В. М. Жукова, С. О. Переяславська

КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД
„ЛУГАНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА”**

В. М. Жукова, С. О. Переяславська

КОМП’ЮТЕРНІ СИСТЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

***Навчальний посібник до вивчення дисципліни
для студентів спеціальності
6.050103 – „Програмна інженерія”***

**Старобільськ
ДЗ „ЛНУ імені Тараса Шевченка”
2017**

УДК 519.876.5(075.8)
ББК 22.181я73
Ж86

Р е ц е н з е н т и :

Панченко Л. Ф. – доктор педагогічних наук, професор кафедри фізико-технічних систем та інформатики Луганського національного університету імені Тараса Шевченка.

Могильний Г. А. – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри інформаційних технологій та систем Луганського національного університету імені Тараса Шевченка.

Ж86 **Жукова В.М.** Комп'ютерні системи математичного моделювання : навч. посіб. до вивчення дисц. для студ. спец. 6.050103 – „Програмна інженерія" / В. М. Жукова, С. О. Переяславська ; Держ. закл. „Луган. нац. ун-т імені Тараса Шевченка". – Луганськ : ДЗ „ЛНУ імені Тараса Шевченка", 2017. – 120 с.

Навчальний посібник структуровано відповідно до розділів робочої програми курсу „Комп'ютерні системи математичного моделювання" кафедри інформаційних технологій та систем ЛНУ імені Тараса Шевченка. Посібник складається з одного модуля, у якому подано загальну характеристику та функціональні можливості системи MathCAD (чисельне розв'язання нелінійних рівнянь та систем лінійних і нелінійних рівнянь, робота з матрицями, символьні обчислення в MathCAD).

Навчальний посібник призначений для студентів фізико-математичного та технічного профілю, учителів-предметників загальноосвітніх шкіл, ліцеїв, коледжів, гімназій, слухачів курсів підвищення кваліфікації, а також для самоосвіти.

УДК 519.876.5(075.8)
ББК 22.181я73

Рекомендовано до друку Вченою радою
Луганського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 10 від 31 березня 2017 р.)

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність курсу „Комп'ютерні системи математичного моделювання" зумовлена, перш за все, необхідністю уявлення про сучасне програмне забезпечення, в якому реалізовані алгоритми чисельних методів, що використовуються при розв'язанні задач, які постають перед сучасними науковцями та інженерами.

Головною метою курсу „Комп'ютерні системи математичного моделювання " є отримання знань про існуючі чисельні методи розв'язання прикладних задач та уміння реалізувати їх за допомогою існуючих математичних програмних комплексів.

У наш час існує цілий ряд різних математичних пакетів, що реалізують різноманітні чисельні методи та здатні робити аналітичні математичні перетворення. Мабуть, найбільш відомими сьогодні є наступні пакети: Mathematica (фірма Wolfram Research), Maple (фірма Waterloo Maple Inc), Matlab (фірма The MathWorks), MathCAD (фірма MathSoft Inc). Перші два фактично є мовами для проведення символічних математичних перетворень.

Пакет MathCAD популярний, мабуть, більше в інженерному, чим у науковому середовищі. Характерною рисою пакета є використання звичних стандартних математичних позначень, тобто документ на екрані виглядає точно так само як звичайний математичний розрахунок. Для використання пакета не потрібно вивчати яку-небудь систему команд, як, наприклад, у випадку пакетів Mathematica або Maple. Пакет орієнтований у першу чергу на проведення чисельних розрахунків, але має вбудований символічний процесор Maple, який дозволяє виконувати аналітичні перетворення. В останніх версіях передбачена можливість створювати зв'язок документів MathCAD з документами Mathlab. На відміну від згаданих вище пакетів, MathCAD є середовищем візуального програмування, тобто не вимагає знання специфічного набору команд. Простота освоєння пакета, дружній інтерфейс, відносна невибагливість до можливостей комп'ютера з'явилися головними причинами того, що саме цей пакет був обраний у даному курсі.

До числа задач, які розглядаються та розв'язуються за допомогою пакета MathCAD у даному курсі, відносяться: задачі математичної статистики, задачі лінійної алгебри.

Дисципліна займає важливе місце в загальному процесі навчання. Підготовка, надана в цьому курсі, повинна отримати подальший практичний розвиток та поглиблення при вивченні всіх природничо-математичних та методичних дисциплін навчального плану. Знання, отримані майбутнім фахівцем в процесі вивчення цієї дисципліни сприяють розширенню меж застосування комп'ютерної техніки та дозволять проводити математичні та статистичні розрахунки, аналізувати та систематизувати отримані результати,

будувати графіки та використовувати програмне забезпечення для автоматизації складних обчислень.

Основні завдання дисципліни:

- забезпечити можливість ефективного використання засобів сучасної обчислювальної техніки при виконанні інженерних та наукових розрахунків;
- познайомити студентів з основами застосування персональних обчислювальних машин для проведення обчислень та складних розрахунків;
- побудова та аналіз складних графіків.

При опрацюванні змісту курсу студент повинен оволодіти основними методами розв’язання різноманітних прикладних задач, а також вміти використовувати прикладні програми при проведенні розрахунків на ПЕОМ.

Навчальний посібник складається з одного модулю, до якого входять теоретичні відомості, лабораторні роботи, перелік питань до модульних робіт, рекомендована література та додатки.

Критерії оцінювання. При вивченні дисципліни „ Комп’ютерні системи математичного моделювання” поточний контроль знань та навичок студентів проводиться у формі захисту лабораторних робіт, контроль самостійної роботи виконується у час розподілений для контролю самостійної роботи у формі співбесіди або захисту індивідуальних завдань, в якості підсумкового контролю передбачено модульне тестування. Максимальна кількість балів за результатами двох модульних робіт – 40 балів, лабораторних робіт – 48 балів, самостійної роботи – 12 балів. Підсумовуються результати усіх робіт (модульного тестування, лабораторних робіт, самостійного індивідуального завдання). Максимально можлива кількість балів – 100. Оцінці „5” (А) відповідає – більше 90 балів, „4” (В, С) – від 75 до 89 балів, „3” (D, Е) – від 50 до 74 балів.

Зміст навчального посібника відповідає типовим вимогам освітніх програм і розрахований на студентів ВНЗ, учнів шкіл, слухачів курсів, а також для самоосвіти.

Крім цього, даний навчальний посібник може стати у нагоді вчителям середніх шкіл, ліцеїв, коледжів, гімназій.

МОДУЛЬ 1

Тема 1. Сучасні засоби комп’ютерної математики. Функціональні можливості MathCAD

У наш час існує цілий ряд різних інтегрованих математичних програмних систем для науково-технічних розрахунків: Eureka, MatLAB , MathCAD, Maple, Mathematica, Statistica і т.д. Велика кількість подібних розробок свідчать про значний інтерес до них в усім світі й швидкий розвиток комп’ютерних математичних систем.

Широку й заслужену популярність ще в середині 80-х років заслужили інтегровані системи для автоматизації математичних розрахунків класу MathCAD, розроблені фірмою MathSoft (США).

MathCAD – математично орієнтовані універсальні системи. Крім властиво обчислень вони дозволяють блискуче вирішувати задачі, які важко піддаються популярним текстовим редакторам або електронним таблицям. За допомогою MathCAD можна не тільки якісно підготувати тексти статей, книг, дисертацій, наукових звітів, дипломних і курсових проектів, але й легко здійснити набір самих складних математичних формул і представити результати в наочному графічному вигляді.

MathCAD – це ідеальний математичний інструмент для користувачів, що працюють в галузі техніки або природничих наук, а також для студентів, викладачів і школярів. MathCAD вигідно відрізняється від інших програм комп’ютерної математики можливістю вільно компонувати робочий аркуш і легкістю у вивченні.

MathCAD є математичним редактором, що дозволяє проводити різноманітні наукові й інженерні розрахунки, починаючи від елементарної арифметики й закінчуючи складними реалізаціями чисельних методів.

MathCAD поєднує в собі простий *текстовий редактор*, *математичний інтерпретатор* і *графічний процесор*.

Блоки виконуються зліва направо і зверху вниз.

MathCAD надає широкі можливості імпорту/експорту даних, інтеграції з Internet, можливості роботи з електронними таблицями Excel усередині MathCAD-документа.

Основні можливості пакета MathCAD:

- математичні вираження й текст уводяться за допомогою формульного редактора MathCAD, що по можливостям і простоті використання не уступає, наприклад, редактору формул, убудованому в Microsoft Word;
- математичні розрахунки виконуються негайно, відповідно до уведених формул;

- графіки різних типів (на вибір користувача) з багатими можливостями форматування вставляються безпосередньо в документи;
- можливе введення й виведення даних у файли різних форматів;
- документи можуть бути роздруковані безпосередньо з MathCAD у тому виді, що користувач бачить на екрані комп'ютера, або збережені у форматі RTF для наступного редагування в більш потужних текстових редакторах (наприклад, Microsoft Word);
- можливе збереження документів у форматі Web-сторінки, причому створення файлів з малюнками відбувається автоматично;
- символьні обчислення дозволяють миттєво одержати різноманітну довідкову математичну інформацію, а система допомоги, Центр Ресурсів й убудовані електронні книги допомагають швидко відшукати потрібну довідку або приклад тих або інших розрахунків.

До складу MathCAD входять декілька інтегрованих між собою компонентів:

- це потужний текстовий редактор для введення й редагування як тексту, так і формул,

- обчислювальний процесор – для проведення розрахунків відповідно до введених формул,

- символьний процесор, що є, по суті, системою штучного інтелекту.

Поєднання цих компонентів створює зручне обчислювальне середовище для різноманітних математичних розрахунків й, одночасно, документування результатів роботи.

1.1. Загальна характеристика

У пакеті MathCAD широко використовуються вбудовані функції. До основних вбудованих функцій відносяться:

- *тригонометричні й зворотні,*
- *гіперболічні й зворотні,*
- *експонентні,*
- *логарифмічні,*
- *статистичні,*
- *Фур'є,*
- *Бесселя,*
- *комплексних змінних.*

Можлива підтримка зв'язку з віддаленими користувачами по електронній пошті: робочий простір у стандартному форматі, як й електронне повідомлення, можна пересилати безпосередньо із програми.

При рішенні задач фізики звичайно потрібне введення розмірності й таку можливість надає MathCAD.

Усього в середовищі MathCAD п'ять одиниць виміру:

- *довжина,*
- *маса,*
- *час,*
- *заряд,*
- *абсолютна температура.*

В MathCAD представлені наступні види графіків:

- *декартовий (X-Y plot),*
- *полярний (Polar plot),*
- *поверхні (Surface plot),*
- *карта ліній рівня (Contour plot),*
- *векторне поле (Vector Field plot),*
- *тривимірний крапковий (3D Scatter plot),*
- *тривимірна стовпчаста діаграма (3D Bar Chart).*

1.2. Огляд інтерфейсу системи MathCAD

Для запуску MathCAD необхідно вибрати в меню Пуск→Программы групу MathSoft Apps, в якій виберіть програму MathCAD.

Вікно MathCAD виглядає, як показано на рис. 1.1.

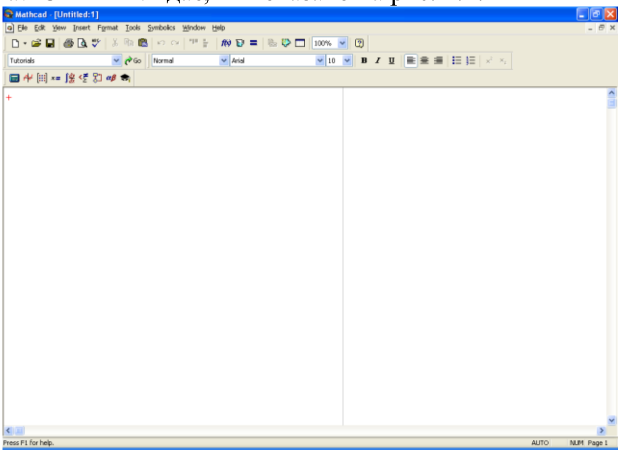


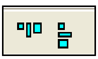
Рис.1.1. Вікно MathCAD

Верхній рядок – рядок заголовку з кнопками управління.

Другий рядок – меню MathCAD.

Третій, четвертий та п’ятий рядки – Панель інструментів (ToolBar), Панель форматування (FormatBar) та Математичні палітри (Math Palette).

Розглянемо незнайомі кнопки панелі інструментів:



Розмістити блоки уздовж, Розмістити блоки вниз (Align Across, Align Down)

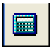

Вставити функцію (Inset Function). Використовується для вставки стандартних функцій MathCAD

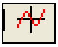

Включити розмірність (Inset Unit). Дозволяє задавати розмірні величини в системі СИ.

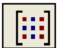

Обчислити (Calculate).

Математичні палітри зібрані на єдиній панелі у вигляді системи кнопок, кожній з яких відповідає своя палітра.

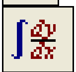
Розглянемо призначення кнопок цієї панелі.

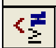

Арифметична палітра (Calculator Toolbar) відкриває палітру загальних арифметичних операторів.

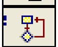

Палітра графіків (Graph Toolbar) відкриває палітру двох- та трьохмірних графіків.

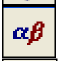

Палітра матриць та векторів (Vector and Matrix Toolbar).


Палітра обчислень (Evaluation Toolbar).


Палітра операцій математичного аналізу (Calculus Toolbar), відкриває палітру похідних, інтегралів, границь, рядів та добутків.


Палітра знакових відношень (Boolean Toolbar).


Палітра програмних структур (Programming Toolbar).


Палітра грецьких букв (Greek Symbol Toolbar).


Палітра клавіш символьної математики (Symbolic Keyword Toolbar).

Нижче цієї палітри знаходиться панель форматування, яка мало чим відрізняється від тієї ж панелі в текстовому процесорі Word. Тому пояснювати призначення цієї панелі не будемо.

Управління виводом розглянутих панелей та палітр здійснюється із меню Вид (View) командами ToolBar, FormatBar, Math Palette.

Головну частину екрану MathCAD займає вікно редагування. Натискання правої клавіші миші визиває контекстне меню, різне в залежності від режиму роботи системи і від того, в якому місці був курсор в момент натискання клавіші.

Познайомимось з головним меню (другий рядок вікна MathCAD). Перерахуємо призначення позицій головного меню.

- File – робота з файлами, мережею Інтернет та електронною поштою.
- Edit – редагування документів.
- View – зміна засобів огляду та управління елементами інтерфейсу.
- Insert – встановлення вставок об’єктів та їх шаблонів.
- Format – зміна формату об’єктів.
- Tools – управління процесом обчислень в документі, встановлення режимів обчислень.

- Symbolics – вибір операцій символьного процесору.
- Window – управління вікнами системи.
- Help – робота з довідковою базою даних про систему.

1.3. Опис клавіш для роботи з системою. Визначення змінних, виконання обчислень в системі MathCAD

Опис призначення клавіш і відповідних їм операторів MathCAD приведений нижче в таблиці у порядку старшинства.

Операція	Позначення	Клавіші	Опис
Нижній індекс	v_n	[	Повернення елемента вектора
Подвійний індекс	$A_{m,n}$	[	Повертає елемент матриці
Верхній індекс	$A^{\langle n \rangle}$	<Ctrl> + <6>	Витягає стовпець з номером n з масиву A
Векторизація	$\overrightarrow{X}$	<Ctrl> + <->	Переписує в виразі X робити операції поелементно. Всі вектори або матриці в X повинні бути одного розміру
Факторіал	$N!$	!	Повертає значення яке дорівнює $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$; n – невід’ємне ціле число.
Транспонування	A^T	<Ctrl> + <1>	Повертає матрицю чиї строки – стовпці A і чиї стовпці – строки A. A – може бути вектором.
Ступені матриці, обернення матриць	M^n	^	n-на ступінь квадратної матриці M (використовує множення матриць); n повинно бути цілим числом. M^{-1} – це обернення матриці M, інші від’ємні ступені – ступені обернення. Повертає квадратну матрицю.
Ступінь	z^w	^	Зводить z у ступінь w.
Підсумовування елементів	$\sum v$	<Ctrl> + <4>	Підсумовує елементи вектора v. Повертає скаляр.

Операція	Позначення	Клавіші	Опис
Квадратний корінь	$\sqrt{z}$	<\>	Повертає невід'ємний квадратний корінь для невід'ємного z.
Корінь n-го ступеня	$\sqrt[n]{z}$	<Ctrl> + <\>	Повертає корінь n-го ступеня z.
Абсолютне значення	$\lvert z\rvert$	<|>	Повертає значення виразу по модулю
Детермінант	$\lvert M\rvert$	<|>	Повертає детермінант (визначник) квадратної матриці M, результат – скаляр.
Ділення	$\frac{X}{z}$	</>	Ділить вираз X на скаляр z. Якщо X – масив, ділить на z кожний елемент масиву.
Множення	$X \cdot Y$	<*>	Повертає добуток X та Y, якщо X та Y скаляри. Помножує кожен елемент Y на X, якщо Y – масив, а X – скаляр. Повертає скалярний добуток, якщо X та Y вектори одного розміру. Виконує множення матриць, якщо X та Y – матриці відповідних розмірів.
Підсумову-вання	$\sum_{i=m}^{n} X$	<Ctrl>+<Shift> +<4>	Виконує підсумовування X по $i = m, m+1, \ldots n$. X може бути любим виразом, m та n повинні бути цілими числами.
Добуток	$\prod_{i=m}^{n}$	<Ctrl>+<Shift> +<3>	Виконує множення X по $i = m, m+1, \ldots n$. X може бути любим виразом, m та n повинні бути цілими числами.
Підсумову-вання по дискретному аргументу	$\sum_{i} X$	<$>	Підсумовує X по дискретному аргументу i. X може бути любим виразом.

