Ю. В. Жучок, Е. А. Тоичкина, Соответствия полугруппы эндоморфизмов отношения эквивалентности, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 2, 217–230

Математические заметки

Том 97 выпуск 2 февраль 2015

УДК 512.53

Соответствия полугруппы эндоморфизмов отношения эквивалентности

Ю. В. Жучок, Е. А. Тоичкина

В терминах различных конструкций сплетения полугруппы преобразований с малой категорией и прямого произведения сплетений групп описываются точные представления трех соответствий полугруппы всех эндоморфизмов произвольного отношения эквивалентности – полугруппы всех эндотопизмов, моноида всех сильных эндотопизмов и соответственно группы всех автотопизмов данной эквивалентности.

Библиография: 35 названий.

DOI: 10.4213/mzm10374

1. Введение. Основным объектом изучения в данной работе является понятие соответствия алгебраической системы в смысле Куроша [1]. Соответствия исследовались во многих областях математики: в теории групп [2]–[4] и теории полугрупп [5]–[8], в теории категорий [9], [10], в гомологической алгебре, алгебраической топологии и теории представлений [11]–[13], а также в теории универсальных алгебр [14]–[16]. В частности, в [3] найден порядок полугруппы соответствий циклических, диэдральных и элементарных абелевых конечных групп; в [4] описаны отношения Грина на полугруппе соответствий конечной группы, вычислены количество и порядки классов эквивалентностей Грина; в работах [6]–[8] исследована проблема определимости нильполугрупп, инверсных полугрупп и ортодоксальных полугрупп своими связками соответствий; в [14], [15] показано, что всякая компактно-порожденная решетка изоморфна решетке всех соответствий некоторой универсальной алгебры, и изучены связи между решетками всех подалгебр и решетками всех соответствий частичных универсальных алгебр. В этой работе, продолжая указанную цепочку исследований, мы изучаем соответствия полугруппы эндоморфизмов произвольного отношения эквивалентности.

Изучению полугрупп эндоморфизмов алгебраических систем и их различных абстрактных и комбинаторных свойств посвящено достаточно большое количество работ (см., например, [17]–[20]). Для полугрупп эндоморфизмов некоторых реляционных систем понятием, тесно связанным с соответствием, является понятие эндотопизма. Это понятие было введено Поповым [21] как обобщение понятия эндоморфизма на случай μ-арного отношения, вместе с тем при помощи полугрупп эндотопизмов были охарактеризованы с точностью до изотопизма определенные структуры μ-арных отношений. Полугруппы эндотопизмов шести различных типов для произвольного отношения эквивалентности изучались авторами в [22], где найдены условия регулярности и корегулярности каждой из полугрупп эндотопизмов заданного типа и вычислен эндотип эквивалентности. Оказывается, что для любой эквивалентности полугруппа всех ее эндотопизмов является соответствием полугруппы эндоморфизмов той же эквивалентности. Понятие же изотопии появилось в исследованиях по топологии и впоследствии использовалось в теории квазигрупп как обобщение понятия изоморфизма. Для групп понятие изотопии не играет важной роли, поскольку по теореме Алберта любые две изотопные группы изоморфны [23]. Однако существуют примеры квазигрупп, изотопных группам, но не изоморфных им. Класс квазигрупп, изотопных группам, впервые был исследован Белоусовым в [24], где доказано, что такой класс квазигрупп характеризуется тождеством от пяти переменных. В этом направлении внимание также уделялось изучению строения групп автотопий и полугрупп эндотопий произвольных линейных, алинейных, смешанных линейных квазигрупп и T-квазигрупп (см. [25], [26]).

Целью настоящей работы является описание точных представлений полугруппы всех эндотопизмов, моноида всех сильных эндотопизмов и группы всех автотопизмов отношения эквивалентности. Основные результаты работы распределены следующим образом. В п. 2 установлено, что моноид эндотопизмов эквивалентности есть соответствие моноида всех эндоморфизмов данной эквивалентности. В п. 3 доказано, что полугруппа эндотопизмов любой эквивалентности изоморфна подпрямому произведению сплетений полугруппы с малой категорией. Кроме того, описаны еще два точных представления полугруппы эндотопизмов эквивалентности и все изоморфизмы между моноидами эндотопизмов данных эквивалентностей. В п. 4 описаны представления моноида всех сильных эндотопизмов эквивалентности. Наконец, в п. 5 показано, что группа автотопизмов любой эквивалентности изоморфна прямому произведению сплетений групп.

2. Основные понятия. Пусть X – произвольное непустое множество. Через $\Im(X)$ обозначается симметрическая полугруппа на множестве X.

Эндоморфизмом отношения $\rho \subseteq X \times X$ называется преобразование $f \in \Im(X)$, для которого условие $(x, y) \in \rho$ влечет $(xf, yf) \in \rho$ при любых $x, y \in X$. Множество всех эндоморфизмов отношения ρ относительно операции композиции преобразований образует полугруппу, которая называется *полугруппой эндоморфизмов* отношения ρ и обозначается $\mathrm{End}(\rho)$.

Упорядоченная пара (φ, ψ) преобразований φ и ψ множества X называется *эндотопизмом* отношения $\rho \subseteq X \times X$, если из того, что $(x, y) \in \rho$, следует $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ при любых $x, y \in X$. Множество всех эндотопизмов бинарного отношения ρ относительно операции покомпонентного умножения образует полугруппу, которая называется *полугруппой эндотопизмов* отношения ρ. Эту полугруппу будем обозначать через $\mathrm{Et}(\rho)$. Заметим, что пара тождественных подстановок множества X является единицей полугруппы $\mathrm{Et}(\rho)$.

Если φ и ψ – подстановки множества X и $(x, y) \in \rho$ тогда и только тогда, когда $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ при любых $x, y \in X$, то упорядоченная пара (φ, ψ) называется *автотопизмом* отношения $\rho \subseteq X \times X$. Множество всех автотопизмов бинарного отношения ρ относительно операции покомпонентного умножения образует группу, которая называется *группой автотопизмов* отношения ρ. Обозначим эту группу через $\mathrm{At}(\rho)$. Очевидно, что $\mathrm{At}(\rho)$ есть подгруппа $\mathrm{Et}(\rho)$.

Для произвольного множества X положим $i_X = \{(a,a) \mid a \in X\}$ и $\omega_A = A \times A$, где $A \subseteq X$. Отношения эквивалентности i_X, ω_X называются *тривиальными* отношениями на множестве X.

Рассмотрим несколько примеров.

(a) Упорядоченная пара (τ,σ) преобразований множества X будет эндотопизмом отношения $\rho = i_X$ тогда и только тогда, когда $\tau = \sigma$. В этом случае $\mathrm{Et}(\rho) = i_{\mathrm{End}(\rho)} = i_{\Im(X)}$ и $\mathrm{At}(\rho) = i_{\mathrm{Aut}(\rho)} = i_{S(X)}$, где $S(X)$ – симметрическая группа на X.

(b) Возьмем $\rho = \omega_X$. Тогда любая упорядоченная пара (τ,σ) преобразований множества X будет эндотопизмом отношения ρ. Следовательно,

$$\mathrm{Et}(\rho) = \omega_{\Im(X)}, \qquad \mathrm{At}(\rho) = \omega_{S(X)}.$$

(c) Пусть ρ – отношение неравенства на X, т.е. $\rho = \omega_X \setminus i_X$. Упорядоченную пару (τ,σ) преобразований множества X назовем *инъективной*, если $a\tau = b\sigma$ влечет $a = b$ при любых $a, b \in X$. Заметим, что при инъективных τ, σ пара (τ,σ) не всегда инъективна, а также инъективность пары (τ,σ) не обязательно влечет инъективность преобразований τ, σ. Итак, $(\tau,\sigma) \in \mathrm{Et}(\rho)$ в том и только том случае, если (τ,σ) инъективно.

