Ю. В. Жучок, Е. А. Тоичкина, Полугруппы эндотопизмов отношения эквивалентности, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 5, 37–54

УДК 512.53

Ю. В. Жучок, Е. А. Тоичкина

Полугруппы эндотопизмов отношения эквивалентности

В работе изучаются полугруппы эндотопизмов шести типов для произвольного отношения эквивалентности. Описаны необходимые и достаточные условия существования всех таких эндотопизмов. Найдены условия регулярности и корегулярности каждой из полугрупп эндотопизмов заданного типа. Определено понятие эндотипа бинарного отношения относительно его эндотопизмов и вычислен эндотип произвольного отношения эквивалентности.

Библиография: 26 названий.

Ключевые слова: эндотопизм, отношение эквивалентности, регулярность, корегулярность, эндотип.

DOI: 10.4213/sm8325

§ 1. Введение

Полугруппы эндоморфизмов алгебраических систем и их всевозможные свойства изучались многими авторами (см., например, [1]–[4]). К числу первых результатов об эндоморфизмах бинарных отношений относится теорема Л. М. Глускина (см. [5]) об определяемости отношения квазипорядка соответствующей ему полугруппой эндоморфизмов. Далее в этом направлении были получены многочисленные результаты для различных классов отношений и, в частности, обобщения и аналоги ряда классических результатов. Например, Л. Б. Шнеперман (см. [6]) показал, что результат Глускина невозможно перенести на класс всех рефлексивных бинарных отношений, в то время как в [7] упомянутый результат был распространен на так называемые плотные отношения, а в [8] – на некоторый подкласс рефлексивных бинарных отношений. Подобные результаты для определенных μ-арных отношений были получены Б. В. Поповым (см. [9]), который ввел понятие эндотопизма, обобщающее эндоморфизм μ-арного отношения.

Понятие эндотопизма является тесно связанным с понятием соответствия, введенным А. Г. Курошем (см. [10; § 17]) для произвольной универсальной алгебры. Как известно, множество всех эндотопизмов отношения любой арности является полугруппой относительно композиции преобразований. Оказывается, что полугруппа эндотопизмов любого бинарного отношения на некотором множестве есть соответствие симметрической полугруппы на том же множестве. Более того, для каждой эквивалентности полугруппа всех ее эндотопизмов является соответствием полугруппы эндоморфизмов той же эквивалентности. Различные полугруппы эндотопизмов произвольного отношения эквивалентности и являются основным объектом изучения данной работы.

Известно, что полугруппа всех преобразований произвольного множества регулярна. Однако не каждая подполугруппа полугруппы преобразований обладает свойством регулярности. Поэтому естественным является вопрос о регулярности различных ее подполугрупп. Регулярность моноида сильных эндоморфизмов конечных неориентированных графов без кратных ребер была показана в [11], конечных n-однородных гиперграфов – в [12], а бесконечных неориентированных графов и гиперграфов – в [13]. Условия регулярности полугрупп эндоморфизмов отношений эквивалентности были установлены в [14], полугрупп эндоморфизмов упорядоченных и квазиупорядоченных множеств – в [15], [16], а моноидов эндоморфизмов счетных цепей – в [17]. Важным подклассом регулярных полугрупп является класс корегулярных полугрупп. Понятие корегулярности на полугруппах было введено Д. Биджевым и К. Тодоровым (см. [18]). Исследования в этом направлении продолжили Дж. Чвалина, К. Матоускова (см. [19]), получив описание корегулярности полугруппы эндоморфизмов унаров, а также И. Димитрова, Дж. Копиц (см. [20]), которые охарактеризовали все корегулярные подполугруппы порядка не больше трех для конечной полугруппы преобразований. В настоящей работе мы изучаем условия регулярности и корегулярности разных полугрупп эндотопизмов произвольного отношения эквивалентности.

Другим понятием, которое изучается в этой работе, является понятие эндотипа. М. Бетчер и У. Кнауэр (см. [21]) в зависимости от накладываемых условий на эндоморфизм симметрического бинарного отношения выделили пять типов эндоморфизмов, с помощью которых определили эндотип данного отношения. Позже понятие эндотипа было определено для отношений произвольной арности (см. [22]). Используя это понятие, можно классифицировать отношения по их эндотипу относительно эндоморфизмов. Так, эндотипы обобщенных полигонов были найдены в [23], дополнений конечного пути – в [24], а графов N-призм – в [25]. Здесь мы распространяем определения, принятые в [21] для эндоморфизмов, на случай эндотопизмов бинарных отношений и классифицируем все отношения эквивалентности по их эндотипу относительно эндотопизмов.

Работа построена следующим образом. В § 2 приведены определения шести типов эндотопизмов произвольного бинарного отношения и примеры эндотопизмов каждого типа. В § 3 описаны соответствующие эндотопизмы произвольного отношения эквивалентности, найдены необходимые и достаточные условия, при которых множества указанных эндотопизмов являются полугруппами. В § 4 и § 5 установлены условия регулярности и корегулярности данных полугрупп эндотопизмов отношения эквивалентности (теоремы 1, 2). В § 6 определено понятие эндотипа бинарного отношения относительно его эндотопизмов и вычислены всевозможные значения эндотипа произвольного отношения эквивалентности (теорема 3).

§ 2. Основные понятия

Пусть X – произвольное непустое множество, ρ – бинарное отношение на множестве X.

Определение 1. Упорядоченная пара (φ, ψ) преобразований φ и ψ множества X называется *эндотопизмом* отношения ρ, если из $(x, y) \in \rho$ следует, что $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ при любых $x, y \in X$. Множество всех эндотопизмов бинарного отношения ρ относительно операции покомпонентного умножения образует полугруппу, которую будем обозначать через $\mathrm{Et}(\rho)$.

Определение 2. Эндотопизм (φ, ψ) отношения $\rho \subseteq X \times X$ будем называть *полусильным эндотопизмом*, если из $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ следует, что существуют такие $x' \in x\varphi\varphi^{-1}$, $y' \in y\psi\psi^{-1}$, что $(x', y') \in \rho$. Множество всех полусильных эндотопизмов отношения ρ обозначим через $\mathrm{HEt}(\rho)$.

Определение 3. Эндотопизм (φ, ψ) отношения $\rho \subseteq X \times X$ назовем *локально сильным эндотопизмом*, если из $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ следует, что для каждого $x' \in x\varphi\varphi^{-1}$ найдется такой $y' \in y\psi\psi^{-1}$, что $(x', y') \in \rho$, и аналогично для каждого прообраза $y' \in y\psi\psi^{-1}$. Множество всех локально сильных эндотопизмов отношения ρ будем обозначать как $\mathrm{LEt}(\rho)$.

Определение 4. Назовем эндотопизм (φ, ψ) отношения $\rho \subseteq X \times X$ *квазисильным эндотопизмом*, если из $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ следует, что существует такой $x' \in x\varphi\varphi^{-1}$, который находится в отношении ρ с каждым прообразом из $y\psi\psi^{-1}$, и аналогично для подходящего прообраза $y' \in y\psi\psi^{-1}$. Обозначим множество всех квазисильных эндотопизмов бинарного отношения ρ через $\mathrm{QEt}(\rho)$.

Определение 5. Будем называть эндотопизм (φ, ψ) отношения $\rho \subseteq X \times X$ *сильным эндотопизмом*, если из $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ следует, что $(x, y) \in \rho$ при любых $x, y \in X$. Множество всех сильных эндотопизмов отношения ρ относительно операции покомпонентного умножения образует моноид, который будем обозначать как $\mathrm{SEt}(\rho)$.

Определение 6. Упорядоченная пара (φ, ψ) подстановок φ и ψ множества X называется *автотопизмом* отношения $\rho \subseteq X \times X$, если $(x, y) \in \rho$ тогда и только тогда, когда $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ при любых $x, y \in X$. Множество всех автотопизмов отношения ρ относительно операции покомпонентного умножения образует группу, которую будем обозначать через $\mathrm{At}(\rho)$.

