

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №4 2014

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №4, 2014,
Серія фізико-математичні науки**

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України та реферується в Реферативному журналі та базах даних ВИНІТИ, Росія, Москва.

Редакційна колегія:

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Хусаїнов Денис Яхьєвич, д.ф.-м.н., проф., **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
Arturs Medvids, Dr. habil. Phys., prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Miklós Rontó, prof., Doctor of Science, Full Professor at the University of Miskolc, Faculty of Mechanical Engineering and Information Science, Department of Analysis;
Milada Bartlova, Ph.D., Brno University of Technology, Department of Physics, Brno, Czech Republic;
Nicolai Kukhtarev, Research professor, Department of Physics, Alabama A&M University;
Sergei Gorlatch, Dr. habil., prof., professor of Computing Science, University of Muenster, Germany;
Sergey Trofimchuk, prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Stefan Hudak, DSc, prof., professor of Technical University of Kosice, Slovak Republic;
Toru Aoki, Ph.D., prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Japan;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Буй Дмитро Борисович, д.ф.-м.н., проф.;
Булавін Леонід Анатолійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гарашенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., доц.;
Кириченко Володимир Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.

Редакційний відділ:

Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-966-2142

ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Бондаренко В.М., Зубарук О.В. Алгебра Ауслендера для пар ідемпотентних матриць з подвійним сендвіч-співвідношенням	9
Головашук Н.С., Гнатюк О.М. Кореневі бази для несиметричних цілих білінійних форм	14
Доронін О.В. Тест для перевірки рівності розподілів у моделі суміші зі змінними концентраціями	20
Жучок Ю.В. Декомпозиції вільних тріоїдів	28
Журавльов В.М., Сурков А.М. Допустимі сагайдаки та черепичні порядки скінченної глобальної розмірності в $M_n(D)$, $n \leq 5$	35
Плахотник М.В. Системи лінійних функціональних рівнянь в задачі про топологічну спряженість відображень	40
Рябухо О.М., Турка Т.В. Київський період науково-педагогічної діяльності М.Г.Чеботарьова (до 130-річчя з дня народження)	53

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Багно О.М. Хвилі у попередньо деформованому стисливому пружному шарі, який взаємодіє з шаром в'язкої стислої рідини	63
Вакал Є.С., Вакал Ю.Є., Стеля О.Б. Чисельне розв'язання задачі вологопереносу в області складної форми зі слабко проникними включеннями	69
Горошко О.О., Кикоть С.В. Канонічні рівняння в дослідженні коливань плаваючого трубопроводу	73
Горошко О.О., Лебедева І.В. Прецесійні рухи та самоцентрування роторів	77
Лук'янов Петро В. Генерація шуму близької взаємодії лопаті і вихору при косому обдуванні потоком	81
Малюга В.С. Характеристики звукового поля, що генерується при обтіканні сфери	87
Острик В.І., Улітко А.Ф. Аналогія між неосесиметричною деформацією та крученням у контактних задачах для півпростору	93
Семенова І.Ю. Побудова координатного базису для задачі коливань рідини в двопорожнинному гіперболоїді	99
Ткач А.Б. Квазіторіадальні багатовиди нелінійних систем рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом	103
Ткаченко Р.В., Лимарченко О.С. Динаміка рідини з вільною поверхнею в резервуарі на рухомій платформі під дією зовнішньої імпульсної сили	107
Трунов О.О. Поширення хвилі у хвилеводі з подвійним згином	111
Трунова Л.А. Точкове джерело в околі конусного відбивача	115

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Верченко А.П., Кравченко Р.В. Метод автоматичного розташування написів точкових об'єктів в електронних картах, побудований на нейронній мережі Хопфілда	121
Галкін О.А. Вплив варіацій смуги пропускання на поведінку показника помилкової класифікації ядерного класифікатора	125
Гарашенко Ф.Г., Яценко В.О., Матвієнко В.Т., Дегтяр О.С. Адаптивний метод дистанційного виявлення хімічних та біологічних компонентів, що базується на градієнтному підході	131
Гаркуша Н.І. Про одну математичну модель динаміки взаємодіючих популяцій	135
Гончар С.А. Криптографія з часовим розкриттям: минуле, теперішнє, майбутнє	139
Завадський І.О. Комбінаторний алгоритм підвищення завадостійкості кодів, що генеруються скінченними автоматами	145
Какойченко А.І., Порхун О.В. Використання RBF-мережі для короткострокового прогнозування фінансових ринків	149
Касьянюк В.С., Малютенко Л.М. Моделювання нечітких множин, предикатів та реляцій на основі теоретико-можливісного підходу	155
Кінаш А.В., Чабанюк Я.М., Хімка У.Т. Асимптотична дисипативність випадкової еволюції з імпульсним збуренням	163
Компан С.В. Особливості побудови запитів у об'єктних базах даних на прикладі об'єктної СУБД db4o	167

Крак Ю.В., Коваль Ю.В., Тернов А.С. До розробки інтерактивного інтерфейсу моделювання та розпізнавання жестової інформації	175
Криволап А.В. Система виводу з T- та F-обмеженнями для монотонної логіки Флойда-Хоара	179
Ляецький О.О., Афонін А.О. Про інтелектуальні та інтерфейсні засоби систем автоматизації доведень теорем	187
Макушенко І.А. Оптимальне керування вхідним потоком в умовах критичного навантаження в мережі	191
Машенко С.О., Аль Самарраи Мохаммед Саад И. Транспортная задача с нечетким множеством целей	199
Наконечний О. Г., Шушарін Ю. В., Демиденко С. В. Гарантовані оцінки середнього значення випадкових послідовностей	204
Негадайлов П.А., Єщенко А.Ю. Пошук максимальної коаліції в обмеженій кооперативній грі з багатьма гравцями	209
Подлипенко Ю.К., Горбатенко М.Ю., Перцов А.С. Наближені мінімаксні оцінки лінійних неперервних функціоналів від розв'язків системи змішаних варіаційних рівнянь	213
Савкова В.П. Розробка методу оцінки якості організації і проведення підготовки фахівців в інтегрованій системі вищої освіти для вищого навчального закладу	219
Скобелев В.Г. Про мови, які приймає з заданою ймовірністю 1-кубітовий MO-1QFA з бінарним вхідним алфавітом	225
Терещенко В.М. Один метод триангуляції множини точок на площині	228
ШакотькоТ.І., Хусаїнов Д.Я., Сіренко А.С. Про один підхід до дослідження стійкості моделі нейронних мереж з запізненням другим методу Ляпунова	232
Шкільняк О.С. Семантичні аспекти модальних логік часткових немонотонних предикатів	238
Юнькова О.О., Кулян А.В., Прокопюк О.С. Про ідентифікацію параметрів у задачах оптимального інвестування	242
Яценко В.О., Кочкодан О.І., Макаричев М.В., Пашенковська І.С., Черемних О.С., Шолохов О.В. Ідентифікація білінійних систем та керування показниками Ляпунова	247

