Министерство образования и науки Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет
Чебышевский фонд

Материалы XII Международной конференции

Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения,

посвященной восьмидесятилетию профессора Виктора Николаевича Латышева

Тула, 21-25 апреля 2014 года

Тула 2014

ББК 22.13
УДК 511
Ч34

Председатель программного комитета А. В. Михалёв

Сопредседатель программного комитета Чубариков В. Н.

Ответственный секретарь С. А. Пихтильков

Программный комитет:
Артамонов В.А. (Москва), Балаба И.Н. (Тула), Безверхний В.Н. (Тула), Берник В. И. (Минск, Белоруссия), Быковский В.А. (Хабаровск), Винберг Э.Б. (Москва), Глухов М.М. (Москва), Голод Е.С. (Москва), Гриценко С.А. (Москва), Деза М. (Париж, Франция), Добровольский Н.М. (Тула), Есаян А.Р. (Тула), Зайцев М.В. (Москва), Зубков А.М. (Москва), Карташов В.К. (Волгоград), Касьянов П. О. (Киев, Украина), Кузнецов В.Н. (Саратов), Латышев В.Н. (Москва), Лауринчикас А. (Вильнюс, Литва), Левчук В.М. (Красноярск), Марков В.Т. (Москва), Мищенко С.П. (Ульяновск), Нестеренко Ю.В. (Москва), Нижников А.И. (Москва), Прохоров Ю.Г. (Москва), Рахмонов З.Х. (Душанбе, Таджикистан), Фомин А.А. (Москва), Чирский В. Г. (Москва), Шмелькин А. Л. (Москва).

Материалы XII Международной конференции Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения, посвященной восьмидесятилетию профессора Виктора Николаевича Латышева
— Тула: Изд-во Тул. гос.
Ч34 пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2014. – 279 с.

ISBN 5–87954–388–9

ББК 22.13
УДК 511

Выпуск осуществлен при финансовой поддержке РФФИ, грант № 14-01-06005г.

ISBN 5–87954–388–9

Список цитированной литературы

[1]

УДК 512.53

Полугруппы эндотопизмов эквивалентности

Ю. В. Жучок, Е. А. Тоичкина (г. Луганск, Украина)
zhuchok_y@mail.ru, e.a.rom@mail.ru

Пусть X – произвольное непустое множество и $\rho \subseteq X \times X$. Упорядоченная пара (φ, ψ) преобразований φ и ψ множества X называется *эндотопизмом* [1] отношения ρ, если из $(x, y) \in \rho$ следует, что $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ при любых $x, y \in X$. Множество всех эндотопизмов бинарного отношения ρ относительно операции покомпонентного умножения образует полугруппу, которую будем обозначать через $Et\,(\rho)$.

Эндотопизм (φ, ψ) отношения $\rho \subseteq X \times X$ будем называть *полусильным эндотопизмом*, если из $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ следует, что существуют такие $x' \in x\varphi\varphi^{-1}$, $y' \in y\psi\psi^{-1}$, что $(x', y') \in \rho$. Множество всех полусильных эндотопизмов отношения ρ обозначим через $HEt(\rho)$.

Эндотопизм (φ, ψ) отношения $\rho \subseteq X \times X$ назовем *локально сильным эндотопизмом*, если из $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ следует, что для каждого $x' \in x\varphi\varphi^{-1}$ найдется такой $y' \in y\psi\psi^{-1}$, что $(x', y') \in \rho$, и аналогично для каждого прообраза $y' \in y\psi\psi^{-1}$. Множество всех локально сильных эндотопизмов отношения ρ будем обозначать как $LEt(\rho)$.

Назовем эндотопизм (φ, ψ) отношения $\rho \subseteq X \times X$ *квазисильным эндотопизмом*, если из $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ следует, что существует такой $x' \in x\varphi\varphi^{-1}$, который находится в отношении ρ с каждым прообразом из $y\psi\psi^{-1}$, и аналогично для подходящего прообраза $y' \in y\psi\psi^{-1}$. Обозначим множество всех квазисильных эндотопизмов бинарного отношения ρ через $QEt(\rho)$.

Будем называть эндотопизм (φ, ψ) отношения $\rho \subseteq X \times X$ *сильным эндотопизмом*, если из $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ следует, что $(x, y) \in \rho$ при любых $x, y \in X$. Множество всех сильных эндотопизмов отношения ρ относительно операции покомпонентного умножения образует моноид, который будем обозначать как $SEt\,(\rho)$.

Упорядоченная пара (φ, ψ) подстановок φ и ψ множества X называется *автотопизмом* отношения $\rho \subseteq X \times X$, если $(x, y) \in \rho$ тогда и только тогда, когда $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ при любых $x, y \in X$. Множество всех автотопизмов отношения ρ относительно операции покомпонентного умножения образует группу, которую будем обозначать через $At\,(\rho)$.

Для произвольного множества X отношения $i_X = \{(a, a) | a \in X\}$ и $\omega_X = X \times X$ называются соответственно *тождественным* и *универсальным* отношениями на X. Бинарное отношение ρ на множестве X называется *тривиальным*, если $\rho = i_X$ или $\rho = \omega_X$.