Операція	Позначення	Клавіші	Опис
Добуток по дискретному аргументу	$\prod_i X$	<#>	Виконує множення X по дискретному аргументу i. X може бути любим виразом.
Інтеграл	$\int_a^b f(t)dt$	<&>	Повертає визначений інтеграл від $f(t)$ по інтервалу $[a,b]$, a та b повинні бути дійсними скалярами. Усі змінні в $f(t)$, крім t, повинні бути визначені, $f(t)$ повинна бути скалярною функцією.
Похідна	$\frac{d}{dt}f(t)$	<?>	Повертає похідну $f(t)$ по t. Усі змінні в $f(t)$, окрім змінної t, повинні бути визначені. Змінна t повинна мати скалярне значення. Функція $f(t)$ повинна повертати скаляр.
Похідна n-го порядку	$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	<Ctrl>+<?>	Повертає похідну n-го порядку функції $f(t)$ по t. Усі змінні в $f(t)$, окрім змінної t, повинні бути визначені. Змінна t повинна мати скалярне значення. Функція $f(t)$ повинна повертати скаляр; n повинне бути цілим між 0 та 5 для числового значення або натуральним для символьного.
Додавання	$X+Y$	+	Додавання, якщо X та Y скаляри; поелементне додавання, якщо X та Y – вектори або матриці одного розміру. Якщо X – масив, а

Операція	Позначення	Клавіші	Опис
			Y – скаляр, додає Y до кожного елементу X .
Віднімання	$X - Y$	-	Віднімання, якщо X та Y скаляри; поелементне відні-мання, якщо X та Y – вектори або матриці одного розміру. Якщо X – масив, а Y – скаляр, віднімає Y від кожного елементу X .
Більше ніж	$x > y$	>	Повертає 1, якщо $x > y$, в іншому випадку 0; x та y повинні бути дійсними скалярами.
Менше ніж	$x < y$	<	Повертає 1, якщо $x < y$, в іншому випадку 0; x та y повинні бути дійсними скалярами.
Більше або дорівнює	$x \geq y$	<Ctrl>+<0>	Повертає 1, якщо $x \geq y$, в іншому випадку 0; x та y повинні бути дійсними скалярами.
Менше або дорівнює	$x \leq y$	<Ctrl>+<9>	Повертає 1, якщо $x \leq y$, в іншому випадку 0; x та y повинні бути дійсними скалярами.
Дорівнює	$x = y$	<Ctrl>+<=>	Повертає 1, якщо $x = y$, в іншому випадку 0; з'являється як напівжирне = на екрані.
Не дорівнює	$x \neq y$	<Ctrl>+<3>	Повертає 1, якщо $x \neq y$, в іншому випадку 0; x та y повинні бути дійсними скалярами.

Для введення операторів можуть бути використані також палітри операторів. Для того щоб вставити оператор із палітри, необхідно клацнути мишею в тому місці робочого простору, де повинен з'явитися оператор, потім натиснути на кнопку необхідного оператору на палітрі.

Для того, щоб визначити любу змінну в MathCAD, необхідно:

- Ввести с клавіатури ім’я змінної, яку потрібно визначити. Наприклад t.
- Ввести з клавіатури двокрапку, щоб ввести символ визначення.
- Ввести з клавіатури значення змінної, яке необхідно присвоїти, наприклад: 10.

Виконайте дії описані нижче:

- Визначте змінну t, яка дорівнює 10.
- Визначте змінну g, яка дорівнює -9,8.
- Тепер, коли визначені змінні t та g, їх значення можуть бути використані в інших виразах. Значення змінної зберігається нижче місця, де відбулося присвоєння змінній її значення. Помістіть курсор на декілька рядків нижче попередніх визначень. Введіть с клавіатури: g/2<Space>*t^2<Space >. Символ (^) означає піднесення до ступеня, зірочка (*) – множення, а похила риска (/) – ділення.
- Натисніть =, щоб побачити результат. MathCAD перераховує результат відразу після внесення любих змін в робочий документ.

Фрагмент документу MathCAD з виконаними розрахунками, які описані вище:

$$t := 10$$

$$g := -9.8$$

$$\frac{g}{2}\cdot t^{2} = -490$$

1.4. Визначення дискретного аргументу

Для обчислення значення виразу для діапазону значень спочатку необхідно визначити дискретний аргумент. Аргумент (змінна) є дискретним, якщо він може приймати значення любого з чисел заданого діапазону.

Виконайте дії описані нижче:

В попередньому прикладі змінна t мала єдине значення, яке дорівнювало 10. Використовуючи цей приклад, відкоригуємо t так, щоб зробити його дискретним. Для цього виконайте наступні дії:

- Клацніть мишею на 10 в визначенні аргументу t так, щоб вказівник введення з’явився слідом за числом 10. Введіть с клавіатури: ,11. Таким чином, визанчається наступне число діапазону.
- Слідом, введіть с клавіатури: ;20, щоб визначити останнє число діапазону. MathCAD відображає символ крапки з комою, як багатокрапку.
- Щоб побачити результат, клацніть мишею на пустому місці робочого поля. MathCAD обчислить значення виразу для всіх значень t, які входять до

діапазону. Так як t приймає 11 різних значень, то отримуємо 11 різних відповідей, які відображаються у вигляді таблиці.

Фрагмент документу MathCAD з виконаними розрахунками, які описані вище:

$$t := 10, 11 .. 20$$

$$g := -9.8$$

$$\frac{g}{2} t^2 =$$

-490
-592.9
-705.6
-828.1
-960.4
$-1.103 \cdot 10^3$
$-1.254 \cdot 10^3$
$-1.416 \cdot 10^3$
$-1.588 \cdot 10^3$
$-1.769 \cdot 10^3$
$-1.96 \cdot 10^3$

1.5. Визначення та обчислення функції для одного значення аргументу і для діапазону значень аргументу

Всі описанні нижче дії необхідно виконати в MathCAD!

Щоб на екрані відображались результати обчислень з необхідною кількістю знаків, встановимо формат чисел, визвавши меню *Format* → *Result…*. В діалоговому вікні *Result Format*, (див. рис. 1.2) на вкладці *Number Format*, у групі *General* змінимо значення *Number of decimal places* замість 3 на 6. Ту ж цифру поставимо в значення *Exponential Threshold*. Клацнемо на кнопці *OK* діалогового вікна. Тепер ми зможемо бачити на екрані результати обчислень з шістьома знаками після коми.

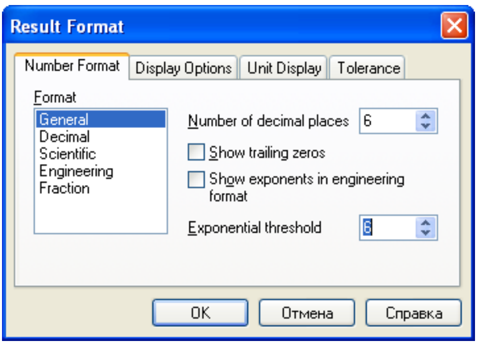


Рис. 1.2. Діалогове вікно Result Format

Визначимо функцію $f(x) = \frac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{x}$. Для цього:

- Введіть с клавіатури $f(x)$:
- Використовуючи арифметичну палітру (Calculator Toolbar), введіть $\frac{\sin(x)*\cos(x)}{x}$. Натисніть <Enter>. Визначення функції закінчено.

Для *обчислень значення функції* (її правої частини) для довільних значень x необхідно замість x підставити відповідне значення. Обчислимо значення визначеної раніше функції для x =10. Для цього:

- На новому рядку робочого поля введіть с клавіатури $f(10) =$. MathCAD поверне відповідне значення функції.

Фрагмент документу MathCAD з виконаними розрахунками, які описані вище:

$$f(x) := \frac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{x}$$

$$f(10) = 0.045647$$

Обчислимо значення функції для діапазону значень x. Для цього необхідно:

- Вже відомим вам способом визначимо діапазон для x (от 0 до 10).
- Клацніть мишею в наступному рядку і введіть $f(x) =$. MathCAD виведе таблицю значень.

Фрагмент документу MathCAD з виконаними розрахунками, які описані вище:

$$x := 0, 1 .. 10$$

f(x) =

0
0.454649
-0.189201
-0.046569
0.12367
-0.054402
-0.044714
0.070758
-0.017994
-0.041722
0.045647

1.6. Побудова графіка функції

Спочатку розглянемо найпростіший спосіб побудови графіка функції.

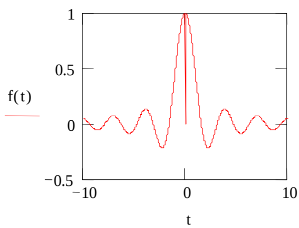
Всі описанні нижче дії необхідно виконати в MathCAD!

Для побудови графіка функції необхідно виконати:

- Відомим чином визначити функцію. Наприклад, $f(x) = \frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{x}$.
- Ввести шаблон графіка в Декартовій системі координат за допомогою меню Insert →Graph→X-Y-Plot, або за допомогою палітри графіків (Graph Toolbar), або введення символу @.
- З'явиться незаповнений шаблон. Шаблон представляє собою великий пустий прямокутник з місцями введення даних у вигляді маленьких чорних прямокутників (маркери введення), які розміщені біля осей майбутнього графіка. Введемо ім'я змінної t в середнє поле введення біля осі абсцис і ім'я функції $f(t)$ в середнє поле введення біля осі ординат.
- Клацніть мишею поза області графіку – він буде побудований. Зверніть увагу на те, що змінна t не визначена (їй не присвоєно значення).

Фрагмент документу MathCAD з виконаними розрахунками, які описані вище:

$$f(t) := \frac{\sin(t)\cdot\cos(t)}{t}$$



Розглянемо побудову графіка функції за допомогою ранжированої змінної.

Всі описанні нижче дії необхідно виконати в MathCAD!

Для цього способу необхідно задати діапазон та крок зміни змінної. Побудуємо цим способом графік функції $f(x) = \sin(x)^3$ для x (від -10 до 10) з кроком 0,1. Для цього необхідно:

- Відомим способом задати діапазон та крок зміни x.
- Відомим способом визначити функцію $f(x) = \sin(x)^3$.
- Ввести шаблон графіка, як було показано раніше.
- Заповнити шаблон, вводячи імена змінної та функції, заповнити крайні поля для введення даних нижче осі абсцис цифрами -10 та 10. Заповнити поля для введення даних лівіше осі ординат цифрами -1 та 1. Ці поля задають

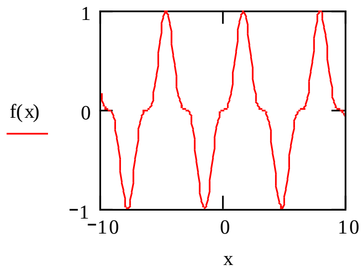
масштаб графіка. Якщо залишити їх незаповненими, то масштаби по осям графіка встановляться автоматично.

- Клацніть мишею поза області графіка. Побудова графіка відбудеться автоматично.

Фрагмент документу MathCAD з виконаними розрахунками, які описані вище:

$$x := -10, -9.9 .. 10$$

$$f(x) := \sin(x)^3$$



Тепер побудуємо декілька графіків функцій в одній системі координат. Для цього будемо використовувати попередній приклад.

Всі описанні нижче дії необхідно виконати в MathCAD!

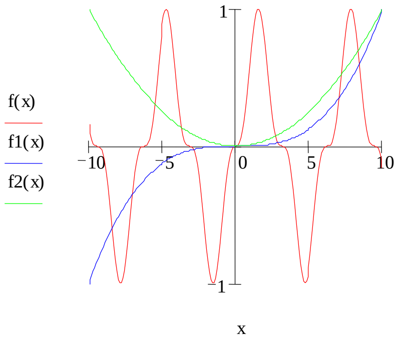
Відредагуємо графік попереднього прикладу, побудувавши на тих же координатних осях графіки функцій $f1(x) = \frac{x^3}{1000}$ та $f2(x) = \frac{x^2}{100}$. Для цього виконаємо наступні кроки:

- В рядку з визначенням функції $f(x) := \sin(x)^3$ визначимо функції $f1(x) = \frac{x^3}{1000}$ та $f2(x) = \frac{x^2}{100}$.
- Клацнути мишею на побудованому графіку. Навколо графіка з'явиться рамка.
- Клацнути мишею на імені функції (зліва від осі ординат). Здвинути за допомогою клавіші *Пробіл* синю рамку так, щоб вона охоплювала ім'я функції.
- Поставити кому. З'явиться маркер введення для нової функції. Заповніть його ім'ям функції $f1(x)$.
- Повторіть попередній крок для введення імені функції $f2(x)$.
- Клацніть мишею поза областю побудови графіка.

Для додаткового редагування графіків необхідно клацнути по графіку правою клавішею миші, та в контекстному меню вибрати команду *Format*…. З’явиться вікно завдання формату графіків, яке містить чотири вкладки. Перша з них призначена для редагування координатних осей (X-Y-Axes); друга – для редагування ліній на графіках (Labels); третя – для збереження установок форматування графіків за замовчуванням (Defaults).

Фрагмент документу MathCAD з виконаними розрахунками, які описані вище:

$f(x) := \sin(x)^3 \qquad f1(x) := \frac{x^3}{1000} \qquad f2(x) := \frac{x^2}{100}$



Контрольні питання

1. Які математичні пакети Ви знаєте?
2. Основні можливості MathCAD?
3. Які можливості з побудови графіків має MathCAD?
4. Перечисліть математичні палітри MathCAD.
5. Що таке дискретний аргумент? Як він визначається в MathCAD?
6. Яким чином виконується побудова графіків в MathCAD?

Тема 2. Нелінійні рівняння. Методи розв’язання нелінійних рівнянь в MathCAD

2.1. Постановка задачі

Дано нелінійне рівняння $f(x) = 0$ визначене на відрізку $x \in [a, b]$. Розв’язок даного рівняння складається в пошуку всіх його коренів.

В загальному випадку розв’язання нелінійних рівнянь типу $f(x) = 0$ розбивається на два етапи:

1) локалізація коренів (табулювання або графічний розв’язок);
2) обчислення коренів на кожному з відрізків.

2.2. Локалізація коренів

Локалізація коренів, як правило, виконується графічно. Розглянемо процедуру локалізації коренів на прикладі розв'язання наступної задачі.

Задача 1. Дано нелінійне алгебраїчне рівняння 4-го ступеня

$$x^4 - x - 1 = 0. \qquad (1)$$

Локалізуємо дійсні корені рівняння.

Розв'язання. Перепишемо вихідне рівняння у вигляді $x^4 = x + 1$. Побудуємо графіки функцій $f(x) = x^4$; $g(x) = x + 1$, (див. рис. 2.1).

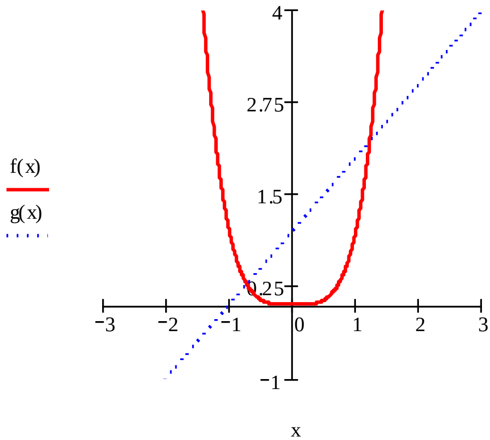


Рис. 2.1. Графічний спосіб локалізації коренів нелінійного рівняння

На графіку виділимо відрізки, які містять точки перетину графіків:

$$C_1 \in [1{,}1.5],\ C_2 \in [-1{,}-0.5].$$

2.3. Методи розв'язання нелінійних рівнянь

Постановка задачі. Дано нелінійне рівняння

$$f(x) = 0 \qquad (2)$$

визначене на відрізку $x \in [a, b]$. Відомо, що всередині $[a, b]$ рівняння (2) має єдиний корінь C. Знайти розв'зок рівняння (2) $x \approx C$ з заданою точністю ε.

2.3.1. Метод бісекції (половинного ділення)

Алгоритм метода половинного ділення має вигляд:

$$a_0 = a,\ b_0 = b,\ c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2};$$

якщо $f(a_i)\cdot f(b_i)\begin{cases} <0, & \text{то } a_{i+1}=a_i,\ b_{i+1}=c_i \\ =0, & \text{то } c_{i+1}=c_i \\ >0, & \text{то } a_{i+1}=c_i,\ b_{i+1}=b_i, \end{cases}$ (3)

де $i=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ k,\ldots.$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і на його кінцях приймає різні знаки, то метод половинного ділення сходиться до точного розв'язку рівняння $x=C$. При цьому його погрішність оцінюється нерівностями

$$\left|C_k-C\right|\le\frac{b-a}{2^{k+1}};\ \left|C_k-C\right|\le\frac{b_k-a_k}{2}.$$

2.3.2. Метод простих ітерацій

Перетворимо рівняння (2) до виду (4):

$$x=\varphi(x) \qquad (4)$$

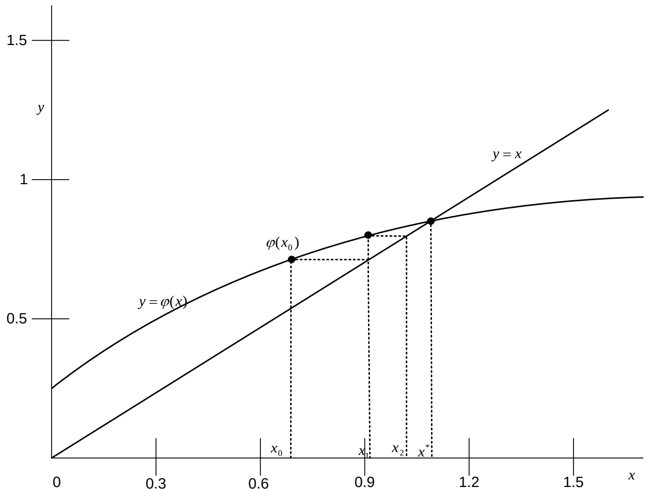


Рис. 2.2. Розв'язання нелінійного рівняння методом простих ітерацій

Якщо для всіх $x\in[a,b]$ виконується $\max\limits_{[a,b]}\left|\varphi'(x_j)\right|<1$, то для кожного $x_0\in[a,b]$ наближені значення шуканого кореня можуть бути отримані за формулою:

$$x_{k+1}=\varphi(x_k),\ k=0,1,2,\ldots; \qquad (5)$$

де k – номер ітерації, причому після k-ї ітерації справедлива оцінка погрішності отриманого наближеного значення кореня:

$$\left|x^* - x_k\right| \le \left|x_k - x_{k-1}\right|;$$

$x^* = C$ – точне значення кореня. Рис. 2.2 ілюструє застосування методу простих ітерацій.

