О.М. Літвінова
*Луганський національний університет імені Тараса Шевченка*

# АНАЛІЗ ЕКОНОМІКИ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИНАМІЗОВАНОЇ ФУНКЦІЇ КОББА-ДУГЛАСА

Одним з найважливіших напрямків практичного застосування виробничі функції є оптимальне плануванням. Застосування виробничі функції у прогнозуванні пов'язано, як правило, із пропозицією про те, що тенденції, залежності і закономірності, що склалися в минулому, в основному зберігаються й у майбутньому.

Розраховуються параметри відповідної функції. Припускаючи, що описуваний цією функцією закон росту збережеться і на деякому майбутньому відрізку часу, можна для фіксованих точок або інтервалів часу на цьому відрізку одержати очікувані значення досліджуваного показника.

Динаміка показника може моделюватися різними функціями. За даними динамічних рядів визначим параметри виробничі функції Кобба-Дугласа, що зв'язує величину національного доходу $y$ з обсягами трудових ресурсів $L$, виробничих фондів *К* и природних ресурсів $S$.

$$y = a_0 L^{\alpha_1} K^{\alpha_2} S^{a_0} \quad (1)$$

Окремими розрахунками на прогнозований період визначаються чисельність трудових ресурсів у матеріальному виробництві, обсяг виробничих фондів, величині земельних і інших експлуатованих ресурсів. Тоді виробничі

Однорідна 1-й ступеня статична двухресурсная функція Кобба-Дугласа має вигляд $y = a_0 L^{\alpha_1} K^{1-\alpha_1}$ (2)

де *у*- обсяг виробництва, *L*- витрати праці, *K*- основний капітал, $a_0$ і $\alpha_1$- параметри.

Функція (2) дозволяє досліджувати для галузей або всього народного господарства показники середньої і граничної ефективності ресурсів праці і виробничих фондів, граничні норми заміщення й інші показники. Становить інтерес аналіз на основі функції (2) таких важливих відносних показників, як *продуктивність праці (У/L), фондоозброєність (K/L), фондоємність продукції (ДО/У), фондовіддача (У/ДО)* безпосередньо з (2.9) маємо наступну залежність між фондоозброєністю праці і його продуктивністю

$$\frac{y}{K}=a_0\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\alpha_1} \quad (3)$$

Неважко одержати і залежність фондоємності продукції від фондоозброєності праці

$$\frac{K}{y}=\frac{1}{a_0}\left(\frac{K}{L}\right)^{-\alpha_1} \quad (4)$$

Вплив росту фондоозброєності і праці на продуктивність праці і фондоємність пов'язано з величиною коефіцієнта $\alpha_1$. Якщо $\alpha_1$ <0,5, то з ростом фондоозброєності порівняно швидко росте продуктивність праці і повільно фондоємність продукції. При $\alpha_1$>0,5 ситуація інша: (ріст фондоозброєності досить швидко збільшує фондоємність, а продуктивність праці відстає в темпах росту.

Введемо у виробничу функцію експонентну тенденцію, що залежить від *часу,* як показник впливу технологічного прогресу. З урахуванням цієї модифікації динамізована функція Кобба-Дугласа має вигляд

$$y(t)=a_0L(t)^{\alpha_1}K(t)^{\alpha_2}e^{\Pi t} \quad (5)$$

де *е* - число Ейлера; *П* - параметр, що характеризує швидкість технологічного процесу; *t*- час

Застосування функції (5) дозволяє дати оцінку темпу технологічного прогресу і його вплив на ріст обсягу виробництва. Провівши стосовно функції (5) перетворення одержимо наступне рівняння економічного росту

$$g_y=\alpha_1g_L+\alpha_2g_K+\Pi \quad (6)$$

У цьому рівняння $g_y$ - темп приросту продукту (кінцевого продукту народного господарства, продукції галузі і т.п.), він визначається темпами приросту трудових витрат $g_L$, і виробничих фондів $g_K$ , а також темпом *П,* відображаючим розвиток у часі технологічного прогресу.

Розглянемо застосування функції у **моделі Рамсея.** У кожен момент часу випуск *y* поділяється на дві частини: *С*– споживання випуску системи; *I*– капіталовкладення (інвестиції) у розвиток системи

$$y=C(t)+I(t).$$

Або, увівши коефіцієнт відрахування на розвиток системи $S(t)$:

$$0 \le S(t) \le 1,$$

можна записати у наступній формі

$$y(t) = (1 - S)y(t) + Sy(t).$$

Передбачається, що трудові ресурси поводяться так само, як і населення країни:

$$L(t) = L_0 e^{\eta t}$$

Зібравши всі рівняння воєдино і спрощуючи, одержимо наступну модель розвитку системи:

$$\begin{cases} \dot{k} = Sf(k) - \eta k, \\ C = (1 - S) f(k), \\ k(0) = k_0. \end{cases} \qquad (7)$$

Питомий валовий продукт системи (приходиться на одного працюючого) розподіляється таким чином:

1. питоме споживання $c(t)$;
2. підтримка питомої капіталоозброєності на колишньому рівні – $\lambda k(t)$;
3. чистий приріст питомої капіталоозброєності (питомих основних фондів).

Визначимо оптимальні точки розвитку системи для умов збалансованого росту $\frac{\partial}{\partial k}[f(k) - \lambda k] = 0,$

відкіля одержуємо рівняння для визначення $\widehat{k}$

$$f'(k) = \mu + \eta. \qquad (8)$$

Задача оптимізації складається на

$$\begin{aligned} &\dot{k} = f(k) - \lambda k - c, \\ &k(t_0) = k_0. \end{aligned} \qquad (9)$$

Завдання оптимізації полягає у виборі оптимальної траєкторії споживання в заданому інтервалі часу:

$$c(t) = \{c(t) / t_0 \le t \le t_1\}.$$

Необхідно вибрати оптимальну траєкторію споживання, таку що

$$\begin{aligned} &\max_{\{c(t)\}} W = \left\{ \int_{t_0}^{\infty} e^{-s(t-t_0)} u(c(t)) dt \right\}, \\ &\dot{k} = f(k) - \lambda k - c, \\ &k(t_0) = k_0, \\ &0 \le c \le f(k). \end{aligned} \qquad (10)$$

Використовуючи принцип максимуму Понтрягіна і функцію Гамільтона розраховуємо оптимальне економічне зростання.

## Список використаної літератури


1. Канторович Л.В., Горстко А.Б. Оптимальные решения в экономике. – М.: «Наука», 1972. – 147-165, 215-226.
2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М.: «Наука», 1969.
3. Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. – М.: «Наука», 1969.
4. Ризун В.И. Введение в теорию систем и системный анализ. – К.: ИСМО, 1999.