Пусть X – произвольное непустое множество, α – отношение эквивалентности на множестве X. Через X/α будем обозначать фактор-множество множества X по эквивалентности α, а через $\overline{x}$ – класс эквивалентности, содержащий $x \in X$.

Лемма 1. *Упорядоченная пара (τ,σ) преобразований множества X будет эндотопизмом отношения эквивалентности $\alpha \subseteq X \times X$ тогда и только тогда, когда для каждого класса $\overline{a} \in X/\alpha$ существует такой класс $\overline{b} \in X/\alpha$, что $\overline{a}\tau \subseteq \overline{b}$ и $\overline{a}\sigma \subseteq \overline{b}$.*

Доказательство. Пусть $(\tau,\sigma) \in \mathrm{Et}(\alpha)$, тогда для любого $\overline{a} \in X/\alpha$ и любых $x, y \in \overline{a}$ из условия $(x,y) \in \alpha$ следует $(x\tau, y\sigma) \in \alpha$, откуда $x\tau, y\sigma \in \overline{b}$ для некоторого $\overline{b} \in X/\alpha$. В силу произвольности $x, y \in \overline{a}$ имеем $\overline{a}\tau \subseteq \overline{b}$ и $\overline{a}\sigma \subseteq \overline{b}$.

Предположим, что для преобразований $\tau, \sigma \in \Im(X)$ и каждого $\overline{a} \in X/\alpha$ существует такой $\overline{b} \in X/\alpha$, что $\overline{a}\tau \subseteq \overline{b}$ и $\overline{a}\sigma \subseteq \overline{b}$. Тогда для любых $x, y \in X$ из того, что $(x,y) \in \alpha$ следует $x, y \in \overline{x}$, откуда по предположению $x\tau, y\sigma \in \overline{b}$ для некоторого $\overline{b} \in X/\alpha$. Таким образом, $(x\tau, y\sigma) \in \alpha$ и, как следствие, $(\tau,\sigma) \in \mathrm{Et}(\alpha)$. Лемма доказана.

Поскольку эндотопизмом отношения $\rho \subseteq X \times X$ является упорядоченная пара преобразований множества X, множество $\mathrm{Et}(\rho)$ можно рассматривать как бинарное отношение на симметрической полугруппе $\Im(X)$.

Для бинарного отношения ρ на множестве X множества

$$\mathrm{pr}_1\,\rho = \{x \in X \mid \exists\, y \in X : (x,y) \in \rho\}, \qquad \mathrm{pr}_2\,\rho = \{y \in X \mid \exists\, x \in X : (x,y) \in \rho\}$$

называются соответственно *первой* и *второй проекциями* отношения ρ на множители прямого произведения $X \times X$.

Используя строение эндоморфизмов отношения эквивалентности [27] и лемму 1, получаем, что для любого отношения эквивалентности α на множестве X справедливы вложения

$$\mathrm{pr}_1\,\mathrm{Et}(\alpha) \subseteq \mathrm{End}(\alpha), \qquad \mathrm{pr}_2\,\mathrm{Et}(\alpha) \subseteq \mathrm{End}(\alpha).$$

Более того, отношение $\mathrm{Et}(\alpha)$ будет отношением эквивалентности на полугруппе эндоморфизмов $\mathrm{End}(\alpha)$.

Пусть G – универсальная алгебра. Если подалгебру из $G \times G$ рассматривать как бинарное отношение на множестве G, то множество $\mathrm{Rel}(G)$ всех подалгебр из $G \times G$ будет полугруппой относительно операции композиции бинарных отношений. Элементы этой полугруппы называются *соответствиями* алгебры G, а сама $\mathrm{Rel}(G)$ – *полугруппой соответствий* данной алгебры [1].

Из леммы 1 и последующих рассуждений получаем

Следствие 1. *Для любой эквивалентности* α *на множестве* X *полугруппа* $\mathrm{Et}(\alpha)$ *является соответствием полугруппы* $\mathrm{End}(\alpha)$.

Заметим, что данное утверждение справедливо не для любого бинарного отношения. Действительно, рассмотрим такой пример. Пусть X – произвольное непустое множество, $|X| \geqslant 3$ и $\rho = (X \times X) \setminus \{(x, y)\}$, где $x, y \in X$, $x \neq y$. Упорядоченная пара (τ, σ) преобразований множества X таких, что

$$X\tau = \{x, y\} \qquad \text{и} \qquad X\sigma = \{a\}, \quad a \in X, \quad a \neq y,$$

будет эндотопизмом бинарного отношения ρ, при этом $\tau \notin \mathrm{End}(\rho)$. Следовательно, $\mathrm{Et}(\rho)$ не является соответствием полугруппы $\mathrm{End}(\rho)$.

3. Полугруппа эндотопизмов отношения эквивалентности. В настоящее время во многих работах по полугруппам довольно часто используется конструкция сплетения и ее различные модификации. Так, в [28] была введена конструкция сплетения моноида с малой категорией как обобщение сплетения моноидов. Впоследствии эта конструкция применялась в различных ситуациях, в частности, для описания точных представлений полугрупп эндоморфизмов произвольного действия, конечных неориентированных графов без кратных ребер, свободного произведения некоторых полугрупп (см. [29]–[31]). Воспользуемся упомянутым сплетением и в данной работе.

Пусть X – произвольное непустое множество, α – отношение эквивалентности на множестве X. Определим малую категорию K, полагая

$$\mathrm{Ob}\, K = X/\alpha, \qquad \mathrm{Mor}\, K = \bigcup_{\overline{a}, \overline{b} \in \mathrm{Ob}\, K} \mathrm{Map}(\overline{a}, \overline{b}),$$

где $\mathrm{Map}(\overline{a}, \overline{b})$ – множество всех отображений из класса $\overline{a}$ в класс $\overline{b}$. Понятно, что для каждого морфизма $f \in \mathrm{Mor}\, K$ существует одна и только одна упорядоченная пара объектов $\overline{a}, \overline{b} \in \mathrm{Ob}\, K$ такая, что $f \in \mathrm{Mor}(\overline{a}, \overline{b})$.

Пусть

$$W = \bigl\{(\varphi, f) \mid \varphi \in \Im(X/\alpha),\ f \in \mathrm{Map}(\mathrm{Ob}\, K, \mathrm{Mor}\, K),\ \overline{a}f \in \mathrm{Map}(\overline{a}, \overline{a}\varphi)\ \forall\, \overline{a} \in X/\alpha\bigr\}$$

и $f_{\overline{a}} = \overline{a}f$, где $xf_{\overline{a}} \in \overline{a}\varphi$ для любого $x \in \overline{a}$. На множестве W определена мультипликативная операция:

$$(\varphi, f)(\psi, g) = (\varphi\psi, fg_{\varphi}),$$

где $(fg_{\varphi})_{\overline{a}} = f_{\overline{a}}\, g_{\overline{a}\varphi}$, $\overline{a} \in X/\alpha$.

Относительно этой операции множество W образует полугруппу, которая называется *сплетением* симметрической полугруппы $\Im(X/\alpha)$ с малой категорией K и обозначается через $\Im(X/\alpha) \,\mathrm{wr}\, K$.