Приклад. З точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ знайти корінь рівняння $x - \sin(x) = 0{,}25 \cdot x^* \in [1;1{,}5]$.

Розв'язок. Приведемо дане рівняння до вигляду (4):

$$x = \sin(x) + 0{,}25.$$

Перевіримо умову збігу

$$\max_{[1;1,5]}\left|\varphi'(x_j)\right| < \left|\cos(x)\right| \le 0{,}54.$$

Умову збіжності виконано; отже, наближений розв'язок можна отримати за формулою

$$x_{k+1} = \sin(x_{k+1}) + 0{,}25.$$

Знайдемо: $x_0 = 1{,}25$; $x_1 = 1{,}199$; $x_2 = 1{,}1817$; $x_3 = 1{,}1752$; $x_4 = 1{,}1728$; $x_5 = 1{,}1718$; $x_6 = 1{,}1714$.

Після виконання кожної ітерації перевіряємо умову закінчення розрахунку

$$\left|x_k - x_{k-1}\right| < 10^{-3}.$$

Після виконання шостої ітерації задана точність забезпечена.

Отже, $x^* = C \cong 1{,}171$.

2.3.3. Метод Ньютона (метод дотичних)

Знайти розв'язок рівняння $f(x) = 0$ с заданою точністю ε, якщо відомо, що всередині $[a,b]$ існує єдиний корінь. Із $[a,b]$ виберемо деяке початкове наближення, розкладемо функцію $y = f(x)$ у ряд Тейлора, утримуючи лінійну частину в розкладенні:

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0)(x - x_0).$$

Останній вираз – рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$, проведеної через точку з координатими $(x_0, f(x_0))$.

В якості наступного наближення до розв'язку виберемо точку перетину дотичної з віссю x, тобто

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{6}$$

Подальші наближення отримаємо по тому ж принципу:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{7}$$

Формула (7) – розрахункова формула методу Ньютона або методу дотичних.

2.3.4 Метод січних

В деяких випадках визначення похідної $f'(x)$ викликає труднощі. Тоді її можна замінити різницевим наближенням

$$\frac{f(x^{k-1}) - f(x^k)}{x^{k-1} - x^k},$$

яке приводить до ітераційного методу січних

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f(x^{k-1}) - f(x^k)} \cdot (x^{k-1} - x^k),\ k \geq 1. \tag{8}$$

З формули (8) випливає, що метод січних є двокроковим методом, тому що, на відміну від методу Ньютона, для знаходження наступного наближення x^{k+1} потрібне знання двох попередніх наближень x^{k-1}, x^k. Для початку обчислень, необхідно мати два начальних наближення x^0 та x^1.

Контрольні питання

1. Яким чином, зазвичай, виконується локалізація коренів з використанням MathCAD?
2. Які методи розвязання нелінійних рівнянь Ви знаєте?
3. Яким чином обираються кінці відрізку при використанні метода половинного ділення?
4. Як визначити, на якій ітерації був знайдений корінь рівняння при рішенні нелінійних рівнянь методом простих ітерацій?
5. У чому полягає суть методу Ньютона?
6. Якщо визначення похідної *f'(x)* викликає труднощі, то чим можна її замінити використовуючи метод січних?

Тема 3. Чисельне розв'язання нелінійних рівнянь в MathCAD за допомогою стандартних функцій

3.1. Розв'язок нелінійних рівнянь за допомогою функції root

Приклад, який буде приведено нижче, вам необхідно розглянути і виконати за допомогою програми MathCAD!

Для розв'язку одного рівняння з одним невідомим в MathCAD використовується функція *root*. Аргументами цієї функції являються вираз та змінна, яка входить до цього виразу. Функція повертає значення змінної, при якому функція обертається на ноль. Функція має наступний вигляд *root(f(x),x)*.

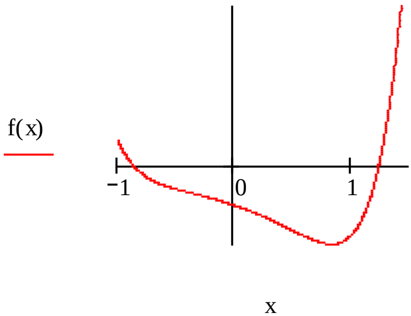
Розглянемо, як використовується стандартна функція *root* на прикладі розв'язку рівняння $x^6 = e^x$. Для розв'язку рівняння необхідно виконати наступні дії.

- Визначити вираз, який повинен бути обернений на нуль, як функцію $f(x)$. Для цього перепишемо задане рівняння у вигляді $f(x): x^6 - e^x$. Функція $f(x)$ є першим аргументом стандартної функції ***root***. В якості першого аргументу *root* можна використовувати і праву частину функції $f(x)$, тобто вираз $x^6 - e^x$.
- Визначимо початкове наближення для розв'язку рівняння. Для цього відомим способом необхідно побудувати графік функції $f(x) = x^6 - e^x$, встановивши границі зміни x від -1 до 1,5. На графіку функція $f(x)$ має дві точки перетину з віссю x, отже рівняння має два кореня. Для знаходження двох коренів рівняння необхідно використовувати два наближення ($x_1 = -1, x_2 = 1$).
- Визначимо початкове значення змінної рівне першому значенню наближення $x := -1$. Це значення буде другим аргументом функції ***root***.
- Визначимо змінну a як корінь рівняння. Для цього введемо: $a : root(f(x), x)$.
- Щоб побачити значення першого кореня рівняння, введіть $a =$. MathCAD поверне корінь рівняння в околі $x_1 = -1$.
- Для того, щоб отримати другий корінь рівняння, необхідно повторити три останніх кроки, визначивши початкове значення змінної x рівним другому наближенню $x := 1$.

Фрагмент документу MathCAD з виконаними розрахунками, які описані вище:

$f(x) := x^6 - e^x$

Графік функціі



Перше початкове наближення

$x := -1$

Перший корінь рівняння

$a := root(f(x), x)$

$a = -0.86567$

Друге початкове наближення.

$x := 1$

Другий корінь рівняння.

$a := root(f(x), x)$

$a = 1.2269$

3.2. Зміна точності рішення в MathCAD

Розглянути і виконати за допомогою програми MathCAD!

Для зміни точності розв’язку рівняння можна змінити значення встроєної змінної *TOL*. Якщо збільшити значення *TOL*, то розв’язок буде знайдено за меншу кількість ітерацій, але точність буде меншою. При зменшенні значення *TOL* функція *root* буде сходитися повільніше, результат буде більш точним.

Наприклад, давайте змінимо точність обчислення кореня рівняння на 0,0001. За замовчуванням, *TOL*=0,001. Щоб змінити значення *TOL* в визначеній точці документу, необхідно ввести наступне визначення *TOL*:0.0001.

Щоб змінити значення *TOL* для всього документу, виконайте команду *Tools→Worksheet Options*. В діалоговому вікні *Worksheet Options*, що з’явилось виберіть вкладку *Built-In Variables*. Діалогове вікно показане на

рис. 3.1. У вікні *Convergence Tolerance (TOL)* введіть потрібне значення точності обчислення кореня. В нашому прикладі *TOL*=0.0001. Клацніть по кнопці *OK*, щоб закрити діалогове вікно. Для обновлення всіх обчислень у робочому документі з новим значенням змінної *TOL*, виконайте команду *Tools→Calculate→Calculate Worksheet*.

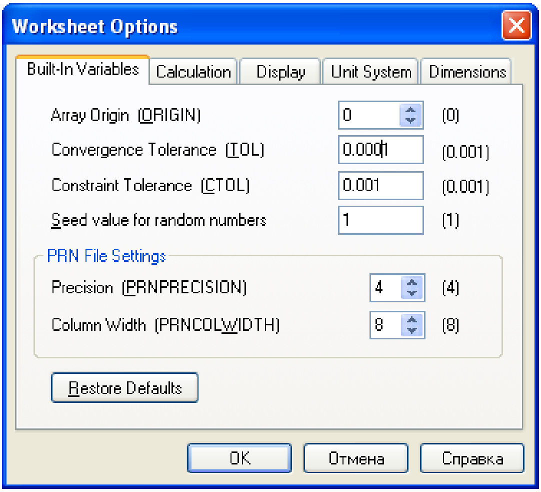


Рис. 3.1. Діалогове вікно *Worksheet Options*

3.3. Розв’язання нелінійного рівняння за допомогою функції polyroots

Для знаходження коренів рівнянь вигляду:

$$a_n \cdot x^n + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

краще використовувати функцію *polyroots* ніж *root*. На відміну від функції *root* функція *polyroots* не потребує початкового наближення і повертає відразу всі корні як дійсні так і комплексні. Розглянемо використання функції *polyroots* на прикладі.

Знайдено корені рівняння

$$x^3 - 10x^2 - 3x + 1 = 0 .$$

Для розв’язання рівняння виконаємо наступні кроки.

▪ Визначимо вираз, який повинен бути обернений на 0, як функцію $f(x)$.

▪ Задамо у вигляді вектора v коефіцієнти рівняння, починаючи з константи. Кількість елементів вектора повинна дорівнювати значенню степені полінома плюс один $(n+1)$. В нашому прикладі вектор коефіцієнтів

буде містити 4 елементи (3+1). Сюди повинні війти усі коефіцієнти, у тому числі і нулі. Вектор коефіцієнтів є аргументом функції *polyroots*.

- Введемо *polyroots(v)=*. Функція повертає вектор довжини n (ступінь полінома), який містить в собі корені полінома.
- Для ілюстрації розв'язку рівняння побудуємо графік функції $f(x)$.

Фрагмент документу MathCAD з виконаними розрахунками, які описані вище:

$$f(x) := x^3 - 10\cdot x^2 - 3\cdot x + 1$$

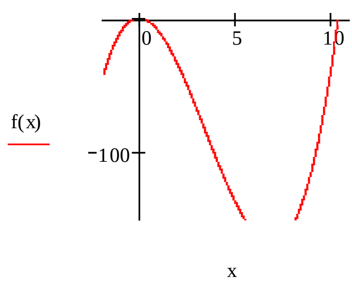
Вектор коефіцієнтів рівняння

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Корені вихідного рівняння.

$$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -0.48347 \\ 0.20116 \\ 10.2823 \end{pmatrix}$$

Графік функції.



Контрольні питання

1. Яку функцію використовують для розв'язання рівняння з одним невідомим?
2. Опишіть порядок дій при розв'язанні рівняння з одним невідомим за допомогою стандартної функції root.
3. Як можна змінити точність розв'язання рівняння в MathCAD?

4. Які відмінності існують у використанні стандартних функцій MathCAD root та polyroots?

5. Які кроки потрібно виконати, щоб розв’язати рівняння за допомогою функції polyroots?

Тема 4. Робота з матрицями в MathCAD

4.1. Інструменти MathCAD для роботи з матрицями

Розгляньте описані нижче інструменти та функції у програмі!

4.1.1.Щоб визначити матрицю потрібно:

1. увести із клавіатури ім’я матриці й знак присвоювання – натисніть на клавіатурі комбінацію клавіш <*Shift*>+<*:*> або клацніть по кнопці<**:=**> панелі *Evaluation*;

2. клацнути по кнопці *Vector or Matrix Toolbar* у панелі математичних інструментів, щоб відкрити панель матричних операцій *Matrix* (див. рис. 4.1);

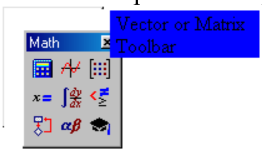


Рис. 4.1. Панель матричних операцій *Matrix*

3. відкрити клацанням по кнопці  *Matrix or Vector* вікно діалогу визначення розмірності матриці й увести розмірність матриці: число рядків *(Rows)*, число стовпців *(Columns)* (рис. 4.2);

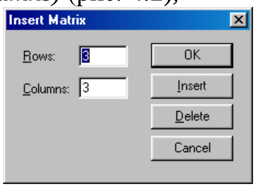


Рис. 4.2. Вікно *Matrix or Vector*

4. закрити вікно діалогу, клацнувши по кнопці *Ok*.

У робочому документі, праворуч від знака присвоювання, відкривається поле введення матриці з позначеними позиціями для введення елементів. Для того, щоб ввести елемент матриці, установіть курсор у позначеній позиції й уведіть із клавіатури число або вираження (рис. 4.3).

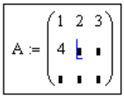


Рис. 4.3. Введення матриці

4.1.2. Нумерація елементів матриць і векторів

Номер першого рядка (стовпця) матриці або першого компонента вектора, зберігається в MathCAD у змінної *ORIGIN*.

За замовчуванням в MathCAD координати векторів, стовпці й рядки матриці нумеруються починаючи з 0 (*ORIGIN:=0*). Оскільки в математичному записі частіше використовується нумерація з 1, зручно перед початком роботи з матрицями визначати значення змінної *ORIGIN* рівним 1, виконати команду *ORIGIN*:=1.

4.1.3. Панель операцій з матрицями й векторами

Розгляньте описані нижче інструменти та функції у програмі!

Панель векторних і матричних операцій відкривається клацанням по кнопці *Vector and Matrix Toolbar* у панелі математичних інструментів.

За кнопками панелі закріплені наступні функції:

 – визначення розмірів матриці;

 – введення нижнього індексу;

 – обчислення зворотної матриці;

 – обчислення визначника матриці: $|A|=\det A$; обчислення довжини вектора $|x|$;

 – поелементні операції з матрицями: якщо $A=\{a_{ij}\}$, $B=\{b_{ij}\}$, то $\overline{AB} = \{a_{ij} b_{ij}\}$;

 – визначення стовпця матриці: j -й стовпець матриці $M^{<j>}$;

 – транспонування матриці: $M=\{m_{ij}\}$, $M^T=\{m_{ji}\}$;

 – обчислення скалярного добутку векторів: $xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$;

 – обчислення векторного добутку векторів: $a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$;

 – обчислення суми компонент вектора: $\sum v = \sum_{i=1}^{n} x_i$;

 – визначення діапазону зміни змінної;

 – візуалізація цифрової інформації

Меню символьних операцій з матрицями (пункт *Matrix* меню *Symbolics*) містить три функції:

- транспонування (*Transpose*),
- звернення матриці (*Invert*),
- обчислення визначника матриці (*Determinant*).

Якщо потрібно зробити яку-небудь операцію через пункт *Matrix* меню *Symbolics*, потрібно виділити матрицю й клацнути в меню по рядку потрібної операції.

4.1.4. Функції, призначені для рішення завдань лінійної алгебри

Функції, призначені для рішення завдань лінійної алгебри, можна розділити на три групи.

- Функції визначення матриць і операцій із блоками матриць.
- Функції відшукання різних числових характеристик матриць.
- Функції, що реалізують чисельні алгоритми рішення завдань лінійної алгебри.

Щоб вставити функцію:

1. клацнути по місцю вставки;
2. клацнути по рядку *Function* у меню *Insert*;
3. вибрати у вікні списку потрібну функцію й підтвердити вибір клацанням на кнопці *OK* у вікні діалогу (див. рис. 4.4).

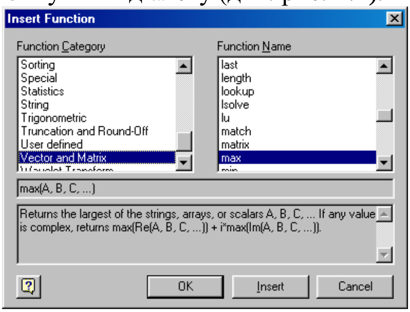


Рис. 4.4. Вікно діалогу *Insert Function*

4.1.5. Функції визначення матриць і операції із блоками матриць:

- *matrix(m, n, f)* – створює й заповнює матрицю розмірності m x n**,** елемент якої, розташований в *i* – му рядку, *j* -м стовпці, дорівнює значенню *f(i, j)* функції *f(x, y)*;
- *diag(v)* – створює діагональну матрицю, елементи головної діагоналі якої зберігаються у векторі v;
- *identity(n)* **–** створює одиничну матрицю порядку n;
- *augment(A, B)* **–** формує матрицю, у перших *стовпцях* якої утримується матриця A, а в останніх – матриця B (матриці A і B мають однакове число рядків);
- *stack(A, B)* **–** формує матрицю, у перших *рядках* якої утримується матриця A, а в останніх – матриця B (матриці A і B мають однакове число стовпців);
- *submatrix(A, ir, jr, ic, jc)* – формує матрицю, що є блоком матриці A, розташованим у рядках з *ir* по *jr* і в стовпцях з *ic* по jc, ir **<=** jr, ic <= jc.