Таким образом, для произвольного бинарного отношения ρ на множестве X имеет место цепочка включений

$$\mathrm{Et}(\rho) \supseteq \mathrm{HEt}(\rho) \supseteq \mathrm{LEt}(\rho) \supseteq \mathrm{QEt}(\rho) \supseteq \mathrm{SEt}(\rho) \supseteq \mathrm{At}(\rho).$$

Рассмотрим примеры эндотопизмов каждого типа для отношения

$$\rho = \{(a, a), (a, c), (c, b), (d, a), (a, d), (d, d)\},$$

определенного на множестве $X = \{a, b, c, d\}$:

$$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & d & a \end{pmatrix}\right) \in \mathrm{Et}(\rho) \setminus \mathrm{HEt}(\rho),$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & b & d & a \end{pmatrix}\right) \in \mathrm{HEt}(\rho) \setminus \mathrm{LEt}(\rho),$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & b & c & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & b & b & b \end{pmatrix}\right) \in \mathrm{LEt}(\rho) \setminus \mathrm{QEt}(\rho),$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & b & a & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & b & b \end{pmatrix}\right) \in \mathrm{QEt}(\rho) \setminus \mathrm{SEt}(\rho),$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & b & c & d \end{pmatrix}\right) \in \mathrm{SEt}(\rho) \setminus \mathrm{At}(\rho),$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & b & c & a \end{pmatrix}\right) \in \mathrm{At}(\rho).$$

Заметим, что множества $\mathrm{HEt}(\rho)$, $\mathrm{LEt}(\rho)$ и $\mathrm{QEt}(\rho)$ в общем случае не являются полугруппами. Понятно также, что если для эндотопизма (φ, ψ) отношения ρ выполняется равенство $\varphi = \psi$, то получаем соответствующее понятие эндоморфизма (см. [5]).

Для произвольного множества X отношения $i_X = \{(a, a) \mid a \in X\}$ и $\omega_X = X \times X$ называются соответственно *тождественным* и *универсальным* отношениями на X. Бинарное отношение ρ на множестве X называется *тривиальным*, если $\rho = i_X$ или $\rho = \omega_X$.

§ 3. Описание эндотопизмов различных типов

Пусть $\Im(X)$ – симметрическая полугруппа на множестве X, $\mathrm{Eq}(X)$ – множество всех эквивалентностей на X и $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$. Через X/α обозначается фактормножество множества X по эквивалентности α, а через $\overline{x}$ – класс эквивалентности, содержащий $x \in X$.

Эндотопизмы отношения эквивалентности описывает

Лемма 1. *Пара (τ, σ) преобразований множества X будет эндотопизмом эквивалентности $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$ тогда и только тогда, когда для каждого класса $A \in X/\alpha$ существует такой класс $B \in X/\alpha$, что $A\tau \subseteq B$ и $A\sigma \subseteq B$.*

Доказательство. Пусть $(\tau, \sigma) \in \mathrm{Et}(\alpha)$; тогда для любого $A \in X/\alpha$ и любых $x, y \in A$ из условия $(x, y) \in \alpha$ следует $(x\tau, y\sigma) \in \alpha$, откуда $x\tau, y\sigma \in B$ для некоторого $B \in X/\alpha$. В силу произвольности $x, y \in A$ имеем: $A\tau \subseteq B$ и $A\sigma \subseteq B$.

Предположим, что для преобразований $\tau, \sigma \in \Im(X)$ и каждого $A \in X/\alpha$ существует такой $B \in X/\alpha$, что $A\tau \subseteq B$ и $A\sigma \subseteq B$. Тогда для любых $x, y \in X$ из того, что $(x, y) \in \alpha$, следует $x, y \in C$, где $C \in X/\alpha$ – какой-либо класс, откуда по предположению $x\tau, y\sigma \in B$ для некоторого $B \in X/\alpha$. Таким образом, $(x\tau, y\sigma) \in \alpha$ и, как следствие, $(\tau, \sigma) \in \mathrm{Et}(\alpha)$.

Очевидной является следующая

Лемма 2. *Пара* (τ, σ) *подстановок множества* X *является автотопизмом эквивалентности* $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$ *тогда и только тогда, когда для каждого класса* $A \in X/\alpha$ *существует такой класс* $B \in X/\alpha$, *что* $A\tau = B$ *и* $A\sigma = B$.

Лемма 3. *Эндотопизм* (τ, σ) *отношения эквивалентности* $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$ *является сильным эндотопизмом тогда и только тогда, когда*

$$\tau^*\colon X/\alpha \to X/\alpha\colon \overline{a} \mapsto \overline{a\tau}$$

является инъективным преобразованием.

Доказательство. Пусть $(\tau, \sigma) \in \mathrm{SEt}(\alpha)$ и $\tau^* \in \Im(X/\alpha)$ такое, что $\overline{a}\tau^* = \overline{a\tau}$. Согласно лемме 1 τ^* есть корректно определенное преобразование. Предположим, что $\overline{a}\tau^* = \overline{b}\tau^*$ для некоторых различных $\overline{a}, \overline{b} \in X/\alpha$. Тогда $(a\tau, b\sigma) \in \alpha$, однако $(a, b) \notin \alpha$, а это противоречит тому, что (τ, σ) – сильный эндотопизм. Таким образом, τ^* – инъективное преобразование X/α. Обратное утверждение очевидно.

Заметим, что для любой эквивалентности $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$ полугруппа $\mathrm{Et}(\alpha)$, моноид $\mathrm{SEt}(\alpha)$ и группа $\mathrm{At}(\alpha)$ являются соответствиями (в смысле А. Г. Куроша; см. [10; § 17]) полугруппы эндоморфизмов той же эквивалентности, т.е. подалгебрами прямого произведения $\mathrm{End}(\alpha) \times \mathrm{End}(\alpha)$.

Лемма 4. *Эндотопизм* (τ, σ) *отношения эквивалентности* $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$ *является квазисильным эндотопизмом тогда и только тогда, когда* (τ, σ) – *сильный эндотопизм.*

Доказательство. Пусть $(\tau, \sigma) \in \mathrm{QEt}(\alpha)$ и $(a\tau, b\sigma) \in \alpha$ для некоторых $a, b \in X$. Поскольку (τ, σ) – квазисильный эндотопизм, найдется такой $a' \in a\tau\tau^{-1}$, что $(a', b') \in \alpha$ для любого $b' \in b\sigma\sigma^{-1}$. Понятно, что в таком случае для всех $x \in a\tau\tau^{-1}$, $y \in b\sigma\sigma^{-1}$ имеем $(x, y) \in \alpha$, в частности, и для $x = a$, $y = b$. Следовательно, $(\tau, \sigma) \in \mathrm{SEt}(\alpha)$. Обратное утверждение очевидно.

Следствие. *Для всякого отношения* $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{QEt}(\alpha) = \mathrm{SEt}(\alpha).$$

В дальнейшем будем рассматривать только полугруппу $\mathrm{SEt}(\alpha)$, подразумевая, что результаты, полученные для $\mathrm{SEt}(\alpha)$, справедливы и для $\mathrm{QEt}(\alpha)$.

Лемма 5. *Эндотопизм* (τ, σ) *отношения эквивалентности* $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$ *является локально сильным эндотопизмом тогда и только тогда, когда для любого* $A \in (X/\alpha)\tau^*$ *и для всех* $B, C \in A{\tau^*}^{-1}$

$$B\tau = C\tau, \qquad B\sigma = C\sigma.$$

Доказательство. Пусть $(\tau, \sigma) \in \mathrm{LEt}(\alpha)$ и существуют класс $A \in (X/\alpha)\tau^*$ и два его прообраза $B, C \in A{\tau^*}^{-1}$ такие, что $B\tau \neq C\tau$.

Рассмотрим следующие случаи.

1) $B\tau \cap C\tau = \varnothing$ и $B\sigma \cap C\sigma \neq \varnothing$.

Пусть $x \in B\tau$, $y \in B\sigma \cap C\sigma$; тогда $(x, y) \in \alpha$. Поскольку $x\tau^{-1} \cap C = \varnothing$, то для любых $y' \in C \cap y\sigma^{-1}$ и $x' \in x\tau^{-1}$ имеем $(x', y') \notin \alpha$, что противоречит условию $(\tau, \sigma) \in \mathrm{LEt}(\alpha)$.

2) $B\tau \cap C\tau \neq \varnothing$ и $B\sigma \cap C\sigma = \varnothing$ (аналогично случаю 1)).