Заметим, что здесь используется двойственная конструкция сплетения по отношению к определенной в [28]. Это объясняется выбором порядка умножения отображений слева направо, а не наоборот.

В декартовом квадрате сплетения $\Im(X/\alpha)\,\mathrm{wr}\,K$ на себя выделим следующую подполугруппу:

$$P_X^\alpha = \{((\varphi, f), (\psi, g)) \mid \varphi = \psi\}.$$

Пусть задано произвольное семейство категорий C_i, $i \in I$. Определим новую категорию $\Pi_{i\in I}C_i$, полагая

$$\mathrm{Ob}(\Pi_{i\in I}C_i) = \Pi_{i\in I}\,\mathrm{Ob}\,C_i, \qquad \mathrm{Mor}(\Pi_{i\in I}C_i) = \Pi_{i\in I}\,\mathrm{Mor}\,C_i.$$

Произведение морфизмов в этой категории определяется покомпонентно. Полученная категория называется произведением категорий C_i, $i \in I$.

Обозначим через K^2 произведение определенной выше категории K на себя, а через K_*^2 – полную подкатегорию категории K^2, рассматриваемую на множестве объектов $\mathrm{Ob}\,K_*^2 = \{(A, A) \mid A \in \mathrm{Ob}\,K\}$.

Подобным образом, как в начале этого пункта, для любой эквивалентности α на множестве X можно определить сплетение $\Im(X/\alpha)\,\mathrm{wr}\,K_*^2$ симметрической полугруппы $\Im(X/\alpha)$ с малой категорией K_*^2. Операция на такой полугруппе $\Im(X/\alpha)\,\mathrm{wr}\,K_*^2$ будет следующей:

$$(\gamma, f)(\mu, h) = (\gamma\mu, fh_\gamma),$$

где $(fh_\gamma)_{(\overline{a},\overline{a})} = f_{(\overline{a},\overline{a})}h_{(\overline{a}\gamma,\overline{a}\gamma)}$ для всех $(\overline{a},\overline{a}) \in \mathrm{Ob}\,K_*^2$.

Далее, пусть $\mathscr{C}$ — малая категория, R — моноид, который действует справа на множестве $X = \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ объектов этой категории, и $M = \bigcup_{x,y\in X}\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(x,y)$ – множество всех морфизмов категории $\mathscr{C}$.

Возьмем натуральное число n и положим

$$V = \bigl\{(r, f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}) \mid r \in R,\ f^{(i)} \in \mathrm{Map}(X, M),\ xf^{(i)} \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(x, xr)\ \forall\, x \in X\bigr\}.$$

Далее, для всех $(r, f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$, $(p, g^{(1)}, \ldots, g^{(n)}) \in V$ определим умножение

$$(r, f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})(p, g^{(1)}, \ldots, g^{(n)}) = (rp, f^{(1)}g_r^{(1)}, \ldots, f^{(n)}g_r^{(n)}),$$

где $x(f^{(i)}g_r^{(i)}) = xf^{(i)}(xr)g^{(i)}$ для всех $x \in X$ и $xf^{(i)}(xr)g^{(i)}$ – это композиция морфизмов $xf^{(i)}$ и $(xr)g^{(i)}$ в категории $\mathscr{C}$. Заданная таким образом операция ассоциативна. Кроме того, в полугруппе V есть единица

$$(1, \underbrace{e, \ldots, e}_{n}),$$

где $e \in \mathrm{Map}(X, M)$ такое, что $xe \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(x, x)$ – тождественный морфизм для любого x из $\mathscr{C}$.

Моноид V с таким умножением назовем *n-кратным сплетением* (или *n-сплетением*) моноида R с категорией $\mathscr{C}$ и будем обозначать через $R\,\mathrm{wr}^{(n)}\,\mathscr{C}$.

Следует отметить, что при $n = 1$ мы получаем двойственную конструкцию к сплетению, определенному в [28].

Если $\varphi\colon X \to X$ – некоторое преобразование и $A \subseteq X$, то через $\varphi|_A$ будем обозначать ограничение преобразования φ на подмножество A.

Одним из основных результатов работы является следующая

Теорема 1. *Пусть α – отношение эквивалентности на множестве X, а K – малая категория, определенная выше. Тогда полугруппы* $\mathrm{Et}(\alpha)$ *и* $\Im(X/\alpha)\,\mathrm{wr}^{(2)}\,K$ *изоморфны.*

Доказательство. Для любого эндотопизма $(\tau,\sigma)\in\mathrm{Et}(\alpha)$ положим

$$(\tau,\sigma)\Xi=(\tau^*,f^\tau,g^\sigma),$$

где $\tau^*\in\Im(X/\alpha)$ такое, что $\overline{a}\tau^*=\overline{a\tau}$, и $f^\tau,g^\sigma\in\mathrm{Map}(\mathrm{Ob}\,K,\mathrm{Mor}\,K)$ такие, что

$$\overline{a}f^\tau=\tau|_{\overline{a}},\qquad \overline{a}g^\sigma=\sigma|_{\overline{a}}\qquad\text{для любого}\quad \overline{a}\in X/\alpha.$$

Ясно, что Ξ отображает $\mathrm{Et}(\alpha)$ в $\Im(X/\alpha)\,\mathrm{wr}^{(2)}\,K$, при этом инъективность Ξ очевидна. Возьмем произвольную упорядоченную тройку $(\psi,f,g)\in\Im(X/\alpha)\,\mathrm{wr}^{(2)}\,K$. Учитывая определение полугруппы $\Im(X/\alpha)\,\mathrm{wr}^{(2)}\,K$, для каждого $\overline{a}\in X/\alpha$ найдется такой класс $\overline{a}\psi\in X/\alpha$, что $\overline{a}f_{\overline{a}}\subseteq\overline{a}\psi$ и $\overline{a}g_{\overline{a}}\subseteq\overline{a}\psi$. Согласно лемме 1 упорядоченная пара (λ,μ) преобразований множества X, определенных по правилу

$$x\lambda=xf_{\overline{x}},\quad x\mu=xg_{\overline{x}}\qquad\text{для всех}\quad x\in X,$$

будет эндотопизмом отношения эквивалентности α; при этом

$$(\lambda,\mu)\Xi=(\lambda^*,f^\lambda,g^\mu)=(\psi,f,g).$$

Для завершения доказательства остается показать, что Ξ является гомоморфизмом. Действительно, пусть $(\tau,\sigma),(\rho,\delta)\in\mathrm{Et}(\alpha)$ – такие эндотопизмы, что

$$(\tau,\sigma)\Xi=(\tau^*,f^\tau,g^\sigma),\qquad(\rho,\delta)\Xi=(\rho^*,f^\rho,g^\delta).$$

Тогда с одной стороны имеем

$$((\tau,\sigma)(\rho,\delta))\Xi=(\tau\rho,\sigma\delta)\Xi=((\tau\rho)^*,f^{\tau\rho},g^{\sigma\delta}),$$

а с другой стороны,

$$(\tau,\sigma)\Xi(\rho,\delta)\Xi=(\tau^*,f^\tau,g^\sigma)(\rho^*,f^\rho,g^\delta)=(\tau^*\rho^*,f^\tau f^\rho_{\tau^*},g^\sigma g^\delta_{\tau^*}).$$

Поскольку для любого $\overline{a}\in X/\alpha$ выполняются равенства

$$\overline{a}(\tau^*\rho^*)=(\overline{a}\tau^*)\rho^*=\overline{a\tau}\rho^*=\overline{(a\tau)\rho}=\overline{a(\tau\rho)}=\overline{a}(\tau\rho)^*,$$

то $\tau^*\rho^*=(\tau\rho)^*$. Кроме того, для всех $\overline{a}\in X/\alpha$

$$\overline{a}(f^\tau f^\rho_{\tau^*})=(\overline{a}f^\tau)(\overline{a\tau}f^\rho)=\tau|_{\overline{a}}\rho|_{\overline{a\tau}},\qquad \overline{a}f^{\tau\rho}=(\tau\rho)|_{\overline{a}},$$

поэтому при любом $x\in\overline{a}$

$$x(\tau|_{\overline{a}}\rho|_{\overline{a\tau}})=(x\tau|_{\overline{a}})\rho|_{\overline{a\tau}}=(x\tau)\rho|_{\overline{a\tau}}=x(\tau\rho)=x(\tau\rho)|_{\overline{a}}.$$

Следовательно, $f^\tau f^\rho_{\tau^*}=f^{\tau\rho}$.