4.1.6. Функції відшукання різних числових характеристик матриць:

- *last(v)* **–** обчислення номера останнього елемента вектора v;
- *lenght(v)* – обчислення кількості елементів v вектора;
- *rows(A)* – обчислення числа рядків у матриці A;
- *cols(A)* – обчислення числа стовпців у матриці A;
- *max(A)* **–** обчислення найбільшого елемента в матриці A;
- *tr(A)* – обчислення сліду квадратної матриці A (слід матриці дорівнює сумі її діагональних елементів);
- *rank(A)* – обчислення рангу матриці A;

4.1.7. Функції, що реалізують чисельні алгоритми рішення задач лінійної алгебри:

- *rref(A)* **–** приведення матриці до ступінчатого виду з одиничним базисним мінором (виконуються елементарні операції з рядками матриці);
- *eigenvals(A)* – обчислення власних значень квадратної матриці A ;
- *eigenvecs(A)* – обчислення власних векторів квадратної матриці A; значенням функції є матриця, стовпці якої є власні вектори матриці A; порядок проходження векторів відповідає порядку проходження власних значень, обчислених функцією *eigenvals(A)*;
- *eigenvec(A, l)* – обчислення власного вектора матриці A, що відповідає власному значенню l;
- *lsolve(A, b)* **–** рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь Ax=b.

4.2. Дії з матрицями

4.2.1. Основні матричні операції

Основними матричними операціями є множення матриці на число, додавання й перемножування двох матриць.

По визначенню, щоб *помножити матрицю на число*, потрібно помножити на це число всі елементи матриці.

Сумою двох матриць однакової розмірності називається матриця тієї ж розмірності, кожний елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів доданків.

Операція *множення матриці на матрицю* визначається більш складним образом. Нехай задані дві матриці A і B, причому число стовпців першої з них дорівнює числу стовпців другої. Якщо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix},$$

то *добутком матриць* A і B називається матриця

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix},$$

елементи якої обчислюються по формулі

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, \quad i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,k.$$

Добуток матриць A і B позначається AB, тобто C=AB. Воно залежить від порядку співмножників. Якщо ж AB=BA, то матриці A и B називаються *перестановочними*.

У множині квадратних матриць визначена *одинична матриця* – квадратна матриця, всі діагональні елементи якої – одиниці, а інші – нулі:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Одинична матриця найчастіше позначається буквою E або E_n, де n – порядок матриці. *Основна властивість одиничної матриці*: AE=EA=A.

Скалярною матрицею називається діагональна матриця з однаковими числами на головній діагоналі; одинична матриця – окремий випадок скалярної матриці.

4.2.2 Транспонування. Обчислення зворотної матриці. Ортогональні матриці

Розглянемо довільну прямокутну матрицю A. Матриця, що виходить із матриці A заміною рядків стовпцями, називається *транспонованою* стосовно матриці A и позначається A^T.

Квадратна матриця A називається *оборотною*, якщо існує квадратна матриця X, що задовольняє співвідношенням AX=XA=E. Матриця X називається зворотною до матриці A и позначається A^{-1}, тобто $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Квадратна матриця A, для якої $A^T=A$, називається *симетричною*. Елементи такої матриці, розташовані симетрично щодо головної діагоналі, рівні.

Квадратна матриця U, для якої U-1= U^T, називається *ортогональною* матрицею. *Основні властивості ортогональної матриці:*

- модуль визначника ортогональної матриці дорівнює одиниці;
- сума квадратів елементів будь-якого стовпця ортогональної матриці дорівнює одиниці;
- сума добутків елементів будь-якого стовпця ортогональної матриці на відповідні елементи іншого стовпця дорівнює нулю;
- такими ж властивостями володіють рядки ортогональної матриці.

Поданий нижче приклад повторіть в програмі MathCAD!

Приклад символьних обчислень із ортогональними матрицями в MathCAD:

Завдання.

Доведіть, що матриця $H = E - 2\frac{vv^T}{|v|^2}$ (v - вектор-стовпець) – ортогональна матриця. Перевірте для неї властивості ортогональної матриці.

Порядок виконання завдання:

1. Встановіть режим автоматичних обчислень (Math/Autimatic Calculation).
2. Привласніть змінній ORIGIN значення, рівне одиниці.
3. Уведіть матрицю стовпець V і одиничну матрицю E відповідної розмірності.
4. Обчисліть матрицю H.
5. Обчисліть добутки H^TH і HH^T.

6. Обчисліть H^{-1} . Зрівняйте H^{-1} і H^{T}.

7. Покажіть, що вектори-стовпці матриці H мають одиничну довжину й попарно ортогональні. Переконайтеся, що виконується рівність $|\det H| = 1$.

Приклад виконання завдання.

$$V := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E := \text{identity}(4) \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычисление матрицы H

$$H := E - \frac{2}{(|V|)^2} \cdot V \cdot V^T$$

$$H = \begin{pmatrix} 0.333 & 0 & -0.667 & -0.667 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.667 & 0 & 0.333 & -0.667 \\ -0.667 & 0 & -0.667 & 0.333 \end{pmatrix} \qquad H^T = \begin{pmatrix} 0.333 & 0 & -0.667 & -0.667 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.667 & 0 & 0.333 & -0.667 \\ -0.667 & 0 & -0.667 & 0.333 \end{pmatrix}$$

Доказательство ортогональности матрицы H

$$H \cdot H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H^T \cdot H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычисление обратной матрицы

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 0.333 & 0 & -0.667 & -0.667 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.667 & 0 & 0.333 & -0.667 \\ -0.667 & 0 & -0.667 & 0.333 \end{pmatrix} \qquad H^{-1} - H^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверка свойств ортогональной матрицы

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$H^{\langle 1 \rangle} \cdot H^{\langle 1 \rangle} = 1 \qquad H^{\langle 1 \rangle} \cdot H^{\langle 2 \rangle} = 0 \qquad H^{\langle 2 \rangle} \cdot H^{\langle 3 \rangle} = 0$$

$$H^{\langle 2 \rangle} \cdot H^{\langle 2 \rangle} = 1 \qquad H^{\langle 1 \rangle} \cdot H^{\langle 3 \rangle} = 0 \qquad H^{\langle 2 \rangle} \cdot H^{\langle 4 \rangle} = 0$$

$$H^{\langle 3 \rangle} \cdot H^{\langle 3 \rangle} = 1 \qquad H^{\langle 1 \rangle} \cdot H^{\langle 4 \rangle} = 0 \qquad H^{\langle 3 \rangle} \cdot H^{\langle 4 \rangle} = 0$$

$$H^{\langle 4 \rangle} \cdot H^{\langle 4 \rangle} = 1 \qquad |H| = -1$$

4.2.3. Обчислення ступеня матриці. Деякі спеціальні матриці

Для квадратних матриць визначена операція *піднесення в цілу невід'ємну ступінь*:

$$A^0 = E,\ A^{-1} = A,\ A^2 = AA,\ \ldots,\ A^n = A^{n-1}\ldots$$

Матриця P називається *ідемпотентною*, якщо $P^2 = P$.

Матриця I називається *інволютивною*, якщо $I^2 = E$.

Поданий нижче приклад повторіть у програмі MathCAD!

Приклад.

Доведіть, що матриця P ідемпотентна. Покажіть, що матриця $I = 2P - E$ інволютивна.

Порядок виконання завдання:

1. Встановіть режим автоматичних обчислень.
2. Уведіть матрицю P.
3. Обчисліть P^2 й $P^2 - P$.
4. Уведіть одиничну E матрицю тієї ж розмірності, що й матриця P.
5. Обчисліть матрицю $I = 2P - E$.
6. Обчисліть матрицю I^2.

Фрагмент робочого документа MathCAD.

$$P := \begin{pmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

Матрица P идемпотентна

$$P^2 = \begin{pmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{pmatrix} \qquad P^2 - P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E := \mathrm{identity}(3) \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I := 2\cdot P - E$$

Матрица I инволютивна

$$I = \begin{pmatrix} -53 & -36 & -54 \\ 42 & 29 & 42 \\ 24 & 16 & 25 \end{pmatrix} \qquad I^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2.4. Визначники та їх властивості

Обчислення визначників

Нехай A – квадратна матриця порядку n, n>1:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Визначником квадратної матриці A порядку n, n>1, називається число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} (-1)^{j+1} M_1^{<j>}, \quad (1)$$

де $M_1^{<j>}$ – визначник квадратної матриці порядку n-1, отриманої з матриці A викреслюванням першого рядка j -го стовпця.

З наведеного вище визначення легко одержати просте вираження визначника квадратної матриці *другого порядку* через елементи матриці:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

оскільки $M_1^{<1>} = a_{22}$, $M_1^{<2>} = a_{21}$.

Приклад робочого документа MathCAD, що містить обчислення визначника другого порядку (у символьному й чисельному виді):

Символьное вычисление определителя матрицы второго по

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right| \to a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Числовой пример: $\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right| \to -2$

Формулу (1) називають формулою обчислення визначника *розкладанням по першому рядку*. Число $(-1)^{j+1} M_1^{<j>}$ називають алгебраїчним доповненням елемента a_{ij}.

Нехай $M_i^{<j>}$ – визначник квадратної матриці порядку $n-1$, отриманий з матриці А викреслюванням i-го рядка й j-го стовпця; число $(-1)^{i+j} M_i^{<j>}$ називається алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці А.

Справедливо наступне твердження.

Визначник квадратної матриці дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення, тобто для довільної квадратної матриці порядку n для всіх i, $1 \le i \le n$, і для всіх j, $1 \le j \le n$, справедливі формули:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} (-1)^{i+k} M_i^{<k>} = \sum a_{kj} (-1)^{k+j} M_k^{<j>}.$$

Наведені формули називають формулами обчислення визначника *розкладанням по* i *-му рядку* й *розкладанням по* j *- му стовпцю* відповідно.

Поданий нижче приклад повторіть в програмі MathCAD!

Приклад

Обчисліть розкладанням по першому рядку визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -7 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 10 & 12 & 13 \end{pmatrix}.$$

Порядок виконання завдання:

1. Встановіть режим автоматичних обчислень.
2. Привласніть змінної ORIGIN значення, рівне одиниці.
3. Уведіть матрицю.
4. Запишіть у зошиті вираження для обчислення визначника матриці розкладанням по зазначеному у завданні рядку (стовпцю).
5. Сформуйте матриці, отримані викреслюванням відповідних рядків і стовпців заданої матриці, і виведіть їх на екран.
6. Уведіть вираження для обчислення визначника, обчисліть й виведіть на екран його значення.
7. Обчисліть визначник матриці, використовуючи функцію MathCAD. Зрівняєте результати.

Фрагмент робочого документа MathCAD, що містить виконання завдання.

$ORIGIN := 1$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -7 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 10 & 12 & 13 \end{pmatrix}$$

$M_{11} := \mathrm{submatrix}(A, 2, 4, 2, 4)$

$M_{12} := \mathrm{augment}(\mathrm{submatrix}(A, 2, 4, 1, 1), \mathrm{submatrix}(A, 2, 4, 3, 4))$

$M_{13} := \mathrm{augment}(\mathrm{submatrix}(A, 2, 4, 1, 2), \mathrm{submatrix}(A, 2, 4, 4, 4))$

$M_{14} := \mathrm{submatrix}(A, 2, 4, 1, 3)$

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \\ 10 & 12 & 13 \end{pmatrix} \qquad M_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -7 & 6 & 7 \\ 3 & 12 & 13 \end{pmatrix} \qquad M_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -7 & 5 & 7 \\ 3 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

$$M_{14} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -7 & 5 & 6 \\ 3 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$detA := 1 \cdot \left|M_{11}\right| - (-2) \cdot \left|M_{12}\right| + 3 \cdot \left|M_{13}\right|$$

$detA = 477 \qquad |A| = 477$

Вказівка.

1. Для того щоб стовпці й рядки матриці нумерувалися, починаючи з одиниці, привласніть змінної ORIGIN значення, рівне одиниці.

2. Для визначення блоків M11, M12, M13, M14, отриманих викреслюванням 1-го рядка з матриці A и відповідно 1-1-, 2-, 3-3- і 4-го стовпців, використовуйте функції submatrix і augment. Функція submatrix(A, 2, 4, 2, 4) формує матрицю третього порядку M11, що містить елементи 4-го рядка 4-го стовпця матриці A (матрицю отриману викреслюванням 1-го рядка й 1-го стовпця); функція augment(submatrix(A, 2, 4, 1, 1), submatrix(A, 2, 4, 3, 4)) формує матрицю третього порядку M12 – матрицю, отриману викреслюванням 1-го рядка й 2-го стовпця: до блоку, що містить елементи 4-го рядка 1-го стовпця матриці A, дописуємо *праворуч* елементи 4-го рядка 3-го й 4-го стовпців матриці A.

Контрольні питання

1. Яка палітра математичної панелі містить інструменти для роботи з матрицями?

2. Яким чином можна змінити номер першого рядка (стовпця) матриці або першого компонента вектора? Як нумеруються координати векторів, стовбці й рядки за замовчуванням?

3. Які функції містить меню символьних операцій з матрицями?

4. На які групи можна розділити функції, призначені для рішення завдань лінійної алгебри?

5. Основні матричні операції (множення матриці на число, сума матриць, множення матриці на матрицю)?

6. Яку матрицю називають ортогональною? Її основні властивості?

7. Що називають визначником матриці?

Тема 5. Розв'язання систем лінійних рівнянь в MathCAD

Способи розв'язання систем лінійних рівнянь діляться на дві групи:

1) *точні методи*, що представляють собою кінцеві алгоритми для обчислення коренів системи (рішення систем за допомогою зворотної матриці, правило Крамера, метод Гауса й ін.),

2) *ітераційні методи*, що дозволяють одержати рішення системи із заданою точністю шляхом збіжних ітераційних процесів (метод ітерації, метод Зейделя й ін.).

5.1. Рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь по формулам Крамера

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно n невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1)$$

Відповідно до правила множення матриць розглянута система лінійних рівнянь може бути записана в матричному вигляді

$Ax = b$, (2)

де:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Матриця A, стовпцями якої є коефіцієнти при відповідних невідомих, а рядками – коефіцієнти при невідомих у відповідному рівнянні, називається *матрицею системи*; матриця-стовпець b, елементами якої є праві частини рівнянь системи, називається *матрицею правої частини* або просто *правою частиною системи*. Матриця-Стовпець x, елементи якої – шукані невідомі, називається *рішенням системи*.

Справедливо наступне твердження. Якщо визначник $\Delta = \det A$ матриці системи $Ax = b$ відмінний від нуля, то система має єдине рішення $x_1, x_2, \dots, x_n$, обумовлене формулами Крамера

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (4),$$

де Δ_i – визначник матриці n-го порядку, отриманої з матриці системи заміною i-го стовпця стовпцем правих частин.

Нехай є система n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно n невідомих x_1, x_2, …, x_n (1). Для рішення даної системи по формулам Крамера в пакеті MathCAD необхідно:

1) Установити режим автоматичного виконання обчислень і режим відображення результатів обчислення по горизонталі (*Math/Automatic Calculation, Symbolics/Evaluation Style/опція Horizontally).*

2) Привласнити змінної Origin значення, рівне одиниці.

3) Увести матрицю системи й стовпець правих частин (за допомогою кнопки  на панелі операцій з матрицями).

4) Обчислити визначник матриці системи (за допомогою кнопки  на панелі операцій з матрицями). Система має єдине рішення, якщо визначник відмінний від нуля.

5) Обчислити визначники матриць, отриманих заміною відповідного стовпця стовпцем правих частин.

6) Знайти рішення системи по формулам Крамера.

Повторіть у програмі MathCAD!

Фрагмент робочого документа MathCAD, що містить рішення системи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 30, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10, \\ -x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$$

ORIGIN:= 1

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \Delta := |A| \qquad \Delta = -4$$

Определитель отличен от нуля,
система имеет единственное решение

$\Delta1 := |\mathrm{augment}(B, \mathrm{submatrix}(A, 1, 4, 2, 4))|$ $\quad \Delta1 = -4$

$\Delta2 := |\mathrm{augment}(\mathrm{submatrix}(A, 1, 4, 1, 1), B, \mathrm{submatrix}(A, 1, 4, 3, 4))|$ $\quad \Delta2 = -8$

$\Delta3 := |\mathrm{augment}(\mathrm{submatrix}(A, 1, 4, 1, 2), B, \mathrm{submatrix}(A, 1, 4, 4, 4))|$ $\quad \Delta3 = -12$

$\Delta4 := |\mathrm{augment}(\mathrm{submatrix}(A, 1, 4, 1, 3), B)|$ $\quad \Delta4 = -16$

$x1 := \frac{\Delta1}{\Delta} \quad x1 = 1 \qquad x2 := \frac{\Delta2}{\Delta} \quad x2 = 2$

$x3 := \frac{\Delta3}{\Delta} \quad x3 = 3 \qquad x4 := \frac{\Delta4}{\Delta} \quad x4 = 4$

5.2. Розв'язання матричних рівнянь

Якщо матриця системи невироджена (тобто визначник даної матриці відмінний від нуля), то в неї існує зворотна матриця й тоді рішення системи легко одержати, помноживши обидві частини рівняння *Ax = b ліворуч* на матрицю A^{-1}: A^{-1}(Ax)= A-1b, а оскільки A^{-1}A=E и Ex=x, то x= A-1b.

Отже, для того щоб вирішити як матричне рівняння *Ax = b* систему лінійних алгебраїчних рівнянь необхідно:

1) Установити режим автоматичних обчислень.

2) Увести матрицю системи й матрицю-стовпець правих частин.

3) Обчислити рішення системи по формулі x= A-1b.

4) Перевірити правильність рішення множенням матриці системи на вектор-стовпець рішення.

Повторіть рішення прикладу у програмі MathCAD!

Системи лінійних рівнянь зручно вирішувати за допомогою функції *lsolve*.

Lsolve(A, b)

Вертається вектор рішення *x* такий, *Ax = b*.

Аргументи:

A – квадратна, не сингулярна матриця.

b – вектор, що має стільки рядків, скільки рядків у матриці A.