3) $B\tau \cap C\tau = \varnothing$ и $B\sigma \cap C\sigma = \varnothing$.

Пусть $(x, y) \in \alpha$, где $x \in B\tau$, $y \in C\sigma$. Так как $y\sigma^{-1} \cap B = \varnothing$, то для любых $x' \in B \cap x\tau^{-1}$ и $y' \in y\sigma^{-1}$ имеем $(x', y') \notin \alpha$, а это противоречит тому, что $(\tau, \sigma) \in \mathrm{LEt}(\alpha)$.

4) $B\tau \cap C\tau \neq \varnothing$ и $B\sigma \cap C\sigma \neq \varnothing$.

Без потери общности пусть $B\tau \setminus C\tau \neq \varnothing$ и $x \in B\tau \setminus C\tau$, $y \in C\sigma$. Учитывая, что $x\tau^{-1} \cap C = \varnothing$, для всех $y' \in C \cap y\sigma^{-1}$ и $x' \in x\tau^{-1}$ получаем $(x', y') \notin \alpha$, что противоречит исходному условию $(\tau, \sigma) \in \mathrm{LEt}(\alpha)$. Таким образом, $B\tau = C\tau$. Аналогично доказывается, что $B\sigma = C\sigma$ для всех $B, C \in A\tau^{*-1}$.

Пусть теперь $(\tau, \sigma) \in \mathrm{Et}(\alpha)$ такой, что выполняется условие леммы, и $x\tau$, $y\sigma \in A$. Понятно, что $x\tau\tau^{-1} \subseteq \bigcup_{Y \in A\tau^{*-1}} Y$ и $y\sigma\sigma^{-1} \subseteq \bigcup_{Y \in A\tau^{*-1}} Y$. Поскольку $x\tau\tau^{-1} \cap Y \neq \varnothing$, $y\sigma\sigma^{-1} \cap Y \neq \varnothing$ для любого $Y \in A\tau^{*-1}$, то для всех $x' \in x\tau\tau^{-1} \cap Y$ существует $y' \in y\sigma\sigma^{-1} \cap Y$ такой, что $(x', y') \in \alpha$. Тогда для любого $x' \in x\tau\tau^{-1}$ найдется $y' \in y\sigma\sigma^{-1}$ такой, что $(x', y') \in \alpha$. И аналогично для каждого прообраза из $y\sigma\sigma^{-1}$. Следовательно, $(\tau, \sigma) \in \mathrm{LEt}(\alpha)$.

Множество $\mathrm{LEt}(\alpha)$ всех локально сильных эндотопизмов отношения эквивалентности α в общем случае не образует полугруппу. Рассмотрим следующий пример.

Пусть
$$X = \{a, b, c, d, e\}, \qquad \alpha = i_X \cup \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}.$$
Тогда
$$(\varphi, \psi) = \left(\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & d & c & d & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ d & c & d & c & a \end{pmatrix} \right) \in \mathrm{LEt}(\alpha),$$
$$(\varphi', \psi') = \left(\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & b & a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a & a & b & d \end{pmatrix} \right) \in \mathrm{LEt}(\alpha),$$
однако
$$\begin{aligned}(\varphi, \psi)(\varphi', \psi') &= (\varphi\varphi', \psi\psi') \\ &= \left(\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & d & c & d & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ d & c & d & c & a \end{pmatrix} \right) \\ &\qquad \times \left(\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & b & a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a & a & b & d \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a & b & a & b & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a & b & a & b \end{pmatrix} \right) \notin \mathrm{LEt}(\alpha).\end{aligned}$$

Лемма 6. *Множество* $\mathrm{LEt}(\alpha)$ *всех локально сильных эндотопизмов отношения эквивалентности* $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$ *является полугруппой тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:

(i) α – *тождественное отношение эквивалентности*;

(ii) *существует единственный класс* $A \in X/\alpha$ *такой, что* $|A| \geqslant 2$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{LEt}(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$, – полугруппа. Ясно, что при $|X| \leqslant 3$ любая эквивалентность из $\mathrm{Eq}(X)$ удовлетворяет одному из условий данной леммы. Предположим теперь, что $|X| > 3$ и в X/α найдутся по крайней мере два различных класса A и B мощности $\geqslant 2$. Возьмем $a, a' \in A$ и $b, b' \in B$ такие, что $a \neq a', b \neq b'$, и определим преобразования τ и σ множества X по правилу

$$Y\tau = \begin{cases} \{a, a'\} \text{ и } \tau|_{\{a,a'\}} \text{ – биекция,} & \text{если } Y \in \{A, B\},\\ \{b\} & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$Y\sigma = \begin{cases} \{a, a'\} \text{ и } \tau|_{\{a,a'\}} \text{ – биекция,} & \text{если } Y \in \{A, B\},\\ \{b'\} & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

для всех $Y \in X/\alpha$.

Согласно леммам 1 и 5 $(\tau, \sigma) \in \mathrm{LEt}(\alpha)$. Квадраты τ^2, σ^2 преобразований τ, σ удовлетворяют условиям

$$Y\tau^2 = \begin{cases} \{a, a'\}, & \text{если } Y \in \{A, B\},\\ \{b\tau\} & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$Y\sigma^2 = \begin{cases} \{a, a'\}, & \text{если } Y \in \{A, B\},\\ \{b'\sigma\} & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

для всех $Y \in X/\alpha$.

По лемме 1 $(\tau, \sigma)^2 = (\tau^2, \sigma^2) \in \mathrm{Et}(\alpha)$, а согласно лемме 5 $(\tau, \sigma)^2 \notin \mathrm{LEt}(\alpha)$, что противоречит исходному предположению.

Пусть теперь $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$ удовлетворяет условию (ii) данной леммы и $\alpha \neq \omega_X$. Предположим, что $(\tau_1, \sigma_1), (\tau_2, \sigma_2) \in \mathrm{LEt}(\alpha)$, но $(\tau_1\tau_2, \sigma_1\sigma_2) \notin \mathrm{LEt}(\alpha)$. Так как $(\tau_1\tau_2, \sigma_1\sigma_2) \in \mathrm{Et}(\alpha)$, то согласно лемме 5 найдутся хотя бы два различных класса $A, B \in X/\alpha$ таких, что $A\tau_1^*\tau_2^* = B\tau_1^*\tau_2^* = C$, где $C \in X/\alpha$, при этом $A\tau_1\tau_2 \neq B\tau_1\tau_2$ или $A\sigma_1\sigma_2 \neq B\sigma_1\sigma_2$. Для определенности будем считать, что $A\tau_1\tau_2 \neq B\tau_1\tau_2$. Понятно, что это возможно только в случае, если $|C| \geqslant 2$. Тогда, очевидно, $|C\tau_2^{-1}| \geqslant 2$. Учитывая условие на α, имеем $C\tau_2^{-1} = C$ и, следовательно, $A = B$, что противоречит предположению. Итак, $\mathrm{LEt}(\alpha)$ является полугруппой. Для $\alpha = i_X$ или $\alpha = \omega_X$, очевидно, $\mathrm{LEt}(\alpha)$ $(= \mathrm{Et}(\alpha))$ – полугруппа.

Множество всех эквивалентностей на X с n классами мощности $\geqslant 2$ обозначим через $\mathrm{Eq}^n(X)$.

Описание строения полусильных эндотопизмов произвольного отношения эквивалентности дает следующая

Лемма 7. *Эндотопизм* (τ,σ) *отношения эквивалентности* $\alpha\in\mathrm{Eq}(X)$ *является полусильным эндотопизмом тогда и только тогда, когда для любого* $A\in(X/\alpha)\tau^*$ *имеет место равенство*

$$(A\cap X\tau)\times(A\cap X\sigma)=\bigcup_{Y\in A\tau^{*-1}}(Y\tau\times Y\sigma).$$

Доказательство. Пусть $(\tau,\sigma)\in\mathrm{HEt}(\alpha)$ и условие леммы не выполняется. Понятно, что

$$(A\cap X\tau)\times(A\cap X\sigma)\supset\bigcup_{Y\in A\tau^{*-1}}(Y\tau\times Y\sigma)$$

для всех $A\in(X/\alpha)\tau^*$. Тогда существует пара $(x,y)\in\alpha$ такая, что

$$(x,y)\in(A\cap X\tau)\times(A\cap X\sigma),\qquad (x,y)\notin\bigcup_{Y\in A\tau^{*-1}}(Y\tau\times Y\sigma)$$

для некоторого $A\in(X/\alpha)\tau^*$. Отсюда $x\tau^{-1}\cap y\sigma^{-1}=\varnothing$ и, как следствие, для любых $x'\in x\tau^{-1}$, $y'\in y\sigma^{-1}$ имеем $(x',y')\notin\alpha$. Таким образом, $(\tau,\sigma)\notin\mathrm{HEt}(\alpha)$, что противоречит исходному условию.