РАДІОФІЗИКА

Глушенков А.М., Говорун Д.М. Повне сімейство Н-зв'язаних гетероасоціатів $m^9\text{Gua}-m^1\text{Cyt}$: квантово-механічне дослідження	253
Горячко А. М., Кулик С. П., Мельник П.В., Находкін М. Г. Нова атомарна модель наноструктурованої поверхні Si(001)-c(8×8)	259
Григорук В.І., Коваленко В.Ф., Петричук М.В., Танигін Б.М., Шулима С.І. Зміна оптичного пропускання тонких шарів магнітної рідини під дією імпульсного магнітного поля	263
Карлаш А.Ю. Еволюція кінетики фотолюмінесценції в композитних зразках $\text{agSiO}_x/\text{nc-Si}$ в процесі старіння	269
Кузьмич Р.Ю., Павлюк С.П., Ковток В.Г., Вплив конструкції напівпровідникового діода на його розігрів імпульсом ударного струму	273
Павлюк С.П., Оберемок О.С., Телега В.М., Гандзюк В.І. Ефект пам'яті в КСДІ структурах	277

СУЧАСНА ФІЗИКА

Вергун Л.Ю. Кінетика денатурації овальбуміну в умовах гіперперексії: експериментальна методика	283
Вергун Л.Ю., Теліман К.О., Войтович І.С., Мягченко Ю.О. Вплив електрохімічної активації води на її в'язкість	287
Войтешенко А.В. Вплив додавання наночастинок лапоніту на в'язкість розчину поблизу критичної температури розшарування	291
Манько Д. Ю., Лопатинська О. Г., Поперенко Л. В. Особливості розрахунку плазмової і релаксаційної частот в аморфних металевих сплавах на основі заліза	295
Онанко А.П., Онанко Ю.А. Релаксаційні процеси дефектної наноструктури в сплавах, SiO_2 і автоматизована система візуалізації ультразвукової анізотропії	301
Шірінян А. С., Комісаренко О. С., Макара В. А. Використання термоаналізу для побудови фазових діаграм багатокомпонентних матеріалів	305

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Bondarenko V.M., Zubaruk O.V. The Auslander algebra for the pairs of idempotent matrices with the double sandwich relation	9
Golovaschuk N.S., Gnatiuk O.M. Root bases for nonsymmetrical integer bilinear forms	14
Doronin O.V. Test for checking the equality of distributions in mixture model with varying concentrations	20
Zhuchok Y.V. Decompositions of free trioids	28
Zhuravlev V.N., Surkov A.M. Admissible quivers and tiled orders of finite global dimension in $M_n(D)$, $n \leq 5$	35
Plakhotnyk M.V. Linear functional equations systems in the problem of topological conjugation of mappings	40
Ryabukho O.M., Turka T.V. Kyiv Period of the Scientific and Educational Activities by M.H. Chebotaryov (to the 130th Anniversary of His Birth)	53

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Bagno O.M. Waves in a pre-deformed compressible elastic layer that interacts with a layer that of an viscous compressible fluid	63
Vakal E.S., Vakal Yu.E., Stelya O.B. Numerical solution of moisture transfer problem in the area of complex shape with weakly permeable inclusions	69
Goroshko O.O., Kykot S.V. The canonical equations in the investigations of oscillations of a floating conduit	73
Goroshko O.O., Lebedyeva I.V. Precession movements and self centering of rotors	77
Lukianov Petr V. Sound generation by blade and vortex near interaction at oblique angle of flow streamlining	81
Malyuga V.S. Characteristics of aerodynamic sound field generated by the flow past a sphere	87
Ostryk V.I., Ulitko A.F. Analogy between the nonaxisymmetric strain and torsion in the contact problems for a half-space	93
Semenova I.Yu. Construction of coordinate basis of liquid sloshing problem in two-sheeted hyperboloid	99
Tkach A.B. Quasitoroidal manifolds for nonlinear systems of partial differential equations with impulse influence	103
Tkachenko R., Limarchenko O.S. Dynamics of liquid with a free surface in reservoir on movable platform under external impulse loading	107
Trunov O. O. The wave propagation in bent waveguide with two bend	111
Trunova L.A. Point source in the vicinity of conical reflector	115

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATIC

Verchenko A.P., Kravchenko R.V. The method of automatic point-feature label placement in digital maps based on the Hopfield neural network	121
Galkin O.A. Effect of bandwidth variations on the behaviour of misclassification rate of kernel classifier	125
Garashchenko F.G., Yatsenko V.O., Matvienko V.T., Degtiar O.S. Adaptive method for remote detection of chemical and biological components based on the gradient approach	131
Garkusha N.I. About one mathematical model of the dynamics of interacting population	135
Gonchar S.A. Time-release cryptography: past, present, future	139
Zavadskyi I.O. Search algorithm for increase the performance of codes generated by finite automatons	145
Kakoichenko A.I., Porkhun O.V. Short-term financial markets forecasting with RBF network	149
Kasyanyuk V.S., Malutenko L.M. Fuzzy sets, predicates and relations modeling using theoretic-possibility approach	155
Kinash A.V., Chabaniuk Ya.M., Khimka U.T. Asymptotic dissipativity of the random evolution with impulse perturbation	163
Kompan S.V. Peculiarities of query construction in object databases on the example of DBMS db4o	167
Krak Iu.V., Koval Iu. V., Ternov A.S. To creation of interactive interface for sign information modeling and recognition	175
Kryvolap A.V. Inference system with T- and F-constrains for monotone Floyd-Hoare logic	179

Lyaletsky A.A., Afonin A.A. On intelligent and interface tools for automated theorem-proving systems	187
Makushenko I.A. Optimal control of input flow in heavy traffic on the network	191
Mashchenko S.O., Mohammed Saad I. Al-Sammaraie The transportation problem with the fuzzy set of goals	199
Nakonechniy O.G., Shusharin Yu.V., Demydenko S.V. Guaranteed estimation of average random sequences	204
Negadailov P.A., Yeschenko A.Y. On the maximum coalition in limitedcooperative game with many players	209
Podlypenko Yu.K., Gorbatenko M.Yu., Pertsov A.S. Approximate minimax estimates of linear continuous functionals from solutions of system of mixed variational equations	213
Savkova V.P. Development methods for evaluating the quality of organizations, and conducting the training of specialists in integrated system of higher education for higher educational institutions	219
Skobelev V.G. On some languages accepted with the given probability by 1-qubit MO-IQFA with binary input alphabet	225
Tereshchenko V.M. One method for triangulation a set of points in the plane	228
Shakotko T.I., Khusainov D.Ya., Sirenko A.S. About one approach to study the stability of models of neural networks with delay Lyapunov second method	232
Shkilniak O.S. Semantic aspects of modal logics of partial non-monotone predicates	238
Yun'kova O.O., Kulian A.V., Prokopyuk O.S. On the identification of parameters in problems of optimal investment	242
Yatsenko V.O., Kochkodan O.I., Makarychev M.V., Pashenkovska I.S., Cheremnikh S.O., Sholohov O.V. Identification of bilinear system and control of Lyapunov exponents	247