Фрагмент робочого документа MathCAD, що містить рішення трьох лінійних рівнянь щодо трьох невідомих:

ORIGIN:= 1

$x + 2\cdot y + 3\cdot z = 7$

$x - 3\cdot y + 2\cdot z = 5$

$x + y + z = 3$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x := A^{-1}\cdot b \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A\cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Использование функции lsolve

$$x := \mathrm{lsolve}(A, b) \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5.3. Рішення лінійної системи методом Гауса

Метод Гауса – точний метод рішення невиродженої системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод Гауса полягає в тому, що систему n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно n невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

приводять послідовним виключенням невідомих до еквівалентної системи із трикутною матрицею

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \qquad x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = \beta_n, \end{cases}$$

рішення якої знаходять по рекурентними формулам

$$x_n = \beta_n, \quad x_i = \beta_i - \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij}x_j, \quad (i = n-1, n-2, \ldots, 1)$$

У матричному записі це означає, що спочатку (прямий хід методу Гауса) елементарними операціями над рядками приводять розширену матрицю системи до ступінчатого виду:

$$A_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \beta_n \end{bmatrix},$$

а потім (зворотний хід методу Гауса) цю ступінчату матрицю перетворюють так, щоб у перших n стовпцях вийшла одинична матриця:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_n \end{bmatrix}.$$

Останній, (n + 1) стовпець цієї матриці містить рішення системи.

В MathCAD прямий і зворотний ходи методу Гауса виконує функція *rref*(*A*).

Нижче показане рішення системи лінійних рівнянь методом Гауса, у якому використовуються наступні функції:

rref(A)

Вертається ступінчата форма матриці *A*.

augment(A, B)

Вертається масив, сформований розташуванням *A* і *B* пліч-о-пліч. Масиви *A* і *B* повинні мати однакове число рядків.

Повторіть рішення прикладу у програмі MathCAD!

Отже, для знаходження методом Гауса рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1) необхідно в MathCAD виконати наступні дії:

1) Установити режим автоматичних обчислень.

2) Привласнити змінної ORIGIN значення, рівне одиниці.

3) Увести матрицю системи й матрицю-стовпець правих частин.

4) Сформувати розширену матрицю системи (використовуючи функцію *augment*).

5) Привести розширену матрицю системи до ступінчатого виду (використовуючи функцію *rref*).

6) Сформувати стовпець рішення системи (використовуючи функцію *submatrix*).

7) Перевірити правильність рішення множенням матриці системи на вектор-стовпець рішення.

$$ORIGIN := 1$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Ar := augment(A, b) \qquad Ar = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Ag := rref(Ar) \qquad Ag = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x := submatrix(Ag, 1, 3, 4, 4) \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Контрольні питання

1. Назвіть способи розв’язання систем лінійних рівнянь?
2. У чому полягає алгоритм пошуку рішення системи лінійних рівнянь методом Крамера?
3. Що називають матрицею правої частини (правою частиною), матрицею системи, рішенням системи?
4. Яку функцію MathCAD доцільно використовувати для розв’язання системи лінійних рівнянь? Які вона має аргументи?
5. У чому полягає алгоритм пошуку рішення системи лінійних рівнянь методом Гауса?
6. Яка функція в MathCAD виконує прямий та зворотний ходи методу Гауса? Які вона має аргументи?
7. Яку матрицю називають невиродженою?

Тема 6. Чисельне розв'язання систем нелінійних рівнянь в MathCAD

6.1. Розв'язання системи двох нелінійних рівнянь методом простих ітерацій

Нехай є система двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} F_1(x) = 0 \\ F_2(x) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

дійсні корені яких необхідно знайти із заданим ступенем точності. Число цих коренів та їх наближене значення можна визначити, побудувавши криві $F_1(x, y) = 0$ та $F_2(x, y) = 0$ та визначив координати їх точок перетину.

Для застосування методу простих ітерацій система (1) приводиться до виду

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y) \\ y = \varphi_2(x, y) \end{cases}.$$

Функції $\varphi_1(x, y)$ та $\varphi_2(x, y)$ називаються ітеруючими. Алгоритм розв'язку задається формулами

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= \varphi_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= \varphi_2(x_n, y_n) \end{aligned}\right\} \; (n = 0,1,2\ldots), \quad (2)$$

де x_0, y_0 – деяке початкове наближення. Причому, для того щоб процес послідовних наближень збігався до рішення системи $x = \xi$, $y = \eta$ повинні виконуватися наступні умови:

1) функції $\varphi_1(x, y)$ та $\varphi_2(x, y)$ визначені, неперервні та диференційовані в деякій замкнутій околиці R ($a \le x \le A, b \le y \le B$);

2) початкові наближення x_0, y_0 та всі наступні наближення x_n, y_n належать R;

3) в R виконуються нерівності:

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{d\varphi_1}{dx}\right| + \left|\frac{d\varphi_2}{dx}\right| \le q_1 < 1 \\ \left|\frac{d\varphi_1}{dy}\right| + \left|\frac{d\varphi_2}{dy}\right| \le q_2 < 1 \end{aligned}\right\}. \quad (3)$$

Оцінка погрішності n-го наближення дається нерівністю

$$\left|\xi - x_n\right| + \left|\eta - y_n\right| \le \frac{M}{1-M}\left(\left|x_n - x_{n-1}\right| + \left|y_n - y_{n-1}\right|\right),$$

де M – найбільше з чисел q_1, q_2, які входять до нерівності (3). Збіжність методу ітерацій вважається хорошою, якщо $M < 1/2$, при цьому $\frac{M}{1-M} < 1$, та якщо в двох послідовних наближеннях співпадають перші три десяткових знака після коми, то помилка послідовного наближення не перевищує 0,001.

Розглянемо алгоритм розв'язання системи рівнянь методом послідовних ітерацій в MathCAD на наступному прикладі.

Для системи

$$\left.\begin{aligned} x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0, \\ x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

знайдемо невід'ємні корені з трьома вірними знаками.

- Визначимо кожне з рівнянь системи як функцію від x та y. Отримаємо:

$$f(x, y) : x^3 + y^3 - 6 * x + 3,$$
$$g(x, y) : x^3 - y^3 - 6 * y + 2.$$

- Визначимо початкове наближення x_0 та y_0 графічно. Так як $f(x, y)$ та $g(x, y)$ функції двох змінних, отримаємо графік поверхні. Для визначення наближеного рішення системи рівнянь побудуємо графік різності визначених раніше функцій $f(x, y)$ та $g(x, y)$. На отриманому графіку знайдемо точку, де значення різниці функцій буде найбільш ближче до нуля. Координати цієї точки дадуть наближені значення x_0 та y_0 для розв'язку системи рівнянь. Щоб побудувати графік поверхні, виконаємо наступні дії:

1. Визначаємо кількість точок по осям x та y. Для побудови графіка поверхні обмежимося десятьма точками на кожній з осей. Визначимо дискретні аргументи i та j, щоб про індексувати ці точки:

$$i = 0..9, \quad j = 0..9.$$

2. Визначаємо x_i та y_j як рівномірно розміщені точки по осях x та y. Наприклад, нехай $x_i = 0 + 0{,}1i$, а $y_j = 0 + 0{,}1j$.

3. Заповнимо матрицю M значеннями $f(x_i, y_j) - g(x_i, y_j)$.

4. Виберемо з палітри графіків графік поверхні *Surface Plot.*

5. Введемо M в поле введення і клацнемо поза графічної області.

▪ Окрім графіка поверхні, для визначення начального наближення можна отримати всі значення матриці значень різниці функцій рівнянь системи, яка використовується для побудови графіка (M). Для цього на вільному місці робочого простору введемо $M :=$.

В матриці, яка з'явилась, виберемо значення найбільш близьке до 0. В нашому випадку це значення $M_{7,5} = 0{,}05$, $i = 7$, $j = 5$. Ці значення i та j підставимо в формули визначення x_i та y_j для побудови графіка поверхні та отримаємо значення x_0 та y_0.

▪ Визначимо дискретний аргумент $i = 0..9$, який задає кількість значень що обчислюються x_i та y_j.

▪ Визначимо вектор початкових значень.

▪ Визначимо ітеруючі функції методу простих ітерацій. Функції будуть мати наступний вигляд:

$$f1(x,y) = \left(\frac{x^3 + y^3}{6}\right) + \frac{1}{2} \qquad g1(x,y) = \left(\frac{x^3 - y^3}{6}\right) + \frac{1}{3}.$$

▪ Визначимо функції для перевірки умов (3) та обчислимо їх значення в точці початкового наближення. Функції будуть мати наступний вигляд:

$$d1(x,y) = \left|\frac{d}{dx} f1(x,y)\right| + \left|\frac{d}{dx} g1(x,y)\right|,$$

$$d2(x,y) = \left|\frac{d}{dy} f1(x,y)\right| + \left|\frac{d}{dy} g1(x,y)\right|,$$

$$d1(x_0, y_0) = 0{,}49;\ d2(x_0, y_0) = 0{,}25.$$

Оскільки значення функцій менше одиниці, можемо продовжувати обчислення наближень.

▪ Визначимо функції обчислень наближень методом простих ітерацій в векторній формі.

▪ Отримаємо вектори результатів. Проаналізуємо їх. Оскільки починаючи з x_5 та y_5. отримані значення мають однакові цифри після коми, в якості коренів системи можна взяти любе значення векторів починаючи з 5.

Фрагмент документу MathCAD з виконаними розрахунками, які описані вище:

Рівняння системи, як функції від x та y

$$f(x,y) := x^3 + y^3 - 6\cdot x + 3$$

$$g(x,y) := x^3 - y^3 - 6\cdot y + 2$$

Дискретні аргументи для індексованих точок на осях.

$i := 0..9$

$j := 0..9$

Визначення x_i та y_j як рівномірно розміщенних точок на осях.

$x_i := 0 + 0.1 \cdot i$

$y_j := 0 + 0.1 \cdot j$

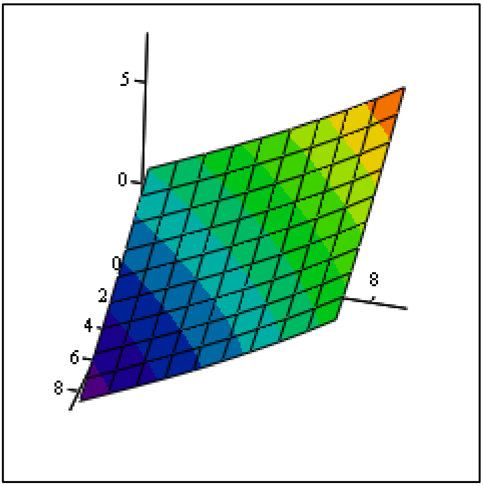
Визначення матриці значень для побудови графіка поверхні

$M_{i,j} := f(x_i, y_i) - g(x_i, y_j)$

Матриця значень

M =

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1.601	2.208	2.827	3.464	4.125	4.816	5.543
1	0.401	1.002	1.609	2.228	2.865	3.526	4.217	4.944
2	-0.192	0.409	1.016	1.635	2.272	2.933	3.624	4.351
3	-0.773	-0.172	0.435	1.054	1.691	2.352	3.043	3.77
4	-1.336	-0.735	-0.128	0.491	1.128	1.789	2.48	3.207
5	-1.875	-1.274	-0.667	-0.048	0.589	1.25	1.941	2.668
6	-2.384	-1.783	-1.176	-0.557	0.08	0.741	1.432	2.159
7	-2.857	-2.256	-1.649	-1.03	-0.393	0.268	0.959	1.686
8	-3.288	-2.687	-2.08	-1.461	-0.824	-0.163	0.528	1.255
9	-3.671	-3.07	-2.463	-1.844	-1.207	-0.546	0.145	0.872



М

Дискретний аргумент, що задає кількість обчислювальних значень x_i та y_j

$i := 0..9$

Вектор початкових наближень

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Ітеруючі функції

$$f1(x,y) := \left(\frac{x^3 + y^3}{6}\right) + \frac{1}{2}$$

$$g1(x,y) := \left(\frac{x^3 - y^3}{6}\right) + \frac{1}{3}$$

Функції для перевірки умов збіжності наближень.

$$d1(x,y) := \left|\frac{d}{dx} f1(x,y)\right| + \left|\frac{d}{dx} g1(x,y)\right|$$

$$d2(x,y) := \left|\frac{d}{dy} f1(x,y)\right| + \left|\frac{d}{dy} g1(x,y)\right|$$

$$d1\left(x_0, y_0\right) = 0.49$$

$d2(x_0, y_0) = 0.25$

Функції обчислення наближень.

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f1(x_i, y_i) \\ g1(x_i, y_i) \end{pmatrix}$$

Вектори результатів

x =

	0
0	0.7
1	0.578
2	0.541
3	0.534
4	0.533
5	0.532
6	0.532
7	0.532
8	0.532
9	0.532
10	0.532

y =

	0
0	0.5
1	0.37
2	0.357
3	0.352
4	0.351
5	0.351
6	0.351
7	0.351
8	0.351
9	0.351
10	0.351

Перевірка умов збіжності.

$$\varepsilon x_{i+1} := \left| x_{i+1} - x_i \right|$$

$$\varepsilon y_{i+1} := \left| y_{i+1} - y_i \right|$$

εx =

	0
0	0
1	0.122
2	0.037
3	$6.681 \cdot 10^{-3}$
4	$1.28 \cdot 10^{-3}$
5	$2.221 \cdot 10^{-4}$
6	$4.026 \cdot 10^{-5}$

εy =

	0
0	0
1	0.13
2	0.013
3	$5.021 \cdot 10^{-3}$
4	$6.486 \cdot 10^{-4}$
5	$1.419 \cdot 10^{-4}$

Корні системи рівнянь x5=0.532   y5=0.351

6.2. Розв'язання системи трьох нелінійних рівнянь методом ітерацій

Системи нелінійних рівнянь спеціального виду:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \\ x_2 = f_1(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = f_1(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \end{array}\right\} \quad (4)$$

можна розв'язати методом простих ітерацій при виконанні деяких умов. Функції f_1, f_2, f_3, …, f_n повинні бути дійсними, визначеними і неперервними в деякому околі ω ізольованого рішення $\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ цієї системи. Більш компактно, в матричній формі, систему рівнянь (4) можна записати наступним чином:

$$X = F(X), \quad (5)$$

де

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ а } F(X) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Вектор-корінь системи (5) знаходиться з наступного співвідношення:

$$X^{(p+1)} = F(X^{(p)}), \; (p = 0, 1, 2, \dots). \quad (6)$$

Якщо система рівнянь задана в загальному вигляді

$$\varphi(X) = 0, \quad (7)$$

де $\varphi(X)$ – вектор-функція, визначена та неперервна в околі ω вектор-кореня X^*, то її приводять до виду (4). Корні перетвореної системи рівнянь знаходять із співвідношення (6).

Для розв'язання системи рівнянь (4) необхідно задати початкове наближення $X^{(0)} = \left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)$ з околу ω.

В околі розв'язку X^* повинно виконуватись наступна умова збіжності

$$\left|F'(X^{(p)})\right| < 1, \; X^{(p)} \in \omega, \; (p = 0, 1, 2, \dots), \quad (8)$$

де $$F'(X)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$ – матриця Якобі.

Критерієм закінчення ітераційного процесу буде виконання наступних нерівностей: $\left|x_i^{p+1}-x_i^p\right|<\varepsilon$, (p =0, 1, 2, …) (i =1, 2, …, n), де ε – похибка рішення.

Алгоритм рішення нелінійної системи методом ітерацій с числом рівнянь більше двох розглянемо на наступному прикладі.

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} x+x^2-2yz&=0{,}1 \\ y-y^2+3xz&=-0{,}2 \\ z+z^2+2xy&=0{,}3 \end{aligned}\right\} \ x_0=y_0=z_0=0.$$

При рішенні даної системи рівнянь будемо додержуватись алгоритму рішення системи двох нелінійних рівнянь, описаного в пункті вище.

- Визначимо дискретний аргумент $i:=0..15$, який задає кількість обчислюваних значень x_i, y_i, z_i.
- Визначимо вектор початкових значень, заданих в умові задачі.
- Визначимо ітеруючі функції методу послідовних ітерацій. Функції будуть мати наступний вигляд:

$$f(x,y,z):=0.1-x^2+2\cdot y\cdot x\,,$$
$$g(x,y,z):=-0.2+y^2-3\cdot x\cdot z\,,$$
$$h(x,y,z):=0.3-z^2-2\cdot x\cdot y\,.$$

- Визначимо функції для перевірки умов і обчислимо їх значення в точці початкового наближення. Функції будуть мати наступний вигляд:

$$d1(x,y,z)=\left|\frac{d}{dx}f(x,y,z)\right|+\left|\frac{d}{dx}g(x,y,z)\right|+\left|\frac{d}{dx}h(x,y,z)\right|,$$

$$d2(x,y,z)=\left|\frac{d}{dy}f(x,y,z)\right|+\left|\frac{d}{dy}g(x,y,z)\right|+\left|\frac{d}{dy}h(x,y,z)\right|,$$

$$d3(x,y,z) = \left|\frac{d}{dz}\, f(x,y,z)\right| + \left|\frac{d}{dz}\, g(x,y,z)\right| + \left|\frac{d}{dz}\, h(x,y,z)\right|,$$

$$d1(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

$$d2(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

$$d3(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Оскільки значення функцій менше одиниці, можемо продовжувати обчислення наближень.

- Визначимо функції обчислення наближень в векторній формі.
- Отримаємо вектори результатів. Проаналізуємо отримані результати.

Оскільки, починаючи з x_{11}, y_{11} та z_{11}, отримані значення мають однакові цифри після коми, в якості коренів системи можна взяти любе значення векторів, починаючи з 11.

