуру перерізу трикутної піраміди ***SABC*** площиною **Q**. Перетин призми горизонтально-проєкційною площиною **Q** показано на рис. 6.5 (а).



а)



б)

Рис. 6.5.

Перетин багатогранників площиною загального положення.

Для побудови проєкції фігури перерізу призми площиною загального положення, яка завдана двома пересічними прямими (***EFH***) (рис. 6.6) необхідно знайти точки перетину кожного ребра призми з площиною або лінії перетину кожної грані з площиною.

Горизонтальна проєкція лінії перетину поверхні призми та площиною збігається з чотирьохкутником, яким спроєціювалася призма на ***H***. Фронтальну

проєкцію перерізу визначаємо застосовуя спосіб ребер. Для побудови точок перетину через ребра проводимо допоміжні січні площини, паралельні фронтальній площини проєкцій. Горизонтальні сліди цих площин проводимо через горизонтальні проєкції ребер. Далі будуємо прямі перетину допоміжних площини з січною площиною ***EFH***. Цими прямими будуть фронталі площини ***EFH***. Шукані точки ***1'2'3'4'*** (фронтальні проєкції точок фігури перерізу) знаходимо на перетині фронтальної проєкції фронталі з фронтальною проєкцією ребра призми. Сполучивши послідовно знайдені точки отримуємо фронтальну проєкцію фігури перерізу.

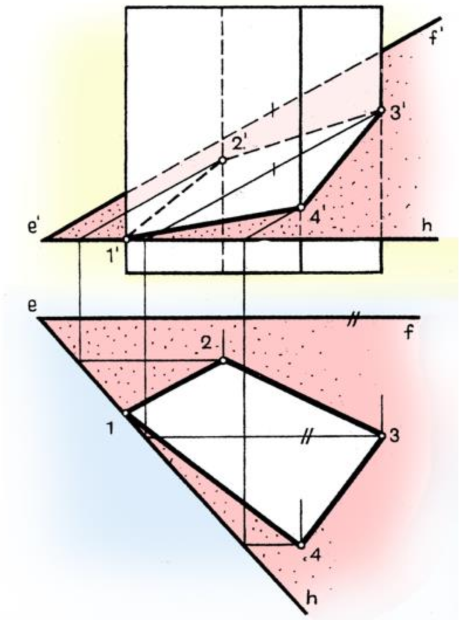


Рис. 6.6.

Визначимо фігуру перерізу триграної піраміди площиною загального положення.

Піраміда ***SABC*** перетинається площиною загального положення ***P*** (рис. 6.7). Необхідно знайти точки перетину ребер ***SA***, ***SB***, ***SC*** з площиною ***P***, тобто точки перетину прямої з площиною. Знайдемо точку перетину ребра ***SB*** з площиною ***P***. Через ***SB*** проводимо допоміжну площину, у даному випадку горизонтально-проєкційну **Q**. Знаходимо пряму перетину ***1–2*** площин ***P*** та **Q**. Знаходимо точку ***L*** у перетині прямих ***SB*** та ***1–2***. Далі, ребро ***SA*** розміщено паралельно площині ***V***, тому проводимо через нього допоміжну фронтальну

площину ***R***. Вона перетинає площину ***P*** по її фронталі з початковою точкою ***3***; у перетині цієї фронталі з ребром ***SA*** отримаємо точку ***К***. Проєкція ***ас*** паралельна сліду ***Ph***. Це той випадок, коли у двох площин горизонтальні сліди взаємно паралельні (***Ph***|| ***ас***, ***ас*** – частина горизонтального сліду площини грані ***SAC***) та лінія перетину таких площин є їх спільною горизонталлю. Тому через вже знайдену точку ***К*** проводимо пряму, паралельну ребру ***AC*** (або|| ***Ph***), та знаходимо точку ***М***. Якщо не було б цієї особливості, дії були б аналогічні побудові точки ***L***. Сполучивши послідовно однойменні проєкції побудованих точок, отримаємо проєкції фігури перерізу.

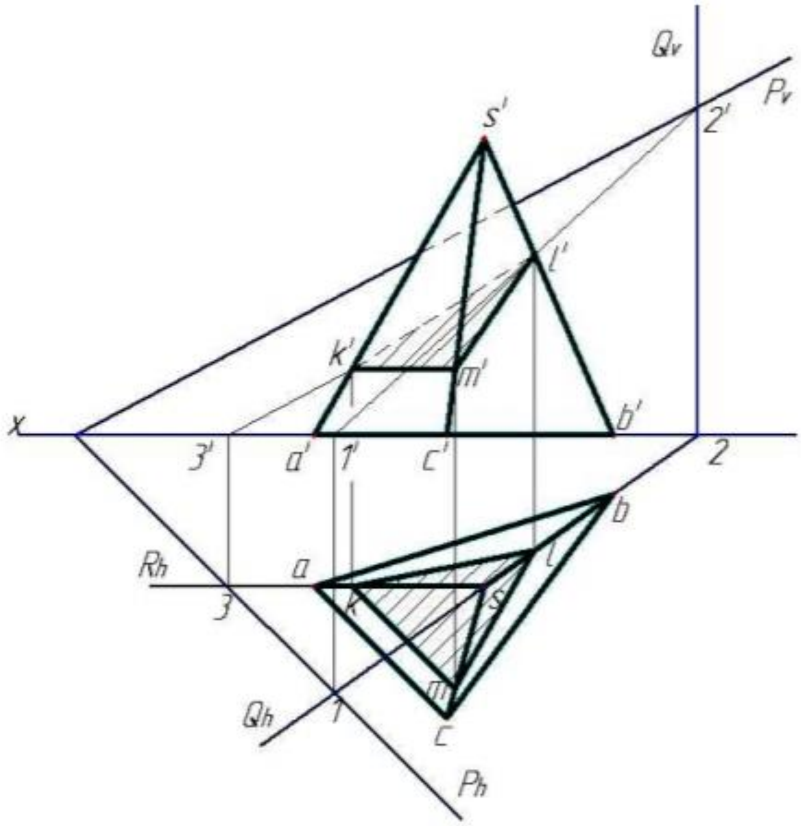


Рис. 6.7.

Перетин багатогранників прямою лінією.

При перетині поверхні призми або піраміди прямою лінією отримують дві точки, які називають точками входу та виходу. Побудова точок ***Е*** та ***F*** перетину прямої ***А*** з поверхнею призми наведена на рис. 6.8.

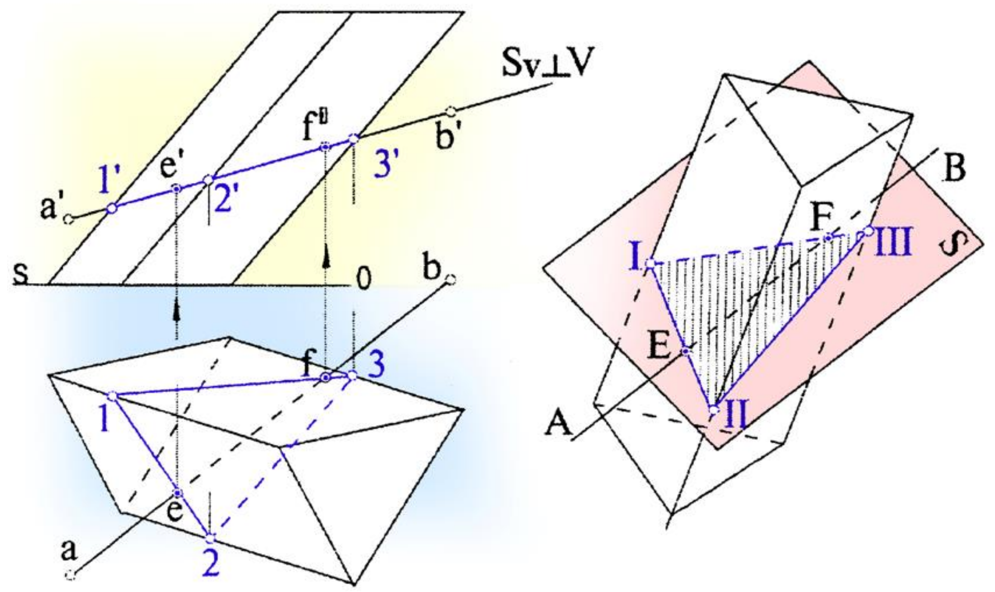


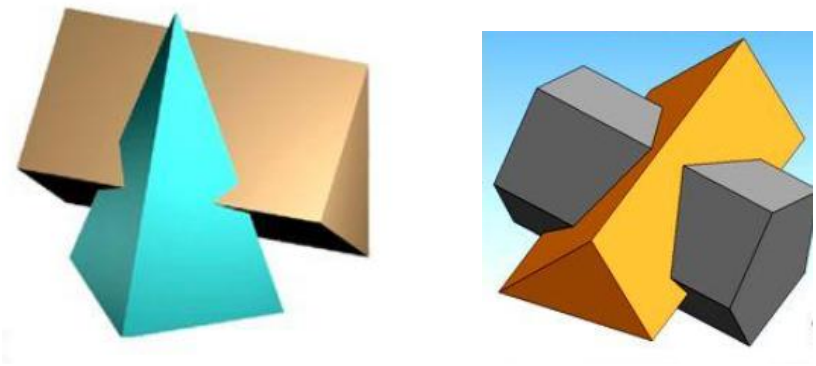
Рис. 6.8.

Для побудови цих точок у загальному випадку необхідно провести через пряму допоміжну площину і побудувати фігуру перерізу – багатокутник, який утворюється в перетині цієї площини з багатогранником. Точки, в яких задана пряма перетинається з контуром фігури перерізу, будуть шуканими точками перетину прямої з поверхнею багатогранника.

6.3. Взаємний перетин багатогранних поверхонь

При перетині двох багатогранних поверхонь утворюється одна або дві просторові лінії. Якщо одна поверхня багатогранника частково, неповно перетинає поверхню другого багатогранника, то лінія перетину тіл являє собою одну просторову ломану. Таке перетинання називається врізування (рис. 6.9, а).

При перетинанні одної поверхні другою утворюються дві замкнені просторові лінії перетину – проникність тіл (рис. 6.9, б).



а) б)

Рис. 6.9.

При перетинанні двох багатогранних поверхонь кожна точка лінії перетину належить обом поверхням. Для побудови лінії перетину багатогранних поверхонь застосовується спосіб граней, коли визначають лінії перетину граней поверхонь, або спосіб ребер, за яким визначають точки перетину ребер однієї поверхні з гранями іншої (рис. 6.10).

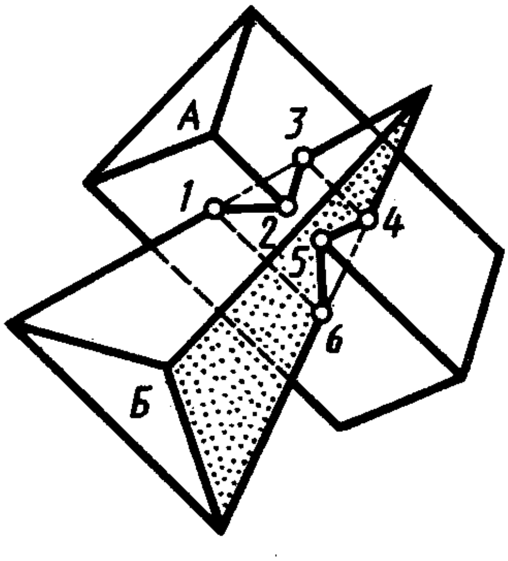


Рис. 6.10.

Розглянемо приклад побудови ліній перетину чотирикутної призми з пірамідою (рис. 6.11). Поверхня піраміди перетинає поверхню призми по двом замкнутим просторовим лініям.

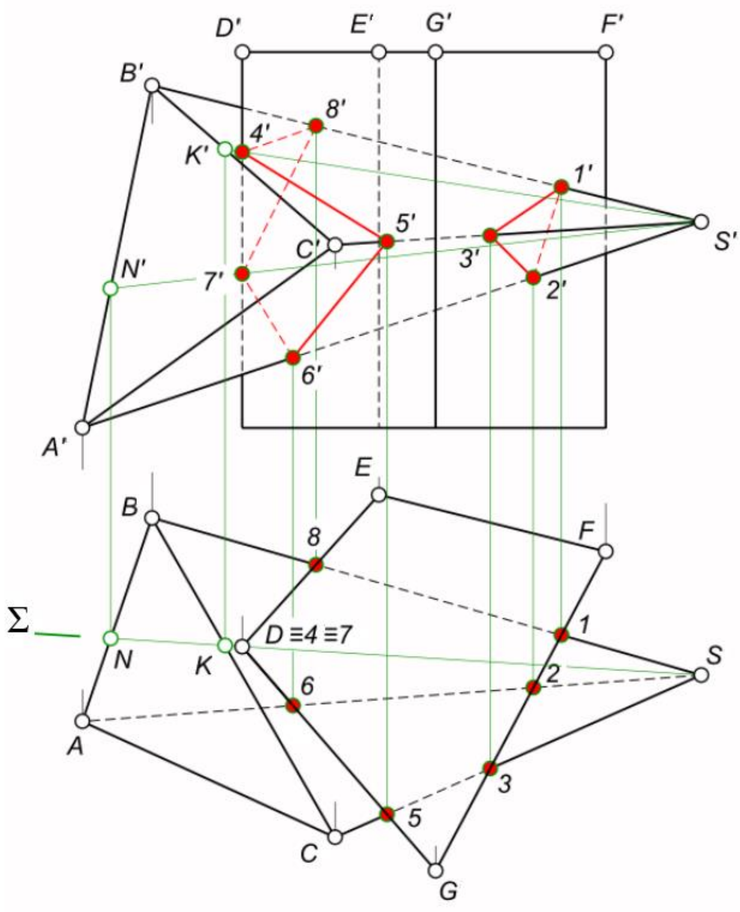


Рис. 6.11.

Бокові грані призми є горизонтально-проєціюючі площини. Горизонтальна проєкція перетину поверхонь збігається з проєкцією призми. Ребра піраміди ***SA*, *SB*, *SC*** перетинають площину ***FG*** у точках ***1*, *2*, *3***, а площини ***DG*** та ***DE*** у точках ***5*, *6*** та ***8***. Ребро ***D*** призми перетинає дві площини піраміди ***SAB*** та ***SBC***. Точки ***4*** та ***7*** знаходимо за допомогою січної горизонтально-проєціюючої площини (***Σ***), яка перетинає піраміду по трикутнику ***SNK***. Перетин фронтальної проєкції трикутника ***SNK*** з ребром ***D*** дає точки ***4*** та ***7***.

Для визначення порядку з'єднання точок (ліній) взаємного перетину поверхонь скористуємося схемою проф. Ананова (рис. 6.12). Виконуємо умовну розгортку призми п'ять вертикальних ліній ***F*, *E*, *D*, *G*, *F*** зображують ребра призми, а чотири похилі лінії ***SA*, *SB*, *SC*, *SA*** зображують ребра та грані піраміди. Побудову умовної розгортки розпочинаємо з ребер, які не беруть участі у перетинанні. На розгортці заштриховуємо грані, які невидимі на $\boldsymbol{\Pi_2}$. З'єднуємо

точки, які належать до однієї грані, одержуємо порядок їх, з'єднання на рисунку. Одну лінію перетинання утворюють точки ***2***, ***1***, ***3***, ***2***, а іншу – точки ***6***, ***7***, ***8***, ***4***, ***5***, ***6***. Точки й лінії, які належать заштрихованій зоні на рисунку невидимі.

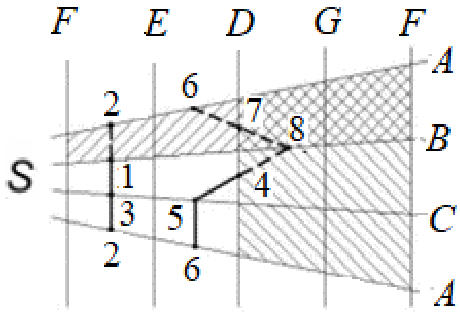
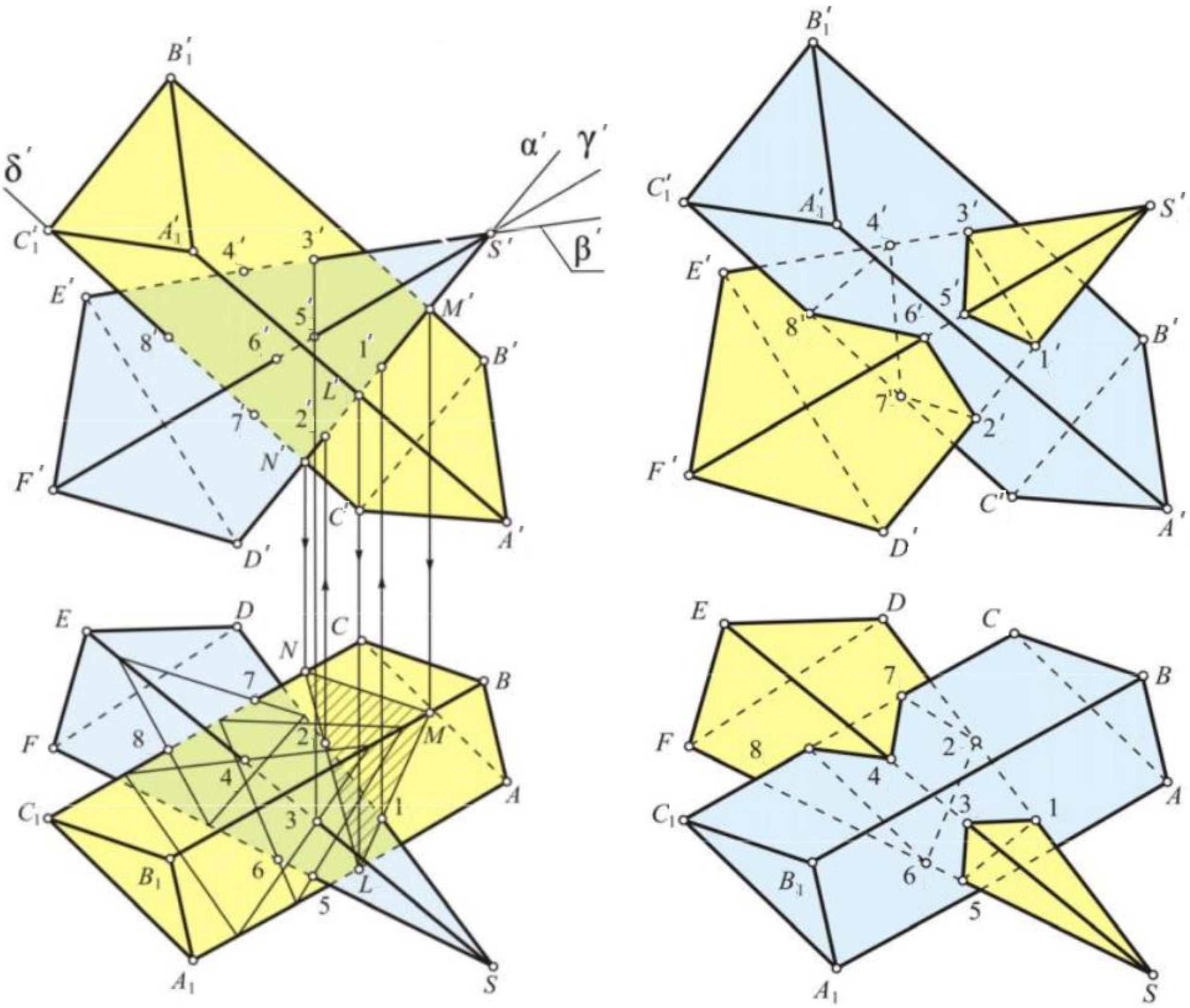


Рис. 6.12.

Розглянемо приклад побудови лінії перетину трикутної призми з трикутною пірамідою (рис. 6.13).

Побудова заснована на знаходженні точок перетину ребер одного багатогранника з гранями іншого. На рис. 6.13 (а) показана побудова точок **1** і **1**, в яких ребро піраміди ***SD*** перетинає гарні $\boldsymbol{ABB_1A_1}$ та $\boldsymbol{ACC_1A_1}$ призми. Через ребро ***SD*** проводимо фронтально-проєкційну площину $\boldsymbol{\alpha}$, яка в фронтальній проєкції перетинає ребра призми в точках $\boldsymbol{M'}$, $\boldsymbol{L'}$, $\boldsymbol{N'}$; по цих проєкціях знаходимо горизонтальні проєкції точок перетину площини $\boldsymbol{\alpha}$ з ребрами призми ***M***, ***L***, ***N***. Визначаємо точки ***1*** та ***2***, в яких ***SD*** перетинається з контуром ***MLN***. Точки ***1*** та ***2*** – горизонтальні проєкції точок зустрічі ребра ***SD*** з гранями призми; фронтальні проєкції цих точок – точки $\boldsymbol{1'}$ та $\boldsymbol{2'}$ – знаходяться на фронтальній проєкції ребра ***SD***. Аналогічно знаходимо точки ***3***, ***4***, ***5***, ***6*** перетину ребер ***SE*** та ***SF*** з гранями призми. Після цього знаходимо перетин ребер призми з гранями піраміди, також проводячи допоміжні фронтально-проєкційні площини. Точки ***7*** та ***8*** – точки перетину ребра $\boldsymbol{CC_1}$ з граннями піраміди. Ребра $\boldsymbol{AA_1}$ та $\boldsymbol{BB_1}$ з гранями піраміди не перетинаються. На рис. 6.13 (б) побудовано порядок з'єднання точок перетину.