Аналогично доказывается, что $g^\sigma g^\delta_{\tau^*}=g^{\sigma\delta}$.

Наконец,

$$\begin{aligned}((\tau,\sigma)(\rho,\delta))\Xi&=(\tau\rho,\sigma\delta)\Xi=((\tau\rho)^*,f^{\tau\rho},g^{\sigma\delta})=(\tau^*\rho^*,f^\tau f^\rho_{\tau^*},g^\sigma g^\delta_{\tau^*})\\&=(\tau^*,f^\tau,g^\sigma)(\rho^*,f^\rho,g^\delta)=(\tau,\sigma)\Xi(\rho,\delta)\Xi.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Лемма 2. *Сплетение* $\Im(X/\alpha)\,\mathrm{wr}^{(2)}\,K$ *изоморфно каждой из полугрупп* P_X^α *и* $\Im(X/\alpha)\,\mathrm{wr}\,K_*^2$.

Доказательство. Для любого $(\varphi, f, g) \in \Im(X/\alpha)\,\mathrm{wr}^{(2)}\,K$ положим

$$(\varphi, f, g)\Theta = ((\varphi, f), (\varphi, g)), \qquad (\varphi, f, g)\Upsilon = (\varphi, h_{f,g}),$$

где

$$(\overline{a}, \overline{a})h_{f,g} = (f_{\overline{a}}, g_{\overline{a}}) \qquad \text{для всех} \quad (\overline{a}, \overline{a}) \in \mathrm{Ob}\, K_*^2.$$

Тогда, как нетрудно убедиться, Θ является изоморфизмом $\Im(X/\alpha)\,\mathrm{wr}^{(2)}\,K$ на P_X^α, а Υ – изоморфизмом $\Im(X/\alpha)\,\mathrm{wr}^{(2)}\,K$ на $\Im(X/\alpha)\,\mathrm{wr}\,K_*^2$.

Из теоремы 1 и леммы 2 получаем

Следствие 2. *Полугруппа* $\mathrm{Et}(\alpha)$ *изоморфна полугруппам* P_X^α *и* $\Im(X/\alpha)\,\mathrm{wr}\,K_*^2$.

В дальнейшем элементы полугруппы $\mathrm{Et}(\alpha)$ будем отождествлять с соответствующими им элементами сплетения $\Im(X/\alpha)\,\mathrm{wr}^{(2)}\,K$.

Следствие 3. *Для любой эквивалентности* α *на конечном множестве* X

$$|\mathrm{Et}(\alpha)| = \sum_{\varphi \in \Im(X/\alpha)} \Bigg(\prod_{\overline{x} \in X/\alpha} |\overline{x}\varphi|^{|\overline{x}|} \Bigg)^2.$$

Рассмотрим теперь вопрос, насколько полно полугруппа эндотопизмов $\mathrm{Et}(\rho)$ характеризует отношение эквивалентности ρ.

Пусть ρ – отношение эквивалентности на множестве X. Через ν_a, $a \in X$, обозначим константное преобразование множества X, т.е. $x\nu_a = a$ для всех $x \in X$, а через $\mathrm{Et}_C(\rho)$ – множество всех эндотопизмов отношения ρ вида (ν_a, ν_a), $a \in X$.

Ясно, элементы из $\mathrm{Et}_C(\rho)$ и только они обладают тем свойством, что

$$\mathrm{Et}(\rho) \cdot (\nu_a, \nu_a) = \{(\nu_a, \nu_a)\},$$

т.е. $\mathrm{Et}_C(\rho)$ – минимальный правый идеал полугруппы $\mathrm{Et}(\rho)$.

Имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть* α *– отношение эквивалентности на множестве* X, β *– отношение эквивалентности на множестве* X'. *Если соответствия* $\mathrm{Et}(\alpha)$ *и* $\mathrm{Et}(\beta)$ *изоморфны, то реляционные системы* (X, α) *и* (X', β) *изоморфны.*

Доказательство. Пусть Θ – произвольный изоморфизм полугруппы $\mathrm{Et}(\alpha)$ на $\mathrm{Et}(\beta)$ и $(\nu_a, \nu_a) \in \mathrm{Et}_C(\alpha)$. Покажем вначале, что $\mathrm{Et}_C(\alpha)\Theta = \mathrm{Et}_C(\beta)$. Поскольку Θ – изоморфизм, то

$$(\varphi, \psi)\Theta \cdot (\nu_a, \nu_a)\Theta = ((\varphi, \psi) \cdot (\nu_a, \nu_a))\Theta = (\nu_a, \nu_a)\Theta$$

для любого $(\varphi, \psi) \in \mathrm{Et}(\alpha)$. Следовательно, $(\nu_a, \nu_a)\Theta \in \mathrm{Et}_C(\beta)$. Это означает, что $\mathrm{Et}_C(\alpha)\Theta \subseteq \mathrm{Et}_C(\beta)$. Используя обратный изоморфизм Θ^{-1}, аналогично доказывается обратное включение $\mathrm{Et}_C(\beta) \subseteq (\mathrm{Et}_C(\alpha))\Theta$.

Теперь для любого $a \in X$ имеем

$$\begin{aligned} (a, a) \in \alpha \quad &\Longleftrightarrow \quad (\nu_a, \nu_a) \in \mathrm{Et}_C(\alpha) \quad \Longleftrightarrow \quad (\nu_a, \nu_a)\Theta \in \mathrm{Et}_C(\beta) \\ &\Longleftrightarrow \quad (\nu_{a'}, \nu_{a'}) \in \mathrm{Et}_C(\beta) \quad \Longleftrightarrow \quad (a', a') \in \beta, \quad \text{где} \quad a' \in X'. \end{aligned}$$

Таким образом, отображение Θ индуцирует биекцию f_Θ между элементами множеств X и X':

$$af_\Theta = a' \quad \Longleftrightarrow \quad (\nu_a, \nu_a)\Theta = (\nu_{a'}, \nu_{a'})$$

для всех $a \in X$.