Пусть теперь $(\tau,\sigma)\in\mathrm{Et}(\alpha)$ – такой эндотопизм, что условие леммы выполняется и $(x\tau,y\sigma)\in\alpha$. Тогда для некоторого $A\in(X/\alpha)\tau^*$ имеем $(x\tau,y\sigma)\in(A\cap X\tau)\times(A\cap X\sigma)$, откуда по предположению $(x\tau,y\sigma)\in(Y\tau\times Y\sigma)$ для подходящего $Y\in A\tau^{*-1}$. Это означает, что $x\tau\tau^{-1}\cap y\sigma\sigma^{-1}\neq\varnothing$ и, следовательно, найдутся $x'\in x\tau\tau^{-1}$, $y'\in y\sigma\sigma^{-1}$ такие, что $(x',y')\in\alpha$. Итак, $(\tau,\sigma)\in\mathrm{HEt}(\alpha)$.

Как показывает следующий пример, множество $\mathrm{HEt}(\alpha)$ всех полусильных эндотопизмов отношения эквивалентности α в общем случае не образует полугруппу.

Пусть $X=\{a,b,c,d\}$, $\alpha=i_X\cup\{(a,b),(b,a)\}$. Тогда

$$(\varphi,\psi)=\left(\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&b&d&c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b&c&d\\a&b&d&c\end{pmatrix}\right)\in\mathrm{HEt}(\alpha),$$
$$(\varphi',\psi')=\left(\begin{pmatrix}a&b&c&d\\a&b&a&b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b&c&d\\a&b&a&a\end{pmatrix}\right)\in\mathrm{HEt}(\alpha),$$

однако

$$\begin{aligned}&(\varphi,\psi)(\varphi,\psi)\\&\quad=\left(\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&b&d&c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b&c&d\\a&b&d&c\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix}a&b&c&d\\a&b&a&b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b&c&d\\a&b&a&a\end{pmatrix}\right)\\&\quad=\left(\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&b&b&a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b&c&d\\a&b&a&a\end{pmatrix}\right)\notin\mathrm{HEt}(\alpha).\end{aligned}$$

Лемма 8. *Множество* $\mathrm{HEt}(\alpha)$ *всех полусильных эндотопизмов отношения эквивалентности* $\alpha\in\mathrm{Eq}(X)$ *является полугруппой тогда и только тогда, когда* α *– тривиальное отношение эквивалентности.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{HEt}(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$, – полугруппа. Ясно, что при $|X| < 3$ каждое $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$ удовлетворяет условию данной леммы. Предположим, что $|X| \geqslant 3$ и α – нетривиальное отношение эквивалентности на X. Тогда существует хотя бы один класс $A \in X/\alpha$ такой, что $|A| \geqslant 2$. Возьмем различные элементы $a, b \in A$, $c \in X \setminus A$ и рассмотрим преобразования φ, ψ и φ', ψ' множества X, определенные следующим образом:

$$x\varphi = \begin{cases} c, & \text{если } x \in A, \\ a & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad x\psi = \begin{cases} c, & \text{если } x \in A, \\ b & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$
$$x\varphi' = \begin{cases} x, & \text{если } x \in A, \\ b & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad x\psi' = \begin{cases} x, & \text{если } x \in A, \\ a & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

для любого $x \in X$.

Согласно леммам 1 и 7 $(\varphi, \psi), (\varphi', \psi') \in \mathrm{HEt}(\alpha)$, при этом произведения $\varphi\varphi'$, $\psi\psi'$ удовлетворяют условиям

$$x\varphi\varphi' = \begin{cases} b, & \text{если } x \in A, \\ a & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad x\psi\psi' = \begin{cases} a, & \text{если } x \in A, \\ b & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

для любого $x \in X$.

По лемме 1 $(\varphi\varphi', \psi\psi') \in \mathrm{Et}(\alpha)$, а согласно лемме 7 $(\varphi\varphi', \psi\psi') \notin \mathrm{HEt}(\alpha)$. Следовательно, $\mathrm{HEt}(\alpha)$ не является полугруппой, что противоречит исходному предположению. Обратно, если $\alpha = i_X$ или $\alpha = \omega_X$, то $\mathrm{HEt}(\alpha)$ $(= \mathrm{Et}(\alpha))$ – полугруппа.

Заметим, что $\mathrm{LEt}(\alpha)$ и $\mathrm{HEt}(\alpha)$ как подполугруппы $\mathrm{Et}(\alpha)$ (т.е. когда α удовлетворяет условию леммы 6 и леммы 8 соответственно) являются соответствиями полугруппы $\mathrm{End}(\alpha)$.

§ 4. Регулярность полугрупп эндотопизмов

Определение 7. Полугруппа S называется *регулярной*, если для любого $a \in S$ существует такой $x \in S$, что $axa = a$ (см. [26; гл. 1, § 1.9]).

Очевидно, что для произвольного $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$ группа $\mathrm{At}(\alpha)$ регулярна. Регулярность полугрупп остальных типов эндотопизмов произвольного отношения эквивалентности устанавливает следующая

Теорема 1. (i) *Полугруппа* $\mathrm{Et}(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$, *регулярна тогда и только тогда, когда* α *– тривиальное отношение эквивалентности.*

(ii) *Полугруппа* $\mathrm{HEt}(\alpha)$, *где* α *– тривиальная эквивалентность, регулярна.*

(iii) *Полугруппа* $\mathrm{LEt}(\alpha)$, *где* $\alpha \in \mathrm{Eq}^1(X)$ *или* $\alpha = i_X$, *регулярна.*

(iv) *Полугруппа* $\mathrm{SEt}(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$, *регулярна тогда и только тогда, когда фактормножество* X/α *конечно.*

Доказательство. (i) Пусть $\alpha = i_X$; тогда полугруппа $\mathrm{Et}(\alpha) = i_{\mathfrak{I}(X)}$ изоморфна симметрической полугруппе $\mathfrak{I}(X)$, которая, как известно, регулярна

(см. [26; гл. 1, § 1.9]). Если $\alpha = \omega_X$, то полугруппа $\mathrm{Et}(\alpha) = \omega_{\mathfrak{T}(X)}$ регулярна как прямое произведение двух регулярных полугрупп.

Пусть теперь X – такое множество, что $|X| \geqslant 3$, α – нетривиальное отношение эквивалентности на X и $\mathrm{Et}(\alpha)$ – регулярная полугруппа. Понятно, что $|X/\alpha| \geqslant 2$, кроме того, существует хотя бы один класс $A \in X/\alpha$ такой, что $|A| \geqslant 2$. Возьмем различные элементы $a, b \in A$ и определим преобразования τ, σ множества X следующим образом:

$$x\tau = \begin{cases} a, & \text{если } x \in A, \\ b & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad x\sigma = \begin{cases} b, & \text{если } x \in A, \\ a & \text{в противном случае} \end{cases}$$

для любого $x \in X$.

Согласно лемме 1 $(\tau, \sigma) \in \mathrm{Et}(\alpha)$. Поскольку полугруппа $\mathrm{Et}(\alpha)$ регулярна, найдется $(\varphi, \psi) \in \mathrm{Et}(\alpha)$ такой, что $(\tau, \sigma)(\varphi, \psi)(\tau, \sigma) = (\tau\varphi\tau, \sigma\psi\sigma) = (\tau, \sigma)$. Отсюда для любых $x, y \in A$ имеем

$$(a, b) = (x\tau, y\sigma) = \bigl(x(\tau\varphi\tau), y(\sigma\psi\sigma)\bigr) = \bigl((x\tau)\varphi\tau, (y\sigma)\psi\sigma\bigr) = \bigl((a\varphi)\tau, (b\psi)\sigma\bigr),$$

следовательно, $a\varphi \in A$.