а) б)

Рис. 6.13

Запитання для самоконтролю:

1. Як називається фігура переріза багатогранника площиною?
2. Які способи застосовуються для визначення лінії переріза багатогранника площиною?
3. Як побудувати лінію взаємного перетину багатогранників.
4. У чому суть «методу ребер», «методу граней»?
5. У чому суть схеми «Ананова»?

7. КРИВІ ЛІНІЇ, КРИВІ ПОВЕРХНІ

7.1. Криві лінії

Крива лінія це геометричне місце (сукупність) послідовних положень точки, що рухається в просторі. Криві лінії можуть бути утворені: переміщенням точки у просторі, перетином кривої поверхні площиною, взаємним перетином двох поверхонь, з яких хоч би одна – крива.

Усі криві лінії за положенням їх точок в просторі поділяються на два види: плоскі – криві, всі точки, які лежать в одній площині (коло, еліпс, парабола тощо) (рис. 7.1); просторові – криві, точки, яких не лежать в одній площині (гвинтові лінії, лінії перетину двох кривих поверхонь тощо) (рис. 7.2).

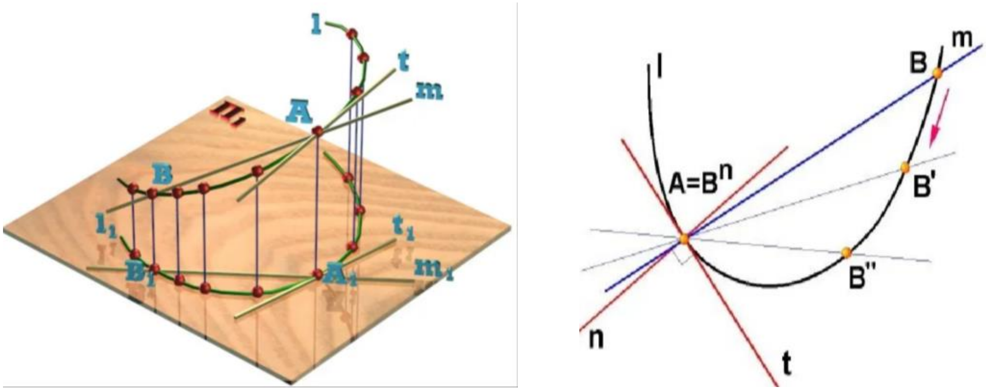


Рис. 7.1.

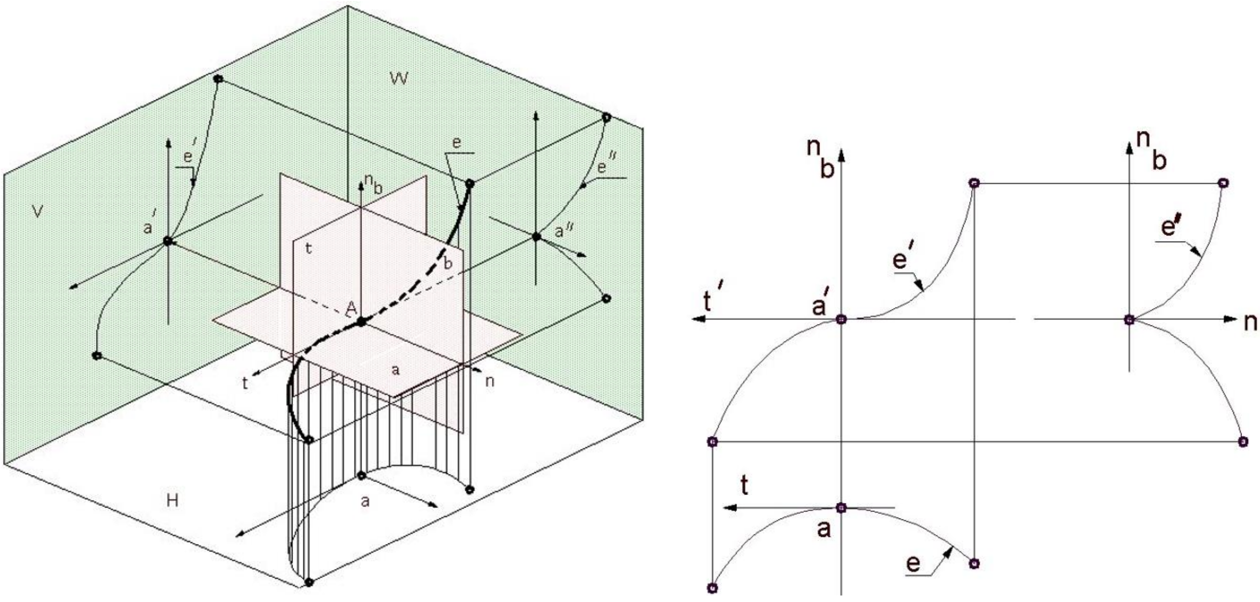


Рис. 7.2.

На кожній кривій лінії можна виділити особливі точки, у яких крива змінює свій характер, тобто точки, які характеризують форму даної кривої. Назвемо деякі з цих точок (рис. 7.3):

• ***H*** – точка перегину, у якій крива перетинає дотичну;

• ***A*** – подвійна точка (вузлова або самоперетину), у ній крива перетинає сама себе і має дві дотичні;

• ***B*** та ***C*** – точки звороту, у яких крива має вістря («дзьоб») та дотична є загальною для обох гілок кривої (з них точку ***B*** називають точкою звороту першого роду (вістря), а точку ***C*** – точкою звороту другого роду (дзьоб))

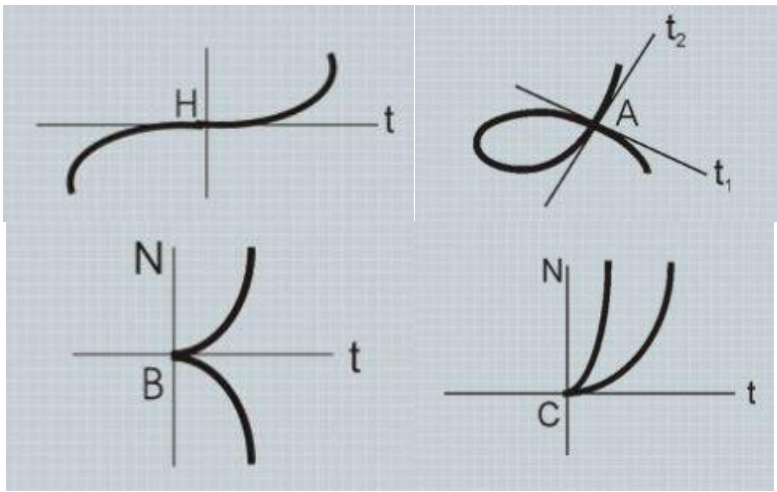


Рис. 7.3.

Серед закономірних просторових кривих, які мають широке практичне значення слід, насамперед відзначити гвинтові лінії.

Гвинтова лінія – траєкторія руху точки, що рівномірно – поступово ковзає вздовж твірної якої-небудь поверхні обертання, коли ця твірна сама рівномірно обертається навколо осі цієї поверхні. Розрізняють гвинтові лінії постійного й змінного кроку. Гвинтові лінії бувають конічні й циліндричні.

Циліндрична гвинтова лінія – траєкторія руху точки, що рівномірно – поступально переміщується по твірній прямого кругового циліндра, в той час як твірна рівномірно обертається навколо осі циліндра. На рис. 7.4 показано побудову гвинтової лінії, вісь якої розміщена перпендикулярно до горизонтальної площини проєкцій. При цьому горизонтальна проєкція гвинтової

лінії буде колом. Щоб побудувати фронтальну проєкцію потрібно поділити на однакове число рівних частин коло (горизонтальну проєкцію гвинтової лінії) та її крок, наприклад, на ***12***. Тоді у перетині відповідних горизонтальних та вертикальних ліній, проведених через однойменні точки поділу, матимемо фронтальні проєкції точок гвинтової лінії. Сполучивши ці точки плавною кривою, матимемо фронтальну проєкцію – синусоїду.

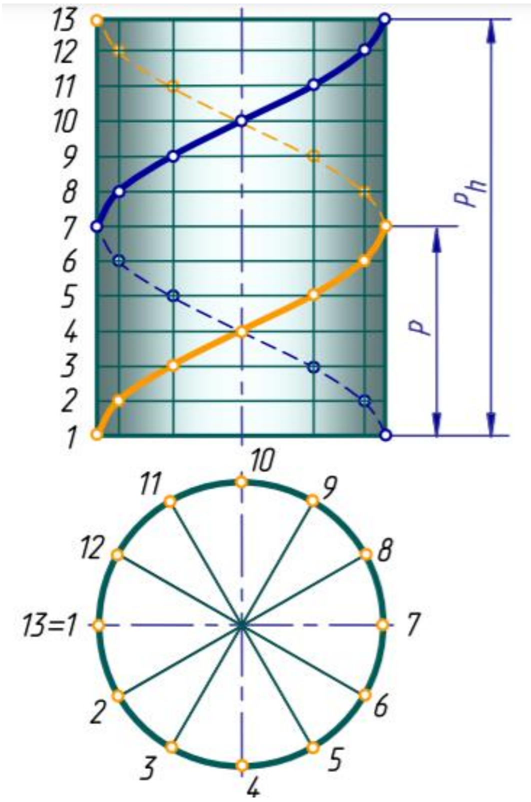


Рис. 7.4.

7.2. Криві поверхні

Поверхня – слід безперервного переміщення в просторі твірної лінії, що під час руху може зберігати свою форму і змінювати її.

Поверхні поділяються на лінійчаті та нелінійчасті.

Лінійчаті поверхні – твірною є пряма лінія. Лінійчаті поверхні поділяються на розгортні поверхні, які можуть бути накладені на площину без розривів і складок (циліндрична, конічна й тощо) і ті, що не розгортаються і не можуть бути

суміщені з площиною без деформації (циліндроїд, коноїд, навкісна площина й тощо).

Нелінійчасті поверхні – твірна плоска або просторова крива.

По характеру переміщення твірної поверхні утворюються:

а) переміщенням твірної, що ковзає вздовж напрямної. Напрямною може бути пряма або крива;

б) обертаннями твірної навколо осі;

в) гвинтове переміщення – це переміщення твірної прямої, що ковзає вздовж напрямної гвинтової лінії й обертається навколо осі. Кут між твірної і віссю циліндричної, або конічною гвинтовими лініями залишається незмінним.

Розглянемо приклади утворення конічної поверхні (рис. 7.5).

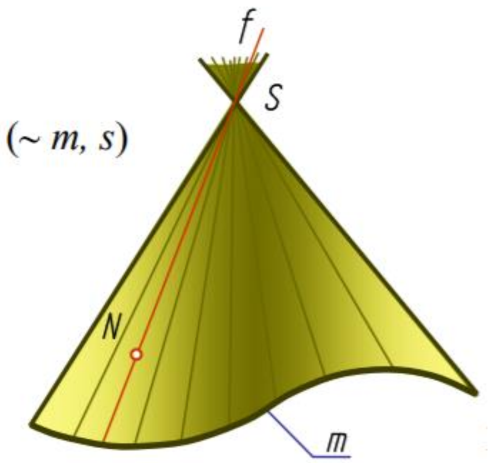


Рис. 7.5.

Конічна поверхня утворюється переміщенням прямолінійної твірної, що проходить через нерухому точку *S* (вершина поверхні) і ковзає вздовж криволінійної m.

7.3. Лінійчасті нерозгортні поверхні

Розглянемо лінійчасті поверхні з двома напрямними. В залежності від типу напрямної (пряма чи крива) утворюють такі поверхні:

Циліндроїд (рис. 7.6).

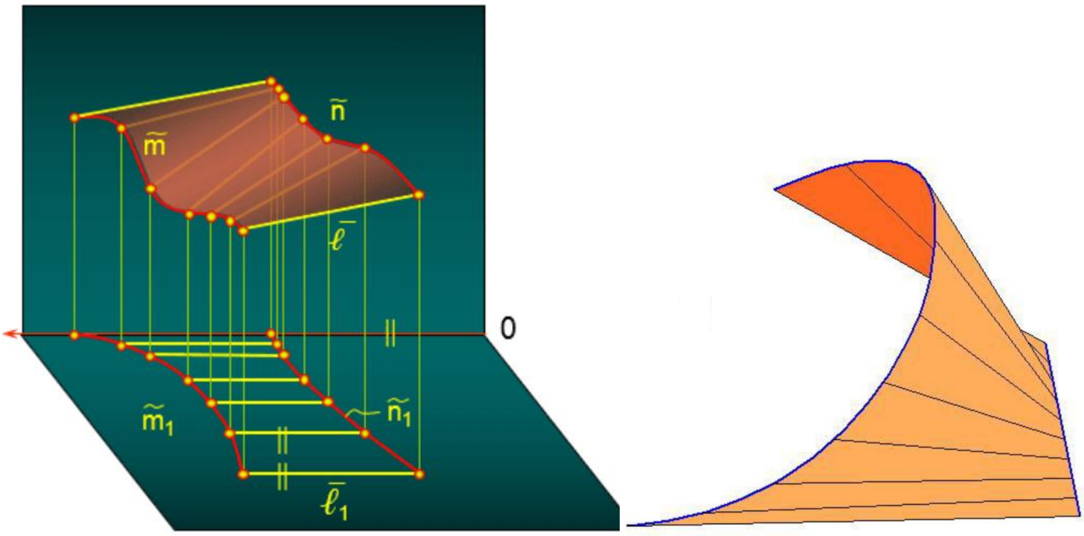


Рис. 7.6.

Циліндроїд – лінійчата нерозгортна поверхня, утворена переміщенням прямолінійної твірної по двох криволінійних напрямних, яка залишається весь час паралельною деякій площині паралелізму.

Коноїд (рис. 7.7) – лінійчата нерозгортна поверхня, утворена переміщенням прямолінійної твірної по двох напрямних, одна з яких криволінійна, а друга – прямолінійна. У кожному своєму положенні твірна зберігає паралельність деякій площині паралелізму.

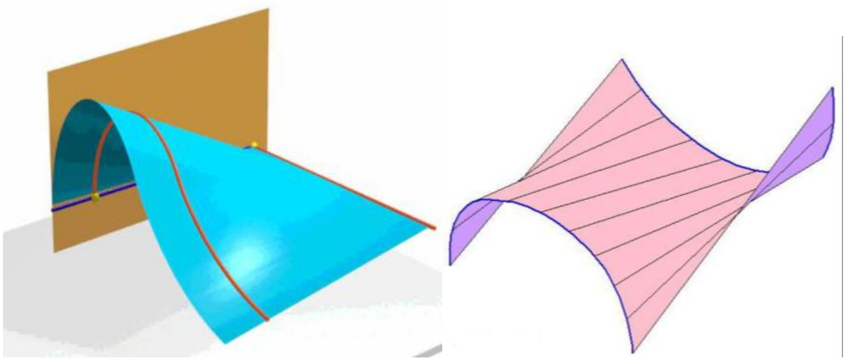


Рис. 7.7.

Гіперболічний параболоїд (навскісна площина) (рис. 7.8) – утворюється при переміщенні прямолінійної твірної, що сковзає вздовж двох перехресних прямолінійних напрямних та зберігає при цьому паралельність деякій площині паралелізму.

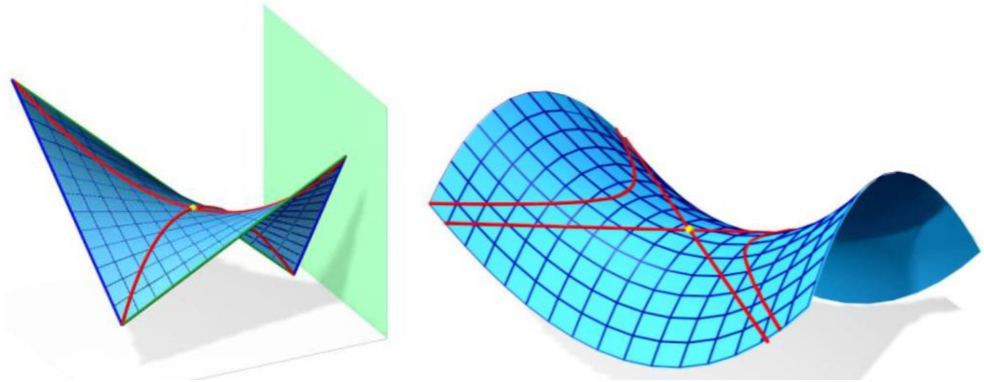


Рис. 7.8.

7.4. Поверхні обертання

Поверхні обертання – утворюються обертанням прямої, або кривої твірної навколо осі.

Коло утворене при перетині поверхні обертання площиною, перпендикулярною до осі обертання площиною, що проходить через вісь обертання (меридіональною площиною). Найбільша паралель (коло) називається екватор. Найменша – горло (рис. 7.9).

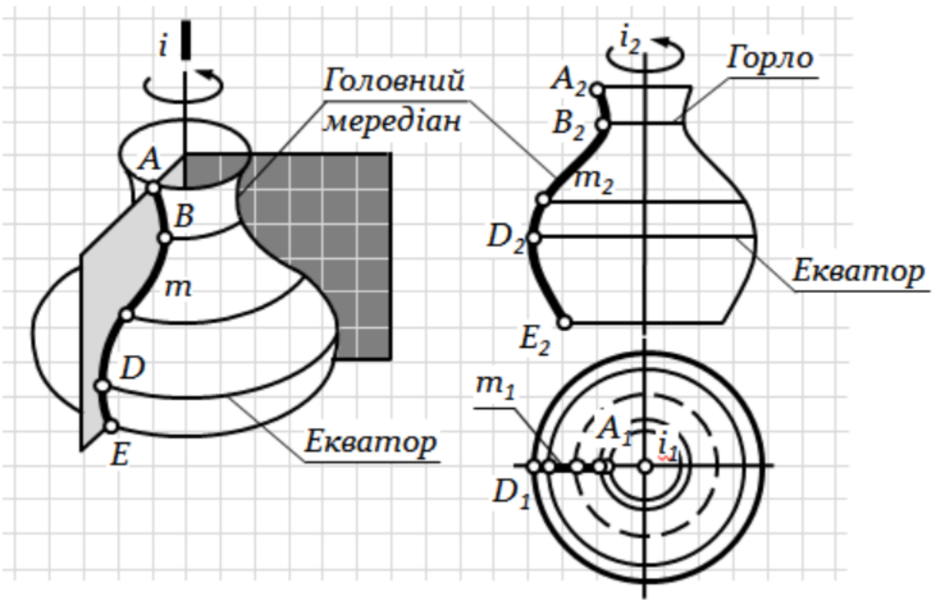


Рис. 7.9.

Паралелі й меридіани перетинаючись між собою, утворюють на поверхні обертання ортогональну сітку.

Розглянемо поверхні обертання.

Сфера – поверхня, всі точки якої однаково віддалені від однієї точки – центра сфери (рис. 7.10).

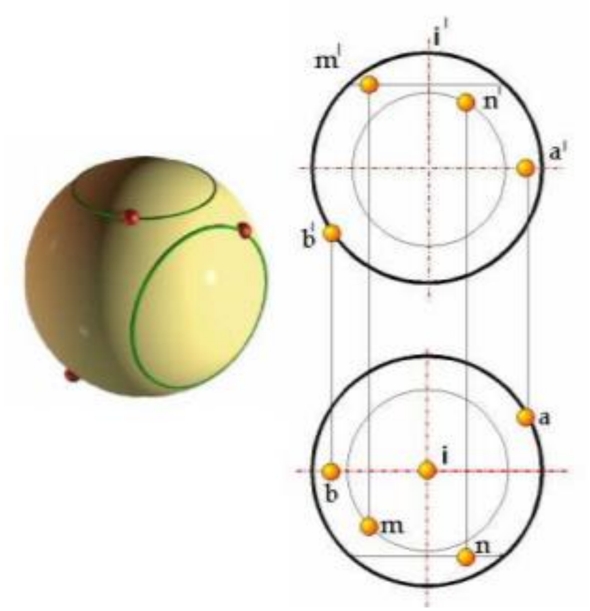


Рис. 7.10.

Еліпсоїд обертання – поверхня обертання, утворена обертанням еліпса навколо однієї з його осей. При обертанні еліпса навколо великої осі утворюється витягнутий (|) еліпсоїд, а навколо малої – стиснутий (||).

Тор – поверхня, утворена при обертанні кола навколо нерухомої осі, що знаходиться з ним в одній площині (рис. 7.11).

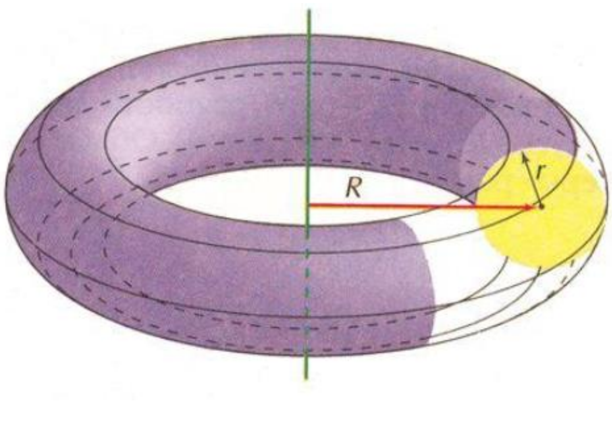


Рис. 7.11.

Вісь обертання може бути поза колом чи перетинати його (рис. 7.12).