RADIOPHYSICS

Glushenkov A.N., Hovorun D.N. Complete family of H-bonded heteroassociates $m^9\text{Gua}\cdot m^1\text{Cyt}$: quantum-mechanical study	253
Goriachko A.M., Kulyk S.P., Melnik P.V., Nakhodkin M.G. New atomic model of the Si(001)-c(8×8) nanostructured surface	259
Grygoruk V.I., Kovalenko V.F., Petrychuk M.V., Tanygin B.M., Shulyma S.I. Changing of the optical transmission of thin ferrofluid layers under the influence of magnetic field pulses	263
Karlash A.Yu. The evolution of PL relaxation processes under aging of $\text{arSiO}_x/\text{nc-Si}$ nanocomposites	269
Kuzmych R.Yu., Pavljuk S.P., Kovtok V.H. Influence of design of semiconductor diode of the heating by the impact current	273
Pavljuk S.P., Oberemok O.S., Telega V.M. Handziuk V.I. Memory effect in SDI structures	277

MODERN PHYSICS

Voiteshenko A.V. Effect of addition of laponite nanoparticles on viscosity of solution near the critical consolute temperature	283
Vergun L.Yu., Teliman K.O., Voytovich I.S., Myagchenko Yu.O. Influence electrochemical activation of water on its viscosity	287
Vergun L.Yu. The kinetics of ovalbumin denaturation at the temperature of hyperpyrexia: the experimental procedure	291
Manko D. Yu., Lopatynska O. G., Poperenko L.V. Peculiarities of plasma and relaxation frequencies calculation in the iron-based amorphous metal alloys	295
Onanko A. P., Onanko Y. A. Defect nanostructure relaxation processes in alloys, SiO_2 and automated system of ultrasound anisotropy visualization	301
Shirinyan A. S., Komisarenko O. S., Makara V. A. The use of thermal analysis for the construction of phase diagrams of multicomponent materials	305

УДК 512.579

Юлія В. Жучок¹, аспірантка

Декомпозиції вільних тріоїдів

¹Луганський національний університет
імені Тараса Шевченка, Україна, 92700, Ста-
робільськ, квартал Гоголя, 1
e-mail: yulia.mih@mail.ru

Yuliia V. Zhuchok¹, PhD student

Decompositions of free trioids

¹ Luhansk Taras Shevchenko National Uni-
versity, Ukraine, 92700, Starobilsk, Gogol square,
1
e-mail: yulia.mih@mail.ru

Одним із найкращих методів вивчення будови різних алгебр є метод декомпозиції. Основна ідея цього методу полягає в розкладі алгебри на компоненти, можливо, більш простої структури, детальному вивченні компонент та встановленні взаємозв'язків між компонентами в межах цієї алгебри. Вищевказаний метод має застосування в теорії групоїдів, теорії напівгруп, теорії дімоноїдів. У цій статті охарактеризовано декомпозиції вільних тріоїдів у трисполуки підтріоїдів та представлено деякі найменші конгруенції на вільному тріоїді.

Ключові слова: тріоїд, вільний тріоїд, трисполука підтріоїдів, дімоноїд, напівгрупа, конгруенція.

One of the best methods used in studying the structure of different algebras is the decomposition method. The main idea of this method is to decompose an algebra into components, perhaps of simpler structure, to study components in details and to establish mutual relationships between components within the entire algebra. The mentioned method has applications in groupoid theory, semigroup theory, dimonoid theory. Jean-Louis Loday and María O. Ronco constructed operads associated to the chain modules of simplexes and of Stasheff polytopes. The corresponding algebras have three operations and they are called associative trialgebras and dendriform trialgebras. A trioid is a set equipped with three binary associative operations satisfying some axioms. A trialgebra is just a linear analog of a trioid. Therefore, all results obtained for trioids can be applied to trialgebras. In this paper we characterize decompositions of free trioids into tribands and bands of subtrioids and present the least rectangular band congruence, the least left zero congruence and the least right zero congruence on a free trioid.

Key words: trioid, free trioid, triband of subtrioids, dimonoid, semigroup, congruence.

Communicated by Prof. V. V. Kirichenko

1 Introduction

One of the best methods used in studying the structure of different algebras is the decomposition method. The main idea of this method is to decompose an algebra into components, perhaps of simpler structure, to study components in details and to establish mutual relationships between components within the entire algebra. The mentioned method has applications in groupoid theory, semigroup theory, dimonoid theory (see, e.g., [1], respectively, [2], [3]).

During the study of planar trees J.-L. Loday and M.O. Ronco [4] introduced a type of algebras, called trialgebras, which are vector spaces endowed with three binary associative operations satisfying eight axioms. A trialgebra is just a linear analog of a trioid [4] and therefore all results obtained for trioids can be applied to trialgebras. A free trioid of rank 1 was given in [4]. A trioid which is

isomorphic to the free trioid of rank 1 was considered in [5]. Free trioids play an important role in constructing free trialgebras. See [6] for more information about trioids.

In this paper our attention will be aimed to decompositions of trioids. Here we give decompositions of free trioids into tribands and bands of subtrioids. As a consequence, we characterize the least rectangular band congruence, the least left zero congruence and the least right zero congruence on a free trioid.

2 Preliminaries

Recall that a nonempty set T equipped with three binary associative operations \dashv , \vdash and \perp satisfying eight axioms: $(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z)$ (T1), $(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z)$ (T2), $(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z)$ (T3), $(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z)$ (T4),

$(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z)$ (T5), $(x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z)$ (T6), $(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z)$ (T7), $(x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z)$ (T8), is called a trioid.

Consider the construction of a free trioid.

Let Y be an arbitrary nonempty set, $\bar{Y} = \{\bar{x} \mid x \in Y\}$, $X = Y \cup \bar{Y}$ and $F[X]$ be the free semigroup on X . Let further $P \subset F[X]$ be a subsemigroup which contains words w with the element \bar{x} ($x \in Y$) occurring in w at least one time.

Let $w \in P$. Denote by \tilde{w} the word obtained from w by change of all letters \bar{x} ($x \in Y$) by x . For instance, if $w = x\bar{x}\bar{y}x\bar{z}$, then $\tilde{w} = xxyxz$. Obviously, $\tilde{w} \in F[X] \setminus P$.

Define operations \dashv , \vdash and \perp on P by

$$w \dashv u = \tilde{w}u, \quad w \vdash u = \tilde{w}u, \quad w \perp u = wu$$

for all $w, u \in P$. Denote the algebra $(P, \dashv, \vdash, \perp)$ by $Frt(Y)$.

Proposition 1. $Frt(Y)$ is the free trioid.

The proof of this statement is the same as the proof of Proposition 1.9 from [4] obtained for the free trioid of rank 1.

Now recall the definition of a dimonoid [7, 8].

A nonempty set D equipped with two binary associative operations \dashv and \vdash satisfying the axioms (T1) – (T3) is called a dimonoid. If $D = (D, \dashv, \vdash)$ is a dimonoid, then the trioid $(D, \dashv, \vdash, \dashv)$ (respectively, $(D, \dashv, \vdash, \vdash)$) will be denoted by $(D)^\dashv$ (respectively, $(D)^\vdash$). It is clear that $(D)^\dashv$ and $(D)^\vdash$ are different as trioids but they coincide as dimonoids.

We need some algebras from [9] which will be used in Section 3.