С другой стороны, из условия $\alpha \neq \omega_X$ следует, что найдется отличный от A класс $B \in X/\alpha$, для которого при любых $x', y' \in B$

$$(b, a) = (x'\tau, y'\sigma) = \bigl(x'(\tau\varphi\tau), y'(\sigma\psi\sigma)\bigr) = \bigl((x'\tau)\varphi\tau, (y'\sigma)\psi\sigma\bigr) = \bigl((b\varphi)\tau, (a\psi)\sigma\bigr),$$

откуда $b\varphi \notin A$.

Таким образом, $a, b \in A$ и $a\varphi \in A$, однако $b\varphi \notin A$, а это противоречит тому, что (φ, ψ) – эндотопизм эквивалентности α (см. лемму 1).

(ii) Регулярность полугруппы $\mathrm{HEt}(\alpha)$, $\alpha \in \{i_X, \omega_X\}$, следует из равенства $\mathrm{HEt}(\alpha) = \mathrm{Et}(\alpha)$ и утверждения (i).

(iii) Пусть $(\varphi, \psi) \in \mathrm{LEt}(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{Eq}^1(X)$. Если $\alpha = \omega_X$, то $\mathrm{LEt}(\alpha)$ регулярна, так как она совпадает с $\mathrm{Et}(\alpha)$.

Пусть теперь $\alpha \neq \omega_X$ и класс $A \in X/\alpha$ такой, что $|A| \geqslant 2$. Обозначим

$$\overline{X\varphi} = X \setminus X\varphi, \qquad \overline{X\psi} = X \setminus X\psi$$

и положим

$$X_1^{\varphi} = \{x \in \overline{X\varphi} \mid \overline{x}\varphi^{-1} = \varnothing\}, \qquad X_2^{\varphi} = \{x \in \overline{X\varphi} \mid \overline{x}\varphi^{-1} \neq \varnothing\},$$
$$X_1^{\psi} = \{x \in \overline{X\psi} \mid \overline{x}\psi^{-1} = \varnothing\}, \qquad X_2^{\psi} = \{x \in \overline{X\psi} \mid \overline{x}\psi^{-1} \neq \varnothing\}.$$

Возьмем элемент $b \in X$ такой, что $|\overline{b}| = 1$, и определим преобразования τ и σ множества X следующим образом:

$$x\tau = \begin{cases} a \in x\varphi^{-1}, & \text{если } x \in X\varphi, \\ b, & \text{если } x \in X_1^{\varphi}, \\ c \in \overline{x}\varphi^{-1} \colon \exists_{u \in \overline{x}}(u\tau = c), & \text{если } x \in X_2^{\varphi}, \end{cases}$$

$$x\sigma = \begin{cases} a' \in x\psi^{-1}, & \text{если } x \in X\psi, \\ b, & \text{если } x \in X_1^{\psi}, \\ c' \in \overline{x}\psi^{-1} \colon \exists_{v \in \overline{x}}(v\sigma = c'), & \text{если } x \in X_2^{\psi}. \end{cases}$$

Согласно лемме 1 $(\tau,\sigma)\in \mathrm{Et}(\alpha)$. Поскольку при этом $\tau^*=\sigma^*$, достаточно охарактеризовать одно из преобразований эндотопизма (τ,σ), например τ. Рассмотрим такие случаи.

1) $|A\cap X\varphi|=0$. Тогда $A\subseteq X_1^{\varphi}$, и по построению τ имеем $|Y\tau|=1$ для любого $Y\in X/\alpha$.

2) $|A\cap X\varphi|=1$. Тогда $A\subseteq X\varphi\cup X_2^{\varphi}$.

Если $Y\varphi\cap A=\varnothing$ для любого $Y\in X/\alpha, Y\neq A$, то $A\tau\subset A$ и $|Y\tau|=1$ для любого $Y\in X/\alpha$. Если же $Y\varphi\cap A\neq\varnothing$ хотя бы для одного $Y\in X/\alpha, Y\neq A$, то $A\varphi^{-1}=\bigcup_{Y\in A\tau^{*-1}} Y$. Из построения τ для любого $x\in A$ получаем $x\tau=a$, где $a\in A\varphi^{-1}$, и $|Y\tau|=1$ для любого $Y\in X/\alpha$.

3) $|A\cap X\varphi|\geqslant 2$. Тогда $A\subseteq X\varphi\cup X_2^{\varphi}$, и из условия на α имеем: $Y\varphi\cap A=\varnothing$ для любого $Y\in X/\alpha, Y\neq A$. Значит, $A\tau\subseteq A$ и $|Y\tau|=1$ для любого $Y\in X/\alpha, Y\neq A$.

Таким образом, принимая во внимание характеристику преобразований τ, σ, согласно лемме 5 получаем $(\tau,\sigma)\in \mathrm{LEt}(\alpha)$.

Кроме того, для любого $x\in X$ имеем $(x\varphi)\tau\in x\varphi\varphi^{-1}, (x\psi)\sigma\in x\psi\psi^{-1}$, откуда

$$(x\varphi)\tau\varphi\in(x\varphi)\varphi^{-1}\varphi=\{x\varphi\},\qquad (x\psi)\sigma\psi\in(x\psi)\psi^{-1}\psi=\{x\psi\}.$$

Следовательно, $(\varphi\tau\varphi,\psi\sigma\psi)=(\varphi,\psi)$ и в результате

$$(\varphi,\psi)(\tau,\sigma)(\varphi,\psi)=(\varphi,\psi).$$

Для случая $\alpha=i_X$ понятно, что $\mathrm{LEt}(\alpha)=\mathrm{Et}(\alpha)$, поэтому полугруппа $\mathrm{LEt}(\alpha)$ регулярна.

(iv) Предположим, что полугруппа $\mathrm{SEt}(\alpha)$ регулярна, но фактормножество X/α бесконечно. Пусть $A\in X/\alpha$ – фиксированный класс, $\tau,\sigma\in \mathrm{End}(\alpha)$ такие, что τ^*,σ^* являются равными инъективными преобразованиями и $A\notin(X/\alpha)\tau^*$. Заметим, что указанные эндоморфизмы τ,σ всегда существуют, так как X/α бесконечно. Согласно леммам 1 и 3 $(\tau,\sigma)\in \mathrm{SEt}(\alpha)$. Тогда найдется $(\varphi,\psi)\in \mathrm{SEt}(\alpha)$ такой, что $(\tau,\sigma)=(\tau,\sigma)(\varphi,\psi)(\tau,\sigma)$, откуда $\tau^*\varphi^*\tau^*=\tau^*$. Это означает, что $\varphi^*|_{(X/\alpha)\tau^*}=\tau^{*-1}$, и образ ограничения $\varphi^*|_{(X/\alpha)\tau^*}$ совпадает с X/α. Поскольку при этом $A\notin(X/\alpha)\tau^*$, то область определения $\varphi^*|_{(X/\alpha)\tau^*}$ не содержит A. Таким образом, получаем противоречие инъективности φ.

Пусть теперь фактормножество X/α конечно и $(\tau,\sigma)\in \mathrm{SEt}(\alpha)$. Очевидно, τ^* – подстановка фактормножества X/α. Определим преобразования φ и ψ множества X по правилу

$$x\varphi=\begin{cases} a, a\in x\tau^{-1}, & \text{если } x\in X\tau,\\ b, b\in \overline{x}\tau^{-1}, & \text{если } x\notin X\tau,\end{cases}\qquad x\psi=\begin{cases} c, c\in x\sigma^{-1}, & \text{если } x\in X\sigma,\\ d, d\in \overline{x}\sigma^{-1}, & \text{если } x\notin X\sigma,\end{cases}$$

для любого $x\in X$.

Понятно, что $(\varphi,\psi)\in \mathrm{SEt}(\alpha)$. Аналогично, как в (iii), можно показать, что $(\tau,\sigma)(\varphi,\psi)(\tau,\sigma)=(\tau,\sigma)$.