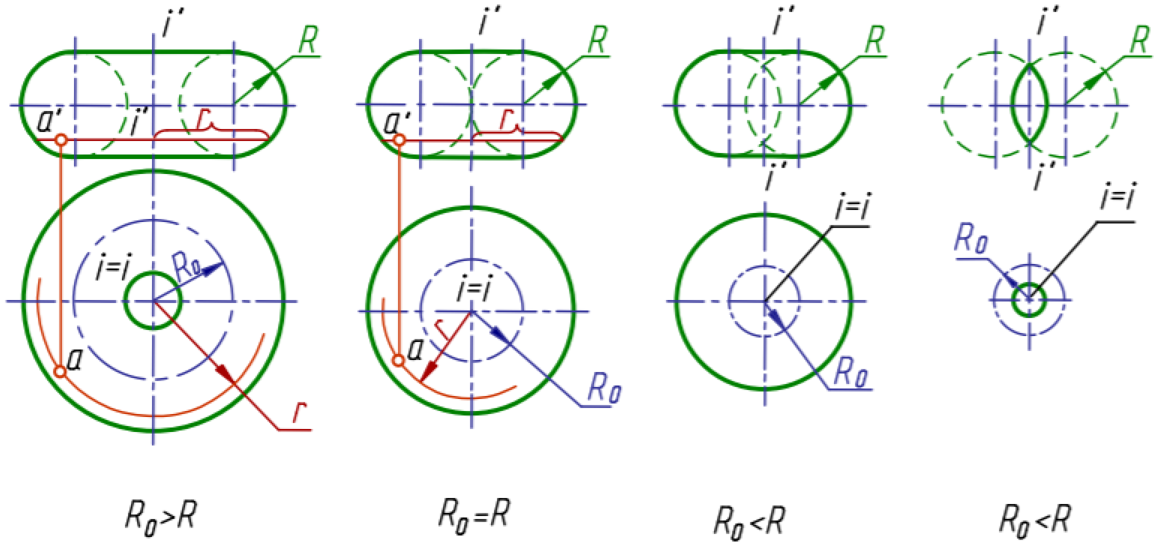


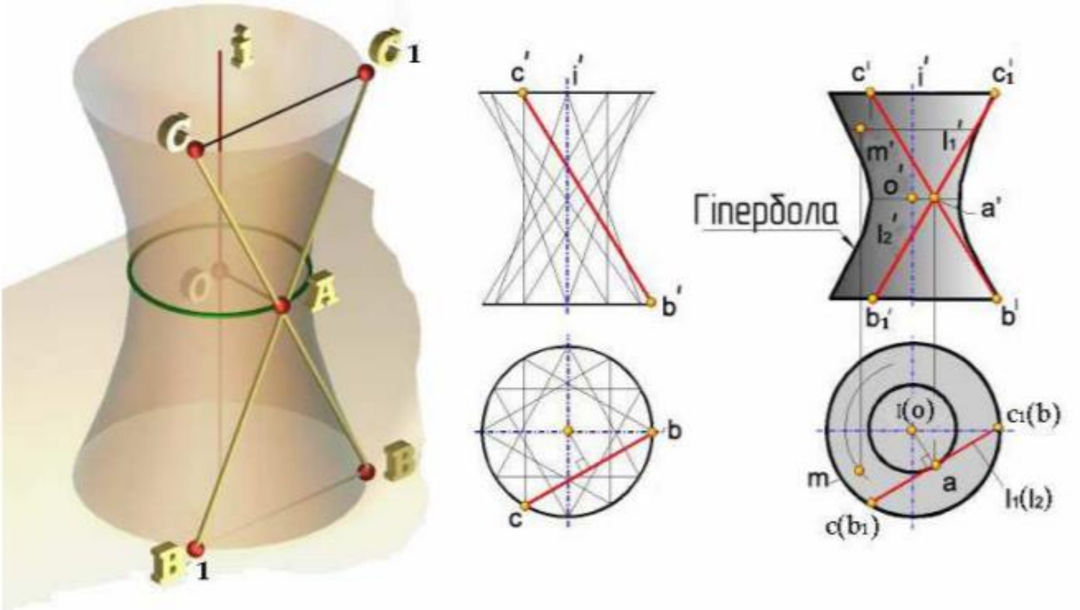
Рис. 7.12.

Якщо вісь обертання проходить через центр кола, то тор перетворюється у сферу. Якщо коло не перетинає вісь обертання ***i***, то утворюється відкритий тор; якщо коло перетинає вісь обертання ***i***, то утворюється закритий тор; якщо центр кола збігається з віссю обертання, то утворюється куля (тобто кульова поверхня, яку можна розглядати як частковий випадок торової); якщо навколо осі ***i*** обертається менша частина від півкола, то утворюється самопересічний тор.

Параболоїд обертання – утворюється обертанням параболи навколо її осі.

Гіперболоїд обертання – поверхня, утворена при обертанні гіперболи навколо нерухомої осі. Розрізняють гіперболоїди двох видів. Одно порожнинний – утворений обертанням гіперболи навколо її уявної осі. Одно порожнинний гіперболоїд обертання належить до лінійчатих поверхонь, бо може бути утворений також обертанням прямої лінії (рис. 7.13 а, б), коли твірна і вісь обертання – перехресні прямі. На рис. 7.13 зображено одно порожнинний гіперболоїд обертання, утворений обертанням прямої ***BC*** навколо зазначеної осі й обмежений двома паралелями; коло, проведене з центра через точку ***A*** називається горлом поверхні.

Крім прямих, на цій поверхні можуть бути ще гіперболи й кола: гіперболи утворюються від перетину площинами, що проходять через вісь гіперболоїда, кола – від перетину площинами, перпендикулярними до осі (рис. 7.13, в).



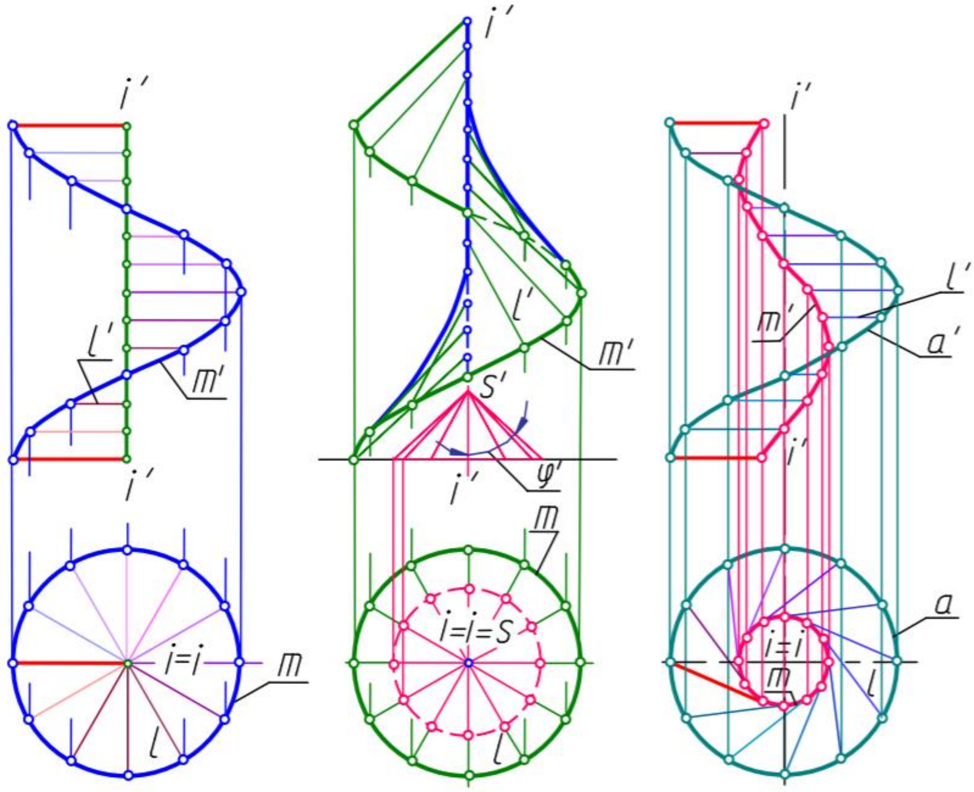
а) б) в)

Рис. 7.13.

7.5. Гвинтові поверхні

Гвинтовими поверхнями називають поверхні утворені рівномірно – поступальним переміщуванням твірної, яка сковзає вздовж напрямної гвинтовій, в той час твірна рівномірно обертається навколо осі циліндра, або конуса (рис. 7.14 а, б).

Якщо твірна – пряма лінія, гвинтова поверхня має назву гелікоїд. Гелікоїд прямий, якщо твірна складає з віссю поверхні прямий кут (рис. 7.14 а, б), в іншому випадку похилий (рис. 7.14, в). Якщо твірна перетинає вісь поверхні – гелікоїд закритий, не перетинає – відкритий.



а) б) в)

Рис. 7.14.

Запитання для самоконтролю:

1. Як провести дотичну до кола у заданій на ньому точці.
2. Які криві називають просторовими?
3. В чому різниця між плоскими і просторовими кривими?
4. Назовіть особливі точки кривої.
5. Які поверхні мають назву лінійчасті?
6. Як утворюється гвинтова поверхня?
7. Як визначити порядок поверхні?
8. Навести приклади поверхонь з площиною паралелізму.
9. Коли точка належить до поверхні?
10. Які поверхні мають назву поверхонь обертання. Навести приклади.

8. ПЕРЕРІЗ КРИВИХ ПОВЕРХОНЬ ПЛОЩИНОЮ І ПРЯМОЮ ЛІНІЄЮ

8.1. Переріз кривих поверхонь площиною

При перетині поверхні площиною одержуємо плоску фігуру, яка називається перерізом. Визначення проєкцій ліній переріза починають з будови опорних точок – найвищих, найнижчих, лівих, правих, точок злому й переходу від видимої до невидимої частини. Розглянемо приклад переріза сфери фронтально-проєціюючою площиною **Q***V*. Переріз сфери будь якою площиною є круг. Фронтальна проєкція круга (рис. 8.1) збігається із слідом – проєкцією площини **Q***V*. Горизонтальна проєкція – еліпс.

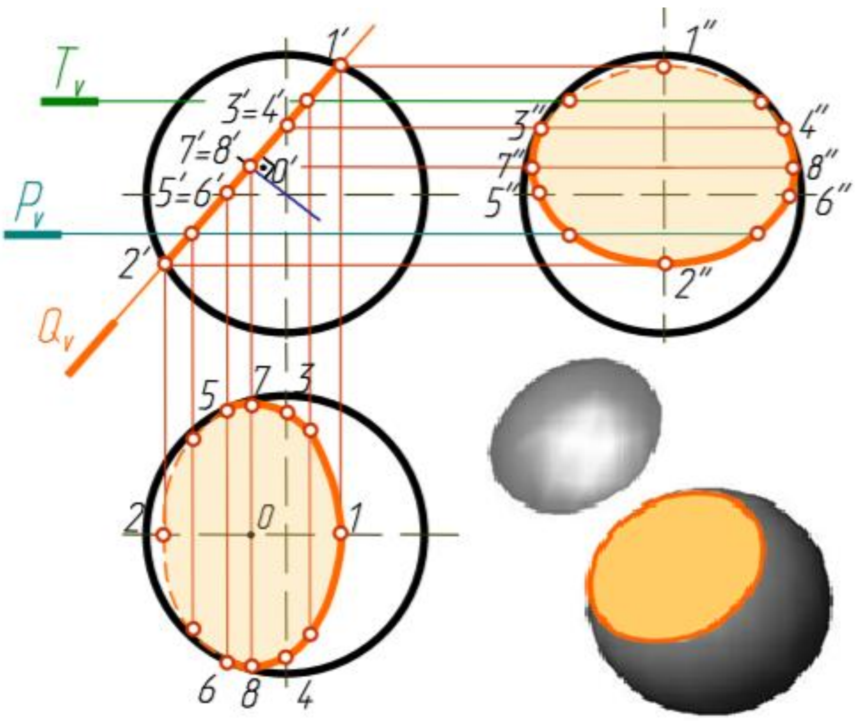


Рис. 8.1.

Побудову еліпса починаємо з опорних точок. Точки ***1*** та ***2*** належать великої осі еліпса у яку проєціюється круг. Знайдемо малу вісь еліпса. Ділимо ***1′2′*** навпіл та отримуємо точку ***7′≡8′***, які належить паралелі, радіус якої

дорівнюється відстані від осі обертання до фронтального меридіану сфери. Знайдемо горизонтальні проєкції точок ***7*** та ***8***.

8.2. Перерізи конічних поверхонь

На рис. 8.2 показано можливі випадки перерізів прямого кругового конуса січною площиною. При цьому можуть бути такі фігури перерізу:

- коло – січна площина перпендикулярна до осі обертання конуса (рис. 8.2, а);

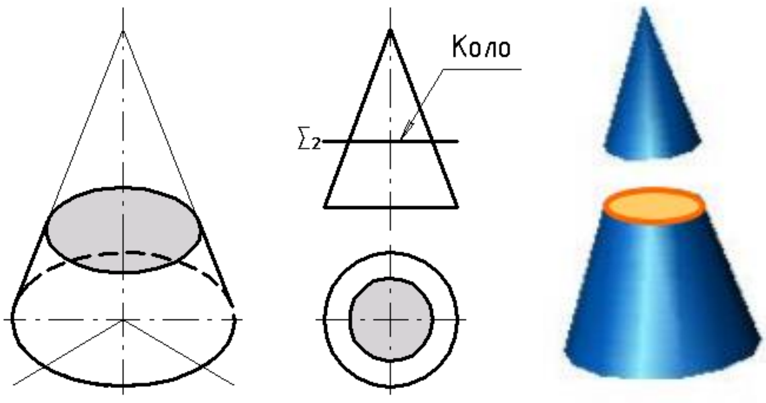


Рис. 8.2. (а)

- прямі лінії (твірні) – січна площина проходить через вершину (рис. 8.2, б);

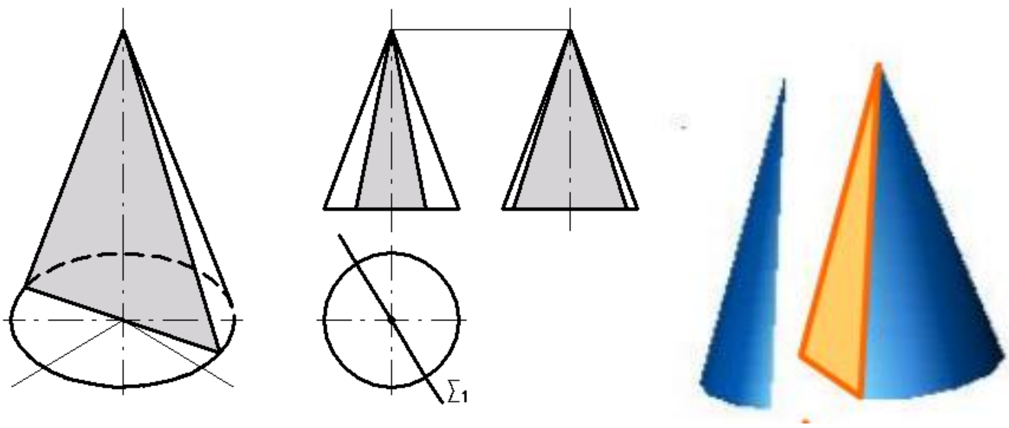


Рис. 8.2. (б)

- еліпс – січна площина перетинає всі твірні бічної поверхні (рис. 8.2, в);

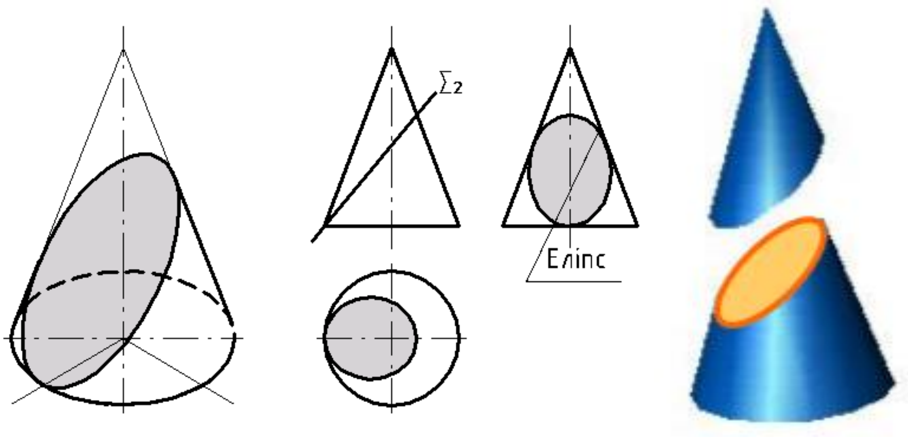


Рис. 8.2. (в)

- парабола – січна площина паралельна одній з твірним бічної поверхні (рис. 8.2, г)

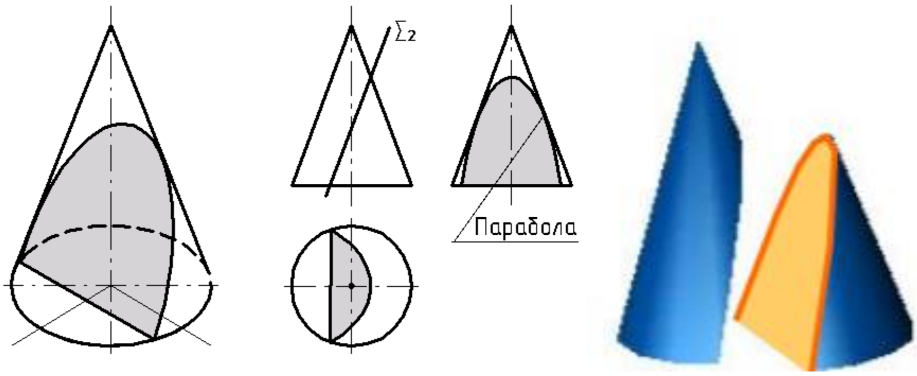


Рис. 8.2. (г)

- гіпербола – січна площина паралельна двом твірним бічної поверхні (рис. 8.2, д).

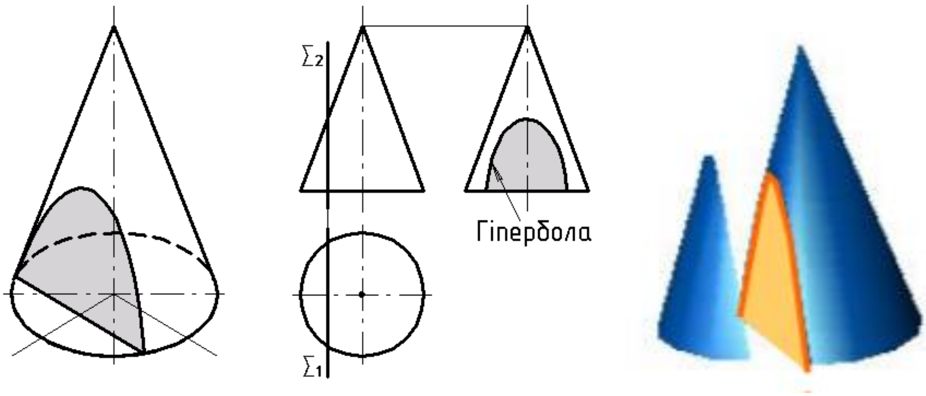


Рис. 8.2.(д)

Розглянемо приклад побудови переріза прямого кругового конуса фронтально-проєціюючою площиною (рис. 8.3). Січна площина перетинає всі твірні бічної поверхні.

Побудуємо проєкцію фігури перерізу. Площина $\boldsymbol{P_V}$ фронтально-проєціююча та на ***V*** вона проєціюється прямою (слід-проєкція площини ***P***). Фронтальна проєкція еліпса збігається зі слідом – проєкцією $\boldsymbol{P_V}$. Для побудови еліпса на ***H*** виділяємо точки на твірних бічної поверхні конуса ***1′***, ***2′*** та проєціюємо їх на ***H*** – велика вісь еліпса. Ділимо ***1′2′*** навпіл і отримуємо точки ***3′≡4′***. Через точки ***3′***, ***4′*** проводимо пряму паралельну основі конуса. Проєкція на ***H*** цієї прямої є коло. Радіус кола ***r*** дорівнюється відстані до осі обертання конуса. На ***H*** проводимо коло цього радіуса та на нього проєціюємо точки ***1*** та ***2***. ***1***, ***2*** – мала вісь еліпса (рис. 8.3).