For an arbitrary nonempty set Y let $Y_{\ell z} = (Y, \dashv)$, $Y_{rz} = (Y, \vdash)$, $Y_{rb} = Y_{\ell z} \times Y_{rz}$ be a left zero semigroup, a right zero semigroup and a rectangular band, respectively. By [9] $Y_{\ell z, rz} = (Y, \dashv, \vdash)$ is the free left zero and right zero dimonoid (or the free left and right diband).

Define operations \dashv and \vdash on Y^2 by

$$(x, y) \dashv (a, b) = (x, b), \quad (x, y) \vdash (a, b) = (a, b)$$

for all $(x, y), (a, b) \in Y^2$. By [9] (Y^2, \dashv, \vdash) is the free (rb, rz) -dimonoid. It is denoted by $Y_{rb, rz}$.

Define operations \dashv and \vdash on Y^2 by

$$(x, y) \dashv (a, b) = (x, y), \quad (x, y) \vdash (a, b) = (x, b)$$

for all $(x, y), (a, b) \in Y^2$. By [9] (Y^2, \dashv, \vdash) is the free $(\ell z, rb)$ -dimonoid. It is denoted by $Y_{\ell z, rb}$.

Define operations \dashv and \vdash on Y^3 by

$$(x_1, x_2, x_3) \dashv (y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, y_3),$$

$$(x_1, x_2, x_3) \vdash (y_1, y_2, y_3) = (x_1, y_2, y_3)$$

for all $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in Y^3$. The algebra (Y^3, \dashv, \vdash) is denoted by $FRct(Y)$. According to Theorem 1 from [9] $FRct(Y)$ is the free rectangular diband.

A trioid $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ is called a triband [10], if semigroups (T, \dashv) , (T, \vdash) and (T, \perp) are bands.

Define operations \dashv , \vdash and \perp on Y^3 by

$$(a_1, b_1, c_1) \dashv (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_1, c_1),$$

$$(a_1, b_1, c_1) \vdash (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_2, c_2),$$

$$(a_1, b_1, c_1) \perp (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_1, c_2)$$

for all $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \in Y^3$. It is clear that (Y^3, \perp, \vdash) is a rectangular diband [9] and (Y^3, \dashv) is a left zero semigroup. It is immediate to check that $(Y^3, \dashv, \vdash, \perp)$ is a triband. It will be denoted by $Y_{\ell z, rd}$.

Define operations \dashv , \vdash and \perp on Y^3 by

$$(a_1, b_1, c_1) \dashv (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_1, c_2),$$

$$(a_1, b_1, c_1) \vdash (a_2, b_2, c_2) = (a_2, b_2, c_2),$$

$$(a_1, b_1, c_1) \perp (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_2, c_2)$$

for all $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \in Y^3$. It is clear that (Y^3, \dashv, \perp) is a rectangular diband [9] and (Y^3, \vdash) is a right zero semigroup. One can check that $(Y^3, \dashv, \vdash, \perp)$ is a triband. It will be denoted by $Y_{rd, rz}$.

Define operations \dashv , \vdash and \perp on Y^2 by

$$(a_1, b_1) \dashv (a_2, b_2) = (a_1, b_1),$$

$$(a_1, b_1) \vdash (a_2, b_2) = (a_2, b_2),$$

$$(a_1, b_1) \perp (a_2, b_2) = (a_1, b_2)$$

for all $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in Y^2$. It is clear that (Y^2, \dashv, \vdash) is a left zero and right zero dimonoid [9] and (Y^2, \perp) is a rectangular band. By [10] $(Y^2, \dashv, \vdash, \perp)$ is a triband. It will be denoted by $Y_{\ell z, rz}^{rb}$.

Define operations \dashv , \vdash and \perp on Y^4 by

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1, x_2, x_3, y_4),$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1, y_2, y_3, y_4),$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1, x_2, y_3, y_4)$$

for all $(x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \in Y^4$. It is clear that (Y^4, \dashv) , (Y^4, \vdash) and (Y^4, \perp) are rectangular bands. One routinely verifies that $(Y^4, \dashv, \vdash, \perp)$ is a triband. The triband $(Y^4, \dashv, \vdash, \perp)$ will be denoted by $FRT(Y)$.

A nonempty subset A of a trioid $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ is called a subtrioid, if for any $a, b \in T$, $a, b \in A$ implies $a \dashv b$, $a \vdash b$, $a \perp b \in A$.

If $f : T_1 \rightarrow T_2$ is a homomorphism of trioids, then the corresponding congruence on T_1 will be denoted by Δ_f .

3 Decompositions

In this section in terms of tribands of subtrioids we describe the structure of free trioids and characterize the least rectangular band congruence, the least left zero congruence and the least right zero congruence on a free trioid.

In the following, we recall the construction of a triband of subtrioids [10].

Let S be an arbitrary trioid, J be some triband and let $\alpha : S \rightarrow J : x \mapsto x\alpha$ be a homomorphism. Then every class of the congruence Δ_α is a subtrioid of the trioid S , and the trioid S itself is a union of such trioids S_ξ , $\xi \in J$, that

$$x\alpha = \xi \Leftrightarrow x \in S_\xi = \Delta_\alpha^x = \{t \in S \mid (x, t) \in \Delta_\alpha\},$$

$$S_\xi \dashv S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \dashv \varepsilon}, \quad S_\xi \vdash S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \vdash \varepsilon},$$

$$S_\xi \perp S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \perp \varepsilon}, \quad \xi \neq \varepsilon \Rightarrow S_\xi \cap S_\varepsilon = \emptyset.$$

In this case we say that S is decomposable into a triband of subtrioids (or S is a triband J of subtrioids S_ξ ($\xi \in J$)). If J is an idempotent semigroup (band), then we say that S is a band J of subtrioids S_ξ ($\xi \in J$). If J is a commutative band, then we say that S is a semilattice J of subtrioids S_ξ ($\xi \in J$). If J is a left (right) zero semigroup, then we say that S is a left (right) band J of subtrioids S_ξ ($\xi \in J$).

Let $\omega \in F[X]$ and $w \in Frt(Y)$. Denote the first (respectively, last) letter of ω by $\omega^{(0)}$ (respectively, $\omega^{(1)}$). Suppose that u is the initial (respectively, terminal) subword of w with the minimal length such that $u^{(1)} \in \bar{Y}$ (respectively, $u^{(0)} \in \bar{Y}$). In this case $\widetilde{u^{(1)}}$ (respectively, $\widetilde{u^{(0)}}$) will be denoted by $w^{[0]}$ (respectively, $w^{[1]}$). For every $\omega \in F[X]$ the set of all letters occurring in ω will be denoted by $c(\omega)$ and for every $w \in Frt(Y)$ assume $\tilde{c}(w) = c(\widetilde{w})$.

Take an arbitrary nonempty finite subset C of Y . Let $B^C(Y)$ be the set of all finite subsets A of Y such that $C \subseteq A$ and let $B_C(Y)$ be a semilattice defined on $B^C(Y)$ by the operation of the set theoretical union.