§ 5. Корегулярность полугрупп эндотопизмов

Определение 8. Полугруппа S называется *корегулярной* (см. [18]), если для любого $a \in S$ существует такой $x \in S$, что

$$axa = xax = a.$$

Понятно, что если S корегулярна, то для любого $a \in S$ справедливо равенство

$$a^3 = a(xax)a = (axa)xa = axa = a.$$

Корегулярность полугрупп всех типов эндотопизмов произвольного отношения эквивалентности устанавливает следующая

Теорема 2. (i) *Полугруппа* $\mathrm{Et}(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$, *корегулярна тогда и только тогда, когда* $|X| \in \{1, 2\}$.

(ii) *Полугруппа* $\mathrm{HEt}(\alpha)$, *где* α – *тривиальная эквивалентность, корегулярна тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Et}(\alpha)$ *корегулярна.*

(iii) *Полугруппа* $\mathrm{SEt}(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$, *корегулярна тогда и только тогда, когда* $|X| \in \{1, 2\}$ *или* $|X| = 3$, $\alpha \notin \{i_X, \omega_X\}$.

(iv) *Полугруппа* $\mathrm{LEt}(\alpha)$, *где* $\alpha \in \mathrm{Eq}^1(X)$ *или* $\alpha = i_X$, *корегулярна тогда и только тогда, когда полугруппа* $\mathrm{SEt}(\alpha)$ *корегулярна.*

(v) *Группа* $\mathrm{At}(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$, *корегулярна тогда и только тогда, когда полугруппа* $\mathrm{SEt}(\alpha)$ *корегулярна или* $|X| = 4$, $|X/\alpha| = 3$.

Доказательство. (i) Пусть X – такое множество, что $|X| \geqslant 3$, и $\mathrm{Et}(\alpha)$ – корегулярная полугруппа. Выберем элементы $a, b \in X$, $a \neq b$. Если $\alpha = i_X$, то пара (φ, φ), где

$$x\varphi = \begin{cases} a, & \text{если } x \in \{a, b\}, \\ b & \text{в противном случае} \end{cases}$$

для любого $x \in X$, будет эндотопизмом эквивалентности α. При этом из условия корегулярности (φ, φ) для любого $x \in X \setminus \{a, b\}$ имеем

$$b = x\varphi = x(\varphi\varphi\varphi) = (x\varphi)\varphi\varphi = (b\varphi)\varphi = a\varphi = a,$$

что противоречит выбору элементов a, b.

Пусть $\alpha \neq i_X$. Тогда существуют различные $u, v \in X$ такие, что $(u, v) \in \alpha$ и $(v, u) \in \alpha$. Упорядоченная пара (τ, σ), где

$$x\tau = \begin{cases} u, & \text{если } x \in \{u, v\}, \\ v & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad x\sigma = \begin{cases} v, & \text{если } x \in \{u, v\}, \\ u & \text{в противном случае} \end{cases}$$

для всех $x \in X$, является по лемме 1 эндотопизмом эквивалентности α. При этом для любого $x \in X \setminus \{u, v\}$ из условия корегулярности (τ, σ) имеем

$$\begin{aligned}(v, u) &= (x\tau, x\sigma) = (x(\tau\tau\tau), x(\sigma\sigma\sigma)) = ((x\tau)\tau\tau, (x\sigma)\sigma\sigma) \\ &= ((v\tau)\tau, (u\sigma)\sigma) = (u\tau, v\sigma) = (u, v),\end{aligned}$$

откуда $u = v$. Полученное противоречие завершает доказательство необходимости утверждения.

Достаточность утверждения очевидна.

(ii) Доказательство следует из (i) и того, что $\mathrm{HEt}(\alpha) = \mathrm{Et}(\alpha)$ для тривиальной эквивалентности α.

(iii) Пусть $\mathrm{SEt}(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$, – корегулярная полугруппа. Рассмотрим возможные случаи.

1) $\alpha = i_X$, $|X| \geqslant 3$. Зафиксируем три различных элемента $a, b, c \in X$ и определим преобразования φ, ψ множества X следующим образом:

$$x\varphi = x\psi = \begin{cases} b, & \text{если } x = a, \\ c, & \text{если } x = b, \\ a, & \text{если } x = c, \\ x & \text{в противном случае} \end{cases}$$

для любого $x \in X$.

Согласно леммам 1 и 3 $(\varphi, \psi) \in \mathrm{SEt}(\alpha)$. Учитывая, что φ^3 является тождественным преобразованием множества X, из условия корегулярности (φ, ψ) имеем $a = b = c$, что противоречит выбору элементов $a, b, c \in X$.

2) $\alpha = \omega_X$, $|X| \geqslant 3$. Поскольку $\mathrm{SEt}(i_X) \subset \mathrm{SEt}(\omega_X)$ и $\mathrm{SEt}(i_X)$ не является корегулярной полугруппой, получаем противоречие с корегулярностью $\mathrm{SEt}(\omega_X)$.

3) $\alpha \notin \{i_X, \omega_X\}$, $|X| > 3$. Предположим, что $|X/\alpha| \geqslant 3$. Зафиксируем три различных класса $A, B, C \in X/\alpha$ и выберем $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(\alpha)$ такие, что φ^* – инъекция, $\varphi^*|_{\{A,B,C\}} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ и $\psi^* = \varphi^*$.

Согласно леммам 1 и 3 $(\varphi, \psi) \in \mathrm{SEt}(\alpha)$. Из условия корегулярности (φ, ψ) имеем $(\varphi^3, \psi^3) = (\varphi, \psi)$, откуда $(\varphi^*)^3 = \varphi^*$. Учитывая, что $(\varphi^*)^3|_{\{A,B,C\}}$ – тождественное преобразование, получаем $A = A(\varphi^*)^3 = A\varphi^* = B$. А это противоречит выбору классов $A, B \in X/\alpha$. Таким образом, $|X/\alpha| = 2$.

Пусть $X/\alpha = \{D, E\}$. Допустим, что один из классов, например D, имеет мощность $\geqslant 3$. Обозначим через T множество пар $(f, g) \in \mathrm{SEt}(\alpha)$ таких, что $f|_E$ – тождественное преобразование и $g|_E = f|_E$. Ясно, что T есть подполугруппа $\mathrm{SEt}(\alpha)$, причем T изоморфна $\mathrm{SEt}(\omega_D)$, $|D| \geqslant 3$. Согласно п. 2) этого доказательства $\mathrm{SEt}(\omega_D)$ не является корегулярной полугруппой, что противоречит корегулярности $\mathrm{SEt}(\alpha)$. Следовательно, $|D| = |E| = 2$.

Пусть

$$X = \{a, b, c, d\}, \qquad \alpha = i_X \cup \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}.$$

Тогда

$$(\varphi, \psi) = \left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & c & a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & d & b & a \end{pmatrix} \right) \in \mathrm{SEt}(\alpha),$$

однако

$$(\varphi, \psi)^3 = \left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & c & a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & d & a & a \end{pmatrix} \right) \neq (\varphi, \psi),$$

что противоречит корегулярности полугруппы $\mathrm{SEt}(\alpha)$.

Достаточность утверждения устанавливается непосредственной проверкой.

(iv) Необходимость утверждения следует из очевидного факта, что любая подполугруппа корегулярной полугруппы корегулярна.

Пусть полугруппа $\mathrm{SEt}(\alpha)$, где $\alpha \in \mathrm{Eq}^1(X)$ или $\alpha = i_X$, корегулярна. Согласно п. (iii) $|X| = 2$ или $|X| = 3$, $\alpha \notin \{i_X, \omega_X\}$. Если $|X| = 2$, то α тривиальное и $\mathrm{LEt}(\alpha) = \mathrm{Et}(\alpha)$, откуда по п. (i) $\mathrm{LEt}(\alpha)$ корегулярна. Если же $X/\alpha = \{A, B\}$, где $A = \{1\}$, $B = \{2, 3\}$, то $\mathrm{LEt}(\alpha) = \mathrm{SEt}(\alpha) \cup I$. Здесь I обозначает идеал $\mathrm{LEt}(\alpha)$, состоящий из пар (v_i, v_j) константных преобразований v_i, v_j множества X таких, что $(i, j) \in \alpha$. Очевидно, идеал I корегулярен. Следовательно, полугруппа $\mathrm{LEt}(\alpha)$ корегулярна.

(v) Пусть $\mathrm{At}(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{Eq}(X)$, – корегулярная группа. Рассмотрим следующие случаи.