Обозначим через $Eq(X)$ множество всех отношений эквивалентностей на X, а через $Eq^n(X)$ множество всех эквивалентностей на X с n классами мощности ≥ 2.

Лемма 1. *Множество $LEt(\alpha)$ всех локально сильных эндотопизмов отношения эквивалентности $\alpha \in Eq(X)$ является полугруппой тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

(i) α – тождественное отношение эквивалентности;
(ii) существует единственный класс $A \in X/\alpha$, такой что $|A| \geq 2$.

Лемма 2. *Множество $HEt(\alpha)$ всех полусильных эндотопизмов отношения эквивалентности $\alpha \in Eq(X)$ является полугруппой тогда и только тогда, когда α – тривиальное отношение эквивалентности.*

Лемма 3. *Для всякого $\alpha \in Eq(X)$ имеем $QEt(\alpha) = SEt(\alpha)$.*

Полугруппа S называется *регулярной* [2], если для любого $a \in S$ существует такой $x \in S$, что $axa = a$.

Регулярность полугрупп всех типов эндотопизмов произвольного отношения эквивалентности устанавливает следующая теорема.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) Полугруппа $Et(\alpha)$, $\alpha \in Eq(X)$, регулярна тогда и только тогда, когда α – тривиальное отношение эквивалентности;

(ii) Полугруппа $HEt(\alpha)$, где α – тривиальная эквивалентность, регулярна;

(iii) Полугруппа $LEt(\alpha)$, где $\alpha \in Eq^1(X)$ или $\alpha = i_X$, регулярна;

(iv) Полугруппа $SEt(\alpha)$, $\alpha \in Eq(X)$, регулярна тогда и только тогда, когда фактормножество X/α – конечно;

(v) Группа $At(\alpha)$ регулярна для произвольного $\alpha \in Eq(X)$.

Полугруппа S называется *корегулярной* [3], если для любого $a \in S$ существует такой $x \in S$, что

$$axa = xax = a.$$

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) Полугруппа $Et(\alpha)$, $\alpha \in Eq(X)$, корегулярна тогда и только тогда, когда $|X| \in \{1, 2\}$;

(ii) Полугруппа $HEt(\alpha)$, где α – тривиальная эквивалентность, корегулярна тогда и только тогда, когда $Et(\alpha)$ корегулярна;

(iii) Полугруппа $SEt(\alpha), \alpha \in Eq(X)$, корегулярна тогда и только тогда, когда $|X| \in \{1, 2\}$ или $|X| = 3, \alpha \notin \{i_X, \omega_X\}$;

(iv) Полугруппа $LEt(\alpha)$, где $\alpha \in Eq^1(X)$ или $\alpha = i_X$, корегулярна тогда и только тогда, когда полугруппа $SEt(\alpha)$ корегулярна;

(v) Группа $At(\alpha), \alpha \in Eq(X)$, корегулярна тогда и только тогда, когда полугруппа $SEt(\alpha)$ корегулярна или $|X| = 4, |X/\alpha| = 3$.

Пусть ρ – бинарное отношение на X. Цепочке включений

$$Et(\rho) \supseteq HEt(\rho) \supseteq LEt(\rho) \supseteq QEt(\rho) \supseteq SEt(\rho) \supseteq At(\rho)$$

соответствует последовательность $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$, где $s_i \in \{0, 1\}, i \in \{1, .., 5\}$. При этом $s_i = 0$, если на i-той позиции в приведенной выше последовательности включений полугруппы совпадают, $s_i = 1$ в противном случае. Значение суммы $\Sigma_{i=1}^{5} = s_i 2^{i-1}$ назовем *эндотипом бинарного отношения* ρ относительно его эндотопизмов и обозначим через $Ettype(X, \rho)$.

Теорема 3. *Для любой эквивалентности α на множестве X*

$$Ettype(X, \alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } |X| = 1, \\ 4, & \text{если } 2 \leq |X| < \infty,\ \alpha = i_X, \\ 16, & \text{если } 2 \leq |X|,\ \alpha = \omega_X, \\ 20, & \text{если } |X| = \infty,\ \alpha = i_X, \\ 23, & \text{если } \alpha \neq i_X, \alpha \neq \omega_X. \end{cases}$$

Список цитированной литературы

[1] Попов Б. В. Полугруппы эндоморфизмов μ-арных отношений // Учёные записки ЛГПИ им. А. И. Герцена. 1965. Т. 274, С. 184–201.

[2] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп, Т.1. М.: Мир, 1972. 506 с.

[3] Bijev G., Todorov K. Coregular semigroups // Notes on Semigroups VI, Budapest 1980. № 4, С. 1–11.

УДК 512.

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ПОЛУГРУПП

А. И. Кандренкин, А. В. Капустян (г. Киев, Украина)
kandr08@mail.ru kapustyanav@gmail.com

Список цитированной литературы

[1]

УДК 512.579