Let $i, j, k, s \in Y$,

$$L = \{(i, j, k, s), (i, j, k), [i, j, k], [i, j], (i, j), (i, j), [i, j], (i), [i]\}$$

and

$$U_{(i,j,k,s)} = \{w \in Frt(Y) \mid (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}) = (i, j, k, s)\},$$

$$U_{(i,j,k)} = \{w \in Frt(Y) \mid (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}) = (i, j, k)\},$$

$$U_{[i,j,k]} = \{w \in Frt(Y) \mid (w^{[0]}, w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}) = (i, j, k)\},$$

$$U_{[i,j]} = \{w \in Frt(Y) \mid (w^{[0]}, w^{[1]}) = (i, j)\},$$

$$U_{(i,j)} = \{w \in Frt(Y) \mid (\widetilde{w}^{(0)}, \widetilde{w}^{(1)}) = (i, j)\},$$

$$U_{(i)} = \{w \in Frt(Y) \mid \widetilde{w}^{(0)} = i\},$$

$$U_{[i]} = \{w \in Frt(Y) \mid \widetilde{w}^{(1)} = i\}.$$

For any $l \in L$ assume l^* be the set containing all components of l . Consider the set

$$U_l^A = \{w \in U_l \mid \tilde{c}(w) = A\}$$

for $A \in B_{l^*}(Y)$ and $l \in L \setminus \{(i, j), [i, j]\}$.

The following three structure theorems give decompositions of $Frt(Y)$ into tribands of subtrioids.

Theorem 3.1. *Let $Frt(Y)$ be the free trioid.*

(i) *$Frt(Y)$ is a triband $FRT(Y)$ of subtrioids $U_{(i,j,k,s)}$, $(i, j, k, s) \in FRT(Y)$. Every trioid $U_{(i,j,k,s)}$, $(i, j, k, s) \in FRT(Y)$, is a semilattice $B_{(i,j,k,s)^*}(Y)$ of subtrioids $U_{(i,j,k,s)}^A$, $A \in B_{(i,j,k,s)^*}(Y)$.*

(ii) *$Frt(Y)$ is a triband $Y_{lz,rd}$ of subtrioids $U_{(i,j,k)}$, $(i, j, k) \in Y_{lz,rd}$. Every trioid $U_{(i,j,k)}$, $(i, j, k) \in Y_{lz,rd}$, is a semilattice $B_{(i,j,k)^*}(Y)$ of subtrioids $U_{(i,j,k)}^A$, $A \in B_{(i,j,k)^*}(Y)$.*

(iii) *$Frt(Y)$ is a triband $Y_{rd,rz}$ of subtrioids $U_{[i,j,k]}$, $(i, j, k) \in Y_{rd,rz}$. Every trioid $U_{[i,j,k]}$, $(i, j, k) \in Y_{rd,rz}$, is a semilattice $B_{[i,j,k]^*}(Y)$ of subtrioids $U_{[i,j,k]}^A$, $A \in B_{[i,j,k]^*}(Y)$.*

(iv) *$Frt(Y)$ is a triband $Y_{lz,rz}^{rb}$ of subtrioids $U_{[i,j]}$, $(i, j) \in Y_{lz,rz}^{rb}$. Every trioid $U_{[i,j]}$, $(i, j) \in Y_{lz,rz}^{rb}$, is a semilattice $B_{[i,j]^*}(Y)$ of subtrioids $U_{[i,j]}^A$, $A \in B_{[i,j]^*}(Y)$.*

Proof. (i) Define a map

$$\varphi_{FRT} : Frt(Y) \rightarrow FRT(Y) \quad \text{by}$$

$$w \mapsto (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}), w \in Frt(Y).$$

For arbitrary elements $w, u \in Frt(Y)$ obtain

$$\begin{aligned} (w \dashv u)\varphi_{FRT} &= (w\widetilde{u})\varphi_{FRT} = \\ &= (\widetilde{w\widetilde{u}}^{(0)}, (w\widetilde{u})^{[0]}, (w\widetilde{u})^{[1]}, \widetilde{w\widetilde{u}}^{(1)}) = \\ &= ((\widetilde{w\widetilde{u}})^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, (\widetilde{w\widetilde{u}})^{(1)}) = \\ &= (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \widetilde{u}^{(1)}) = \\ &= (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}) \dashv (\widetilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, u^{[1]}, \widetilde{u}^{(1)}) = \\ &= w\varphi_{FRT} \dashv u\varphi_{FRT}, \\ (w \vdash u)\varphi_{FRT} &= (\widetilde{wu})\varphi_{FRT} = \\ &= (\widetilde{wu}^{(0)}, (\widetilde{wu})^{[0]}, (\widetilde{wu})^{[1]}, \widetilde{wu}^{(1)}) = \\ &= ((\widetilde{wu})^{(0)}, u^{[0]}, u^{[1]}, (\widetilde{wu})^{(1)}) = \\ &= (\widetilde{w}^{(0)}, u^{[0]}, u^{[1]}, \widetilde{u}^{(1)}) = \\ &= (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}) \vdash (\widetilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, u^{[1]}, \widetilde{u}^{(1)}) = \\ &= w\varphi_{FRT} \vdash u\varphi_{FRT}, \\ (w \perp u)\varphi_{FRT} &= (wu)\varphi_{FRT} = \\ &= (\widetilde{wu}^{(0)}, (wu)^{[0]}, (wu)^{[1]}, \widetilde{wu}^{(1)}) = \\ &= ((\widetilde{wu})^{(0)}, w^{[0]}, u^{[1]}, (\widetilde{wu})^{(1)}) = \\ &= (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, u^{[1]}, \widetilde{u}^{(1)}) = \\ &= (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}) \perp (\widetilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, u^{[1]}, \widetilde{u}^{(1)}) = \\ &= w\varphi_{FRT} \perp u\varphi_{FRT}. \end{aligned}$$

Thus, φ_{FRT} is a surjective homomorphism. It is clear that $U_{(i,j,k,s)}$, $(i, j, k, s) \in FRT(Y)$, is a class of $\Delta_{\varphi_{FRT}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. Moreover, for every $(i, j, k, s) \in FRT(Y)$ the map

$$\zeta : U_{(i,j,k,s)} \rightarrow B_{(i,j,k,s)^*}(Y) : w \mapsto \widetilde{c}(w)$$

is a homomorphism. Indeed,

$$\begin{aligned} (w \dashv u)\zeta &= (w\widetilde{u})\zeta = \widetilde{c}(w\widetilde{u}) = c(\widetilde{w\widetilde{u}}) = \\ &= c(\widetilde{w\widetilde{u}}) = c(\widetilde{w}) \cup c(\widetilde{u}) = \widetilde{c}(w) \cup \widetilde{c}(u) = \\ &= w\zeta \cup u\zeta, \\ (w \vdash u)\zeta &= (\widetilde{wu})\zeta = \widetilde{c}(\widetilde{wu}) = c(\widetilde{wu}) = \\ &= c(\widetilde{wu}) = c(\widetilde{w}) \cup c(\widetilde{u}) = \widetilde{c}(w) \cup \widetilde{c}(u) = \\ &= w\zeta \cup u\zeta, \\ (w \perp u)\zeta &= (wu)\zeta = \widetilde{c}(wu) = c(\widetilde{wu}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= c(\widetilde{w\widetilde{u}}) = c(\widetilde{w}) \cup c(\widetilde{u}) = \widetilde{c}(w) \cup \widetilde{c}(u) = \\ &= w\zeta \cup u\zeta \end{aligned}$$

for all $w, u \in U_{(i,j,k,s)}$. Hence $U_{(i,j,k,s)}$ is a semi-lattice $B_{(i,j,k,s)^*}(Y)$ of subtrioids $U_{(i,j,k,s)}^A$, $A \in B_{(i,j,k,s)^*}(Y)$.