1) Среди классов фактормножества X/α существует хотя бы один класс мощности $\geqslant 3$. Возьмем класс $K \in X/\alpha$ такой, что $|K| \geqslant 3$. Аналогично п. (iii), 3) этой теоремы можно показать, что $\mathrm{At}(\alpha)$ содержит подгруппу, изоморфную $\mathrm{At}(i_K)$, которая, как известно из п. (iii), 1), не корегулярна.

2) Среди классов из X/α существует более двух равномощных классов. Пусть $A, B, C \in X/\alpha$ – различные классы одинаковой мощности и $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(\alpha)$ такие, что $\varphi^*|_{\{A,B,C\}} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ и $\psi^* = \varphi^*$. Тогда согласно лемме 2 $(\varphi, \psi) \in \mathrm{At}(\alpha)$ и аналогично п. (iii), 3) приходим к противоречию выбора классов.

3) Среди классов из X/α существует ровно два класса, мощность которых равна 2. Пусть $K, P \in X/\alpha$ такие, что

$$K = \{k_1, k_2\}, \qquad P = \{p_1, p_2\}.$$

Определим преобразования φ, ψ множества X, полагая

$$x\varphi = \begin{cases} p_1, & \text{если } x = k_1, \\ p_2, & \text{если } x = k_2, \\ k_2, & \text{если } x = p_1, \\ k_1, & \text{если } x = p_2, \\ x & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad x\psi = \begin{cases} p_2, & \text{если } x = k_1, \\ p_1, & \text{если } x = k_2, \\ k_1, & \text{если } x = p_1, \\ k_2, & \text{если } x = p_2, \\ x & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

для любого $x \in X$.

Согласно лемме 2 $(\varphi, \psi) \in \mathrm{At}(\alpha)$, при этом $(\varphi, \psi)^3 = (\psi, \varphi)$, откуда в силу корегулярности $\mathrm{At}(\alpha)$ имеем $\varphi = \psi$. А это противоречит выбору подстановок φ, ψ.

Таким образом, исключая все случаи, при которых группа $\mathrm{At}(\alpha)$ не корегулярна, из 1)–3) получаем: $|X| = 4$, $|X/\alpha| = 3$ или $|X| = 3$, $\alpha \notin \{i_X, \omega_X\}$, или $|X| \in \{1, 2\}$.

Если полугруппа $\mathrm{SEt}(\alpha)$ корегулярна, то $\mathrm{At}(\alpha)$ как подгруппа $\mathrm{SEt}(\alpha)$ также корегулярна. Пусть теперь $X = \{1, 2, 3, 4\}$ и $X/\alpha = \{A, B, C\}$, где $A = \{1, 2\}$,

$B = \{3\}$, $C = \{4\}$. В этом случае

$$\mathrm{At}(\alpha) = i_{\mathrm{Aut}(\alpha)} \cup \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right), \right.$$
$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right),$$
$$\left. \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right) \right\}.$$

Отсюда видно, что группа $\mathrm{At}(\alpha)$ корегулярна.

§ 6. Эндотип отношения эквивалентности

Определение 9. Пусть X – произвольное непустое множество, ρ – бинарное отношение на множестве X. Цепочке включений

$$\mathrm{Et}(\rho) \supseteq \mathrm{HEt}(\rho) \supseteq \mathrm{LEt}(\rho) \supseteq \mathrm{QEt}(\rho) \supseteq \mathrm{SEt}(\rho) \supseteq \mathrm{At}(\rho)$$

соответствует последовательность $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$, где $s_i \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, \dots, 5\}$. При этом $s_i = 0$, если на i-й позиции в приведенной выше последовательности включений полугруппы совпадают, $s_i = 1$ в противном случае. Например, $s_3 = 0$ означает $\mathrm{LEt}(\rho) = \mathrm{QEt}(\rho)$, а $s_5 = 1$ указывает на $\mathrm{SEt}(\rho) \neq \mathrm{At}(\rho)$. Значение суммы $\sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1}$ назовем *эндотипом* бинарного отношения ρ относительно его эндотопизмов и обозначим через $\mathrm{Ettype}(X, \rho)$.

Теорема 3. *Для любой эквивалентности α на множестве X*

$$\mathrm{Ettype}(X, \alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } |X| = 1, \\ 4, & \text{если } 2 \leqslant |X| < \infty, \ \alpha = i_X, \\ 16, & \text{если } 2 \leqslant |X|, \ \alpha = \omega_X, \\ 20, & \text{если } |X| = \infty, \ \alpha = i_X, \\ 23, & \text{если } \alpha \neq i_X, \ \alpha \neq \omega_X. \end{cases}$$

Доказательство. 1) Пусть X – множество, состоящее из одного элемента. Тогда $\mathrm{Eq}(X)$ исчерпывается тривиальной эквивалентностью $\alpha = i_X = \omega_X$, при этом, очевидно, $\mathrm{At}(\alpha) = \mathrm{Et}(\alpha)$ и, следовательно,

$$\mathrm{Ettype}(X, \alpha) = \sum_{i=1}^{5} 0 \cdot 2^{i-1} = 0.$$

2) Пусть X – конечное множество, $|X| \geqslant 2$ и $\alpha = i_X$. Согласно леммам 2, 3 $(\tau, \sigma) \in \mathrm{At}(\alpha)$ для любого $(\tau, \sigma) \in \mathrm{SEt}(\alpha)$, поэтому $\mathrm{At}(\alpha) = \mathrm{SEt}(\alpha)$.

Определим преобразование τ множества X следующим образом: $X\tau = \{a\}$, $a \in X$. Согласно леммам 1 и 5 $(\tau, \tau) \in \mathrm{LEt}(\alpha)$, при этом $(\tau, \tau) \notin \mathrm{QEt}(\alpha)$, так как $\tau^* \in \Im(X/\alpha)$ не является инъективным преобразованием. Значит, $\mathrm{QEt}(\alpha) \neq \mathrm{LEt}(\alpha)$.

Очевидно, что $\mathrm{LEt}(\alpha)=\mathrm{Et}(\alpha)$, таким образом,

$$\mathrm{Ettype}(X,\alpha)=\sum_{i=1}^{5} s_i\cdot 2^{i-1}=4.$$

3) Пусть $\alpha=\omega_X$, $|X|\geqslant 2$. В этом случае имеем $\mathrm{At}(\alpha)=\omega_{S(X)}$, где $S(X)$ – симметрическая группа на X, и $\mathrm{SEt}(\alpha)=\mathrm{Et}(\alpha)=\omega_{\Im(X)}$. Таким образом, получаем

$$\mathrm{Ettype}(X,\alpha)=\sum_{i=1}^{5} s_i\cdot 2^{i-1}=16.$$

4) Если X – бесконечное множество и $\alpha=i_X$, то в отличие от предыдущего п. 3) $\mathrm{At}(\alpha)\neq\mathrm{SEt}(\alpha)$. Пример подходящего $(\tau,\sigma)\in\mathrm{SEt}(\alpha)\backslash\mathrm{At}(\alpha)$ получаем при выборе двух различных инъекций $\tau,\sigma\in\Im(X)$, не являющихся сюръекциями. В данном случае

$$\mathrm{At}(\alpha)\subset\mathrm{SEt}(\alpha)=\mathrm{QEt}(\alpha)\subset\mathrm{LEt}(\alpha)=\mathrm{HEt}(\alpha)=\mathrm{Et}(\alpha),$$

следовательно,

$$\mathrm{Ettype}(X,\alpha)=\sum_{i=1}^{5} s_i\cdot 2^{i-1}=20.$$

5) Пусть $\alpha\in\mathrm{Eq}(X)$ – нетривиальное отношение эквивалентности. Тогда $|X|\geqslant 3$, $|X/\alpha|\geqslant 2$ и в X/α существует хотя бы один класс, мощность которого не менее 2. Имеем $\mathrm{At}(\alpha)\neq\mathrm{SEt}(\alpha)$, что следует из лемм 2, 3.

Возьмем различные $a,b\in X$ такие, что $(a,b)\in\alpha$, и определим преобразования τ,σ множества X следующим образом: $X\tau=\{a\}$, $X\sigma=\{b\}$. Согласно леммам 1 и 5 $(\tau,\sigma)\in\mathrm{LEt}(\alpha)$, при этом, как следует из леммы 4, $(\tau,\sigma)\notin\mathrm{QEt}(\alpha)$. Поэтому $\mathrm{QEt}(\alpha)\neq\mathrm{LEt}(\alpha)$.