Фрагмент документу MathCAD з виконаними розрахунками, які описані вище:

Дискретний аргумент, який задає кількість обчислюємих занчень

$\mathbf{i := 0..15}$

Вектор початкових значень

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ітеруючі функції методу ітерацій

$f(x,y,z) := 0.1 - x^2 + 2\cdot y\cdot x$

$g(x,y,z) := -0.2 + y^2 - 3\cdot x\cdot z$

$h(x,y,z) := 0.3 - z^2 - 2\cdot x\cdot y$

Функції для перевірки умов збіжності процесу послідовних наближень та їх значення в точці початкового наближення.

$$d1(x,y,z) := \left|\frac{d}{dx}f(x,y,z)\right| + \left|\frac{d}{dx}g(x,y,z)\right| + \left|\frac{d}{dx}h(x,y,z)\right|$$

$$d2(x,y,z) := \left|\frac{d}{dy}f(x,y,z)\right| + \left|\frac{d}{dy}g(x,y,z)\right| + \left|\frac{d}{dy}h(x,y,z)\right|$$

$$d3(x,y,z) := \left|\frac{d}{dz}f(x,y,z)\right| + \left|\frac{d}{dz}g(x,y,z)\right| + \left|\frac{d}{dz}h(x,y,z)\right|$$

$$d1\left(x_0, y_0, z_0\right) = 0$$

$$d2\left(x_0, y_0, z_0\right) = 0$$

$$d3\left(x_0, y_0, z_0\right) = 0$$

Функція обчислення наближень методом ітерацій в векторній формі.

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f\left(x_i, y_i, z_i\right) \\ g\left(x_i, y_i, z_i\right) \\ h\left(x_i, y_i, z_i\right) \end{pmatrix}$$

Вектори результатів

$x =$

	0
0	0
1	0.1
2	0.05
3	0.073
4	0.069
5	0.064
6	0.07
7	0.066
8	0.068
9	0.067
10	0.067

$y =$

	0
0	0
1	-0.2
2	-0.25
3	-0.175
4	-0.226
5	-0.202
6	-0.21
7	-0.21
8	-0.208
9	-0.209
10	-0.209

$z =$

	0
0	0
1	0.3
2	0.25
3	0.262
4	0.256
5	0.266
6	0.255
7	0.264
8	0.258
9	0.262
10	0.259

Розрахунок похибки обчислень.

$$\varepsilon1_{i+1} := \left|x_{i+1} - x_i\right| \quad \varepsilon2_{i+1} := \left|y_{i+1} - y_i\right| \quad \varepsilon3_{i+1} := \left|z_{i+1} - z_i\right|$$

$\varepsilon1 =$

	0
0	0
1	0.1
2	0.05
3	0.023
4	$3.131\cdot10^{-3}$
5	$5.6\cdot10^{-3}$
6	$6.392\cdot10^{-3}$
7	$4.548\cdot10^{-3}$
8	$2.574\cdot10^{-3}$

$\varepsilon2 =$

	0
0	0
1	0.2
2	0.05
3	0.075
4	0.051
5	0.024
6	$7.896\cdot10^{-3}$
7	$3.563\cdot10^{-4}$
8	$1.536\cdot10^{-3}$

$\varepsilon3 =$

	0
0	0
1	0.3
2	0.05
3	0.012
4	$6.031\cdot10^{-3}$
5	$9.175\cdot10^{-3}$
6	0.01
7	$9.127\cdot10^{-3}$
8	$6.699\cdot10^{-3}$

$x_{11} = 0.067 \quad y_{11} = -0.209 \quad z_{11} = 0.261$

6.3. Розв'язання системи нелінійних рівнянь за допомогою функції Find

При розв'язуванні системи рівнянь в MathCAD використовується спеціальний обчислювальний блок. Він відкривається службовим словом – директивою *Given* та має наступну структуру:

Початкові значення змінних
Given
Рівняння
Вирази с функціями Find та Minerr
Перевірка рішення системи.

Між функціями *Find* та *Minerr* існують розбіжності. Функція *Find* використовується, якщо рішення реально існує. Функція *Minerr* намагається знайти максимальне наближення навіть до неіснуючого рішення шляхом мінімізації середньоквадратичної похибки рішення.

Розглянемо організацію обчислювального блоку та рішення системи рівнянь на наступному прикладі. Найдемо рішення системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x^2 \end{cases}.$$

Для розв'язання заданої системи рівнянь необхідно виконати наступні кроки.

▪ Визначити початкове наближення для розв'язання системи рівнянь. Для цього представимо обидва рівняння системи у вигляді зручному для побудови графіків. В нашому прикладі зручно представити рівняння в наступному вигляді:

$$y1(x) : x^2 \quad y2 : 2 - x^2 .$$

▪ Відомим способом побудуємо на одних координатних осях графіки функцій $y1(x) = x^2$ та $y2(x) = 2 - x^2$ встановивши границі зміни x від -2 до 2. На графіку функції мається дві точки перетину, навколо $x = -1$ та $x = 1$. Одже, система рівнянь має два рішення. Для отримання двох рішень системи рівнянь необхідно використовувати два наближення ($x_1 = -1$ та $x_2 = 1$).

▪ Задамо початкові значення змінних для пошуку першого кореня $x : -0.1 \quad y : 0$. Для пошуку достатньо вказати направлення. У даному прикладі одне рішення рівняння лежить в області $x < 0$, а друге – в області $x > 0$. Тому достатньо обрати любе від'ємне значення x в околі рішення.

▪ Підготовимо обчислювальний блок для рішення системи рівнянь. Введемо директиву *Given*. Вона вказує MathCAD, що далі йде система рівнянь.

▪ В наступному рядку введемо рівняння системи. Перевірте, що між правою та лівою частинами рівнянь стоїть символ =. Для введення цього символу використовуйте клавіші <Ctrl>+<=>. Використовувати в блоці *Given* знак присвоювання := неможна.

▪ Представляти результат можна декількома способами. Якщо необхідно показати результат без подальшого його використання, то наберемо наступний вираз *Find(x,y)=*. MathCAD поверне рішення. Якщо результат необхідно використовувати для подальших обчислень, то визначається вектор для збереження рішення системи. В цьому випадку результат отримаємо так

$$\begin{bmatrix} x0 \\ y0 \end{bmatrix} := Find(x, y) \quad \begin{bmatrix} x0 \\ y0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

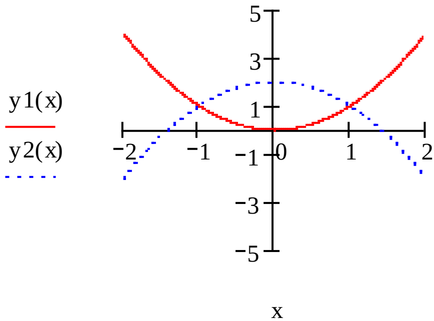
▪ Знайдене рішення необхідно перевірити, підставивши отримані значення в рівняння.

▪ Для знаходження другого рішення рівняння змініть початкові значення змінних наступним чином $x := 0.1$, $y := 0$. Після чого відбудеться перерахунок та $x0$, $y0$ приймуть нові значення.

Фрагмент документу MathCAD з виконаними розрахунками, які описані вище:

$$y1(x) := x^2$$

$$y2(x) := 2 - x^2$$



Початкові значення змінних

$x := -0.1$

$y := 0$

Вводимо сисетму

Given

$$y = x^2$$

$$y = 2 - x^2$$

Обчислювальний блок

$$\begin{pmatrix} x0 \\ y0 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(x, y)$$

Знайдене рішення

$$\begin{pmatrix} x0 \\ y0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Перевірка рішення.

$$x0^2 = 1 \quad 2 - x0^2 = 1$$

6.4. Розв’язання системи нелінійних рівнянь за допомогою функції Minerr

Функція *Minerr* використовується для пошуку наближеного рішення системи рівнянь. Задається ця функція таким же чином, як і *Find*. Однак при використанні *Minerr* необхідно проявляти обережність і обов’язково перевіряти рішення, тому що воно може бути хибним. Відбувається це тому що система дає нереальний або не представляючий інтерес корінь. Корисно як можна точніше вказувати початкове наближення до рішення. Правила використання функції *Minerr* такі ж, як і *Find***.**

Розглянемо використання функції *Minerr* на наступному прикладі. Розв’яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^3 - x^2 \end{cases}.$$

Для рішення заданої системи рівнянь необхідно виконати наступні кроки.

- Визначимо початкове наближення для рішення системи рівнянь, використовуючи графіки рівнянь системи.
- Задамо початкове значення змінних для пошуку першого рішення.
- Підготовте обчислювальний блок для рішення системи рівнянь.
- Введемо рівняння системи.
- Для представлення рішення визначимо вектор з двох елементів. Результат отримаємо наступним чином:

$$\begin{bmatrix} x0 \\ y0 \end{bmatrix} := Minerr(x, y).$$

- Превіримо знайдене рішення.
- Задамо початкове наближення для пошуку наступного рішення. Повторимо кроки 3, 4, 5, 6.

Фрагмент документу MathCAD з виконаними розрахунками, які описані вище:

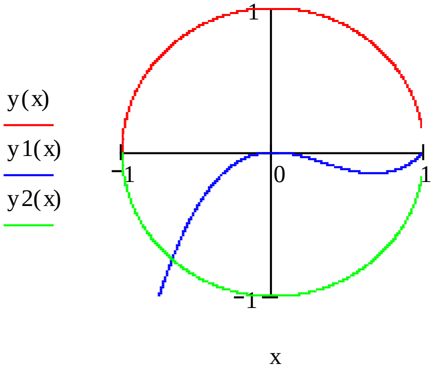
Представлення рівнянь системи для побудови графіків

$$y(x) := \sqrt{1 - x^2}$$

$$y1(x) := x^3 - x^2$$

$$y2(x) := -\sqrt{1 - x^2}$$

Графічний розв’язок системи рівнянь



Початкові значення змінних

$x := -0.2$

$y := -0.3$

Блок визначення системи рівнянь

Given

$x^2 + y^2 = 1$

$y = x^3 - x^2$

Обчислювальний блок

$$\begin{pmatrix} x0 \\ y0 \end{pmatrix} := \mathrm{Minerr}(x, y)$$

Знайдене рішення системи

$$\begin{pmatrix} x0 \\ y0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.668 \\ -0.744 \end{pmatrix}$$

Перевірка рішення

$x0^2 + y0^2 = 1 \quad x0^3 - x0^2 = -0.744$

Контрольні питання

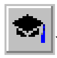
1. У чому полягає алгоритм пошуку рішення системи нелінійних рівнянь в MathCAD методом простих ітерацій?
2. Які дії потрібно виконати в MathCAD, щоб побудувати графік поверхні?
3. Які відмінності існують між функціями Find та Minner?
4. На що вказує директива (службове слово) Given?

Тема 7. Символьні обчислення в MathCAD

Системи комп’ютерної алгебри забезпечуються спеціальним процесором для виконання аналітичних (символьних) обчислень. Його основою є ядро, що зберігає всю сукупність формул і формульних перетворень, за допомогою яких виробляються аналітичні обчислення. Чим більше цих формул у ядрі, тим надійніша робота символьного процесора й тим імовірніше, що поставлена задача буде вирішена, якщо таке рішення існує в принципі (що буває далеко не завжди).

Ядро символьного процесора системи MathCAD – трохи спрощений варіант ядра відомої системи символьної математики Maple V фірми Waterloo Maple Software, у якої фірма MathSoft (розроблювач MathCAD) придбала ліцензію на його застосування, завдяки чому MathCAD стала (починаючи з версії 3.0) системою символьної математики. Символьні обчислення виконуються настільки ж просто (для користувача), як обчислення квадрата *x*.

Символьні операції можна виконувати двома способами:

- Безпосередньо в командному режимі (використовуючи операції меню *Символи*);
- За допомогою операторів символьного перетворення (використовуючи *палітру інструментів Символи* ).

Розглянемо перший спосіб.

7.1. Виділення виразів для символьних обчислень

Щоб символьні операції виконувалися, процесору необхідно вказати, над яким виразом ці операції повинні вироблятися, тобто треба виділити вираз. Для ряду операцій варто не тільки вказати вираз, до якого вони ставляться, але й намітити змінну, щодо якої виконується та або інша символьна операція. Саме вираз в такому випадку не виділяється.

Таким чином, для виконання операцій із символьним процесором потрібно виділити об’єкт (цілий вираз або його частину) синіми суцільними лініями.

Символьні операції розбиті на п’ять характерних розділів. Першими йдуть найбільш часто використовувані операції. Вони можуть виконуватися з виразами, що містять комплексні числа або мають рішення в комплексному виді.

7.2. Символьні операції

7.2.1. Операції з виділеними виразами

Якщо в документі є виділений вираз, то з ним можна виконувати різні операції, представлені нижче:

Розрахунки – перетворити вираз з вибором виду перетворень із підменю;

Символічні [Shift] F9 – виконати символьне перетворення виділеного виразу;

Із плаваючої коми… – обчислити виділений вираз в речовинних числах;

Комплексні – виконати обчислення в комплексному виді;

Спростити – спростити виділений вираз з виконанням таких операцій, як скорочення подібних, приведення до загального знаменника, використання основних тригонометричних тотожностей і т.ін.;

Розширити – розкрити вираз [наприклад, для $(X + Y)(X - Y)$ одержуємо $X^2 - Y^2$];

Фактор – розкласти число або вираз на множники [наприклад, $X^2 - Y^2$ дасть $(X + Y)(X - Y)$];

Подібні – зібрати складові, подібні до виділеного виразу, що може бути окремою змінною або функцією зі своїм аргументом (результатом буде вираз, поліноміальний щодо обраного виразу);

Коефіцієнти Полінома – по заданій змінній знайти коефіцієнти полінома, що апроксимує вираз, у якому ця змінна використана.

7.2.2. Операції з виділеними змінними

Для ряду операцій треба знати, щодо якої змінної вони виконуються. У цьому випадку необхідно виділити змінну, установивши на ній маркер уведення. Після цього стають доступними наступні операції підменю *Змінні*:

Обчислити – знайти значення виділеної змінної, при яких вираз, що її містить, стає рівним нулю;

Заміна – замінити зазначену змінну вмістом буфера обміну;

Диференціали – диференціювати вираз, що містить виділену змінну, по цій змінній (інші змінні розглядаються як константи);

Інтеграція – інтегрувати весь вираз, що містить змінну, по цій змінній;

Розкласти на складові... – знайти кілька членів розкладання виразу в ряд Тейлора щодо виділеної змінної;

Перетворення в Часткові Частки – розкласти на елементарні дроби вираз, що розглядається як раціональний дріб щодо виділеної змінної.

7.2.3. Операції з виділеними матрицями

Операції з виділеними матрицями представлені позицією підменю *Матриці*, що має своє підменю з наступними операціями:

Транспонування – одержати транспоновану матрицю;

Інвертування – створити зворотну матрицю;

Визначник – обчислити детермінант (визначник) матриці.

Результати символьних операцій з матрицями часто виявляються надмірно громіздкими й тому погано доступні для огляду.

7.2.4. Операції перетворення

У позиції *Перетворення* містяться розділи операцій перетворення, що створює підменю з наступними можливостями:

Фур'є – виконати прямі перетворення Фур'є щодо виділеної змінної;

Фур'є Зворотне – виконати зворотне перетворення Фур'є щодо виділеної змінної;

Лапласа – виконати прямі перетворення Лапласа щодо виділеної змінної (результат – функція змінної s);

Лапласа Зворотне – виконати зворотне перетворення Лапласа щодо виділеної змінної (результат – функція змінної *t*);

Z – виконати прямі Z-перетворення виразу щодо виділеної змінної (результат – функція змінної *z*);

Зворотне Z – виконати зворотне Z-перетворення щодо виділеної змінної (результат – функція змінної *n*) .

7.3. Стиль подання результатів обчислень

На наочність обчислень впливає стилі подання їхніх результатів. Наступна команда дозволяє задати той або інший стиль:

Стиль Обчислень... – задати подання результату символьної операції під основним виразом, поруч із ним або замість нього (Рис. 7.1).

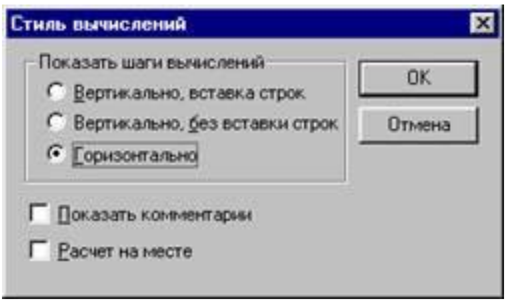


Рис. 7.1. Стиль Обчислень

7.4. Приклади символьних операцій у командному режимі

Більшість символьних операцій легко виконуються, тому нижче зупинимося лише на деяких прикладах. Символьна операція *Розрахунки* забезпечує роботу з математичними виразеннями, що містять убудовані в систему функції й представленими в різному виді: поліноміальному, дрібно-раціональному, у вигляді сум і добутків, похідних й інтегралів і т.д. (Див. Рис. 7.2.). Операція прагне зробити всі можливі чисельні обчислення й представити вираз в найбільш простому виді. Вона можлива над матрицями із символьними елементами. Похідні й певні інтеграли, символьні значення яких обчислюються, повинні бути представлені у своїй природній формі.

Особо слід зазначити можливість виконання чисельних обчислень із підвищеною точністю – 20 знаків після коми. Для переходу в такий режим обчислень потрібно числові константи, що обчислюють в об'єктах, задавати з обов'язковою вказівкою десяткової крапки, наприклад 10.0 або 3.0, а не 10 або 3. Ця ознака є вказівкою на проведення обчислень такого типу.

На Рис. 7.2. показані типові приклади дії операції *Розрахунки.* Ліворуч показані вихідні вирази, що піддають символьним перетворенням, а праворуч – результат цих перетворень.