Предположим, что $i_{\mathrm{End}(\alpha)}\Theta \neq i_{\mathrm{End}(\beta)}$. Тогда найдется такой эндотопизм $(\varphi, \psi) \in i_{\mathrm{End}(\alpha)}$, что $(\varphi, \psi)\Theta = (\varphi', \psi') \notin i_{\mathrm{End}(\beta)}$. Отсюда $\varphi' \neq \psi'$ и, как следствие, $t'\varphi' \neq t'\psi'$ для некоторого $t' \in X'$. Полагая $tf_\Theta = t'$, с одной стороны, получаем

$$((\nu_t, \nu_t)(\varphi, \psi))\Theta = (\nu_{t\varphi}, \nu_{t\psi})\Theta = (\nu_{(t\varphi)'}, \nu_{(t\varphi)'}) \in \mathrm{Et}_C(\beta),$$

а с другой стороны,

$$((\nu_t, \nu_t)(\varphi, \psi))\Theta = (\nu_t, \nu_t)\Theta(\varphi, \psi)\Theta = (\nu_{t'}, \nu_{t'})(\varphi', \psi') = (\nu_{t'\varphi'}, \nu_{t'\psi'}) \notin \mathrm{Et}_C(\beta),$$

поскольку $t'\varphi' \neq t'\psi'$.

Таким образом, предположение неверно, и значит, $i_{\mathrm{End}(\alpha)}\Theta = i_{\mathrm{End}(\beta)}$. Учитывая, что полугруппа эндоморфизмов произвольного бинарного отношения естественным образом изоморфно вкладывается в полугруппу эндотопизмов этого отношения, получаем $\mathrm{End}(\alpha) \cong \mathrm{End}(\beta)$. Отсюда по теореме Глускина [32] следует, что $(X, \alpha) \cong (X', \beta)$. Теорема доказана.

Отметим, что в [21] с использованием свойства проекций бинарных отношений была показана определяемость квазиупорядоченных множеств с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма своей полугруппой эндотопизмов.

Далее, выясним, как устроены изоморфизмы между полугруппами эндотопизмов произвольных эквивалентностей.

Теорема 3. *Пусть α – отношение эквивалентности на множестве X, β – отношение эквивалентности на множестве X'. Отображение Υ соответствия $\mathrm{Et}(\alpha)$ на соответствие $\mathrm{Et}(\beta)$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда оно представляется в виде*

$$g\Upsilon = \tau^{-1}g\tau \qquad \text{для всех} \quad g \in \mathrm{Et}(\alpha),$$

где τ – некоторый изотопизм реляционной системы (X, α) на (X', β).

Доказательство. Пусть $\Upsilon\colon g \mapsto g'$ – произвольный изоморфизм соответствия $\mathrm{Et}(\alpha)$ на $\mathrm{Et}(\beta)$. Покажем, что любой эндотопизм $g' \in \mathrm{Et}(\beta)$ имеет вид $g' = \tau^{-1}g\tau$ для подходящего изотопизма τ системы (X, α) на (X', β). По теореме 2 Υ индуцирует изоморфизм $\Upsilon^*\colon \mathrm{End}(\alpha) \to \mathrm{End}(\beta)$, откуда по теореме Глускина [32] имеем $\phi\Upsilon^* = \eta^{-1}\phi\eta$ для всех $\phi \in \mathrm{End}(\alpha)$ и некоторого изоморфизма $\eta\colon (X, \alpha) \to (X, \beta)$. Очевидно, что $\tau = (\eta, \eta)$ – изотопизм (X, α) на (X', β). Таким образом, для любого $g = (g_1, g_2) \in \mathrm{Et}(\alpha)$ имеем

$$g\Upsilon = (g_1\Upsilon^*, g_2\Upsilon^*) = (\eta^{-1}g_1\eta, \eta^{-1}g_2\eta) = (\eta^{-1}, \eta^{-1})(g_1, g_2)(\eta, \eta) = \tau^{-1}g\tau.$$

Возьмем теперь произвольный изотопизм $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ из (X, α) на (X', β) и для всех $g \in \mathrm{Et}(\alpha)$ положим $g\Upsilon = \tau^{-1}g\tau$. Понятно, что Υ отображает $\mathrm{Et}(\alpha)$ в $\mathrm{Et}(\beta)$. Кроме того, для любых (φ_1, ψ_1), $(\varphi_2, \psi_2) \in \mathrm{Et}(\alpha)$ имеем

$$\begin{aligned} ((\varphi_1, \psi_1)(\varphi_2, \psi_2))\Upsilon &= (\varphi_1\varphi_2, \psi_1\psi_2)\Upsilon = (\tau_1^{-1}(\varphi_1\varphi_2)\tau_1, \tau_2^{-1}(\psi_1\psi_2)\tau_2) \\ &= ((\tau_1^{-1}\varphi_1\tau_1)(\tau_1^{-1}\varphi_2\tau_1), (\tau_2^{-1}\psi_1\tau_2)(\tau_2^{-1}\psi_2\tau_2)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\tau_1^{-1}\varphi_1\tau_1, \tau_2^{-1}\psi_1\tau_2) \cdot (\tau_1^{-1}\varphi_2\tau_1, \tau_2^{-1}\psi_2\tau_2) \\
&= (\varphi_1, \psi_1)\Upsilon \cdot (\varphi_2, \psi_2)\Upsilon.
\end{aligned}
$$

Биективность отображения Υ очевидна. Теорема доказана.

4. Моноид сильных эндотопизмов отношения эквивалентности. Понятие сильного эндоморфизма графа было введено в [33] и изучалось вместе с другими типами эндоморфизмов, например, в [20], [30], [34]. Здесь мы вводим понятие сильного эндотопизма бинарного отношения.

Эндотопизм (φ, ψ) бинарного отношения ρ на множестве X назовем *сильным эндотопизмом*, если из того, что $(x\varphi, y\psi) \in \rho$, следует $(x, y) \in \rho$ при любых $x, y \in X$. Множество всех сильных эндотопизмов бинарного отношения ρ относительно операции покомпонентного умножения образует моноид, который будем называть *моноидом сильных эндотопизмов* отношения ρ. Обозначим этот моноид через $\mathrm{SEt}(\rho)$. Ясно, что $\mathrm{SEt}(\rho)$ есть подполугруппа $\mathrm{Et}(\rho)$.

Описание сильных эндотопизмов отношения эквивалентности дает

Лемма 3. *Эндотопизм (τ, σ) отношения эквивалентности $\alpha \subseteq X \times X$ является сильным эндотопизмом тогда и только тогда, когда отображение τ^*, определенное по правилу $\overline{a}\tau^* = \overline{a\tau}$ для всех $\overline{a} \in X/\alpha$, является инъективным преобразованием фактор-множества X/α.*

Доказательство. Возьмем $(\tau, \sigma) \in \mathrm{SEt}(\alpha)$ и предположим, что $\overline{a}\tau^* = \overline{b}\tau^*$ для некоторых различных $\overline{a}, \overline{b} \in X/\alpha$. Тогда $(a\tau, b\sigma) \in \alpha$, однако $(a, b) \notin \alpha$, а это противоречит тому, что эндоморфизм (τ, σ) сильный. Таким образом, τ^* есть инъективное преобразование X/α.

Обратное утверждение очевидно. Лемма доказана.

Учитывая справедливость последней леммы и для эндоморфизмов эквивалентности, с одной стороны, получаем, что $\mathrm{SEt}(\alpha)$ есть эквивалентность на моноиде $\mathrm{SEnd}(\alpha)$, а с другой, что $\mathrm{SEt}(\alpha)$ – соответствие полугруппы $\mathrm{SEnd}(\alpha)$.