Определим теперь преобразования τ и σ множества X по правилу

$$\overline{x}\tau=\begin{cases}\{a,b\}, & \text{если } \overline{x}=\overline{a},\\ \{a\} & \text{в остальных случаях,}\end{cases}\qquad \overline{x}\sigma=\begin{cases}\{a,b\}, & \text{если } \overline{x}=\overline{a},\\ \{b\} & \text{в остальных случаях}\end{cases}$$

для всех $\overline{x}\in X/\alpha$. Согласно леммам 1 и 7 $(\tau,\sigma)\in\mathrm{HEt}(\alpha)$, однако $(\tau,\sigma)\notin\mathrm{LEt}(\alpha)$, что следует из леммы 5. Отсюда $\mathrm{LEt}(\alpha)\neq\mathrm{HEt}(\alpha)$.

Наконец, определим $\tau,\sigma\in\Im(X)$, полагая для всех $\overline{x}\in X/\alpha$

$$\overline{x}\tau=\begin{cases}\{a\}, & \text{если } \overline{x}=\overline{a},\\ \{b\} & \text{в остальных случаях,}\end{cases}\qquad \overline{x}\sigma=\begin{cases}\{b\}, & \text{если } \overline{x}=\overline{a},\\ \{a\} & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Согласно лемме 1 $(\tau,\sigma)\in\mathrm{Et}(\alpha)$, однако, как следует из леммы 7, $(\tau,\sigma)\notin\mathrm{HEt}(\alpha)$. Отсюда $\mathrm{HEt}(\alpha)\neq\mathrm{Et}(\alpha)$ и, как следствие, получаем следующую цепочку включений:

$$\mathrm{At}(\alpha)\subset\mathrm{SEt}(\alpha)=\mathrm{QEt}(\alpha)\subset\mathrm{LEt}(\alpha)\subset\mathrm{HEt}(\alpha)\subset\mathrm{Et}(\alpha).$$

Итак,

$$\mathrm{Ettype}(X,\alpha)=\sum_{i=1}^{5} s_i\cdot 2^{i-1}=23.$$

Список литературы

[1] B. M. Schein, B. Teclezghi, “Endomorphisms of finite full transformation semigroups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**:9 (1998), 2579–2587.

[2] V. Mazorchuk, “Endomorphisms of $\mathfrak{B}_n$, $\mathscr{P}\mathfrak{B}_n$ and $\mathfrak{C}_n$”, *Comm. Algebra*, **30**:7 (2002), 3489–3513.

[3] А. В. Молчанов, “Полугруппы эндоморфизмов слабых p-гиперграфов”, *Изв. вузов. Матем.*, 2000, № 3, 80–83; англ. пер.: A. V. Molchanov, “Endomorphism semigroups of weak p-hypergraphs”, *Russian Math.* (*Iz. VUZ*), **44**:3 (2000), 77–80.

[4] Yu. V. Zhuchok, “The monoid of endomorphisms of disconnected hypergraphs”, *Algebra and Discrete Math.*, **16**:1 (2013), 134–150.

[5] Л. М. Глускин, “Полугруппа изотонных преобразований”, *УМН*, **16**:5(101) (1961), 157–162.

[6] Л. Б. Шнеперман, “Полугруппы эндоморфизмов квазиупорядоченных множеств”, *Уч. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена*, **238** (1962), 21–37.

[7] J. Araújo, J. Konieczny, “Dense relations are determined by their endomorphisms monoids”, *Semigroup Forum*, **70**:2 (2005), 302–306.

[8] Б. В. Попов, “Полугруппы эндоморфизмов рефлексивных бинарных отношений”, *Уч. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена*, **302** (1967), 116–123.

[9] Б. В. Попов, “Полугруппы эндоморфизмов μ-арных отношений”, *Уч. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена*, **274** (1965), 184–201.

[10] А. Г. Курош, *Общая алгебра*, лекции 1969–70 учебного года, Наука, М., 1974, 159 с.

[11] U. Knauer, M. Nieporte, “Endomorphisms of graphs. I. The monoid of strong endomorphisms”, *Arch. Math.* (*Basel*), **52**:6 (1989), 607–614.

[12] Е. А. Бондарь, Ю. В. Жучок, “Представления моноида сильных эндоморфизмов конечных n-однородных гиперграфов”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **18**:1 (2013), 21–34.

[13] Е. А. Бондарь, Ю. В. Жучок, “Полугруппы сильных эндоморфизмов бесконечных графов и гиперграфов”, *Укр. матем. журн.*, **65**:6 (2013), 743–754; англ. пер.: E. A. Bondar’, Yu. V. Zhuchok, “Semigroups of strong endomorphisms of infinite graphs and hypergraphs”, *Ukrainian Math. J.*, **65**:6 (2013), 823–834.

[14] Y. V. Zhuchok, “Ендоморфізми відношень еквівалентності”, *Вісн. Київ. унів. Сер. Фіз.-мат. науки*, 2007, № 3, 22–26.

[15] И. Б. Кожухов, В. А. Ярошевич, “Полугруппы отображений, сохраняющих бинарное отношение”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **14**:7 (2008), 129–135; англ. пер.: I. B. Kozhukhov, V. A. Yaroshevich, “Transformation semigroups preserving a binary relation”, *J. Math. Sci.*, **164**:2 (2010), 240–244.

[16] А. Я. Айзенштат, “Регулярные полугруппы эндоморфизмов упорядоченных множеств”, *Уч. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена*, **387** (1968), 3–11; англ. пер.: A. Ya. Aĭzenshtat, “Regular semigroups of endomorphisms of ordered sets”, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **139**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, 29–35.

[17] В. И. Ким, И. Б. Кожухов, “Условия регулярности полугрупп изотонных преобразований счетных цепей”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12**:8 (2006), 97–104; англ. пер.: V. I. Kim, I. B. Kozhukhov, “Regularity conditions for semigroups of isotone transformations of countable chains”, *J. Math. Sci.*, **152**:2 (2008), 203–208.

[18] G. Bijev, K. Todorov, “Coregular semigroups”, *Notes on semigroups*, v. VI, DM 80, **4**, Karl Marx Univ. Econom., Budapest, 1980, 1–11.

[19] J. Chvalina, K. Matoušková, “Coregularity of endomorphism monoids of unars”, *Arch. Math.* (*Brno*), **20**:1 (1984), 43–48.

[20] I. Dimitrova, J. Koppitz, “Coregular semigroups of full transformations”, *Demonstratio Math.*, **44**:4 (2011), 739–753.

[21] M. Böttcher, U. Knauer, “Endomorphism spectra of graphs”, *Discrete Math.*, **109**:1-3 (1992), 45–57.

[22] А. В. Решетников, “Об определениях гомоморфизма гиперграфов”, *Материалы X междунар. сем. “Дискретная математика и ее приложения”* (Москва, 1–6 февр. 2010 г.), МГУ, М., 2010, 325–327.

[23] Hailong Hou, Xinman Fan, Yanfeng Luo, “Endomorphism types of generalized polygons”, *Southeast Asian Bull. Math.*, **33**:3 (2009), 433–441.

[24] Hailong Hou, Yanfeng Luo, Zhimi Cheng, “The endomorphism monoid of $\overline{P_n}$”, *European J. Combin.*, **29**:5 (2008), 1173–1185.

[25] Weizhong Wang, Hailong Hou, “The endomorphism monoid of N-prism”, *Int. Math. Forum*, **6**:49-52 (2011), 2461–2471.

[26] А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп*, т. 1, Мир, М., 1972, 285 с.; пер. с англ.: A. H. Clifford, G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Math. Surveys, **7**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1961, 224 pp.

Юрий Владимирович Жучок
(Yurii V. Zhuchok)
Киевский национальный университет
им. Т. Шевченко, Украина
E-mail: zhuchok_y@mail.ru

Поступила в редакцию
13.01.2014

Елена Александровна Тоичкина
(Elena A. Toichkina)
Луганский национальный университет
им. Т. Шевченко, Украина
E-mail: e.a.rom@mail.ru