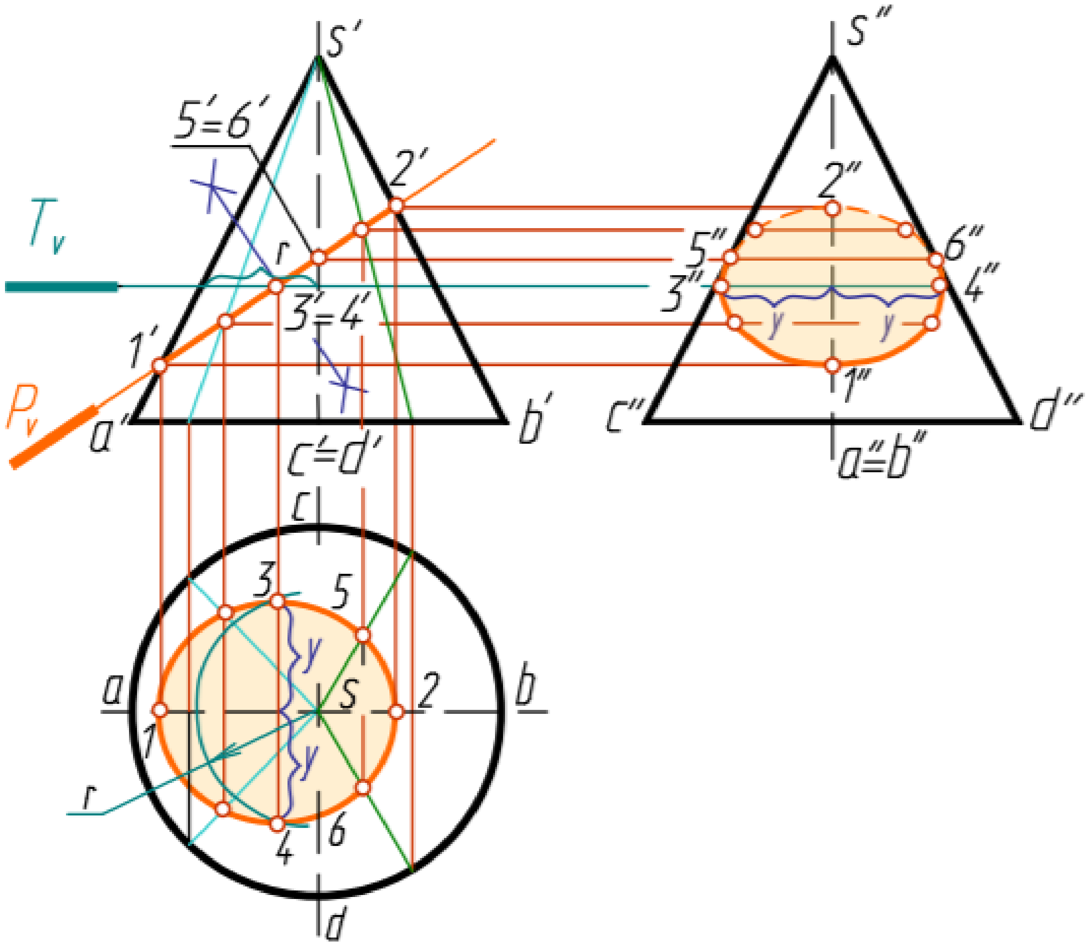


Рис. 8.3.

8.3. Перерізи циліндричних поверхонь

На рис. 8.4 показано можливі випадки перерізів прямого кругового циліндра січною площиною.

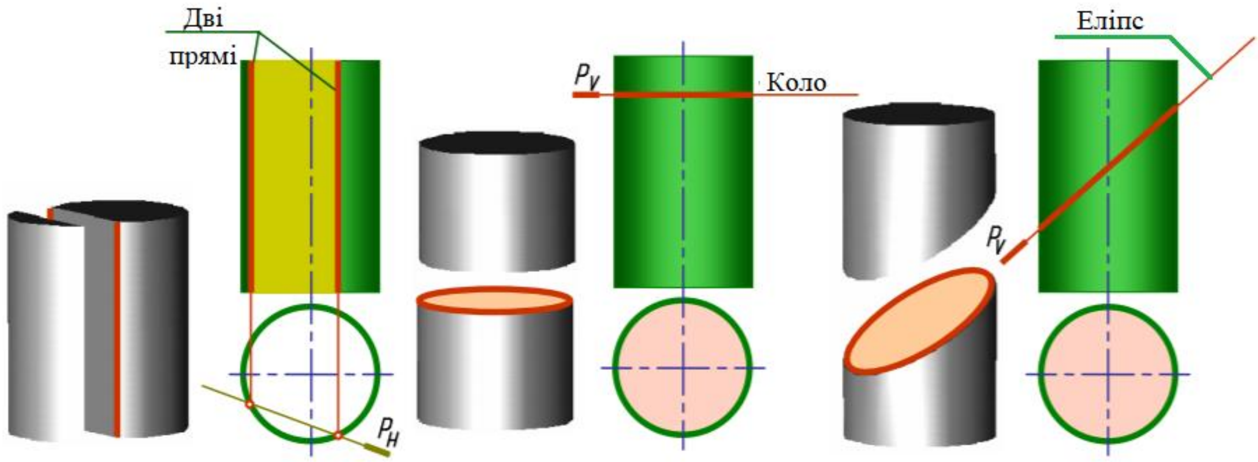


Рис. 8.4.

Переріз прямого кругового циліндра площиною загального положення (рис. 8.5).

Січна площина ***P***, похила до циліндра, перетинає всі його твірні, тому в перерізі буде еліпс. Горизонтальна проєкція еліпса проєкціюється в коло, яке збігається з горизонтальною проєкцією циліндра. Для побудови фігури перерізу необхідно знайти ряд точок, які одночасно належать і поверхні циліндра, і площині ***P***.

Почнемо з визначення опорних точок. Для побудови найвищої і найнижчої точок через ось циліндра проводимо горизонтально-проєкційну площину **Q**, перпендикулярну до горизонтального сліду площини ***P***. Площина **Q** перетинає циліндр по твірних, а площину ***P*** по лінії схилу ***MN***. У перетині проєкцій твірних циліндра та лінії схилу у фронтальній площині проєкцій визначаємо найвищу і найнижчу точки ***1'*** та ***2'***, за допомогою ліній зв'язку знаходимо їх горизонтальні проєкції ***1*** й ***2***. Для побудови точок, які знаходяться на контурних твірних циліндра, через ось проводимо фронтальну площину рівня ***S***. Ця площина перетинає площину ***P*** по фронталі, а циліндр – по лівій і правій твірних у точках

3 та ***4***. Для побудови точок ***5*** та ***6***, які знаходяться на найближчій й найвіддаленішій твірних проводимо фронтальні площини рівня. Ці площини дотичні до циліндра, що дає можливість визначити по одній точці для кривої. Для побудови проміжних точок можна скористатися або горизонтальними, або фронтальними, або горизонтально-проєкційними площинами, тобто такими, які у перерізі з циліндром утворюють найпростіші фігури – кола, прямі лінії, а з січною площиною – прямі. Отримані точки сполучаємо плавною кривою лінією.

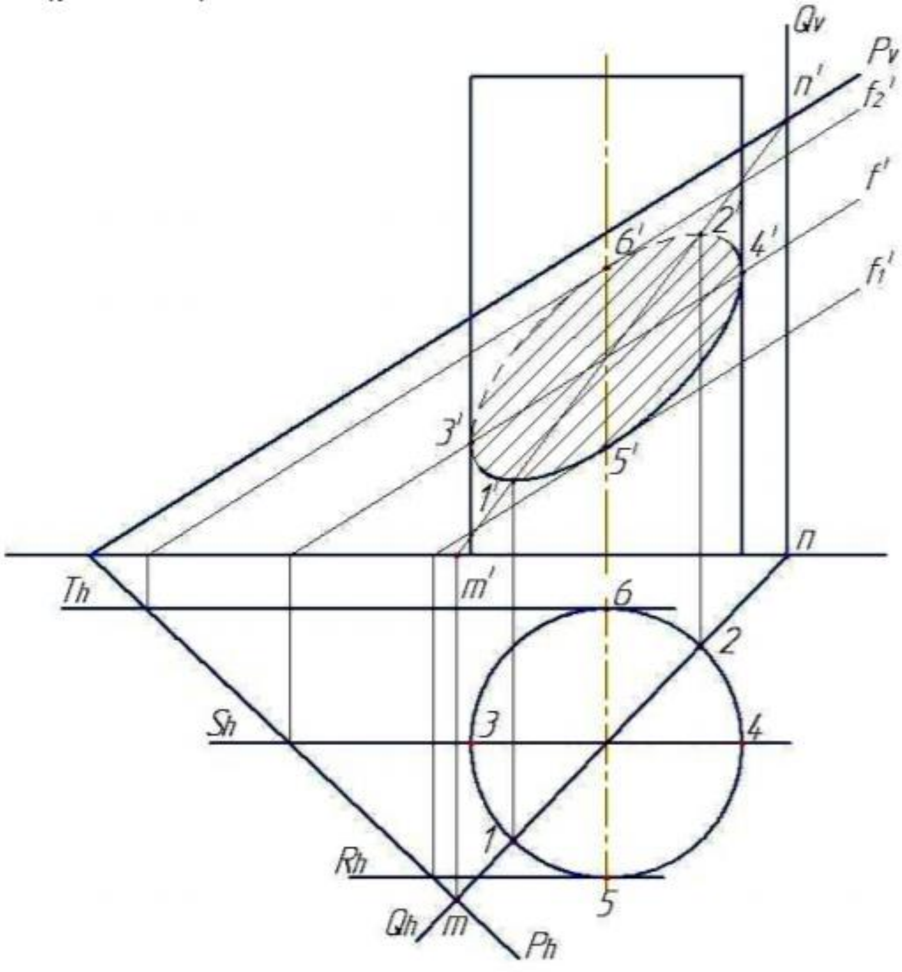


Рис. 8.5.

Переріз прямого кругового циліндра фронтально-пороекціюючою площиною (рис. 8.6).

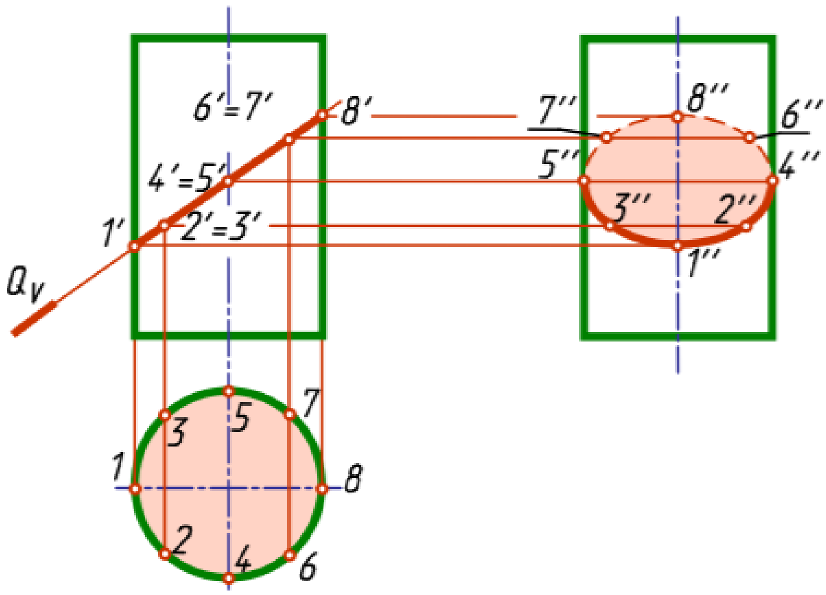


Рис. 8.6.

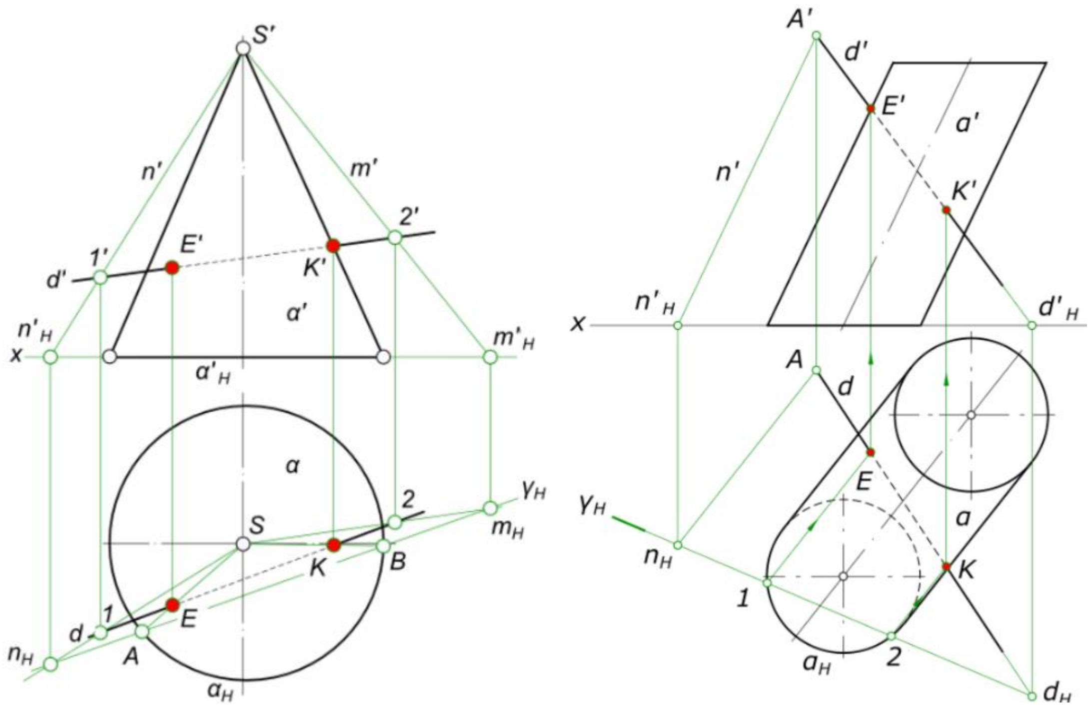
8.4. Перетин прямої й поверхні

Пряма перетинає поверхню у двох її точках. Для того, щоб знайти точки перетину прямої з поверхнею (призми, піраміди, конуса, циліндра тощо) діють так же як у випадку знаходження точки перетину прямої й площини, а саме: через пряму проводимо допоміжну січну площину і знаходимо лінію перерізу із січною площиною. Перетин лінії перерізу поверхні з однойменною проєкцією прямої, дає шукані точки перетину прямої й поверхні.

Допоміжну площину, яка проводиться через пряму при перетині нею будь-якої поверхні, слід обирати так, щоб утворювалися прості перетини.

Побудувати точки перетину прямої d з конусом (рис. 8.7, а). Для побудови точок перетину прямої і конуса доцільно використати допоміжну площину, яка проходила б через вершину конуса і перетинала б поверхню по прямих лініях. Задаємо фронтальну проєкцію площини ***n'S'm'***, яка визначається вершиною конуса і проходить через задану пряму ***d'*** (точки ***1'*** та ***2'*** взяті довільно). Перетин лінії перерізу поверхні конуса ***ABC*** з проєкцією прямої ***d***, дає шукані точки перетину прямої й поверхні ***E*** та ***K***.

Для визначення точок перетину прямої з поверхнею еліптичного циліндра (похилого), через пряму проводимо допоміжну січну площину загального положення, яка завдана двома пересічними прямими – одна пряма завдана, а друга, паралельна твірній циліндра. Січна площина перерізає поверхню циліндра по чотирикутнику. (рис. 8.7, б).



а) б)

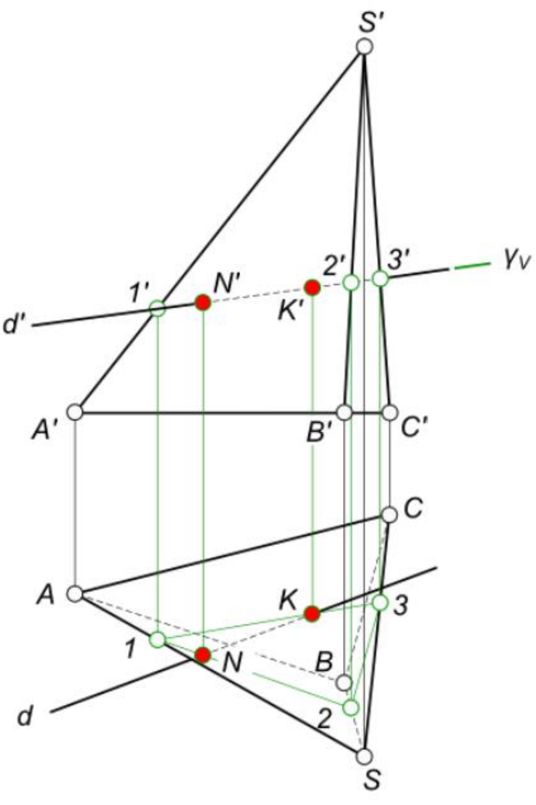
Рис.8.7.

Площина основ циліндра розташована у площині ***H***, тобто на ***H*** вони спроєціювались своїм горизонтальним слідом. Перетин горизонтальних проєкцій слідів січної площини, та основи поверхні дає точки, із яких будується чотирикутник перерізу поверхні січною площиною. Перетин однойменних проєкцій чотирикутника з прямою дає точки перетину прямою з поверхнею ***E*** та ***K***.

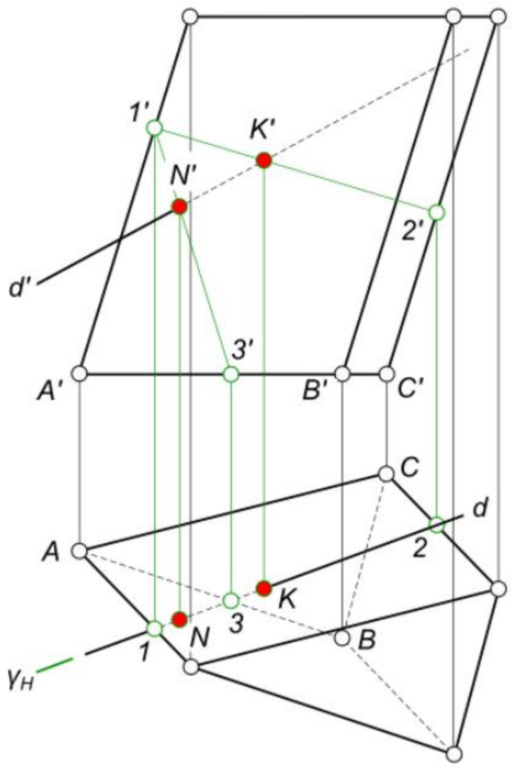
Якщо пряма, або поверхня, які перетинаються, займають у просторі часткове положення, то точка їх перетину збігається зі слідом – проєкцій проєціюючої прямої, або поверхні.

Приклад визначення точок перетину прямої ***d*** з поверхнею піраміди приведений на рис. 8.8 (а). Через пряму проводимо допоміжну січну площину (фронтально – проєціюючу) $\boldsymbol{Y_V}$. Площина $\boldsymbol{Y_V}$ перерізає піраміду по трикутнику. Перетин горизонтальної проєкції трикутника ***123*** із горизонтальною проєкцією прямої ***d*** дає точки перетину ***K***, ***N***.

Приклад визначення точок перетину прямої ***d*** з поверхнею призми приведений на рис. 8.8 (б). Через пряму проводимо допоміжну січну площину (горизонтально – проєціюючу) $\boldsymbol{Y_H}$. Площина $\boldsymbol{Y_H}$ перерізає призму по лінії ***123***. Перетин фронтальної проєкції ***1'2'3'*** із фронтальною проєкцією прямої ***d'*** дає точки перетину ***K'***, ***N'***.



а)



б)

Рис. 8.8.

Приклади перетину поверхонь наведені на рис. 8.9.

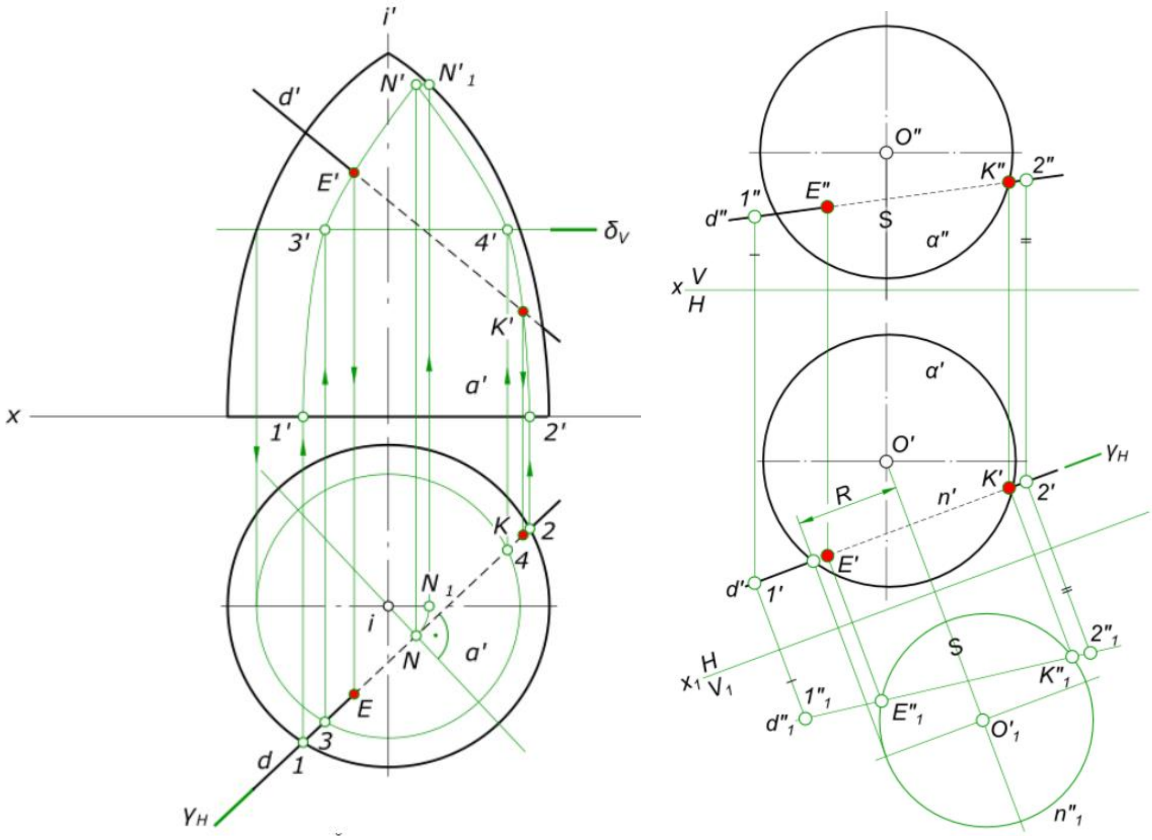


Рис. 8.9.