Пусть α – отношение эквивалентности на множестве X, K – малая категория, определенная так же, как в п. 3. Через $\mathfrak{I}_{\mathrm{in}}(X/\alpha)$ обозначим полугруппу всех инъективных преобразований фактор-множества X/α и выделим в декартовом квадрате сплетения $\mathfrak{I}_{\mathrm{in}}(X/\alpha) \operatorname{wr} K$ на себя такую подполугруппу:

$$
S_X^\alpha = \{((\varphi, f), (\psi, g)) \mid \varphi = \psi\}.
$$

Обозначим через $\mathfrak{I}_{\mathrm{in}}(X/\alpha) \operatorname{wr} K_*^2$ сплетение полугруппы преобразований $\mathfrak{I}_{\mathrm{in}}(X/\alpha)$ с малой категорией K_*^2, а через $\mathfrak{I}_{\mathrm{in}}(X/\alpha) \operatorname{wr}^{(2)} K$ – 2-кратное сплетение полугруппы $\mathfrak{I}_{\mathrm{in}}(X/\alpha)$ с категорией K (см. п. 3).

Имеет место следующая

Теорема 4. *Пусть α – отношение эквивалентности на множестве X. Полугруппа $\mathrm{SEt}(\alpha)$ изоморфна каждой из следующих полугрупп*:

(i) *подпрямому произведению S_X^α моноида $(\mathfrak{I}_{\mathrm{in}}(X/\alpha)) \operatorname{wr} K) \times (\mathfrak{I}_{\mathrm{in}}(X/\alpha)) \operatorname{wr} K)$*;

(ii) *сплетению $\mathfrak{I}_{\mathrm{in}}(X/\alpha) \operatorname{wr} K_*^2$ моноида $\mathfrak{I}_{\mathrm{in}}(X/\alpha)$ с категорией K_*^2*;

(iii) *2-кратному сплетению $\mathfrak{I}_{\mathrm{in}}(X/\alpha) \operatorname{wr}^{(2)} K$ моноида преобразований $\mathfrak{I}_{\mathrm{in}}(X/\alpha)$ с малой категорией K.*

Доказательство аналогично доказательствам теоремы 1 и леммы 2.

В случае, когда множество X конечно, очевидно $\Im_{\mathrm{in}}(X/\alpha)=S(X/\alpha)$.

Следствие 4. *Для любой эквивалентности α на конечном множестве X*

$$|\mathrm{SEt}(\alpha)|=\sum_{\varphi\in S(X/\alpha)}\Bigl(\prod_{\overline{x}\in X/\alpha}|\overline{x}\varphi|^{|\overline{x}|}\Bigr)^2.$$

Рассмотрим следующий пример. Пусть на множестве $X=\{a,b,c,d,e,f\}$ задано отношение эквивалентности

$$\alpha=(A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)\cup(A_3\times A_3),$$

где $A_1=\{a\}$, $A_2=\{b,c\}$, $A_3=\{d,e,f\}$.

В этом случае $\mathrm{Ob}\,K=\{A_1,A_2,A_3\}$, морфизмы категории K – всевозможные отображения из любого класса эквивалентности α в любой другой класс и $\Im_{\mathrm{in}}(X/\alpha)=S_3$, где S_3 – симметрическая группа на 3-элементном множестве. По теореме 4 имеем

$$\mathrm{SEt}(\alpha)\cong S_3\,\mathrm{wr}^{(2)}\,K\cong S_3\,\mathrm{wr}\,K_*^2\cong S_X^\alpha.$$

Кроме того, по следствию 4 получаем

$$\begin{aligned}|\mathrm{SEt}(\alpha)|&=\sum_{\varphi\in S_3}\Bigl(\prod_{i=1}^{3}(i\varphi)^i\Bigr)^2\\&=(2^2\cdot3^3)^2+(3^2\cdot2^3)^2+(2\cdot3^3)^2+(2\cdot3^2)^2+(3\cdot2^3)^2+(3\cdot2^2)^2=20808.\end{aligned}$$

5. Группа автотопизмов отношения эквивалентности. В этом пункте мы изучаем точные представления группы автотопизмов эквивалентности в терминах различных конструкций сплетения.

Пусть X – произвольное непустое множество, α – отношение эквивалентности на множестве X. Очевидной является следующая

Лемма 4. *Упорядоченная пара (τ,σ) подстановок множества X будет автотопизмом отношения эквивалентности $\alpha\subseteq X\times X$ тогда и только тогда, когда для каждого класса $\overline{a}\in X/\alpha$ существует такой класс $\overline{b}\in X/\alpha$, что $\overline{a}\tau=\overline{b}$ и $\overline{a}\sigma=\overline{b}$.*

Из этой леммы и строения автоморфизмов произвольной эквивалентности следует, что для любой эквивалентности α справедливы включения:

$$\mathrm{pr}_1\,\mathrm{At}(\alpha)\subseteq\mathrm{Aut}(\alpha),\qquad \mathrm{pr}_2\,\mathrm{At}(\alpha)\subseteq\mathrm{Aut}(\alpha).$$

Более того, с одной стороны отношение $\mathrm{At}(\alpha)$ будет эквивалентностью на группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\alpha)$, а с другой – соответствием полугруппы эндоморфизмов $\mathrm{End}(\alpha)$ и, в частности, группы $\mathrm{Aut}(\alpha)$.

Определим малую категорию $\mathbb{K}$, полагая

$$\mathrm{Ob}\,\mathbb{K}=X/\alpha,\qquad \mathrm{Mor}\,\mathbb{K}=\bigcup_{\overline{a},\overline{b}\in\mathrm{Ob}\,\mathbb{K}}\mathrm{Map}_b(\overline{a},\overline{b}),$$

где $\mathrm{Map}_b(\overline{a},\overline{b})$ – множество всех биекций из класса $\overline{a}$ в класс $\overline{b}$.

Через $B(X/\alpha)$ обозначим множество всех биекций $\delta\colon X/\alpha \to X/\alpha$ таких, что $|\overline{a}| = |\overline{a}\delta|$ для каждого $\overline{a} \in X/\alpha$. Понятно, что $B(X/\alpha)$ является подгруппой группы всех подстановок на фактормножестве X/α.

В прямом произведении сплетения $B(X/\alpha)\,\mathrm{wr}\,\mathbb{K}$ на себя выделим подгруппу:

$$A_X^\alpha = \{((\varphi, f), (\psi, g)) \mid \varphi = \psi\}.$$

Обозначим через $B(X/\alpha)\,\mathrm{wr}\,\mathbb{K}_*^2$ сплетение группы подстановок $B(X/\alpha)$ с малой категорией $\mathbb{K}_*^2$, а через $B(X/\alpha)\,\mathrm{wr}^{(2)}\,\mathbb{K}$ – 2-кратное сплетение той же группы $B(X/\alpha)$ с категорией $\mathbb{K}$, которые определяются аналогично подобным конструкциям сплетения из п. 3.

Теорема 5. *Пусть α – отношение эквивалентности на множестве X. Группа* $\mathrm{At}(\alpha)$ *изоморфна каждой из следующих групп*:

(i) *подпрямому произведению A_X^α группы* $(B(X/\alpha)\,\mathrm{wr}\,\mathbb{K}) \times (B(X/\alpha)\,\mathrm{wr}\,\mathbb{K})$;

(ii) *сплетению $B(X/\alpha)\,\mathrm{wr}\,\mathbb{K}_*^2$ группы подстановок $B(X/\alpha)$ с категорией $\mathbb{K}_*^2$*;

(iii) 2-*кратному сплетению $B(X/\alpha)\,\mathrm{wr}^{(2)}\,\mathbb{K}$ группы подстановок $B(X/\alpha)$ с малой категорией $\mathbb{K}$.*

Доказательство аналогично доказательствам теоремы 1 и леммы 2.