(ii) Define a map

$$\varphi_{lz,rd} : Frt(Y) \rightarrow Y_{lz,rd} \quad \text{by}$$

$$w \mapsto (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}), w \in Frt(Y).$$

One can check that $\varphi_{lz,rd}$ is a surjective homomorphism and $U_{(i,j,k)}$, $(i, j, k) \in Y_{lz,rd}$, is a class of $\Delta_{\varphi_{lz,rd}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. Similarly to (i), the second statement of (ii) can be proved.

(iii) Define a map

$$\varphi_{rd,rz} : Frt(Y) \rightarrow Y_{rd,rz} \quad \text{by}$$

$$w \mapsto (w^{[0]}, w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}), w \in Frt(Y).$$

It can be shown that $\varphi_{rd,rz}$ is a surjective homomorphism and $U_{[i,j,k]}$, $(i, j, k) \in Y_{rd,rz}$, is a class of $\Delta_{\varphi_{rd,rz}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. As before, the last statement of (iii) can be proved.

(iv) Define a map

$$\varphi_{lz,rz}^{rb} : Frt(Y) \rightarrow Y_{lz,rz}^{rb} \quad \text{by}$$

$$w \mapsto (w^{[0]}, w^{[1]}), w \in Frt(Y).$$

By direct verification we can claim that $\varphi_{lz,rz}^{rb}$ is a surjective homomorphism and $U_{[i,j]}$, $(i, j) \in Y_{lz,rz}^{rb}$, is a class of $\Delta_{\varphi_{lz,rz}^{rb}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. As above, the second statement of (iv) can be proved. \square

For all $i, j, k \in Y$ let

$$R_{(i,j,k)} = \{w \in Frt(Y) \mid$$

$$(\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, \widetilde{w}^{(1)}) = (i, j, k)\},$$

$$R_{[i,j,k]} = \{w \in Frt(Y) \mid$$

$$(\widetilde{w}^{(0)}, w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}) = (i, j, k)\},$$

$$R_{(i)} = \{w \in Frt(Y) \mid w^{[0]} = i\},$$

$$R_{[i]} = \{w \in Frt(Y) \mid w^{[1]} = i\},$$

$$R_{(i,j)} = \{w \in Frt(Y) \mid (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}) = (i, j)\},$$

$$R_{[i,j]} = \{w \in Frt(Y) \mid (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[1]}) = (i, j)\},$$

$$R_{(i,j)} = \{w \in Frt(Y) \mid (w^{[0]}, \widetilde{w}^{(1)}) = (i, j)\},$$

$$R_{[i,j]} = \{w \in Frt(Y) \mid (w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}) = (i, j)\}.$$

Consider the set

$$R_l^A = \{w \in R_l \mid \widetilde{c}(w) = A\}$$

for $A \in B_l^*(Y)$ and $l \in L \setminus \{(i, j, k, s)\}$.

Theorem 3.2. *Let $Frt(Y)$ be the free trioid.*

(i) $Frt(Y)$ is a triband $(FRct(Y))^\perp$ of subtrioids $R_{(i,j,k)}$, $(i, j, k) \in (FRct(Y))^\perp$. Every trioid $R_{(i,j,k)}$, $(i, j, k) \in (FRct(Y))^\perp$, is a semilattice $B_{(i,j,k)^*}(Y)$ of subtrioids $R_{(i,j,k)}^A$, $A \in B_{(i,j,k)^*}(Y)$.

(ii) $Frt(Y)$ is a triband $(FRct(Y))^\vdash$ of subtrioids $R_{[i,j,k]}$, $(i, j, k) \in (FRct(Y))^\vdash$. Every trioid $R_{[i,j,k]}$, $(i, j, k) \in (FRct(Y))^\vdash$, is a semilattice $B_{[i,j,k]^*}(Y)$ of subtrioids $R_{[i,j,k]}^A$, $A \in B_{[i,j,k]^*}(Y)$.

(iii) $Frt(Y)$ is a triband $(Y_{lz,rz})^\perp$ of subtrioids $R_{(i)}$, $i \in (Y_{lz,rz})^\perp$. Every trioid $R_{(i)}$, $i \in (Y_{lz,rz})^\perp$, is a semilattice $B_{\{i\}}(Y)$ of subtrioids $R_{(i)}^A$, $A \in B_{\{i\}}(Y)$.

(iv) $Frt(Y)$ is a triband $(Y_{lz,rz})^\vdash$ of subtrioids $R_{[i]}$, $i \in (Y_{lz,rz})^\vdash$. Every trioid $R_{[i]}$, $i \in (Y_{lz,rz})^\vdash$, is a semilattice $B_{\{i\}}(Y)$ of subtrioids $R_{[i]}^A$, $A \in B_{\{i\}}(Y)$.

Proof. (i) Define a map

$$\varphi_{FRct}^\perp : Frt(Y) \rightarrow (FRct(Y))^\perp \quad \text{by}$$

$$w \mapsto (\tilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, \tilde{w}^{(1)}), w \in Frt(Y).$$

For any $w, u \in Frt(Y)$ obtain

$$\begin{aligned} (w \dashv u)\varphi_{FRct}^\perp &= (w\tilde{u})\varphi_{FRct}^\perp = \\ &= (\tilde{w}\tilde{u}^{(0)}, (w\tilde{u})^{[0]}, \tilde{w}\tilde{u}^{(1)}) = \\ &= ((\tilde{w}\tilde{u})^{(0)}, w^{[0]}, (\tilde{w}\tilde{u})^{(1)}) = \\ &= (\tilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, \tilde{u}^{(1)}) = \\ &= (\tilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, \tilde{w}^{(1)}) \dashv (\tilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, \tilde{u}^{(1)}) = \\ &= w\varphi_{FRct}^\perp \dashv u\varphi_{FRct}^\perp, \\ (w \perp u)\varphi_{FRct}^\perp &= (wu)\varphi_{FRct}^\perp = \\ &= (\tilde{w}\tilde{u}^{(0)}, (wu)^{[0]}, \tilde{w}\tilde{u}^{(1)}) = \\ &= ((\tilde{w}\tilde{u})^{(0)}, w^{[0]}, (\tilde{w}\tilde{u})^{(1)}) = \\ &= (\tilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, \tilde{u}^{(1)}) = \\ &= (\tilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, \tilde{w}^{(1)}) \perp (\tilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, \tilde{u}^{(1)}) = \\ &= (\tilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, \tilde{w}^{(1)}) \perp (\tilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, \tilde{u}^{(1)}) = \\ &= w\varphi_{FRct}^\perp \perp u\varphi_{FRct}^\perp. \end{aligned}$$

Similarly for \vdash . So, φ_{FRct}^\perp is a surjective homomorphism. It is evident that $R_{(i,j,k)}$, $(i, j, k) \in (FRct(Y))^\perp$, is a class of $\Delta_{\varphi_{FRct}^\perp}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. Furthermore, it is not

hard to prove that for every $(i, j, k) \in (FRct(Y))^\perp$ the map

$$R_{(i,j,k)} \rightarrow B_{(i,j,k)^*}(Y) : w \mapsto \tilde{c}(w)$$

is a homomorphism. Hence $R_{(i,j,k)}$ is a semilattice $B_{(i,j,k)^*}(Y)$ of subtrioids $R_{(i,j,k)}^A$, $A \in B_{(i,j,k)^*}(Y)$.