Запитання для самоконтролю

1. Якщо пряма чи поверхня, що перетинаються, займають у просторі проєціююче положення, як визначаємо точки їх перетину?
2. Які площини – посередники застосовуються для визначення точок перетину прямої і поверхні?
3. Покажіть графічно, як побудувати точки перетину прямої з конусом та похилим циліндром.
4. Яку назву має фігура перетину поверхні площиною.
5. Перелічити можливі випадки перерізів прямого кругового конуса.
6. З яких точок розпочинають побудову проєкцій фігури перерізу?
7. При перетині прямого кругового конуса площиною загального положення, як знаходять особливі точки фігури переріза?
8. Які способи використовують для знаходження точок, які належать лінії перерізу поверхні площиною?

9. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

9.1. Взаємний перетин кривих поверхонь

При перетині поверхонь двох тіл може утворюватися складна просторова, навіть багатоланкова лінія, що на кресленні будується за точками.

Загальним способом побудови лінії перетину однієї поверхні другою є побудова точок цієї лінії за допомогою січних площин, або поверхонь (рис. 9.1).

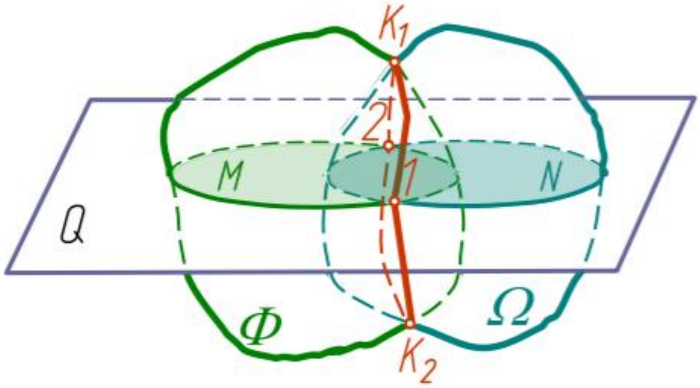


Рис. 9.1.

Застосовуючи загальні способи для побудови лінії перетину кривих поверхонь ми можемо:

1) перетинати поверхні допоміжними площинами;

2) перетинати поверхні допоміжними кривими поверхнями (наприклад, сферами);

В де яких випадках при рішенні задач комбінуємо застосування допоміжних площин і кривих поверхонь. Необхідно по можливості підбирати такі допоміжні площини, або поверхні, які дають прості для побудови лінії (прямі та кола).

В загальному випадку допоміжні січні площини застосовують і для побудови лінії перетину кривої поверхні з гранню.

Точки лінії перетину поверхонь повинні не виходити за межу площин накладання проєкцій завданих поверхонь.

Рішення задач розпочинаємо з побудови особливих точок (найвища, найнижча, точки, які належать контурним твірним, точок переходу від видимої до невидимої частини твірної).

Розглянемо приклади задач на визначення лінії перетину двох поверхонь на рис. 9.2. Перетинаються сфера та прямий конус.

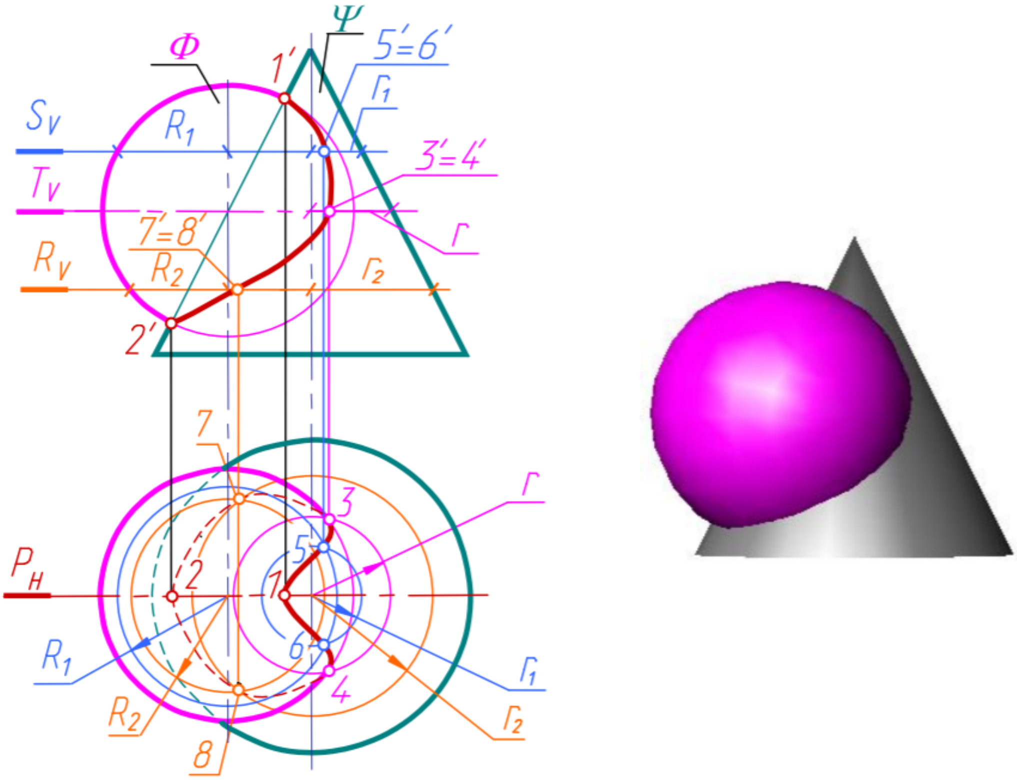


Рис. 9.2.

Для побудови лінії перетину заданих поверхонь доцільно використати серію допоміжних горизонтальних площин, перпендикулярних до осі конуса, які перетинають сферу і конус по колах. На перетині цих кіл визначають точки шуканої лінії. Побудову починають з визначення опорних точок. Для цього через осі конуса і сфери проводять фронтальну площину рівня ***P*** (***P***$_H$), яка перетинає конус по контурних твірних, а сферу по максимальному діаметру. У перетині фронтальних проєкцій контурних твірних конуса і максимального діаметру сфери отримуємо точки ***1′*** та ***2′***. Горизонтальні проєкції цих точок розміщені на горизонтальному сліді площини $\boldsymbol{P_H}$. Проєкції ***3′***, ***3*** та ***4′***, ***4***, що лежать на екваторі сфери, знаходимо за допомогою горизонтальної площини рівня ***T*** (***Tv***), яка

проходить через центр сфери. Вона перетинає сферу по екватору, а конус по колу радіуса ***r***. У перетині їх горизонтальних проєкцій знаходимо горизонтальні проєкції ***3***, ***4*** точок шуканої лінії перетину. Ці точки – точки видимості, вони розділяють горизонтальну проєкцію лінії перетину на видиму і невидиму частини. Проєкції проміжних точок ***5***, ***5′*** та ***6***, ***6′***; ***7***, ***7′*** та ***8***, ***8′*** знаходимо за допомогою допоміжних горизонтальних площин ***S*** (***Sv***) та ***R*** (***Rv***). Аналогічно побудовані інші точки. Сполучивши однойменні проєкції побудованих точок плавною лінією, отримаємо проєкції ліній перетину. У фронтальній площині проєкцій видима і невидима частини лінії перетину будуть збігатися.

Приклад побудови лінії перетину двох поверхонь напівсфери і циліндра розглянемо на рис. 9.3. При перетині поверхонь утворюється просторова лінія, яка будується за точками. Циліндр на горизонтальній проєкції ***H*** спроєціювався колом, тому що його вісь і твірні перпендикулярні горизонтальній площині проєкцій. Лінією перетину на ***H*** є коло. Для побудови лінії перетину заданих поверхонь доцільно використати серію допоміжних фронтальних площин, які перетинають напівсферу по колах, а циліндр по прямим.

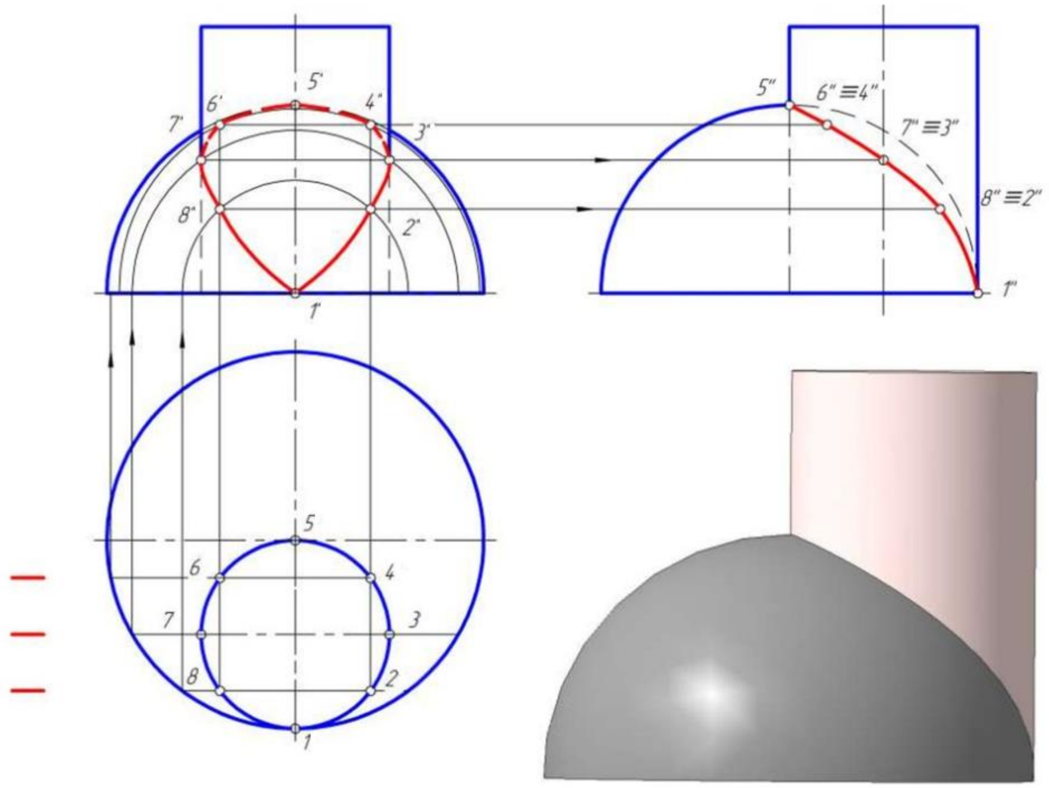


Рис. 9.3.

9.2. Побудова лінії перетину поверхонь за допомогою кривих поверхонь (сфер)

Використання допоміжних сфер для побудови точок перетину двох поверхонь доцільно, коли перетинаються:

1). дві поверхні обертання, які мають спільну площину симетрії;

2). осі поверхонь пересічні прямі.

Точка перетину осей буде центром $\boldsymbol{O}$, із якого проводимо допоміжні сфери $\boldsymbol{R}$ (метод концентричних сфер) (рис. 9.4).

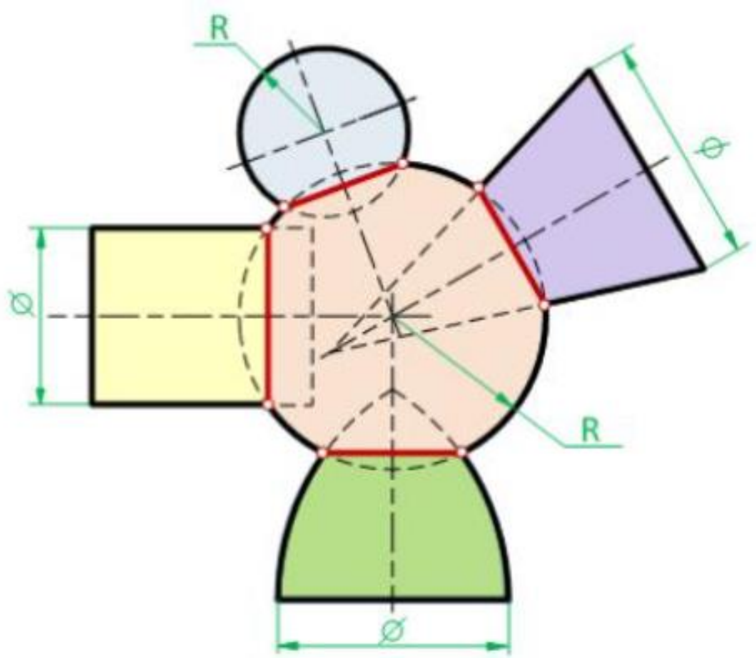


Рис. 9.4.

Поверхні конусів мають спільну площину симетрії тому перетин їх фронтальних контурних твірних дає нам дві точки перетину. Мінімальний радіус вписаної сфери дорівнюється відстані центру до твірної, виміряне по перпендикуляру до твірної більшого з, перетинаючих конусів. Сфера з конусами співвісна – має спільну вісь обертання. Співвісні поверхні перетинаються по колах, перпендикулярних до спільної осі обертання. Їх, число дорівнює кількість точок перетину твірних, що лежать у меридільній площині по один бік від осі

обертання. Вісь обертання паралельна площині ***V***, тому на неї кола проєціюються прямими лініями.

На рис. 9.5 наведено приклад побудови лінії перетину поверхонь методом концентричних сфер.

Побудувати лінії перетину двох конусів (рис. 9.5). Побудову починаємо з визначення проєкцій опорних точок. Для цього через осі конусів проводимо фронтальну площину рівня ***P***, яка перетинає конуси по контурних твірних у фронтальній площині проєкцій. У перетині фронтальних проєкцій твірних отримуємо точки ***K'***, ***F'***, ***E'***, ***G'***. Горизонтальні проєкції цих точок розміщені на горизонтальному сліді площини ***P***.

Для побудови проєкцій точок ***1, 2*** та ***3***, ***4*** визначаємо мінімальний радіус ефективної сфери. Для цього через ***O'*** проводимо перпендикуляри до обрисових твірних заданих поверхонь. Більший із побудованих перпендикулярів та буде $\boldsymbol{R_{min}}$ ефективної найменшої сфери (***O'H'***). Така сфера буде дотикатися до однієї з поверхонь по колу діаметром ***P'H'***, а з другою поверхнею буде перетинатися по колах діаметрами ***T'L'*** та ***M'N'***. У нашому випадку мінімальна ефективна сфера дотикається до поверхні одного конуса й перетинає поверхню другого. Кола діаметрами ***T'L'*** та ***M'N*** перетинаються з колом діаметром ***P'H'*** та утворюють точки ***1'***, ***2'*** та ***3'***, ***4'***. Для подальшої побудови визначаємо $\boldsymbol{R_{max}}$– радіус найбільшої ефективної сфери як вістань від центра сфер ***O'*** до найвіддаленішої точки перетину обрисових твірних. Згідно з умовами нашої задачі $\boldsymbol{R_{max}=O'G'}$. Найменша і найбільша ефективні сфери є граничними при виборі проміжних сфер. Для побудови положень проміжних точок проводимо довільну сферу з центром у точці ***O*** і радіусом $\boldsymbol{R_{min} < R < R_{max}}$. Така сфера перерізає поверхню першого конуса по колу діаметром ***W'U'***, а поверхню другого конуса – по колу діаметром ***Q'V'***. Точки перетину цих кіл і є шуканими точками ***5'***, ***6'***. Будуючи горизонтальну проєкцію лінії взаємного перетину заданих поверхонь обертання використовуємо відому побудову, яка дозволяє за відомою фронтальною проєкцією точки, що лежить на одній з поверхонь обертання, визначити її

горизонтальне положення. Для побудови горизонтальних проєкцій точок ***1*** та ***2*** будуємо горизонтальну проєкцію кола ***TL***, провівши вертикальну лінію проєкційного зв'язку через ***1′ = 2′*** до перетину з нею, отримуємо ***1*** та ***2***. Аналогічно отримуємо горизонтальні проєкції всіх необхідних точок. З'єднаємо побудовані проєкції характерних і проміжних точок плавними кривими лініями й отримуємо шукані проєкції лінії взаємного перетину заданих тіл обертання.

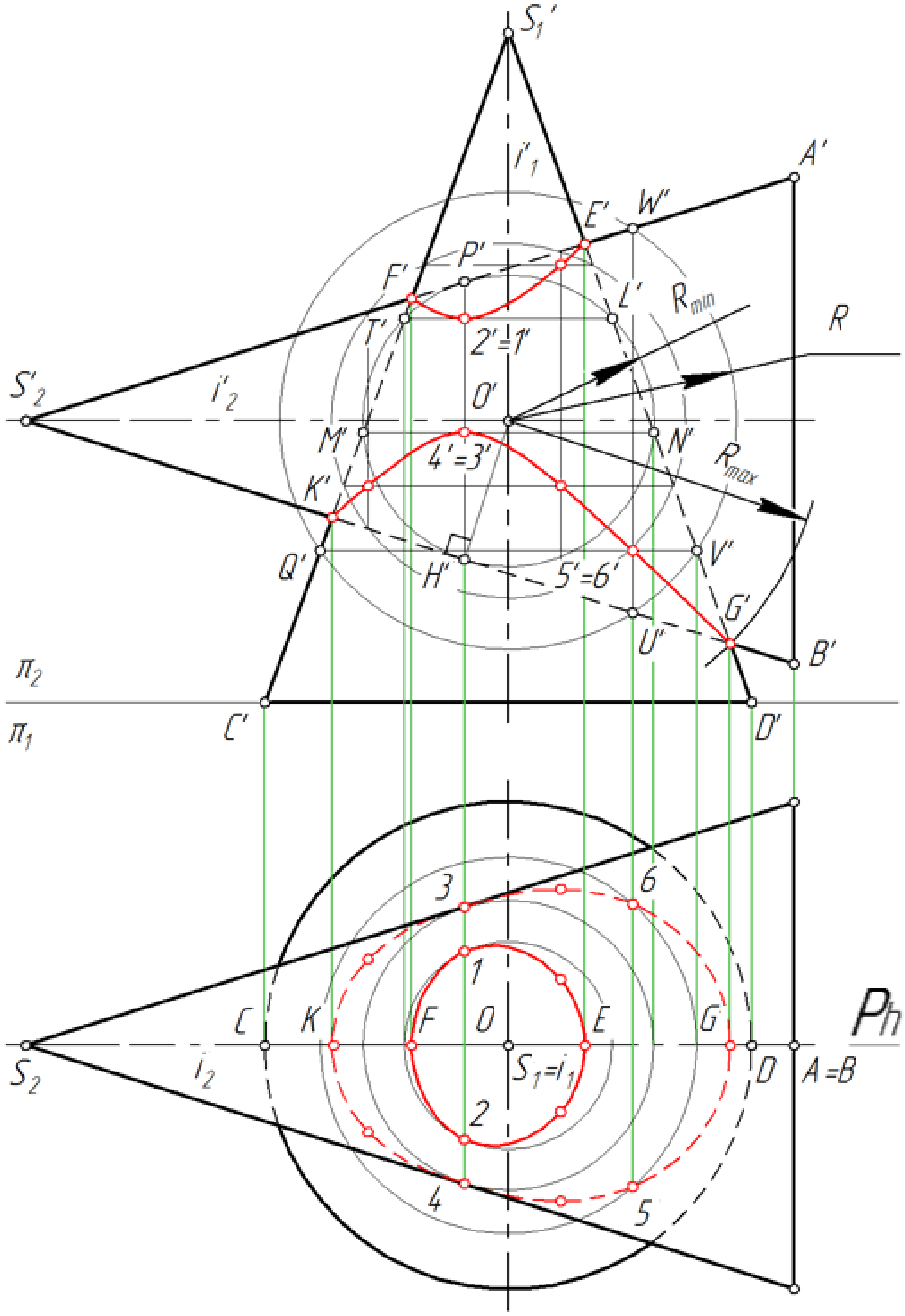


Рис. 9.5.

Ексцентричні сфери, як допоміжні, тобто сфери проведені з різних центрів (рис. 9.6), розташованих на осі обертання поверхні застосовують у випадках:

1). Перетинаються дві поверхні, які мають спільну площину симетрії.

2). Обидві поверхні обертання, або одна поверхня обертання, а друга має кругові перерізи.

3). Осі поверхонь є прямі рівня, або проєціюючи прямі.

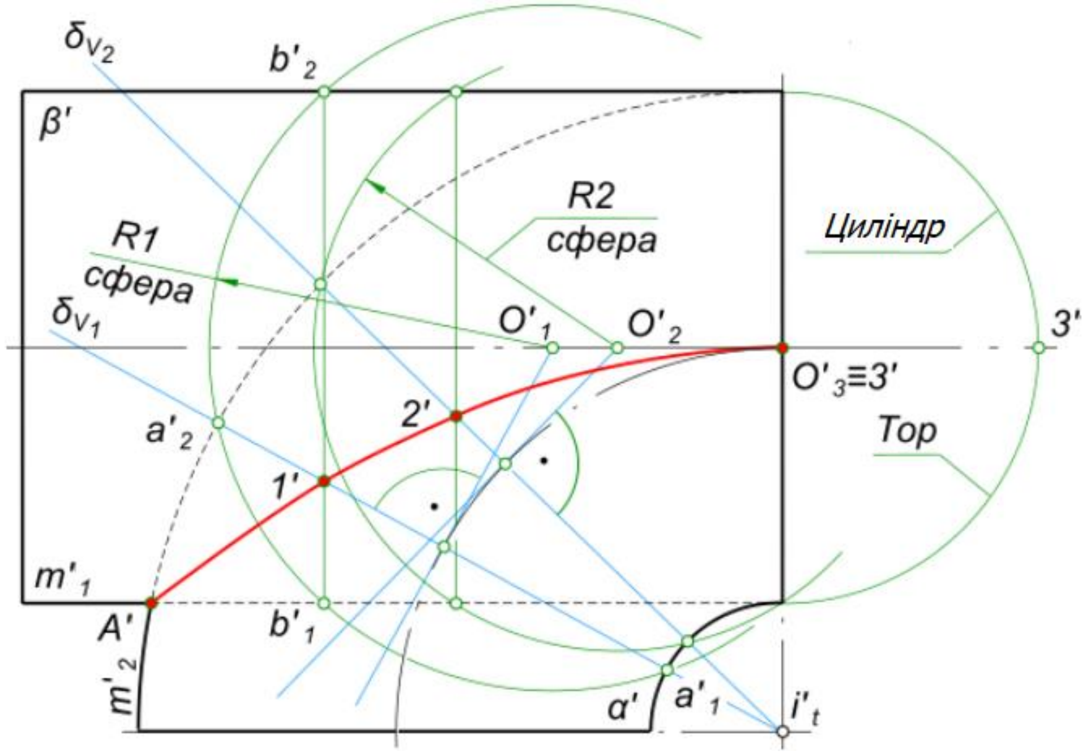


Рис. 9.6.