В случае, когда множество X конечное, имеем

$$|\mathrm{At}(\alpha)| = |B(X/\alpha)| \cdot \Bigl(\prod_{A \in X/\alpha} |A|!\Bigr)^2.$$

В конце работы рассмотрим другую конструкцию сплетения – сплетение групп, в терминах которой опишем представление группы автотопизмов эквивалентности.

Возьмем эквивалентность α на множестве X и положим $X/\alpha = \{K_j \mid j \in J\}$. Через P обозначим множество всех представителей, взятых в точности по одному из каждого класса эквивалентности отношения равномощности $\sim$ на X/α, и пусть $Y = \{i \mid K_i \in P\}$.

Для каждого $i \in Y$ положим

$$\overline{i} = \{j \in J \mid K_i \sim K_j\}, \qquad X_i = \bigcup_{j \in \overline{i}} K_j \qquad \alpha_i = \alpha \cap (X_i \times X_i).$$

Понятно, что α_i – эквивалентность на X_i для всех $i \in Y$ и $\bigcup_{i \in Y} X_i = X$.

Из леммы 4 следует, что $(\varphi, \psi) \in \mathrm{At}(\alpha)$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathrm{Aut}(\alpha)$, $\psi \in \mathrm{Aut}(\alpha)$ и $\overline{a}\varphi = \overline{a}\psi$ для всех $\overline{a} \in X/\alpha$. Учитывая, что подстановка η множества X принадлежит $\mathrm{Aut}(\alpha)$ только в том случае, когда $\eta|_{X_i} \in \mathrm{Aut}(\alpha_i)$ для всех $i \in Y$, получаем следующее утверждение.

Лемма 5. *Для каждой эквивалентности α на множестве X соответствие* $\mathrm{At}(\alpha)$ *изоморфно прямому произведению $\prod_{i \in Y} \mathrm{At}(\alpha_i)$ соответствий $\mathrm{At}(\alpha_i)$, $i \in Y$.*

Пусть G – произвольная группа, $S(X)$ – симметрическая группа на множестве X. Через $\mathrm{Fun}(X; G)$ обозначим прямое произведение изоморфных копий G_x группы G, которые индексированы элементами множества X. Таким образом, $\mathrm{Fun}(X; G)$ является группой всех функций $X \to G$ с обычной операцией композиции функций.

Определим на множестве $S(X)\times \mathrm{Fun}(X;G)$ операцию по правилу

$$(g_1;f_1)(g_2;f_2)=(g_1g_2;f_1^{g_2}f_2),$$

где $xf_1^{g_2}=(xg_2^{-1})f_1$ для всех $x\in X$.

Относительно только что определенной операции множество $S(X)\times \mathrm{Fun}(X;G)$ является группой, которая называется *сплетением* группы G с симметрической группой $S(X)$ (см., например, [35]). Полученная группа обозначается через $\mathrm{GWrS}(X)$.

В терминах сплетений групп получаем описание соответствий $\mathrm{At}(\alpha_i)$, $i\in Y$.

Лемма 6. *Для любого элемента $i\in Y$ соответствие $\mathrm{At}(\alpha_i)$ изоморфно сплетению $\mathrm{At}(\alpha_i|_{K_i})\,\mathrm{Wr}\,S(\bar{i})$ соответствия $\mathrm{At}(\alpha_i|_{K_i})$ с симметрической группой $S(\bar{i})$.*

Доказательство. Пусть $g=(\varphi,\psi)$ – произвольный автотопизм отношения α_i, $i\in Y$, а $\varphi^*\colon \bar{i}\to\bar{i}$ – биекция, которая индуцируется автотопизмом g. Для всех $\lambda,\mu\in\bar{i}$ зафиксируем биекции $f^{(\lambda,\mu)}\colon K_\lambda\to K_\mu$ такие, что $f^{(\lambda,\lambda)}$, $\lambda\in\bar{i}$, – тождественные подстановки и выполняются равенства $f^{(\lambda,\mu)}f^{(\mu,\lambda)}=f^{(\lambda,\lambda)}$.

Для любого $g=(\varphi,\psi)\in\mathrm{At}(\alpha_i)$ положим $g\Omega=(\varphi^*,\widetilde{g})$, где

$$j\widetilde{g}=\Big(f^{(i,j{\varphi^*}^{-1})}\varphi|_{K_{j{\varphi^*}^{-1}}}f^{(j,i)},f^{(i,j{\psi^*}^{-1})}\psi|_{K_{j{\psi^*}^{-1}}}f^{(j,i)}\Big)$$

для всех $j\in\bar{i}$. Поскольку $f^{(\lambda,\mu)}$ есть изоморфизм из $(K_\lambda,\alpha_i|_{K_\lambda})$ на $(K_\mu,\alpha_i|_{K_\mu})$ для всех $\lambda,\mu\in\bar{i}$, то отображение $\widetilde{g}$, а следовательно, и Ω заданы корректно, причем Ω отображает соответствие $\mathrm{At}(\alpha_i)$ в сплетение $\mathrm{At}(\alpha_i|_{K_i})\,\mathrm{Wr}\,S(\bar{i})$.

Пусть $g_1=(\varphi_1,\psi_1)$, $g_2=(\varphi_2,\psi_2)\in\mathrm{At}(\alpha_i)$, тогда

$$g_1\Omega=(\varphi_1^*,\widetilde{g}_1),\quad g_2\Omega=(\varphi_2^*,\widetilde{g}_2)\qquad\text{и}\qquad(g_1g_2)\Omega=((\varphi_1\varphi_2)^*,\widetilde{g_1g_2}).$$

Ясно, что $(\varphi_1\varphi_2)^*=\varphi_1^*\varphi_2^*$ (см. теорема 1). Кроме того, $g_1\Omega g_2\Omega=(\varphi_1^*\varphi_2^*,\widetilde{g}_1^{\varphi_2^*}\widetilde{g}_2)$, где

$$\begin{aligned}
j(\widetilde{g}_1^{\varphi_2^*}\widetilde{g}_2)&=j\widetilde{g}_1^{\varphi_2^*}j\widetilde{g}_2=(j{\varphi_2^*}^{-1})\widetilde{g}_1j\widetilde{g}_2\\
&=\Big(f^{(i,(j{\varphi_2^*}^{-1}){\varphi_1^*}^{-1})}\varphi_1|_{K_{(j{\varphi_2^*}^{-1}){\varphi_1^*}^{-1}}}f^{(j{\varphi_2^*}^{-1},i)},f^{(i,(j{\psi_2^*}^{-1}){\psi_1^*}^{-1})}\psi_1|_{K_{(j{\psi_2^*}^{-1}){\psi_1^*}^{-1}}}f^{(j{\psi_2^*}^{-1},i)}\Big)\\
&\qquad\times\Big(f^{(i,j{\varphi_2^*}^{-1})}\varphi_2|_{K_{j{\varphi_2^*}^{-1}}}f^{(j,i)},f^{(i,j{\psi_2^*}^{-1})}\psi_2|_{K_{j{\psi_2^*}^{-1}}}f^{(j,i)}\Big)\\
&=\Big(f^{(i,j{(\varphi_1\varphi_2)^*}^{-1})}\varphi_1|_{K_{({\varphi_1\varphi_2})^{*-1})}}\varphi_2|_{K_{j{\varphi_2^*}^{-1}}}f^{(j,i)},\\
&\qquad\quad f^{(i,j{(\psi_1\psi_2)^*}^{-1})}\psi_1|_{K_{j(\psi_1\psi_2)^{*-1})}}\psi_2|_{K_{j{\psi_2^*}^{-1}}}f^{(j,i)}\Big)\\
&=\Big(f^{(i,j{(\varphi_1\varphi_2)^*}^{-1})}(\varphi_1\varphi_2)|_{K_{j(\varphi_1\varphi_2)^{*-1}}}f^{(j,i)},f^{(i,j{(\psi_1\psi_2)^*}^{-1})}(\psi_1\psi_2)|_{K_{j(\psi_1\psi_2)^{*-1}}}f^{(j,i)}\Big)\\
&=j\widetilde{g_1g_2}
\end{aligned}$$

для всех $j\in\bar{i}$. Таким образом, Ω – гомоморфизм. Биективность отображения Ω проверяется непосредственно. Лемма доказана.