(ii) Define a map

$$\begin{aligned} \varphi_{FRct}^\vdash : Frt(Y) &\rightarrow (FRct(Y))^\vdash \quad \text{by} \\ w &\mapsto (\tilde{w}^{(0)}, w^{[1]}, \tilde{w}^{(1)}), w \in Frt(Y). \end{aligned}$$

It is not difficult to show that φ_{FRct}^\vdash is a surjective homomorphism and $R_{[i,j,k]}$, $(i, j, k) \in (FRct(Y))^\vdash$, is a class of $\Delta_{\varphi_{FRct}^\vdash}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. Similarly to the case (i), the second assertion of (ii) can be proved.

(iii) Define a map

$$\begin{aligned} \varphi_{lz,rz}^\perp : Frt(Y) &\rightarrow (Y_{lz,rz})^\perp \quad \text{by} \\ w &\mapsto w^{[0]}, w \in Frt(Y). \end{aligned}$$

We can show that $\varphi_{lz,rz}^\perp$ is a surjective homomorphism and $R_{(i)}$, $i \in (Y_{lz,rz})^\perp$, is a class of $\Delta_{\varphi_{lz,rz}^\perp}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. Similarly to (i), the last statement of (iii) can be proved.

(iv) Define a map

$$\begin{aligned} \varphi_{lz,rz}^\vdash : Frt(Y) &\rightarrow (Y_{lz,rz})^\vdash \quad \text{by} \\ w &\mapsto w^{[1]}, w \in Frt(Y). \end{aligned}$$

It is immediate to check that $\varphi_{lz,rz}^\vdash$ is a surjective homomorphism and $R_{[i]}$, $i \in (Y_{lz,rz})^\vdash$, is a class of $\Delta_{\varphi_{lz,rz}^\vdash}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. As above, the second statement of (iv) can be proved. \square

Theorem 3.3. *Let $Frt(Y)$ be the free trioid.*

(i) $Frt(Y)$ is a triband $(Y_{lz,rb})^\perp$ of subtrioids $R_{(i,j)}$, $(i, j) \in (Y_{lz,rb})^\perp$. Every trioid $R_{(i,j)}$, $(i, j) \in (Y_{lz,rb})^\perp$, is a semilattice $B_{(i,j)^*}(Y)$ of subtrioids $R_{(i,j)}^A$, $A \in B_{(i,j)^*}(Y)$.

(ii) $Frt(Y)$ is a triband $(Y_{lz,rb})^\vdash$ of subtrioids $R_{[i,j]}$, $(i, j) \in (Y_{lz,rb})^\vdash$. Every trioid $R_{[i,j]}$, $(i, j) \in (Y_{lz,rb})^\vdash$, is a semilattice $B_{[i,j]^*}(Y)$ of subtrioids $R_{[i,j]}^A$, $A \in B_{[i,j]^*}(Y)$.

(iii) $Frt(Y)$ is a triband $(Y_{rb,rz})^\perp$ of subtrioids $R_{(i,j)}$, $(i, j) \in (Y_{rb,rz})^\perp$. Every trioid $R_{(i,j)}$, $(i, j) \in (Y_{rb,rz})^\perp$, is a semilattice $B_{(i,j)^*}(Y)$ of subtrioids $R_{(i,j)}^A$, $A \in B_{(i,j)^*}(Y)$.

(iv) $Frt(Y)$ is a triband $(Y_{rb,rz})^\vdash$ of subtrioids $R_{[i,j]}$, $(i, j) \in (Y_{rb,rz})^\vdash$. Every trioid $R_{[i,j]}$, $(i, j) \in (Y_{rb,rz})^\vdash$, is a semilattice $B_{[i,j]^*}(Y)$ of subtrioids $R_{[i,j]}^A$, $A \in B_{[i,j]^*}(Y)$.

Proof. (i) Define a map

$$\varphi_{l_z,rb}^{-1} : Frt(Y) \rightarrow (Y_{l_z,rb})^{-1} \text{ by}$$

$$w \mapsto (\tilde{w}^{(0)}, w^{[0]}), w \in Frt(Y).$$

We can directly prove that $\varphi_{l_z,rb}^{-1}$ is a surjective homomorphism and $R_{(i,j)}$, $(i,j) \in (Y_{l_z,rb})^{-1}$, is a class of $\Delta_{\varphi_{l_z,rb}^{-1}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. Similarly to (i) from Theorem 3.1, the second statement of (i) can be proved.

(ii) Define a map

$$\varphi_{l_z,rb}^{\vdash} : Frt(Y) \rightarrow (Y_{l_z,rb})^{\vdash} \text{ by}$$

$$w \mapsto (\tilde{w}^{(0)}, w^{[1]}), w \in Frt(Y).$$

It can easily be checked that $\varphi_{l_z,rb}^{\vdash}$ is a surjective homomorphism and $R_{[i,j]}$, $(i,j) \in (Y_{l_z,rb})^{\vdash}$, is a class of $\Delta_{\varphi_{l_z,rb}^{\vdash}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. In the same way as above, the second assertion of (ii) can be proved.

(iii) Define a map

$$\varphi_{rb,rz}^{-1} : Frt(Y) \rightarrow (Y_{rb,rz})^{-1} \text{ by}$$

$$w \mapsto (w^{[0]}, \tilde{w}^{(1)}), w \in Frt(Y).$$

By immediate verification we can state that $\varphi_{rb,rz}^{-1}$ is a surjective homomorphism and $R_{(i,j)}$, $(i,j) \in (Y_{rb,rz})^{-1}$, is a class of $\Delta_{\varphi_{rb,rz}^{-1}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. As before, the last assertion of (iii) can be proved.

(iv) Define a map

$$\varphi_{rb,rz}^{\vdash} : Frt(Y) \rightarrow (Y_{rb,rz})^{\vdash} \text{ by}$$

$$w \mapsto (w^{[1]}, \tilde{w}^{(1)}), w \in Frt(Y).$$

One can prove that $\varphi_{rb,rz}^{\vdash}$ is a surjective homomorphism and $R_{[i,j]}$, $(i,j) \in (Y_{rb,rz})^{\vdash}$, is a class of $\Delta_{\varphi_{rb,rz}^{\vdash}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. Similarly to (i) from Theorem 3.1, the second statement of (iv) can be proved. \square

The following structure theorem gives decompositions of $Frt(Y)$ into bands of subtrioids.