На рис. 9.7 показано приклад побудови лінії перетину довільних поверхонь обертання.

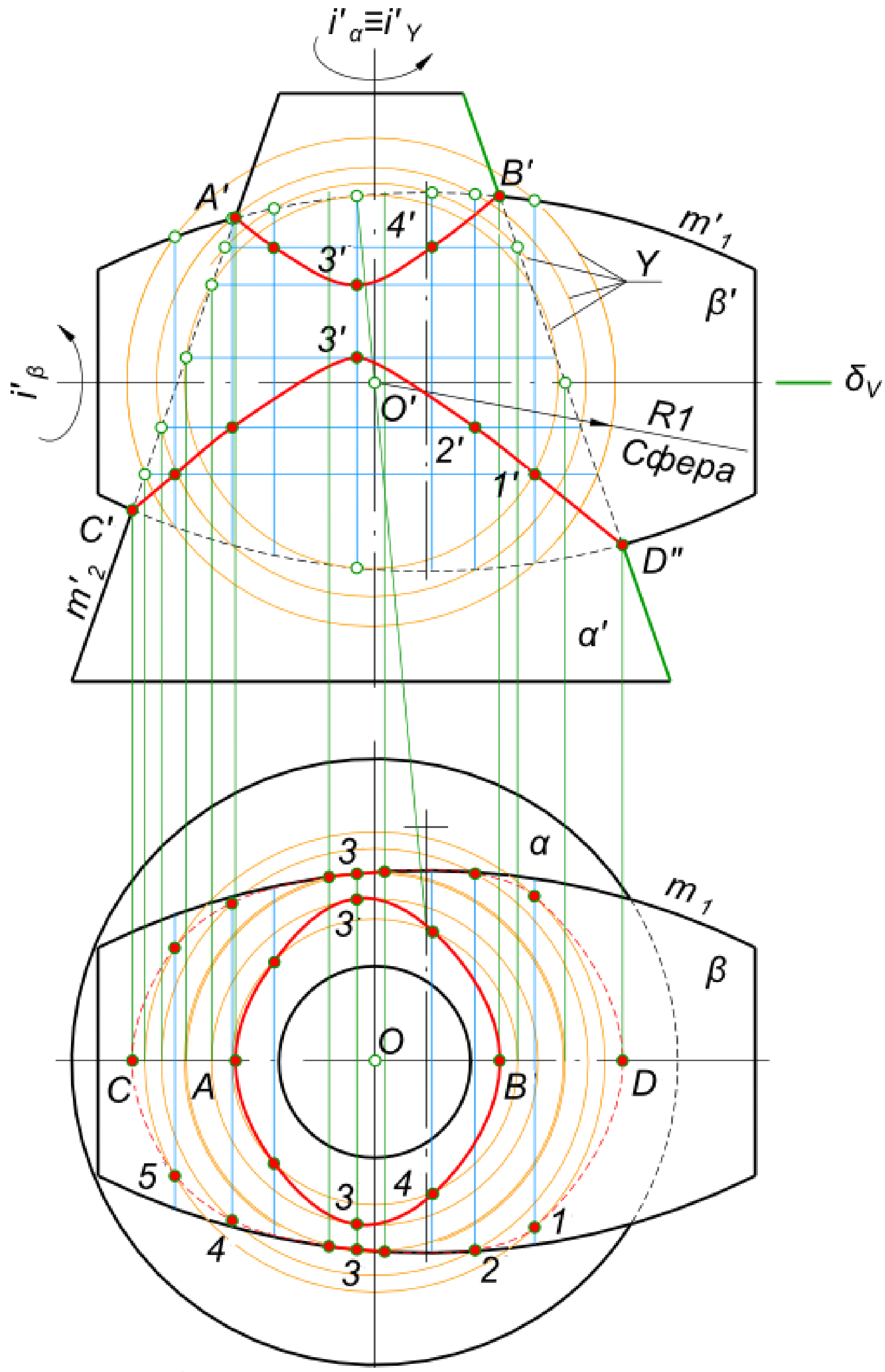


Рис. 9.7.

На рис. 9.8 показано приклад побудови лінії перетину циліндричних поверхонь. Обидві поверхні – поверхні обертання. Осі поверхонь перетинаються. Загальна площина симетрії паралельна будь-якої площини проєкцій. Точку перетину осей обертання приймають за центр концентричних сферичних поверхонь і проводять ряд сфер, які перетинають обидві поверхні. Знаходимо

опорні точки – вища і нижча точки лінії перетину. Для побудови проміжних точок проводиться ряд концентричних сфер, центри яких, будуть лежати в точці перетину осей заданих циліндрів. Найменшою сферичної поверхнею тут буде поверхня, яка вписана в вертикальний циліндр. У перетині контурів одержуваних кіл знаходять спільні для двох поверхонь точки. Сфера найбільшого радіуса не повинна виходити за найбільш віддалену точку перетину циліндрів. Проміжні сфери будуються довільними радіусами і повинні розташовуватися між найменшою і найбільшою допоміжними сферами.

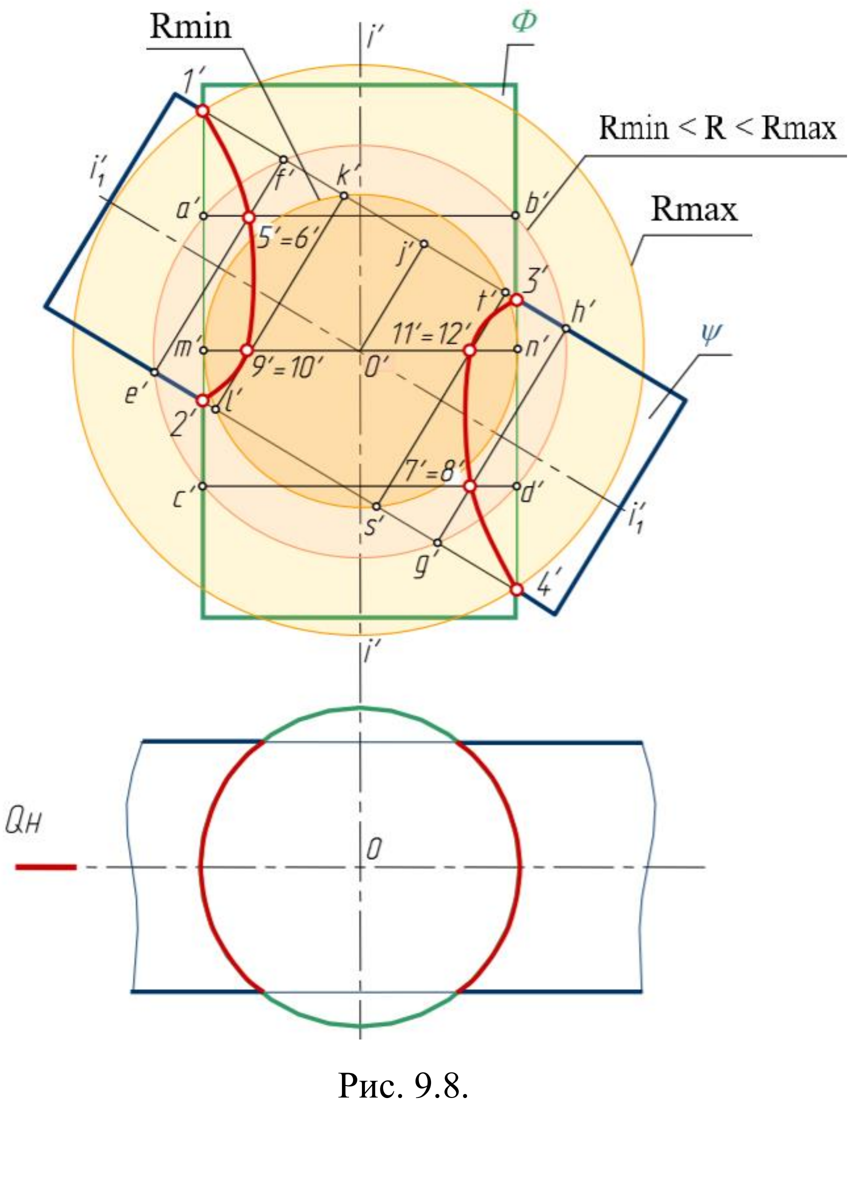


Рис. 9.8.

9.3. Побудова лінії перетину поверхонь за допомогою площин загального положення

На рис. 9.9, 9.10 приведено приклад побудови лінії перетину еліптичних циліндра та конуса. Допоміжними січними площинами є площини загального положення, які перерізають конус по трикутнику, а циліндр по чотирикутнику.

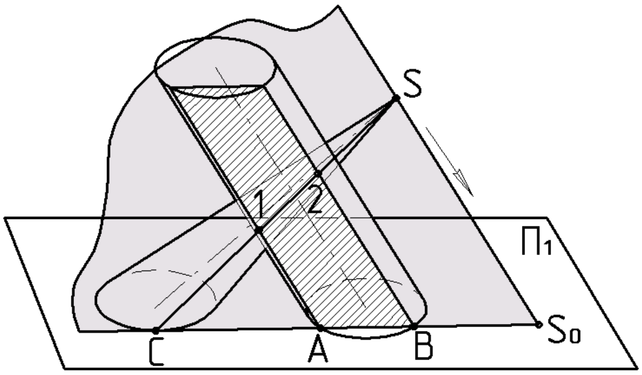


Рис. 9.9.

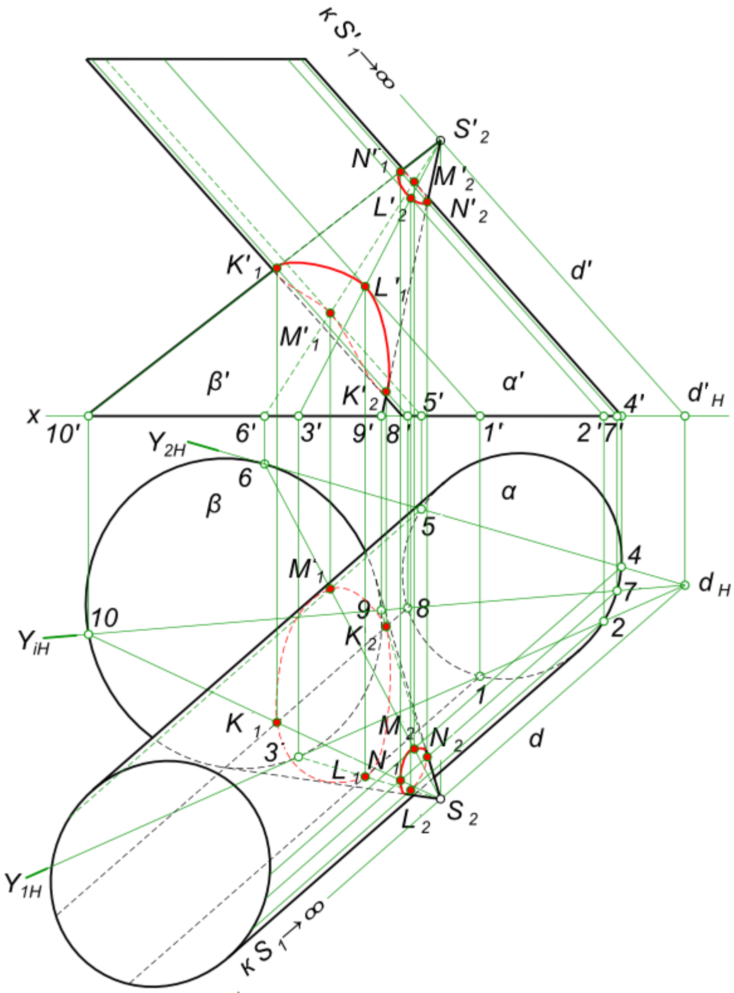


Рис. 9.10.

Допоміжну січну площину задаємо двома пересічними прямими одна з них проходе через вершину $\boldsymbol{S}$ конуса і паралельна твірній циліндра, а друга пряма горизонтального рівня, яка належить площині $\boldsymbol{\Pi_1}$. Знайдемо горизонтальний слід прямої $\boldsymbol{m}$. Через горизонтальну проєкцію $\boldsymbol{H}$ проводимо січні площини, дотичні до основи конусу – визначаємо, що конус перетинає циліндр по двом просторовим кривим.

9.4. Часткові випадки перетинання поверхонь

Серед множин кривих поверхонь, що перетинаються, великого практичного значення набувають поверхні другого порядку. Як відомо, лінія перетину поверхонь у загальному випадку буде алгебраїчна крива четвертого порядку, яка отримала назву біквадратної. При певному рохташуванні та відносинах між поверхнями другого порядку може статися, що біквадратна крива буде розпадатися або на чотири лінії першого порядку, або на дві криві другого порядку, або на пряму і криву третього порядку.

У деяких випадках криві лінії, на які розпадається лінія перетину поверхонь другого порядку, можуть збігатися або взагалі буди уявними. Аналіз прикладів свідчить про велику різноманітність форм біквадратної кривої. Але ознаки її розпаду та властивості можуть бути описані наступними теоремами:

Теорема 1: Якщо дві поверхні другого порядку перетинаються по одній плоскій кривій лінії, то існує ще одна плоска крива, по якій вони перетинаються.

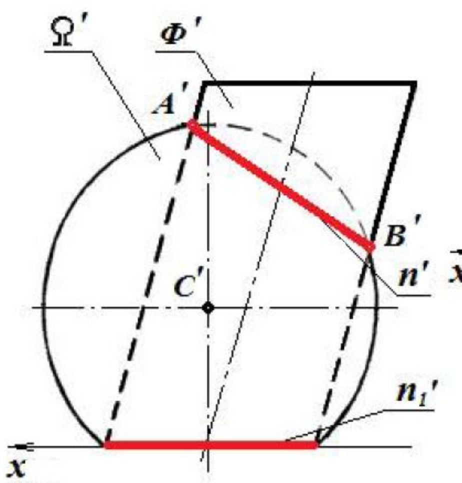
На рис. 9.11 (а) на фронтальній площині надані циліндрична поверхня $\boldsymbol{\Phi}$ та сфера $\boldsymbol{\Omega}$, що перетинаються. Обидві поверхні мають спільне коло $\boldsymbol{n_1'}$. Тоді існує ще одна плоска крива перетину, фронтальна проєкція $\boldsymbol{n'}$, яка проходить через точки $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{B'}$ перетину головних меридіанів поверхонь.

Теорема 2: (подвійний дотик). Дві поверхні другого порядку, які мають дотик в двох своїх спільних точках, перетинаються між собою по двох плоских

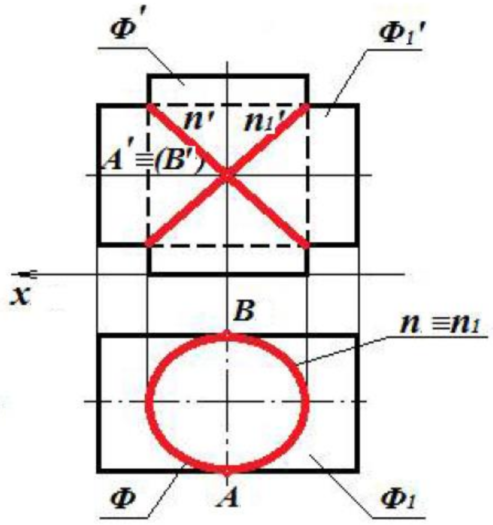
кривих лініях другого порядку, площини яких проходять через відрізок прямої, що з'єднує ці точки.

На рис. 9.11 (б) надані дві циліндричні поверхні ***Φ*** та ***Φ₁***, у яких спільними точками дотику є точки ***A*** та ***B***. Лінія перетину розпалась на два еліпси ***n (n, n')*** та ***n₁ (n₁, n₁')***, що проходять через відрізок ***AB***.

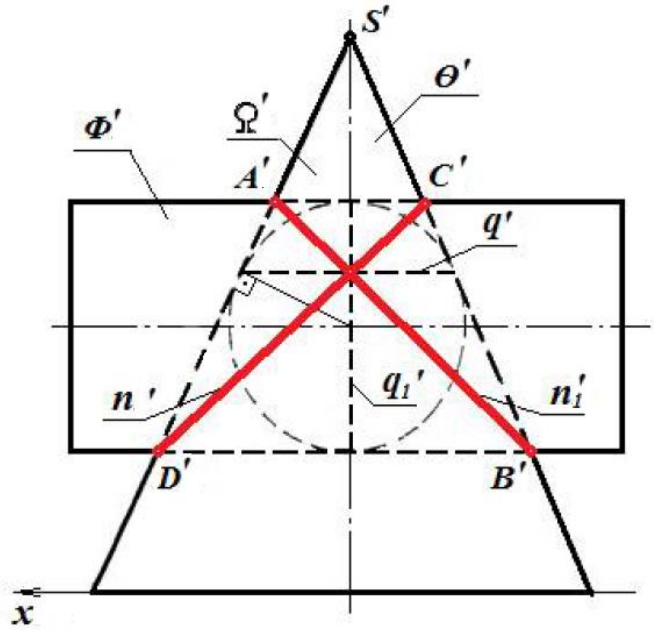
Теорема 3: (теорема Монжа). Якщо дві поверхні другого порядку описані навколо третій поверхні другого порядку (чи вписані в неї), то вони перетинаються по лінії, що розпадається на дві криві другого порядку, причому площини цих кривих ліній проходять через точки перетину ліній дотику.



а)



б)



в)

Рис. 9.11.

На рис. 9.11 (в) на фронтальній площині надані конічна поверхня $\boldsymbol{\Theta}$ та циліндрична поверхня $\boldsymbol{\Phi}$, що перетинаються. Обидві поверхні описані навколо сфери $\boldsymbol{\Omega}$, а лінія перетину розпадається на два еліпси $\boldsymbol{n'}$ та $\boldsymbol{n_1'}$.

На рис. 9.12 наведені приклади застосування теореми Гаспара Монжа у практичній діяльності.

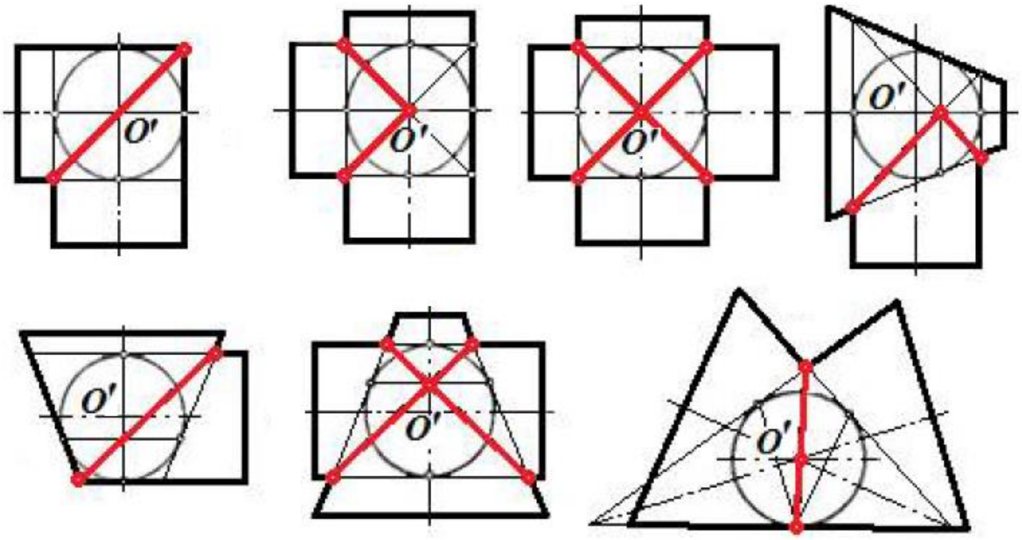


Рис. 9.12.

9.5. Вплив відносин розмірів поверхонь на лінію їх перетину

Вплив відносин розмірів поверхонь на лінію їх перетину представлено на рис. 9.13 та 9.14. Залежність ліній перетину поверхонь обертання від співвідношення між собою їх розмірів розглянемо на прикладі двох циліндрів та циліндра з конусом.

Зміни проєкції лінії перетину вертикального та горизонтального циліндрів в залежності від зміни співвідношення діаметрів $\boldsymbol{d_1}$ вертикального та $\boldsymbol{d_2}$ горизонтального циліндрів показано на рис. 9.13. З наближенням значення діаметру $\boldsymbol{d_1}$ вертикального циліндру до діаметру $\boldsymbol{d_2}$ горизонтального циліндру лінія перетину все більше прогинається вниз. Коли діаметри дорівнюють один одному, виникає перелом, а плавна лінія перетину перетворюється на дві плоскі еліптичні криві, які проєкціюються в два відрізки і площини яких перетинаються

між собою під прямим кутом. При подальшому збільшенні діаметра $\boldsymbol{d_1}$ вертикального циліндра ($\boldsymbol{d_1 > d_2}$) загальний напрям лінії перетину змінюється. Зміни проєкції лінії перетину прямих кругових конуса і циліндра в залежності від кута при вершині конуса показано на рис. 9.14. У випадках (а, б) перетин конуса з циліндром відбувається по лінії 4-го порядку. Вона поділяє конус на дві частини, одна з яких прилягає до вершини, друга – до основи (конус «врізається» в циліндр). У випадку (в) конус і циліндр дотичні до одної сфери і перетинаються по двох плоских перетинних між собою еліптичних кривих 2-го порядку, які проєкціюються у відрізки прямих. У випадку (г) лінії їх перетину розділяють циліндр на дві частини (циліндр «врізається» в конус).