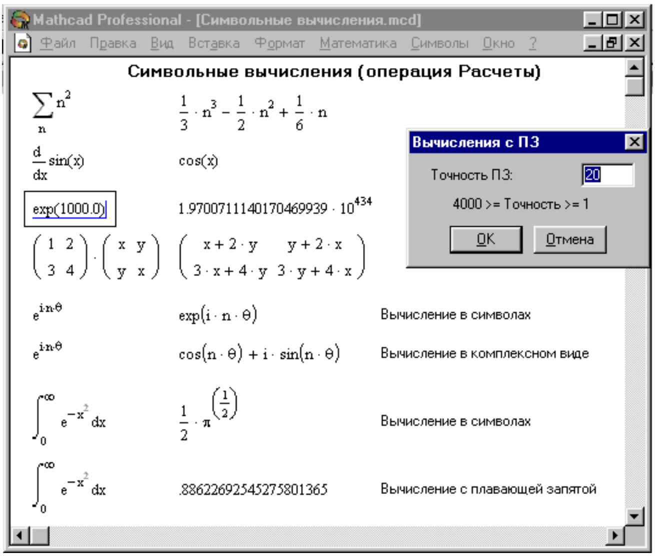


Рис. 7.2. Символьні обчислення

Операція *Розрахунки* одна із самих потужних. Вона дозволяє в символьному виді обчислювати суми (і добутки) рядів, похідні й невизначені інтеграли, виконувати символьні й чисельні операції з матрицями.

Ця операція містить підменю. Команда *Символічні* отут найбільш важлива. Призначення інших команд очевидно: вони потрібні, якщо результат потрібно одержати у формі комплексного або дійсного числа. Наприклад, якщо ви хочете замість числа π одержати 3.141..., використайте команду *Із плаваючої коми…*. У режимі символьних обчислень результат може перевершувати машинну нескінченність системи – див. приклад на обчислення exp(1000.0) на рис. 7.2. При цьому число точних значущих цифр результату практично не обмежене (або, точніше кажучи, залежить від ємності ОЗУ).

Операція *Розкласти на складові...* повертає розкладання в ряд Тейлора вираження щодо виділеної змінної із заданим по запиту числом членів ряду n (число визначається по ступенях ряду). За замовчуванням задане n = 6. У розкладанні вказується залишкова погрішність розкладання. На рис. 7.3 представлене застосування цієї операції для розкладання функції $\frac{\sin(x)}{x}$. Мінімальна погрішність виходить при малих x (див. графічне подання функції і її ряду).

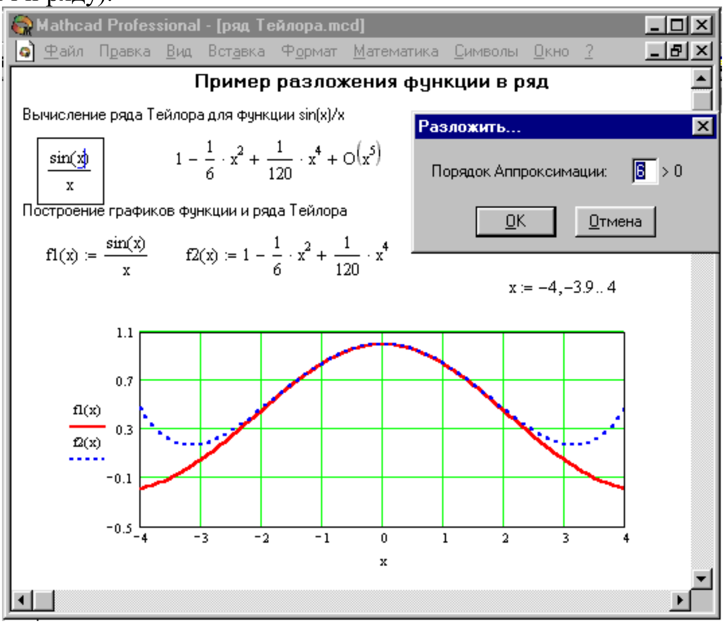


Рис. 7.3. Розкладання функції в ряд Тейлора

7.5. Оператори обчислення меж функцій

Для обчислення меж функцій у систему введений символьний оператор *limit*. Крім введення зі складальної панелі *Матанализ*, його в трьох формах можна ввести натисканням наступних комбінацій клавіш:

[Ctrl] L – введення шаблона оператора обчислення межі функції при *x,* що прагне до заданого значення,

[Ctrl] A – введення шаблона обчислення межі функції ліворуч від заданої крапки,

[Ctrl] B – введення шаблона обчислення межі функції праворуч від заданої крапки.

На рис. 7.4 показані приклади обчислення меж. При обчисленні меж потрібно заповнити шаблони, що входять у головний шаблон для обчислення меж, а потім ввести функцію, ім’я змінної, по якій шукається межа, і значення змінної – аргументу функції.

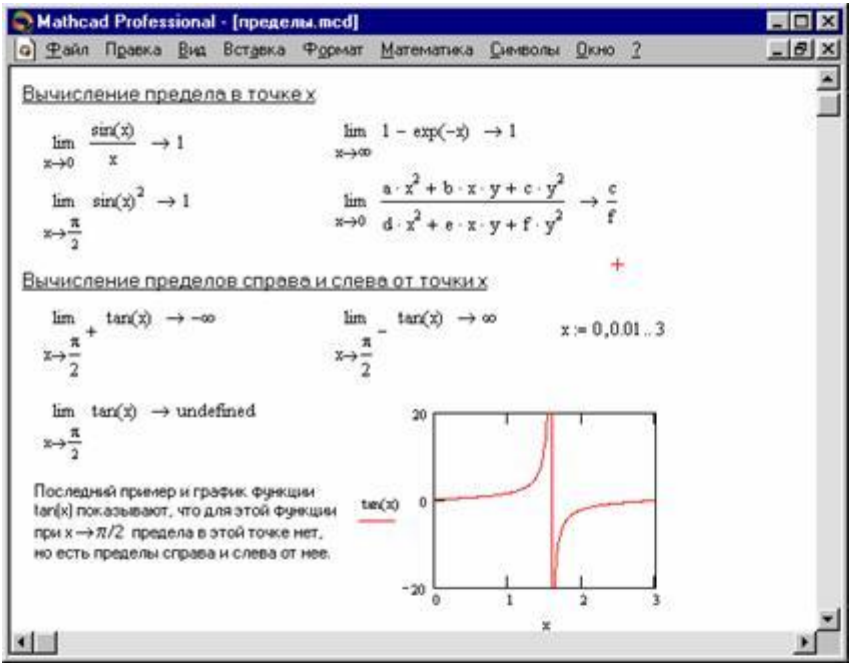


Рис.7.4. Обчислення меж

Для одержання результату встановіть після блоку обчислення межі стрілку з вістрям, спрямованим вправо. Межа (якщо вона існує) буде обчислена і з’явиться в шаблоні у вістря стрілки. Якщо функція не має межі, замість результату з’явиться напис *Undefine*.

7.6. Завдання операторів користувача

Ще одна екзотична можливість, властива новим версіям системи MathCAD, – завдання нових операторів користувача. Такий оператор задається практично так само, як функція користувача, але замість імені вибирається який-небудь відповідний знак. Наприклад, можна задати оператор ділення у вигляді:

$\div(A,B) := \frac{A}{B}$ – завдання нового оператора ділення;

$\div(6,2) = 3$ – застосування функції ділення;

$6 \div 2 = 3$ – застосування нового оператора ділення.

При зовнішній простоті такого завдання тут є проблеми. Вбудовані в систему оператори *не можна перевизначити*. Тому набір доступних знаків для позначення нових операторів обмежений. Не можна задати новий оператор ділення знаком / (він уже використаний), але можна взяти знак ÷, оскільки цей символ системою не використається.

Друга проблема пов'язана з введенням символу нового оператора. Швидше за все, його прямо ввести не можна. Доведеться скористатися типовими прийомами введення нових символів у документи Windows. Один із цих прийомів – використання додатка, що видає таблицю символів, з можливістю його експорту із цієї таблиці в документ іншого додатка (у нашому випадку – у документ MathCAD).

Можна також скористатися відповідним знаком з набору *MATH SYMBOL*, наявного в складі *Шпаргалок*, доступ до яких дає *Ресурс Центр (? ⇒ Ресурс Центр ⇒Довідковий стіл і коротке керівництво ⇒Додаткові математичні символи*). На рис. 7.5 показаний такий варіант завдання нового оператора користувача. Для перетаскування знака можна скопіювати його в буфер обміну за допомогою операції *Копіювати*, а потім ввести в документ, використовуючи операцію *Вставка*.

Після того як оператор заданий, його можна використати, як функцію і як оператор. Приклади показані на рис. 7.5. Для застосування нового оператора треба вивести його шаблон за допомогою панелі математичних знаків (вона також показана на рис. 7.5).

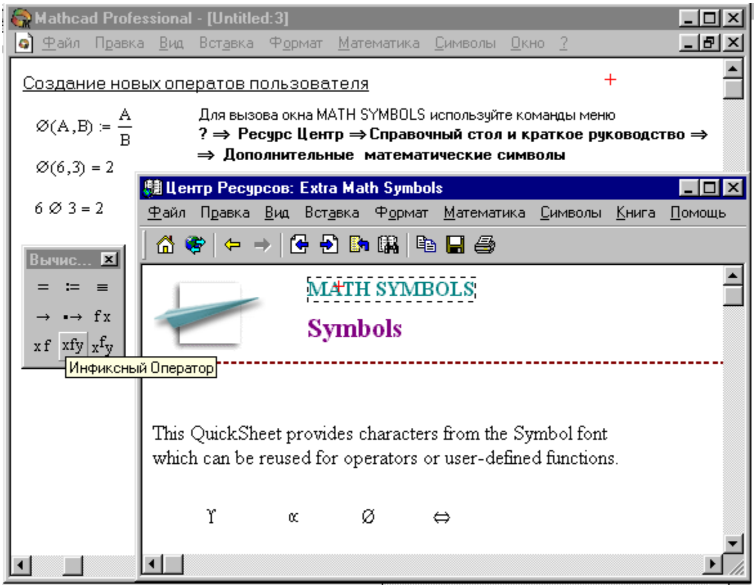


Рис. 7.5. Завдання оператора користувача з вибором імені з набору знаків

У нашому випадку варто нажати кнопку xfy цієї панелі – вона виводить особливий шаблон виду ▪ ▪ ▪. Введіть операнди, наприклад 6 й 3 у крайні прямокутники, а символ оператора – у середній. Поставивши після цієї конструкції знак рівності, побачите результат – число 2.

Можна задати й інші оператори, наприклад, для роботи з одним операндом. Так, ви можете задати оператор для перерахування значення температури по шкалі Цельсія, для того щоб визначити відповідне йому значення по шкалі Фаренгейта, у такий спосіб:

$$°C(x) := \frac{9}{5} \cdot x + 32 \qquad °F := 1$$

Потім, використовуючи кнопку x f складальної панелі символів відносини, можна виконувати операцію перерахування у вигляді:

$$37°C = 98.6°F$$

Є області математики й фізики, де завдання нових операторів необхідно, оскільки є частиною специфічної мови їхнього опису.

Контрольні питання

1. Якими способами можна виконувати символьні операції в MathCAD?
2. Які символьні операції можна виконувати з виділеними виразами?
3. Які символьні операції можна виконувати з виділеними змінними?
4. Які символьні операції можна виконувати з виділеними матрицями?
5. Як і для чого можна задавати оператори користувача?

Лабораторна робота № 1. Перше знайомство з MathCAD. Функції, графіки, коментарі

Мета:

- познайомитися з інтерфейсом користувача програми MathCAD;
- засвоїти основні прийоми побудови та редагування виразів та формул;
- засвоїти прийоми форматування чисел;
- познайомитися з прийомами визначення функції;
- засвоїти основні прийоми побудови та редагування графіків;
- засвоїти введення та редагування тексту.

Для успішного виконання даної лабораторної роботи необхідно засвоїти теоретичний матеріал *теми 1*.

Завдання й порядок виконання роботи

1. Обчислити об'єм призми, який дорівнює $S \times h$, якщо $S = 50$, а h приймає дискретні значення від 5 до 15.

2. Обчислити об'єм усіченої піраміди, який дорівнює $\frac{1}{3}(S1 + S2 + \sqrt{S1 \cdot S2}) \times h$, якщо площа верхньої основи $S1 = 15$, а площа нижньої – $S2$ приймає дискретні значення від 20 до 35. Висота піраміди змінюється від 10 до 20.

3. Обчислити вираз $\left|\left(x^2 - 10\right) \cdot \left(2^{\sqrt{2-y}} - 2^{-x}\right)\right|$ при x (1…5), y (10…15).

4. Обчисліть при $x = \frac{\pi}{180} \cdot 20$; $y = \frac{\pi}{180} \cdot 25$ вираз $\frac{tgx + tgy}{1 - tgx \cdot tgy}$.

5. Знайти значення функції $f(x) = \frac{x^5}{10}$ при цілочислених значеннях аргументу в діапазоні [-20…20].

6. Знайти значення функції $f(x) = \frac{\sin(x^5)}{x}$ при цілочислених значеннях аргументу в діапазоні [-20…20].

7. Построїти графік функції простим способом $f(x) = \frac{\sin(x^2)/3}{x}$.

8. Построїти графік функції, змінюючи аргумент від -10 до 10 з кроком 0,1

$$f(x) = \sin\left(\frac{x^2}{2}\right); \quad f1(x) = \left(\frac{x^2}{100}\right).$$

Контрольні питання

1. Які палітри системи MathCAD Ви знаєте?
2. Яким чином в MathCAD можна визначити дискретний аргумент?
3. Яким чином можна побудувати графік в MathCAD?
4. Як можна побудувати в MathCAD декілька графіків в одній системі координат?

Лабораторна робота № 2. Чисельне розв'язання нелінійних рівнянь в MathCAD методом простих ітерацій

Мета:

- навчитися розв'язувати нелінійні рівняння в MathCAD, використовуючи чисельний алгоритм методу простих ітерацій.

Для успішного виконання даної лабораторної роботи необхідно засвоїти теоретичний матеріал *теми 2*.

Методичні вказівки

Реалізація чисельного алгоритму методу простих ітерацій для розв'язання нелінійних рівнянь в MathCad

Розглянемо реалізацію алгоритму цього методу на наступному прикладі.

Найти дійсні корені рівняння $x - \sin(x) = 0{,}25$ з точністю до трьох значущих цифр.

- Встановимо формат чисел так, щоб результати обчислень відображались з необхідною кількістю знаків після десяткової крапки (коми).
- Для отримання наближеного значення кореня даного рівняння запишемо його наступним чином:

$$f(x) : \sin(x) + 0.25,$$

$$g(x) : x .$$

- Помітимо, що функція $f(x)$ є ітеруючою функцією методу простих ітерацій.
- Побудуємо графіки функцій $f(x)$ та $g(x)$, точка перетину яких дає наближене значення кореня даного рівняння, цим значенням буде $x_0 = 1{,}2$.
- Визначимо початкове значення для обчислень наступним чином:

$x_0 : 1{,}2$.

- Визначимо функцію першої похідної ітеруючої функції $f(x)$ для перевірки умови збіжності, викликавши оператор диференціювання з палітри обчислень (*Calculus Toolbar*): $d(x) : \frac{d}{dx} f(x)$.

Обчислимо значення функції $d(x)$ в точці $x_0 = 1{,}2$. Так як $d(1{,}25) = 0{,}3624 < 1$, можна продовжити обчислення.

- Визначимо дискретний аргумент $i : 0;9$, який задає кількість обчислюваних значень x_i.
- Визначимо функцію обчислення наближень методом послідовних наближень у векторній формі: $x_{i+1} : f(x_i)$.
- Для отримання вектору результатів у вільному місці робочого документу MathCad напишемо: $x =$. Зверніть увагу на те, що починаючи з четвертого значення, елементи вектору результатів лишаються незмінними до трьох знаків після десяткової точки (коми). Це говорить про те, що збіжність результату з точністю до трьох знаків досягнута на п’ятій ітерації. Введемо умову оцінки похибки обчислень $\varepsilon_{k+1} : \left| x_{k+1} - x_k \right|$. Результат обчислень похибки виведемо на екран. Коренем рівняння буде $x_4 = 1{,}1719$.

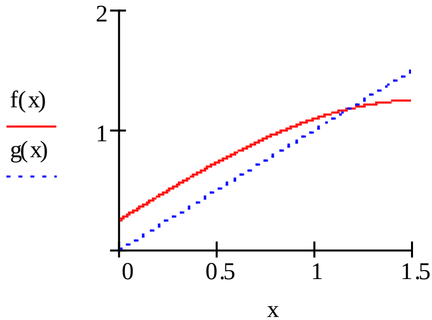
Фрагмент документу MathCad з виконаними розрахунками, які описані вище:

Система рівнянь для пошуку наближеного рішення графічним способом

$f(x) := \sin(x) + 0.25$

$g(x) := x$

Графіки функцій f(x) та g(x). Точка перетину цих графіків дає наближення рішення рівняння



Наближене значення для обчислення наближень

$x_0 := 1.2$

Перевірка умови збігу наближень

$$d(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

$d(x_0) = 0.36236$

Дискретний аргумент, який задає кількість обчислюємих значень x_i

$i := 0..9$

Функція обчислення наближень

$x_{i+1} := f(x_i)$

Оцінка погрішності обчислень

$\varepsilon_{i+1} := |x_{i+1} - x_i|$

Вектор результатів

$x =$

	0
0	1.2
1	1.18204
2	1.17538
3	1.17284
4	1.17185
5	1.17147
6	1.17132
7	1.17127
8	1.17124
9	1.17124
10	1.17123

Так як за умовою похибка обчислень не повинна різнитися в трьох значущих цифрах після десяткової точки (ε_4 та ε_5 не різняться в трьох цифрах після десяткової точки), в якості кореня рівняння обираємо x_4

$\varepsilon =$

	0
0	0
1	0.01796
2	0.00666
3	0.00254
4	0.00098
5	0.00038

Корінь нелінійного рівняння

$x_4 = 1.17185$

Завдання й порядок виконання роботи

Методом простих ітерацій з точністю до трьох значущих цифр розв’язати наступні рівняння:

1. $x^3 - x - 1 = 0$;
2. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \frac{x^{11}}{1320} = 0{,}4431135$;
3. $x^5 - x - 0{,}2 = 0$.