Theorem 3.4. *Let $Frt(Y)$ be the free trioid.*

(i) $Frt(Y)$ is a rectangular band Y_{rb} of subtrioids $U_{(i,j)}$, $(i,j) \in Y_{rb}$. Every trioid $U_{(i,j)}$, $(i,j) \in Y_{rb}$, is a semilattice $B_{(i,j)^*}(Y)$ of subtrioids $U_{(i,j)}^A$, $A \in B_{(i,j)^*}(Y)$.

(ii) $Frt(Y)$ is a left band Y_{l_z} of subtrioids $U_{(i)}$, $i \in Y_{l_z}$. Every trioid $U_{(i)}$, $i \in Y_{l_z}$, is a semilattice $B_{\{i\}}(Y)$ of subtrioids $U_{(i)}^A$, $A \in B_{\{i\}}(Y)$.

(iii) $Frt(Y)$ is a right band Y_{rz} of subtrioids $U_{[i]}$, $i \in Y_{rz}$. Every trioid $U_{[i]}$, $i \in Y_{rz}$, is a semilattice $B_{\{i\}}(Y)$ of subtrioids $U_{[i]}^A$, $A \in B_{\{i\}}(Y)$.

Proof. (i) Define a map

$$\varphi_{rb} : Frt(Y) \rightarrow Y_{rb} \text{ by}$$

$$w \mapsto (\tilde{w}^{(0)}, \tilde{w}^{(1)}), w \in Frt(Y).$$

One can verify that φ_{rb} is a surjective homomorphism and $U_{(i,j)}$, $(i,j) \in Y_{rb}$, is a class of $\Delta_{\varphi_{rb}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. Similarly to (i) from Theorem 3.1, the last assertion of (i) can be proved.

(ii) Define a map

$$\varphi_{l_z} : Frt(Y) \rightarrow Y_{l_z} \text{ by}$$

$$w \mapsto \tilde{w}^{(0)}, w \in Frt(Y).$$

It is easily shown that φ_{l_z} is a surjective homomorphism and $U_{(i)}$, $i \in Y_{l_z}$, is a class of $\Delta_{\varphi_{l_z}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. As above, the second statement of (ii) can be proved.

(iii) Define a map

$$\varphi_{rz} : Frt(Y) \rightarrow Y_{rz} \text{ by}$$

$$w \mapsto \tilde{w}^{(1)}, w \in Frt(Y).$$

It can easily be checked that φ_{rz} is a surjective homomorphism and $U_{[i]}$, $i \in Y_{rz}$, is a class of $\Delta_{\varphi_{rz}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. As before, the last assertion of (iii) can be proved. \square

If ρ is a congruence on a trioid $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ such that operations of $(T, \dashv, \vdash, \perp)_{/\rho}$ coincide and it is a rectangular band (respectively, left zero semigroup, right zero semigroup), then we say that ρ is a rectangular band congruence (respectively, left zero congruence, right zero congruence).

From Theorem 3.4 we obtain

Corollary 1. *Let $Frt(Y)$ be the free trioid.*

(i) $\Delta_{\varphi_{rb}}$ is the least rectangular band congruence on $Frt(Y)$.

(ii) $\Delta_{\varphi_{l_z}}$ is the least left zero congruence on $Frt(Y)$.

(iii) $\Delta_{\varphi_{rz}}$ is the least right zero congruence on $Frt(Y)$.

Proof. (i) It is well-known that Y_{rb} is the free rectangular band. By Theorem 3.4 (i) we obtain (i).

The proofs of (ii) and (iii) are similar. \square

Список використаних джерел

1. *Novikov B.V.* On decomposition of Moufang groupoids / B.V. Novikov // *Quasigroups and Related Systems*. – 2008. – **16**. – № 1. – P. 97 – 101.
2. *Clifford A.H.* Bands of semigroups / A.H. Clifford // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 1954. – **5**. – P. 499 – 504.
3. *Zhuchok A.V.* Dibands of subdemonoids / A.V. Zhuchok // *Mat. Stud.* – 2010. – **33**. – P. 120 – 124.
4. *Loday J.-L.* Trialgebras and families of polytopes / J.-L. Loday and M.O. Ronco // *Contemp. Math.* – 2004. – **346**. – P. 369 – 398.
5. *Zhuchok A.V.* Free trioids / A.V. Zhuchok // *Visnyk Kyiv. Univ. Ser. Phis.-Math. Nauku.* – 2010. – **4**. – P. 23 – 26 (in Ukrainian).
6. *Zhuchok A.V.* Semiretractions of trioids / A.V. Zhuchok // *Ukr. Math. J.* – 2014. – **66**. – № 2. – P. 218 – 231.
7. *Loday J.-L.* Dialgebras / J.-L. Loday // In: *Dialgebras and related operads*. – *Lect. Notes Math.* – 2001. – **1763**. – Springer-Verlag, Berlin. – P. 7 – 66.
8. *Zhuchok A.V.* Dimonoids / A.V. Zhuchok // *Algebra and Logic*. – 2011. – **50**. – № 4. – P. 323 – 340.
9. *Zhuchok A.V.* Free rectangular dibands and free dimonoids / A.V. Zhuchok // *Algebra and Discrete Math.* – 2011. – **11**. – № 2. – P. 92 – 111.
10. *Zhuchok A.V.* Tribands of subtrioids / A.V. Zhuchok // *Proc. Inst. Applied Math. and Mech.* – 2010. – **21**. – P. 98 – 106.

References

1. NOVIKOV B.V. (2008), On decomposition of Moufang groupoids, *Quasigroups and Related Systems*, **v.16**, № 1, pp. 97 – 101.
2. CLIFFORD A.H. (1954), Bands of semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **v.5**, pp. 499 – 504.
3. ZHUCHOK A.V. (2010), Dibands of subdemonoids, *Mat. Stud.*, **v.33**, pp. 120 – 124.
4. LODAY J.-L. and RONCO M.O. (2004), Trialgebras and families of polytopes, *Contemp. Math.*, **v.346**, pp. 369 – 398.
5. ZHUCHOK A.V. (2010), Free trioids, *Visnyk Kyiv. Univ. Ser. Phis.-Math. Nauku*, **v.4**, pp. 23 – 26 (in Ukrainian).
6. ZHUCHOK A.V. (2014), Semiretractions of trioids, *Ukr. Math. J.*, **v.66**, № 2, pp. 218 – 231.
7. LODAY J.-L. (2001), Dialgebras, In: *Dialgebras and related operads*, *Lect. Notes Math.*, **v.1763**, Springer-Verlag, Berlin, pp. 7 – 66.
8. ZHUCHOK A.V. (2011), Dimonoids, *Algebra and Logic*, **v.50**, № 4, pp. 323 – 340.
9. ZHUCHOK A.V. (2011), Free rectangular dibands and free dimonoids, *Algebra and Discrete Math.*, **v.11**, № 2, pp. 92 – 111.
10. ZHUCHOK A.V. (2010), Tribands of subtrioids, *Proc. Inst. Applied Math. and Mech.*, **v.21**, pp. 98 – 106.

Received: 24.07.2014