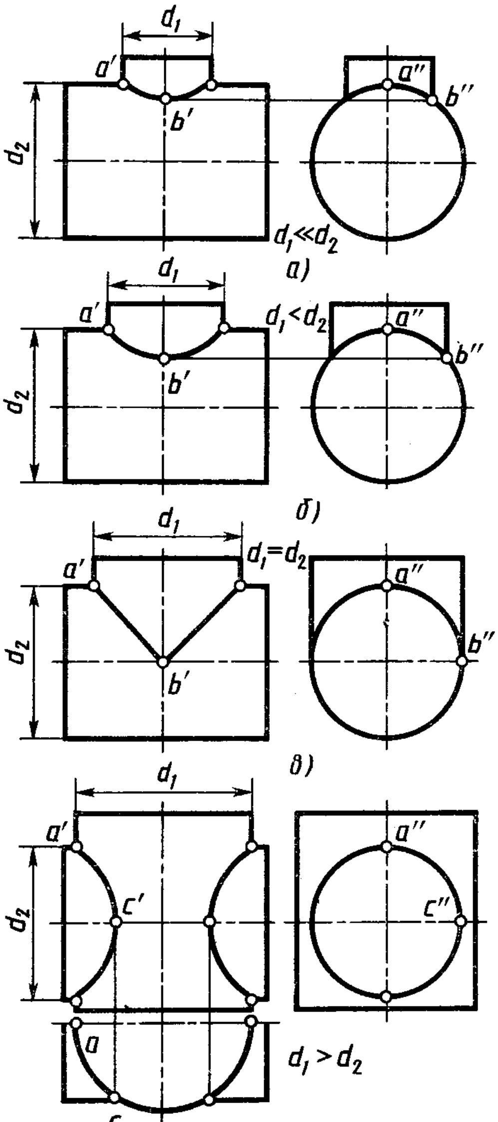


Рис. 9.13.

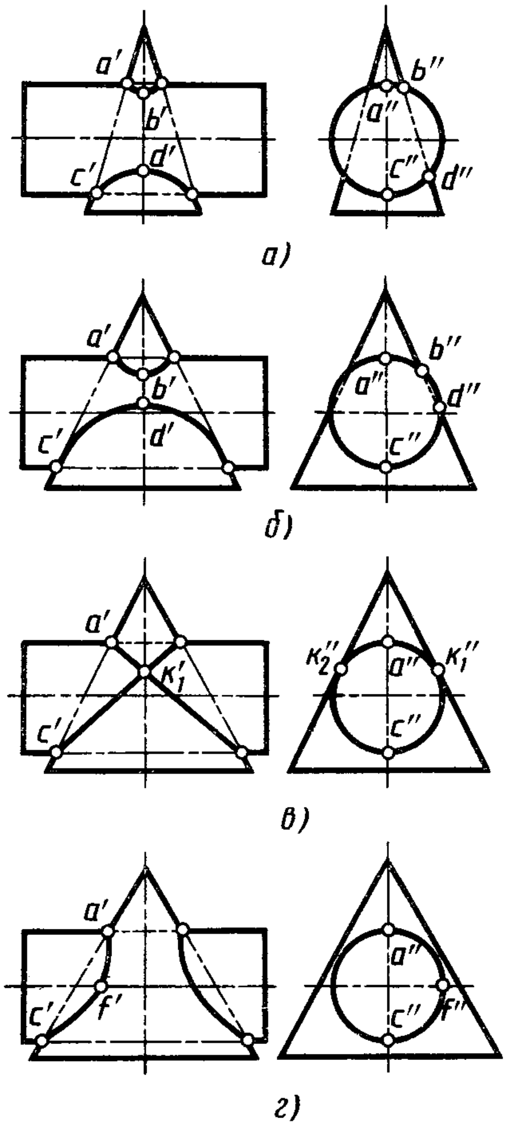


Рис. 9.14.

Запитання для самоконтролю

1. Яка лінія може утворюватися при перетині поверхонь двох тіл.
2. Які площини чи поверхні посередники використовують для побудови лінії перетину поверхонь двох тіл?
3. Які точки лінії перетину поверхонь двох тіл мають назву «особливі»?
4. Яка різниця між врізуванням і проникністю при взаємному перетині поверхонь?
5. В яких випадках для побудови лінії перетину двох поверхонь застосовуємо площини – посередники часткового положення?
6. Назвіть умови для використання сфер як «посередників»?
7. Коли як «посередники» застосовуються площини загального положення?
8. Наведіть приклади часткових випадків перетинання поверхонь.

10. РОЗГОРТКА ПОВЕРХНІ

У різних галузях техніки та будівництва при виготовленні виробів з листового матеріалу часто мають справу з розгортками поверхонь.

Розгортка поверхні – це плоска фігура отримана в результаті суміщення поверхні з площиною.

Між поверхнею та її розгорткою існує взаємно однозначна точкова відповідність: кожній точці поверхні відповідає єдина точка розгортки, кожній лінії на поверхні відповідає лінія на розгортці, і навпаки.

Взаємно однозначна відповідність має такі важливі властивості:

1. Пряма на поверхні переходить у пряму на розгортці.
2. Паралельні прямі на поверхні переходять у паралельні прямі на розгортці.
3. Довжини відповідних ліній на поверхні та розгортці однакові.
4. Кути, утворені лініями поверхні, дорівнюють кутам, що утворюють ці самі лінії на розгортці.
5. Площина розгортки дорівнює площині поверхні; усі розміри на розгортці мають натуральну величину.

Для гранних поверхонь – розгортки точні. Розгортки кривих поверхонь – наближені, оскільки для їх побудови малі частини кривих поверхонь замінюють гранними (апроксимація). У випадках нерозгортних поверхонь можна говорити лише про умовні розгортки.

Існує три способи побудови розгорток:

1. Спосіб нормального перерізу – для побудови розгорток циліндричних і призматичних поверхонь.
2. Спосіб розгортання – для побудови розгорток поверхонь похилих призм і циліндрів у тому випадку, коли їх основи паралельні одній площині проєкцій, а ребра або твірні – іншій.

3. Спосіб трикутників (тріангуляції) – для розгортки конічних, пірамідальних і торсових поверхонь.

10.1. Розгортка поверхні правильної піраміди, прямого конуса

Розгортка багатогранника утворюється суміщенням із площиною всіх його граней. Побудова розгорток поверхні багатогранників складається з визначення натуральної величини граней і побудови на площині в послідовному порядку всіх граней. Розміри граней, якщо вони спроєктовані не в натуральну величину, знаходять способами обертання або зміни площин проєкцій.

Розгортка поверхні правильної піраміди являє собою плоску фігуру, складену з бічних граней – рівнобедрених або рівносторонніх трикутників і правильного багатокутника підстави.

Для прикладу взята правильна шостикутна піраміда (рис. 10.1). Бокова поверхня такої піраміди являє собою шість рівнобедрених трикутники, круговий сектор яких обмежений радіусом, рівним довжині бічних граней піраміди ***l***. На цій дузі відкладають шість відрізків рівних стороні підстави піраміди, яке на кресленні спроєктовано в справжню величину. Знайдені точки з'єднують прямими з точкою $\boldsymbol{S_0}$.

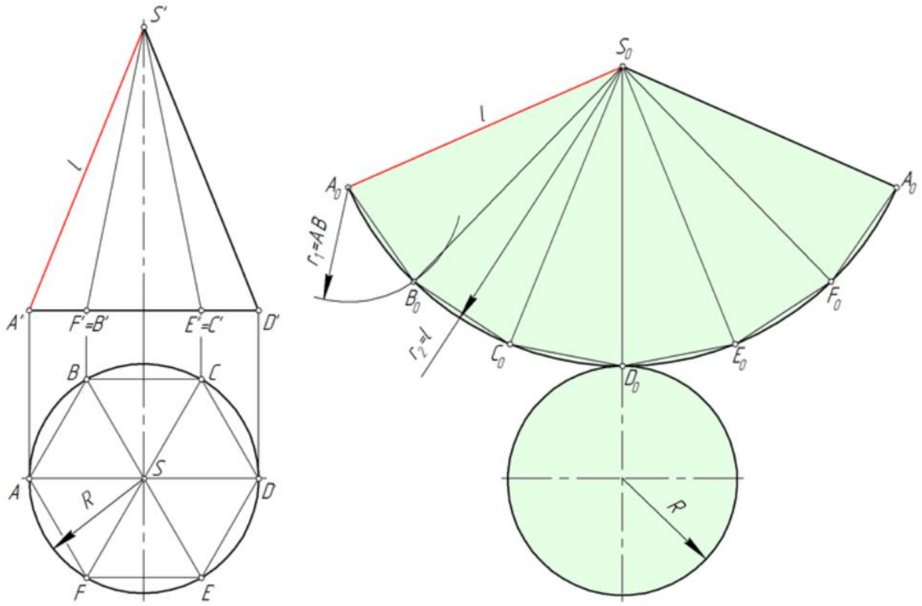


Рис. 10.1.

Поверхні криволінійних геометричних тіл поділяються на такі, що розгортуються та їх можна, розрізавши по твірній, сумістити без розривів й складок (це деякі лінійчаті поверхні, наприклад, поверхні циліндра й конуса) і такі, що не розгортуються окремі лінійчаті поверхні (циліндроїд, коноїд) та нелінійчасті (сфера, тор тощо). Розгортки цих поверхонь будуть наближено.

Розглянемо приклад побудови розгортки конуса обертання. Бокова поверхня прямого кругового конуса являє собою круговий сектор обмежений двома радіусами рівними довжині твірній конуса $\boldsymbol{l}$, а центральний кут між цими радіусами дорівнює $\boldsymbol{\varphi}= 300^\circ\frac{R}{l}$, $\boldsymbol{R}$ – радіус основи (кола) конуса (рис. 10.2).

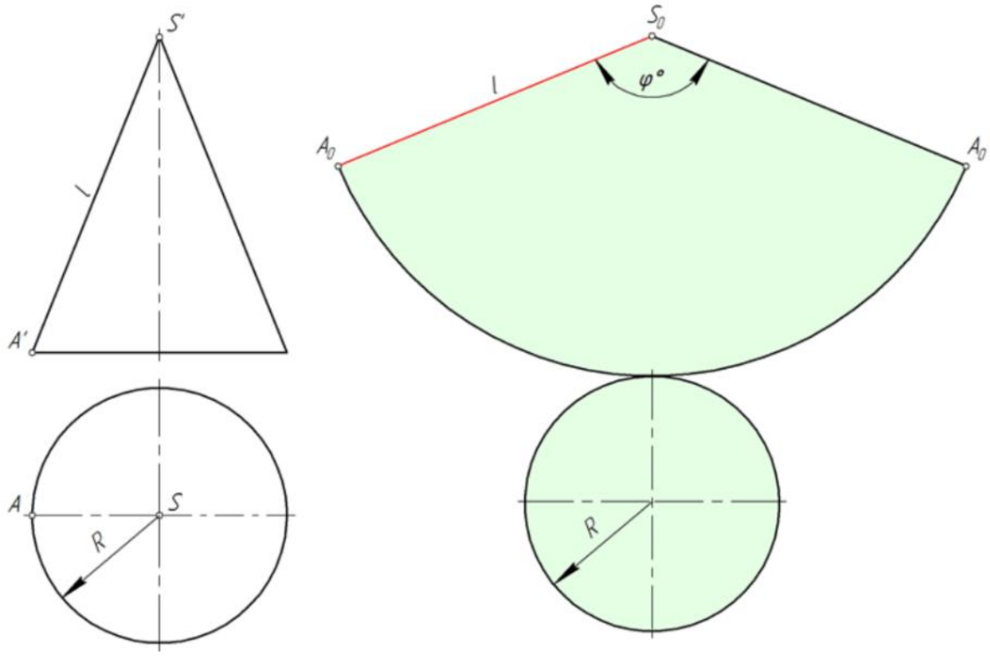


Рис. 10.2.

10.2. Спосіб нормального перерізу

Побудувати розгортку поверхні тригранної призми (рис. 10.3).

Бічні ребра призми розміщені горизонтально і проєкціюються на площину $\boldsymbol{H}$ в натуральну величину. Проводимо площину $\boldsymbol{Y}$ перпендикулярну до бічних ребер призми ($\boldsymbol{Y}\perp\boldsymbol{CF}$), далі будуємо нормальний переріз $\Delta\boldsymbol{123}$ та визначаємо його натуральну величину (способом заміни площин проєкцій). Усі сторони

нормального перерізу послідовно відкладемо на прямій: $\boldsymbol{1_02_0=1_1'2_1'}$; $\boldsymbol{2_03_0=2_1'3_1'}$, $\boldsymbol{3_01_0=3_1'1_1'}$. Отриманий відрізок $\boldsymbol{1_0}$–$\boldsymbol{1_0}$ дорівнює периметру нормального перерізу. Через точки $\boldsymbol{1_0, 2_0, 3_0, 1_0}$ проведемо прямі перпендикулярні до $\boldsymbol{1_0}$–$\boldsymbol{1_0}$ та відкладемо на них натуральну величину бічних ребер: $\boldsymbol{1_0A_0=1A}$; $\boldsymbol{1_0D_0=1D}$; $\boldsymbol{2_0B_0=2B}$; $\boldsymbol{2_0E_0=2E}$; $\boldsymbol{3_0C_0=3C}$; $\boldsymbol{3_0F_0=3F}$. Отримані точки $\boldsymbol{A_0, B_0}$, ... з'єднуємо прямими. Плоска фігура $\boldsymbol{A_0B_0C_0}$... є шуканою розгорткою бічної поверхні даної призми. Для побудови повної розгортки необхідно до розгортки бічної поверхні добудувати основи призми, використавши отримані на розгортці натуральні величини їх сторін.

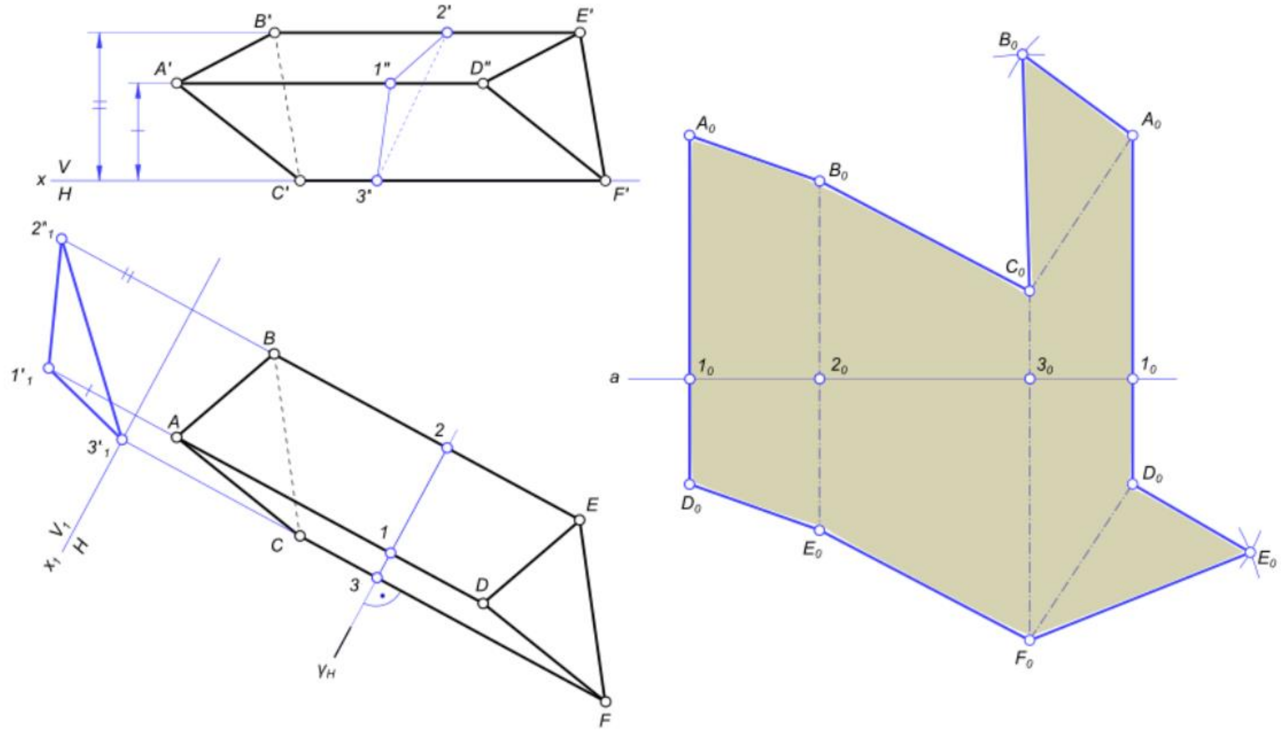


Рис. 10.3.

Побудувати розгортку нижньої частини поверхні циліндра обертання, перерізаного фронтально-проєкційною площиною $\boldsymbol{Pv}$ (рис. 10.4). Розгортка бічної поверхні циліндра – прямокутник з висотою, що дорівнює висоті циліндра на фронтальній площині, і довжиною $\boldsymbol{2\pi R}$ де $\boldsymbol{R}$ – радіус циліндра. Оскільки вісь циліндра перпендикулярна до площини проєкцій $\boldsymbol{H}$, то горизонтальна проєкція фігури перерізу збігається з горизонтальною проєкцією циліндра, а фронтальна – зі слідом площини $\boldsymbol{Pv}$. Натуральний вигляд фігури перерізу (еліпс) знаходимо

за допомогою способу обертання навколо осей, перпендикулярних до площин проєкцій. Будуємо розгортку зрізаної нижньої частини циліндричної поверхні. Для цього коло основи циліндра поділено на 12 однакових частин; розгорнуте коло основи також поділено на 12 однакових частин. Відрізки твірних відкладені на перпендикулярах, проведених у точках поділу розгорнутого кола основи циліндра. Провівши через отримані точки криву, отримаємо розгорнутий еліпс (ця лінія є синусоїдою) – верхній край розгортки бічної поверхні циліндра. До розгортки бічної поверхні приєднаємо коло основи і еліпс – натуральний вигляд перерізу. Одержана фігура буде розгорткою зрізаної нижньої частини циліндра.

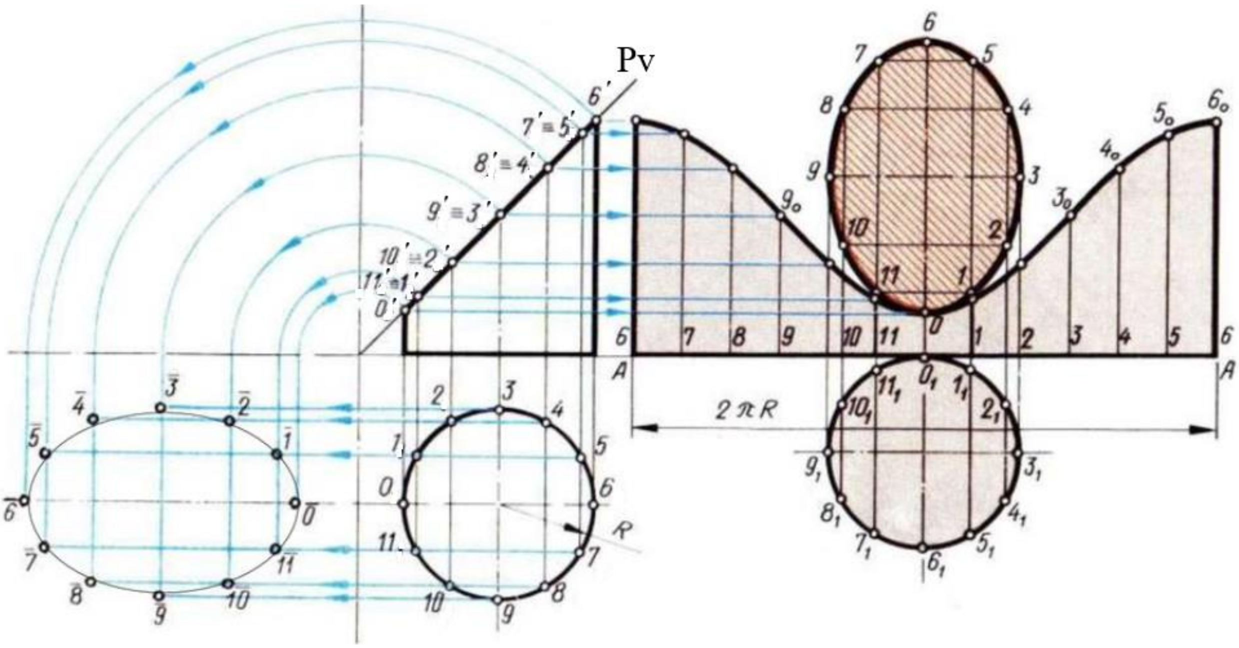


Рис. 10.4

10.3. Спосіб розгортання

Побудувати розгортку бічної поверхні похилого еліптичного циліндра (рис. 10.5). У циліндр вписуємо похилу багатогранну призму. Розгортка циліндра становить суму граней цієї призми. Грані будуємо послідовно. Проведемо ряд прямолінійних твірних циліндричної поверхні. Частини поверхні між суміжними твірними приймемо за плоскі елементи поверхні. Плоский елемент ***17'18₀*** обертаючи навколо фронталі ***17'*** суміщаємо з фронтальною площиною рівня.