Для любого $\lambda\in\bar{i}$, очевидно, $\alpha_i|_{K_\lambda}=\omega_{K_\lambda}$, поэтому $\mathrm{At}(\alpha_i|_{K_\lambda})=\omega_{S(K_\lambda)}$ (см. пример (b), п. 2). Отсюда и из лемм 5 и 6 следует

Теорема 6. *Группа автотопизмов* $\mathrm{At}(\alpha)$ *произвольной эквивалентности* α *на множестве* X *изоморфна прямому произведению* $\prod_{i\in Y} S(K_i)\times S(K_i)\,\mathrm{Wr}\,S(\bar{i})$ *сплетений декартового квадрата* $S(K_i)\times S(K_i)$ *с симметрической группой* $S(\bar{i})$. *Более того, если* X *– конечное множество, то*

$$|\mathrm{At}(\alpha)| = \prod_{i\in Y}(|K_i|!^2\cdot|\bar{i}|).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. Г. Курош, *Общая алгебра*, Лекции 1969–70 учебного года, Наука, М., 1974.

[2] H. J. Zassenhaus, *The Theory of Groups*, Chelsea Publ., New York, 1958.

[3] О. Г. Ганюшкін, Т. В. Турка, “Порядок напівгрупи відповідностей скінченної групи”, *Вісн. Київськ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки*, 2009, № 3, 9–13.

[4] Т. В. Турка, “Відношення Гріна на напівгрупі відповідностей скінченної групи”, *Вісн. Київськ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки*, 2010, № 4, 38–42.

[5] Д. А. Бредихин, “Связки соответствий полугрупп”, *Современная алгебра*, Постоянно действующий межвуз. (респ.) темат. сб. Вып. 4, Изд-во Ленингр. гос. пед. ин-та, Л., 1976, 31–47.

[6] Д. А. Бредихин, “Об определимости нильполугрупп своими связками соответствий”, *Исследования по современной алгебре*, Матем. записки, **11**, № 1, Изд-во Уральского гос. ун-та, Свердловск, 1978, 3–9.

[7] S. M. Goberstein, “Inverse semigroups determined by their bundles of correspondences”, *J. Algebra*, **125**:2 (1989), 474–488.

[8] S. M. Goberstein, “On orthodox semigroups determined by their bundles of correspondences”, *Pacific J. Math.*, **153**:1 (1992), 71–84.

[9] М. С. Бургин, “Категории с инволюцией и соответствия в γ-категориях”, Тр. ММО, **22**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1970, 161–228.

[10] М. Ш. Цаленко, “Классификация категорий соответствий и типы регулярности категорий”, Тр. ММО, **41**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1980, 241–285.

[11] И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев, “Неразложимые представления группы Лоренца”, *УМН*, **23**:2 (1968), 3–60.

[12] S. Mac Lane, “An algebra of additive relations”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **47** (1961), 1043–1051.

[13] D. Puppe, “Korrespondenzen in Abelschen Kategorien”, *Math. Ann.*, **148** (1962), 1–30.

[14] А. А. Искандер, “Структура соответствий универсальной алгебры”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **29**:6 (1965), 1357–1372.

[15] А. А. Искандер, “Частичные универсальные алгебры с заданными структурами подалгебр и соответствий”, *Матем. сб.*, **70**:3 (1966), 438–456.

[16] Г. И. Житомирский, “Стабильные бинарные отношения на универсальных алгебрах”, *Матем. сб.*, **82**:2 (1970), 163–174.

[17] M. Petrich, “The semigroup of endomorphisms of a linear manifold”, *Duke Math. J.*, **36** (1969), 145–152.

[18] A. Laradji, A. Umar, “Combinatorial results for semigroups of order-preserving full transformations”, *Semigroup Forum*, **72**:1 (2006), 51–62.

[19] B. Steinberg, “On the endomorphism monoid of a profinite semigroup”, *Port. Math.*, **68**:2 (2011), 177–183.

[20] Е. А. Бондарь, Ю. В. Жучок, “Полугруппы сильных эндоморфизмов бесконечных графов и гиперграфов”, *Укр. матем. журн.*, **65**:6 (2013), 743–754.

[21] Б. В. Попов, “Полугруппы эндотопизмов μ-арных отношений”, *Учен. зап. ЛНПУ им. А. Герцена*, **274** (1965), 184–201.

[22] Ю. В. Жучок, Е. А. Тоичкина, “Полугруппы эндотопизмов отношения эквивалентности”, *Матем. сб.*, **205**:5 (2014), 37–54.

[23] A. A. Albert, “Quasigroups. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **54** (1943), 507–519.

[24] В. Д. Белоусов, “Уравновешенные тождества в квазигруппах”, *Матем. сб.*, **70**:1 (1966), 55–97.

[25] А. Х. Табаров, “Автотопии и антиавтотопии линейных квазигрупп”, *Докл. АН Республики Татарстан*, **52** (2009), 10–16.

[26] A. Kh. Tabarov, “On endotopisms of linear and alinear quasigroups”, *The XIV Conference On Applied and Industrial Mathematics* (Chisinau, August 17–19, 2006), 2006, 319–320.

[27] Ю. В. Жучок, “Ендоморфізми відношень еквівалентності”, *Вісн. Київськ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки*, 2007, № 3, 22–26.

[28] В. Флейшер, “О сплетении моноидов с категориями”, *Тр. АН Эстонской ССР*, **35**:3 (1986), 237–243.

[29] V. Fleischer, U. Knauer, “Endomorphism monoids of acts are wreath products of monoids with small categories”, *Semigroups*, *Theory and Applications*, Lecture Notes in Math., **1320**, Springer-Verlag, Berlin, 1988, 84–96.

[30] U. Knauer, M. Nieporte, “Endomorphisms of graphs. I. The monoid of strong endomorphisms”, *Arch. Math.* (*Basel*), **52**:6 (1989), 607–614.

[31] Ю. В. Жучок, “Полугруппы эндоморфизмов некоторых свободных произведений”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **17**:3 (2012), 51–60.

[32] Л. М. Глускин, “Полугруппы изотонных преобразований”, *УМН*, **16**:5 (1961), 157–162.

[33] K. Čulík, “Zur Theorie der Graphen”, *Časopis Pěst. Mat.*, **83** (1958), 133–155.

[34] M. Böttcher, U. Knauer, “Endomorphism spectra of graphs”, *Discrete Math.*, **109**:1-3 (1992), 45–57.

[35] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп*, Наука, М., 1972.

Ю. В. Жучок
Киевский национальный университет
им. Т. Шевченко
E-mail: zhuchok_y@mail.ru

Поступило
21.03.2013
Исправленный вариант
19.06.2014

Е. А. Тоичкина
Луганский национальный университет
им. Т. Шевченко
E-mail: elena-romanenko0@rambler.ru