При цьому фронтальна проєкція ***18'*** вершини елемента переміститься по прямій, перпендикулярній до ***17'***, до положення ***18₀***. Точка ***18₀*** побудована на прямій ***18'18₀*** засічкою з точки ***18'*** радіусом ***17-18***, тому що нижня основа циліндра проєкціюється в натуральну величину та ***18'18₀=17-18***. Оскільки паралельні прямі на поверхні переходять у паралельні прямі на розгортці, то через точку ***18₀*** проведемо лінію ***α₀***, паралельну та рівну твірній ***α'*** і знайдемо суміщений плоский елемент. Обертанням навколо фронталі ***18₀*** сумістимо суміжний елемент ***18₀19₀*** з тією ж фронтальною площиною рівня. Суміщення інших плоских елементів відбувається аналогічно. Побудовані точки ***17₀, 18₀, 19₀, 20₀,*** …, ***15₀, 16₀, 17₀*** сполучаємо лекальною кривою. Отримана плоска фігура є шуканою розгорткою

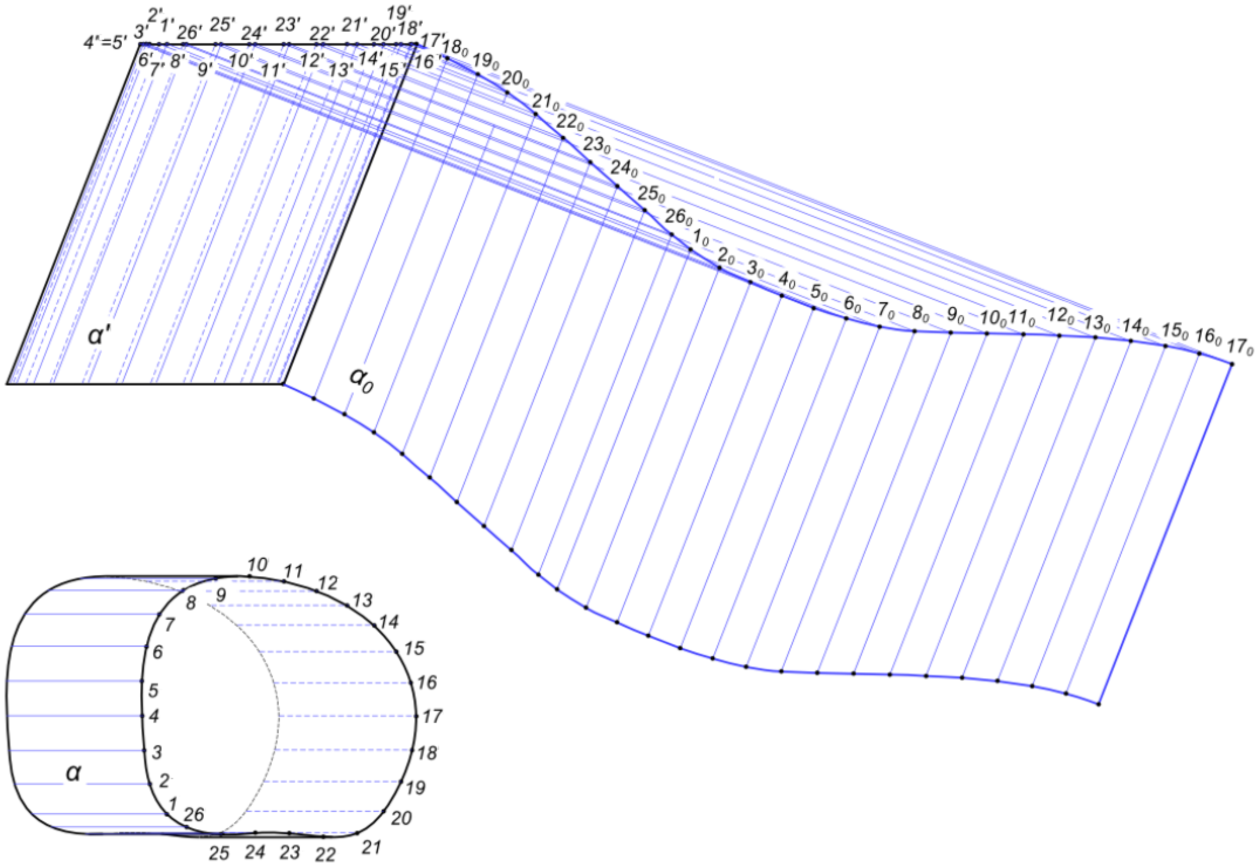


Рис. 10.5.

10.4. Спосіб трикутників (тріангуляції)

Спосіб трикутників полягає в тому, що окремі частини поверхні приймаємо за трикутники.

Побудувати розгортку похилого еліптичного конуса (рис. 10.6).

Для побудови розгортки похилого еліптичного конуса поділимо основу на ***6*** однакових частин, тобто вписуємо в основу ***6*** кутник. Твірні $\boldsymbol{S'1'}$ та $\boldsymbol{S'4'}$ проєкціюються на площину $\boldsymbol{V}$ в натуральну величину. Використовуючи метод обертання навколо проєкційної осі, визначаємо величини інших твірних. Далі будуємо приблизну розгортку. Беремо будь-яку точку і позначаємо її $\boldsymbol{S_0}$. Проводимо довільно лінію та відкладаємо на ній від точки $\boldsymbol{S_0}$ відрізок, який дорівнює $\boldsymbol{S'1'}$. Для отримання точки $\boldsymbol{6_0}$ з точки $\boldsymbol{1_0}$ проводимо дугу радіусом $\boldsymbol{R_1=1-6}$, а з точки $\boldsymbol{S_0}$ – дугу радіусом $\boldsymbol{R=S'-6_1'}$. Інші точки будуємо аналогічно та сполучаємо плавною кривою.

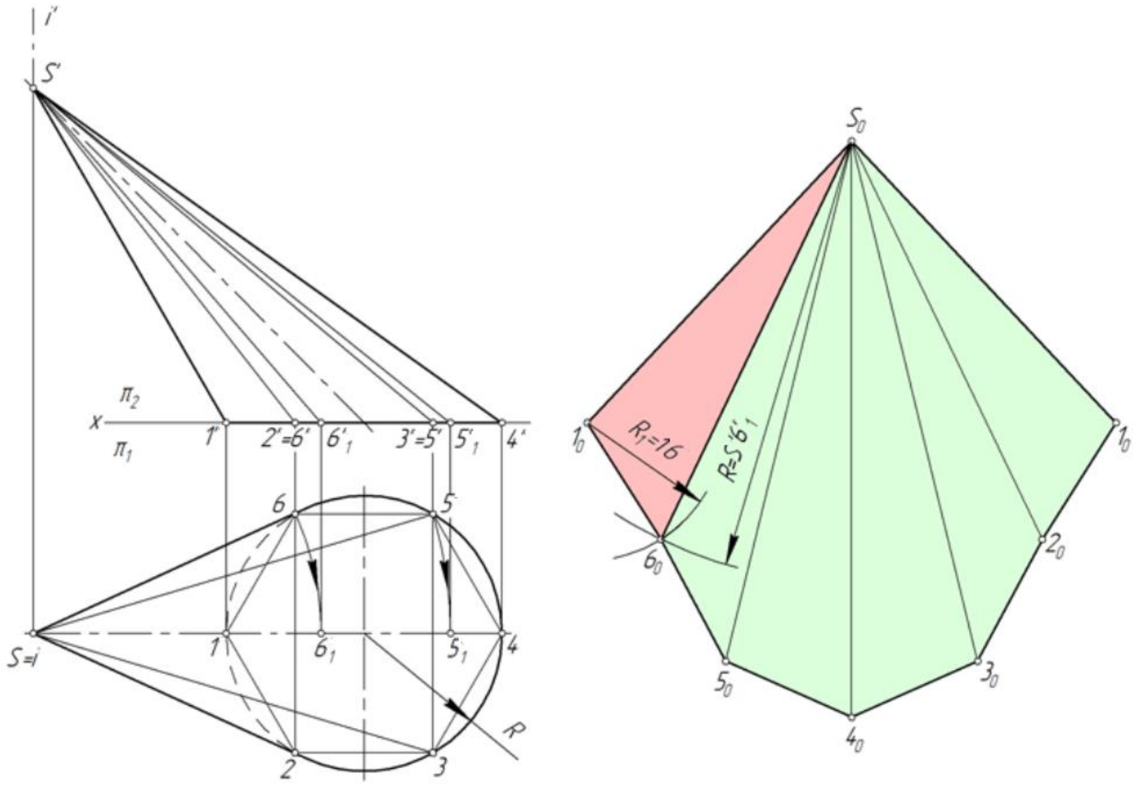


Рис. 10.6.

Побудувати розгортку поверхні піраміди з нанесеними на її грані сторонами трикутного перерізу піраміди деякою площиною (рис. 10.7).

Знаходимо довжину кожного з ребер піраміди шляхом обертання навколо проєкційної осі. Будуємо трикутник ***$A_0S_0B_0$*** за трьома сторонами: основа ***A_0B_0*** дорівнює горизонтальній проєкції ***AB***, а бічні сторони – натуральним величинам ребер ***SA*** та ***SB*** (тобто відрізкам ***$S'A_1'$*** та ***$S'B_1'$***). На стороні ***S_0B_0*** побудований новий трикутник, причому сторона ***B_0C_0*** дорівнює горизонтальній проєкції ***BC***, сторона ***S_0C_0*** дорівнює довжині ребра ***SC*** (тобто відрізку ***$S'C_1'$***). Аналогічно побудований та третій трикутник. У результаті отримана розгорнута бічна поверхня піраміди. Якщо на сторонах ***S_0A_0, S_0B_0, S_0C_0*** відкласти відрізки ***$S'D_1'$***, ***$S'E_1'$***, ***$S'F_1$***, які дорівнюють відрізкам ребер піраміди, яка перетнута площиною, то отримаємо ламану лінію ***$D_0E_0F_0D_0$***, яка складається зі сторін фігури перерізу.

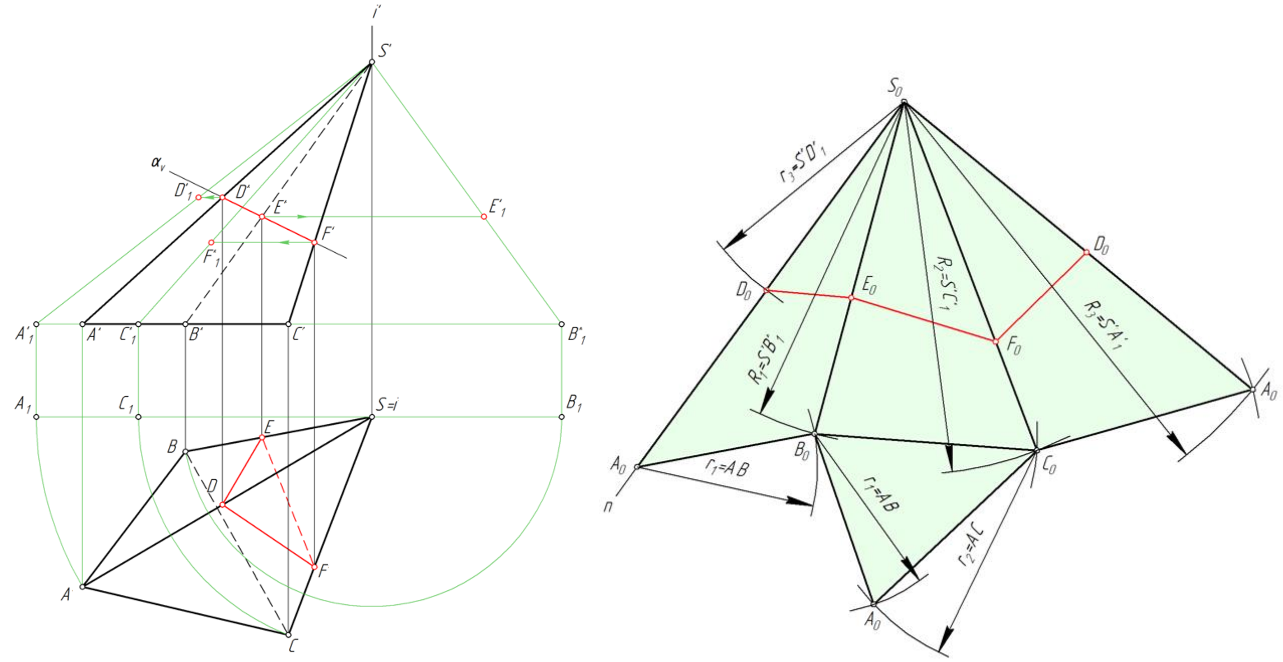


Рис. 10.7.

10.5. Умовні розгортки

Сферична поверхня є нерозгортною. У даному випадку можна говорити лише про умовне розгортання (рис. 10.8).

Поділимо сферичну поверхню на ***12*** однакових частин (клинів) горизонтально-проєкційними площинами, які проходять через центр сфери. Сферичну поверхню кожного клина замінюємо на циліндричну поверхню, ось якої проходить через центр сфери. Далі поділимо сферичну поверхню на частини кількома горизонтальними площинами. Ці площини перетинають сферичні клини по дугах, які замінюємо твірними циліндричної поверхні – відрізками, дотичними до цих дуг. Для побудови розгортки одного з дванадцаті сферичних клинів на горизонтальній прямій відкладаємо довжину відрізка дотичної прямої $1_0 2_0 = 12 = 2\pi R/12$, через середину цього відрізка проводимо вертикальну пряму, на якій відкладаємо відрізок, що дорівнює πR. Цей відрізок поділимо на шість рівних частин та через точки ділень проводимо горизонтальні прямі, на яких відкладаємо дійсні довжини дотичних $3_0 4_0$, $5_0 6_0$ твірних циліндрів, тобто відрізки ***34***, ***56***. Отримані точки сполучаємо плавною кривою. Розгортку інших одинадцаті клинів будуємо аналогічно.

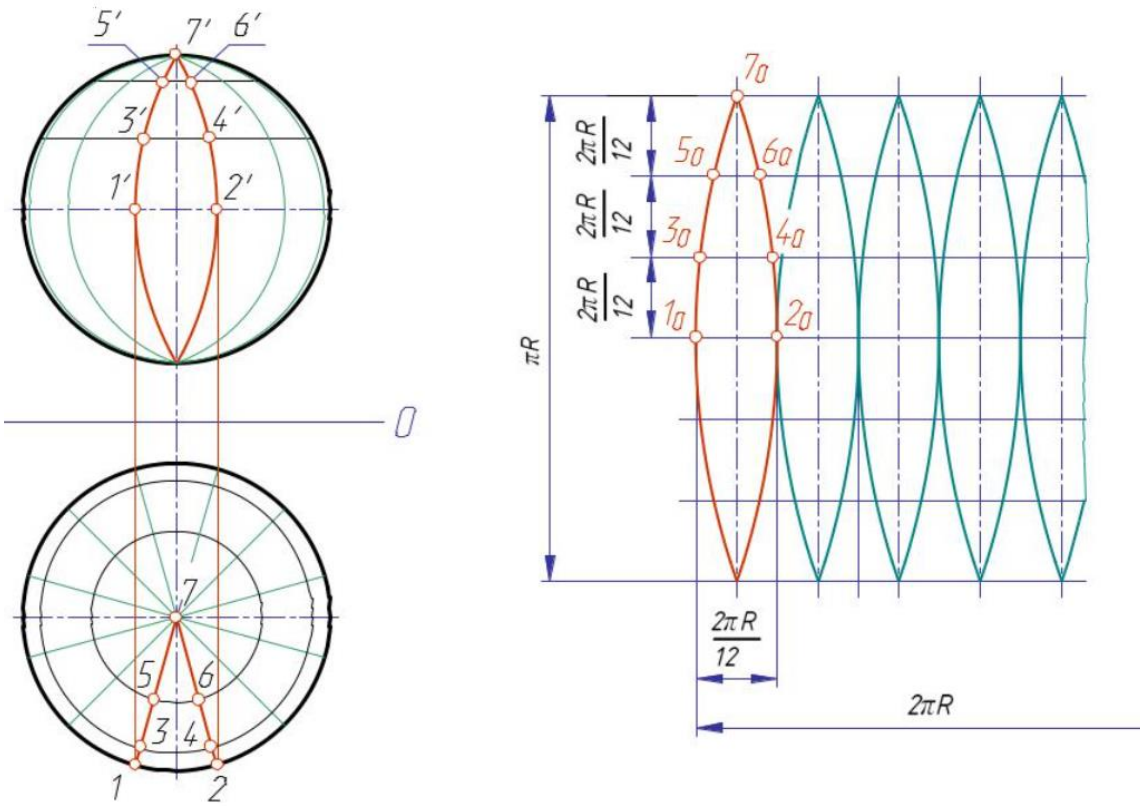


Рис. 10.8.

Запитання для самоконтролю

1. Що називається розгорткою поверхні?
2. Якими властивостями характеризуються розгортки поверхонь?
3. Які поверхні називаються розгортними, які – нерозгортними?
4. Суть способів нормального перерізу, розгортання і трикутників.
5. Побудувати розгортку прямого кругового конуса з вертикальної віссю, зрізаного похилою фронтально-проєкційною площиною.
6. Як побудувати умовну розгортку сферичної поверхні?

ЛІТЕРАТУРА

1. Бубенников А.В. Начертательная геометрия. Учеб. для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1985. – 288 с.
2. Буянов П. Г. Основи нарисної геометрії : навчально-методичний посібник / П. Г. Буянов. — Донецьк : Юго-Восток, 2009. — 141 с.
3. Винокурова Г. Ф., Степанов Б. Л. Начертательная геометрия. Курс лекций для студентов ТПУ всех специальностей. – Томск: Изд-во ТПУ, 2009.– 65 с.
4. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии. – М.: Наука, 2002. – 272 с.
5. Данилюк Я.М., Онищук О.О. Конспект лекцій: Нарисна геометрія (частина ІІ. Поверхні). – Івано-Франківськ: Факел, 2006. – 95 с.
6. Збірник задач з інженерної та комп'ютерної графіки: Навч. посіб. / В.Є. Михайличенко, В.М. Найдиш, А.М. Підкоритов, І.О. Скидан – К.: Вища школа, 2002. – 159 с.: іл.
7. Локтев О.В. Краткий курс начертательной геометрии. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1985. – 136 с.
8. Миронов Б.Г., Миронова Р.С. Черчение: Учеб. пособие для машиностроительных специальностей сред. спец. учеб. заведений. – М.: Машиностроение, 1991. – 288 с.: ил.
9. Навчально-методичний комплекс професійно-орієнтованих дисциплін напряму підготовки 6.010103. Технологічна освіта: Навчальний посібник / Під ред. В.І. Амелькін. – Донецьк: ТОВ «ЮгоВосток, Лтд», 2008. – 385 с.
10. Нарисна геометрія: Підручник / В.Є. Михайленко, М.Ф. Євстіфєєв, С.М. Ковальов, О.В. Кащенко; За ред. В.Є. Михайленко. – 2-ге вид., переробл. – К.: Вища школа., 2004. – 303 с.: іл.
11. Нарисна геометрія. Практикум: Навч. посібник / За ред. проф. Є.А. Антоновича. – Львів: Світ, 2004. – 528 с., іл.
12. Михайленко В.Є., Ванін В.В., Ковальов С.М. Інженерна графіка: підруч. для студ. вищих закл. освіти. – К.: Каравела, 2003. – 288 с.

13. Михайленко В.Є., Найдиш В.М., Підкоритов А.М., Скидан І.А. Інженерна та комп’ютерна графіка. – Київ: Слово, 2011. – 352 с.
14. Павлова А.А., Глазкова И.В. Начертательная геометрия: Практикум для студ. высш. учеб. заведений: В 2 ч. – М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2003. – Ч. 1. – 96 с.: ил.
15. Павлова А.А., Глазкова И.В. Начертательная геометрия: Практикум для студ. высш. учеб. заведений: В 2 ч. – М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2003. – Ч. 2. – 96 с.: ил.
16. Павлова А.А. Начертательная геометрия: учеб. для студ. высш. учеб. заведений. – М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 1999. – 304 с.: ил.
17. Перпері А.О. Інженерна графіка. Навчальний посібник з нарисної геометрії / А.О. Перпері, В.П. Бредньова, В.В. Думанська, В.С. Марченко. – Одеса : ОДАБА, 2018. – 220 с.
18. Романычева Э.Т., Соколова Т.Ю., Шандурина Г.Ф. Инженерная и компьютерная графика. – 2-е изд., перераб. – М.: ДМК Пресс, 2001. – 592 с.: ил.
19. Русскевич Н.Л. Начертательная геометрия. – К.: Вища школа, 1978. – 312 с.
20. Тарасов Б.Ф., Дудкина Л.А., Немолотов С.О. Начертательная геометрия. 2-е изд.,-СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 256 с.: ил.
21. Фольта О.В., Антонович Є.А., Юрловський П.В. Нарисна геометрія: Навчальне видання. – Львів: Світ, 1994. – 304 с., іл.
22. Чекмарев А.А. Начертательная геометрия и черчение: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по спец. № 2120 «Общетехнические дисциплины и труд». - М.: Просвещение, 1987. – 400 с.: ил.
23. Черчение: Учебное пособие для студентов пед. ин-тов / Д.М. Борисов, Е.А. Василенко. Под ред. Д.М. Борисова – 2-е изд. доп. и перераб. – М.: Просвещение, 1987. – 215 с.
24. Четверухин Н.Ф. Начертательная геометрия. – 2-е изд., доп. и перераб. – М.: Высш. шк., 1963. – 420 с.