Контрольні питання

1. В чому складається ідея методу простих ітерацій?
2. Яким чином метод простих ітерацій можна реалізувати в MathCAD?

Лабораторна робота № 3. Чисельне розв'язання нелінійних рівнянь в MathCAD методом бісекцій (половинного ділення)

Мета:

▪ навчитися розв'язувати нелінійні рівняння в MathCAD, використовуючи чисельний алгоритм методу бісекцій (половинного ділення).

Для успішного виконання даної лабораторної роботи необхідно засвоїти теоретичний матеріал *теми 2*.

Методичні вказівки

Реалізація чисельного алгоритму методу бісекцій для розв'язання нелінійних рівнянь в MathCad

Метод бісекцій (половинного ділення) складається в наступному.

Нехай дане рівняння $f(x) = 0$, де $f(x)$ – неперервна функція на $[a,b]$ та $f(a) \cdot f(b) < 0$. Необхідно визначити дійсні корені цього рівняння. Для пошуку кореня рівняння на відрізку $[a,b]$ необхідно цей відрізок розділити навпіл. Якщо $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то $\xi = \frac{a+b}{2}$ є коренем рівняння. Якщо $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$, то обираємо ту з половин відрізку $[a,b]$, на кінцях якої функція $f(x)$ має протилежні знаки. Новий звужений відрізок $[a1, b1]$ знову ділимо навпіл і проводимо те ж розглядання, і так далі.

Розглянемо реалізацію алгоритму методу половинного ділення в MathCad на наступному прикладі.

Знайти дійсний корінь рівняння $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$.

▪ Визначимо ліву частину нелінійного рівняння як функцію $f(x)$.

- Побудуємо графік функції $f(x)$, точка перетину якого з віссю і дає наближене значення кореня вихідного рівняння. Визначимо по графіку значення кінців відрізка, який містить корінь рівняння: $a=0$, $b=1$.
- Задамо значення кінців відрізка $[a,b]$ в векторній формі. Для цього, використовуючи палітру матриць та векторів, введемо оператор вектору на два елементи та заповнимо його ідентифікаторами кінців відрізка a_0 та b_0. За допомогою клавіші пробілу виведемо значок за знак оператору, натиснемо клавішу <:>, введемо ще один оператор вектору на два елементи та заповнимо його значеннями кінців відрізка: 0 та 1.
- Задамо дискретну змінну i (від 0 до 9), яка визначає кількість етапів ділення відрізку $[a,b]$, за яку ми розраховуємо отримати рішення рівняння.
- Визначимо формули обчислення кінців відрізку на кожному етапі ділення його навпіл. На відрізку $[a_i,b_i]$ серединою буде точка $\frac{a_i+b_i}{2}$.

Якщо $f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)\cdot f(a_i)<0$ (знаки функції на кінцях поділеного відрізку різні), то початок нового відрізку для обчислень a_{i+1} збігається з a_i, тобто $a_{i+1}=a_i$. В іншому випадку (знаки функції на кінцях поділеного відрізку однакові) a_{i+1} співпадає з точкою половинного ділення відрізку, тобто $a_{i+1}=\frac{a_i+b_i}{2}$.

Подібна операція необхідна для іншого кінця відрізку $[a_i,b_i]$, для b_i. Якщо $f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)\cdot f(a_i)<0$ то кінець нового відрізку для обчислень b_{i+1} збігається з точкою половинного ділення відрізку, тобто $b_{i+1}=\frac{a_i+b_i}{2}$. В іншому випадку b_{i+1} співпадає з кінцем відрізку $[a_i,b_i]$, тобто $b_{i+1}=b_i$. Якщо ж $f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)\cdot x\approx 0$, то точка $\frac{a_i+b_i}{2}$ буде являтися коренем нелінійного рівняння.

Для реалізації описаного процесу в MathCad запишемо формули для визначення початку та кінця розділеного відрізку, використовуючи умовний оператор *if* у векторній формі. Така форма запису дозволяє в обчисленнях

MathCad використовувати результати попередніх операцій. Введемо оператор вектору на три елементи та заповнимо його ідентифікаторами шуканих величин a_{i+1}, b_{i+1}, g_i (g_i – для обчислення $f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)$). Введемо знак присвоєння та ще один оператор вектору на три елементи. Останній оператор заповнимо наступними формулами:

$$if\left(f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)*f(a_i)<0, a_i, \frac{a_i+b_i}{2}\right),$$

$$if\left(f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)*f(a_i)<0, \frac{a_i+b_i}{2}, b_i\right),$$

$$f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right).$$

Умовний оператор if працює наступним чином. Якщо логічний вираз, записаний в дужках, істинний, то змінна зліва від знаку := приймає значення виразу або величини, яка стоїть першою після логічного виразу, в протилежному випадку змінній присвоюється значення виразу, або величини, яка стоїть на другому місці після логічного виразу.

- Щоб отримати результат обчислень, введемо послідовно *a=, в=, g=*. Вектор *а* покаже початки всіх розділених відрізків, *в* – кінці цих відрізків. Вектор *g* містить значення функції $f(x)$ в серединах всіх відрізків $[a,b]$. Серед значень вектору *а* або вектору *в* буде корінь вихідного рівняння.
- Визначимо корінь рівняння наступним чином. Проаналізуємо значення вектору *g*. Знайдемо елемент вектора, значення якого найбільш близьке до нуля. В нашому прикладі це значення елементу $g_9 = -0000336$. Це значення функції в середині відрізку $[a_9, b_9]$. Коренем рівняння буде значення $a_{10} = 0{,}86621$.

Фрагмент документу MathCad з виконаними розрахунками, які описані вище:

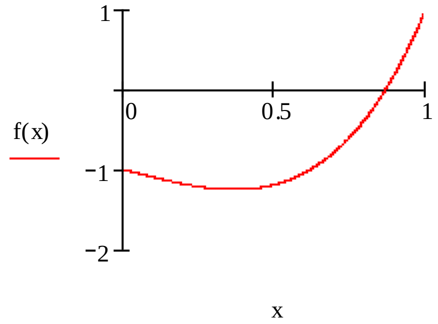
Ліва частина нелінійного рівняння, визначена як функція f(x).

Локалізація корня рівняння

$$f(x) := \left(x^4 + 2\cdot x^3 - x - 1\right)$$

Значення кінців відрізка [a,b] в векторній формі

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Дискретна змінна i

$i := 0..9$

Формули для визначення початку та кінця відрізку і визначення значення f(x) в середині відрізку

$$\begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \\ g_i \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} \text{if}\left[f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)\cdot f(a_i) < 0, (a_i), \left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)\right] \\ \text{if}\left[f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)\cdot f(a_i) < 0, \left(\frac{a_i+b_i}{2}\right), (b_i)\right] \\ f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Результати обчислень

a =

	0
0	0
1	0.5
2	0.75
3	0.75
4	0.8125
5	0.84375
6	0.85938
7	0.85938
8	0.86328
9	0.86523
10	0.86621

b =

	0
0	1
1	1
2	1
3	0.875
4	0.875
5	0.875
6	0.875
7	0.86719
8	0.86719
9	0.86719
10	0.86719

g =

	0
0	-1.1875
1	-0.58984
2	0.05103
3	-0.30394
4	-0.13557
5	-0.04461
6	0.00261
7	-0.02115
8	-0.0093
9	-0.00336

Значення f(x) найбільш близьке до нуля

$g_9 = -0.00336$

Корінь рівняння, який може бути прийнятий після десяти етапів ділення відрізка навпіл

$$x := \frac{a_9 + b_9}{2}$$

$x = 0.86621$

Завдання й порядок виконання роботи

Методом бісекцій уточнити корні рівнянь:

1. $x^3 + x - 1000 = 0$ з точністю до 10^{-4};
2. $tg(x) = x$ на відрізку $\pi < \frac{3\pi}{2}$ з точністю 0,0001.

Контрольні питання

1. В чому складається ідея методу бісекцій?
2. Яким чином метод бісекцій можна реалізувати в MathCAD?

Лабораторна робота № 4. Чисельне розв'язання нелінійних рівнянь в MathCAD методом Ньютона (метод дотичних)

Мета:

▪ навчитися розв'язувати нелінійні рівняння в MathCAD, використовуючи чисельний алгоритм методу Ньютона (метод дотичних).

Для успішного виконання даної лабораторної роботи необхідно засвоїти теоретичний матеріал *теми 2*.

Методичні вказівки

Реалізація чисельного алгоритму методу Ньютона для розв'язання нелінійних рівнянь в MathCad

Нагадаємо в чому суть методу Ньютона. Нехай є рівняння $f(x) = 0$ (1), де $f(x)$ – неперервна функція. Необхідно визначити дійсні корені цього рівняння з точністю ε. Розрахункова формула методу Ньютона має вигляд

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \text{ (2).}$$

Виберемо яким-небудь способом, наприклад, графічно, наближене значення кореня x_0 і, підставляючи його в праву частину рівняння (2), можемо почати ітераційний процес обчислення кореня рівняння.

Умовою закінчення ітераційного процесу є виконання умови

$$\left|x_{k+1} - x_k\right| < \varepsilon \ (3).$$

У випадку виконання нерівності (3), коренем рівняння (1) будемо вважати значення x_{k+1}.

Розглянемо реалізацію алгоритму Ньютона в MathCad на наступному прикладі.

Знайти дійсні корені рівняння $x - \sin(x) = 0{,}25$ з точністю до трьох значущих цифр.

- Встановимо формат чисел так, щоб результати обчислень відображались з необхідною кількістю знаків після десяткової точки (коми).
- Перетворимо задане рівняння до виду (1) і визначимо його праву частину як функцію $f(x)$.
- Визначимо наближене значення кореня рівняння графічно. Для цього побудуємо графік функції $f(x) = x - \sin(x) - 0{,}25$. Цим значенням буде значення $x = a$ в точці перетину графіка функції з віссю абсцис.
- Визначимо початкове значення для обчислень наступним чином: $x_0 : a$.
- Визначимо дискретний аргумент $k = 0..9$, який задає кількість ітерацій (обчислюємих значень x_k).
- Визначимо першу похідну функції $f(x)$, як функцію $d(x)$:

$$d(x) : \frac{d}{dx} f(x).$$

- Визначимо обчислювальну формулу Ньютона в векторній формі:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

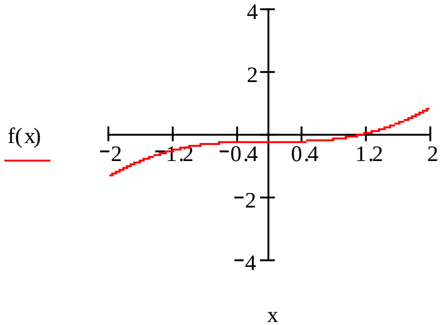
- Для отримання вектору результатів у вільному місці робочого простору MathCad запишемо: $x =$. Введемо умову оцінки похибки обчислень $\varepsilon_{k+1} : \left|x_{k+1} - x_k\right|$. Результат обчислень похибки виведемо на екран. Коренем рівняння буде $x_2 = 1{,}171$.

Фрагмент документу MathCad з виконаними розрахунками, які описані вище:

Нелінійне рівняння визначено у вигляді функції

$f(x) := x - \sin(x) - 0.25$

Локалізація коренів рівняння графічним способом



Наближене значення кореня рівняння

$a := 1.2$

Кількість ітерацій

$k := 0..10$

Початкове значення невідомого для розв'язку рівняння

$x_0 := a$

Визначення першої похідної

$$d(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

Обчислювальна формула Ньютона

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{d(x_k)}$$

Розрахунок похибки обчислень

$$\varepsilon_{k+1} := \left| x_{k+1} - x_k \right|$$

Результати обчислень

x =

	0
0	1.2
1	1.172
2	1.171
3	1.171
4	1.171
5	1.171
6	1.171
7	1.171
8	1.171
9	1.171
10	1.171
11	1.171

ε =

	0
0	0
1	0.028
2	$6.024 \cdot 10^{-4}$
3	$2.736 \cdot 10^{-7}$
4	$5.64 \cdot 10^{-14}$
5	0

Завдання й порядок виконання роботи

Використовуючи метод Ньютона, знайти з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$ додатні корні рівнянь:

1. $4(1-x^2)-e^x=0$;
2. $x^2 \cdot e^x = 0$.

Контрольні питання

1. В чому складається ідея методу Ньютона?
2. Яким чином метод Ньютона можна реалізувати в MathCAD?

Лабораторна робота № 5. Чисельне розв'язання нелінійних рівнянь в MathCAD за допомогою стандартних функцій root та polyroots

Мета:

- навчитися розв'язувати нелінійні рівняння, використовуючи стандартну функцію MathCAD *root*;
- навчитися змінювати точність розв'язку рівняння;
- навчитися розв'язувати нелінійні рівняння, використовуючи стандартну функцію MathCAD *polyroots*.

Для успішного виконання даної лабораторної роботи необхідно засвоїти теоретичний матеріал *теми 3*.

Завдання й порядок виконання роботи

Розв'язати, використовуючи функції *polyroots* та *root*, задачі з лабораторних робіт № 2-4.

1. $x^3 - x - 1 = 0$;

2. $x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{10}-\dfrac{x^7}{42}+\dfrac{x^9}{216}-\dfrac{x^{11}}{1320}=0{,}4431135$;

3. $x^5-x-0{,}2=0$;

4. $x^3+x-1000=0$ з точністю до 10^{-4};

5. $tg(x)=x$ на відрізку $\pi<\dfrac{3\pi}{2}$ з точністю 0,0001;

6. $4(1-x^2)-e^x=0$;

7. $x^2\cdot e^x=0$.

Контрольні питання

1. Навіщо використовується функція root?
2. Які аргументи містить функція root?
3. Навіщо використовується функція polyroots?
4. Які аргументи містить функція polyroots?
5. В чому різниця між функціями root та polyroots?

Лабораторна робота № 6-7. Дії з матрицями

Мета:
- навчитися за допомогою програми MathCAD виконувати основні матричні операції (множення матриці на число, додавання й перемножування двох матриць);
- обчислювати визначники матриць різними способами.

Для успішного виконання даної лабораторної роботи необхідно засвоїти теоретичний матеріал *теми 4*.

Завдання й порядок виконання роботи

Завдання 1

Сформуйте матрицю-стовпець і матрицю-рядок, які відповідно рівні j-му стовпцю й і-му рядку матриці А. Обчисліть суми елементів j-го стовпця й і-го рядка матриці А. Переставте зазначені в завданні рядки й стовпці матриці.

Варіанти 1-10: переставте 1-й та 2-й рядки й 1-й і 2-й стовпці.

Варіанти 11-20: переставте 2-й та 3-й рядки й 1-й і 3-й стовпці.

Для цього виконайте наступні дії.

1. Установіть режим автоматичного виконання обчислень.

2. Визначте й уведіть матрицю А.

3. Уведіть матрицю, множення на яку виділяє стовпець і рядок матриці із зазначеним номером. Виконайте множення.

4. Уведіть матрицю, множення на яку підсумує елементи зазначених стовпця й рядка. Виконайте множення.

5. Уведіть матрицю, множення на яку переставляє зазначені стовпці й рядки. Виконайте множення.

Завдання 2

Доведіть, що матриця $H = E - 2\dfrac{vv^T}{|v|^2}$ (v – вектор-стовпець) – ортогональна матриця. Перевірте для неї властивості ортогональної матриці. У якості v візьміть перший стовпець матриці А із завдання 1.

Для цього виконайте наступні дії.

1. Установіть режим автоматичних обчислень (*Math/Autimatic Calculation*).

2. Привласніть змінній ORIGIN значення, рівне одиниці.

3. Уведіть матрицю-стовпець V і одиничну матрицю E відповідної розмірності.

4. Обчисліть матрицю H.

5. Обчисліть добутки H^TH і HH^T.

6. Обчисліть H^{-1}. Порівняйте H^{-1} і H^T.

7. Покажіть, що вектори-стовпці матриці H мають одиничну довжину й попарно ортогональні. Переконайтеся, що виконується рівність $|\det H| = 1$.

Завдання 3

Доведіть, що матриця P ідемпотентна. Покажіть, що матриця $I = 2P - E$ інволютивна.

Для цього виконайте наступні дії.

1. Установіть режим автоматичних обчислень.

2. Уведіть матрицю P.

3. Обчисліть P^2 й $P^2 - P$.

4. Уведіть одиничну E матрицю тієї ж розмірності, що й матриця P.

5. Обчисліть матрицю $I = 2P - E$.

6. Обчисліть матрицю I^2.

Завдання 4

Обчисліть розкладанням по зазначеному рядку (стовпцю) визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Виконайте обчислення для матриці Н, побудованої в завданні 2, розкладанням по 2-му рядку (варіанти 1-10), по 2-му стовпцю (варіанти 11-20).

Список варіантів до завдання 1

1. $i=1, j=1$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 1{,}5 & 0 \\ 3 & -0{,}3333 & 1 & 0{,}25 \\ 1{,}5 & 0{,}3333 & 0{,}5 & 0 \\ 1{,}2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	2. $i=1, j=2$ $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 4 & 0{,}5 \\ 2{,}5 & 1{,}333 & 0{,}6667 & 0{,}6930 \\ 4{,}4 & 1{,}5 & -2{,}667 & 2 \end{pmatrix}$
3. $i=1, j=3$ $A=\begin{pmatrix} 3 & 1{,}5 & 2{,}5 & 3 \\ 9 & 1 & 9 & 0{,}75 \\ 3{,}5 & 3 & 0{,}75 & 1{,}099 \\ 9{,}6 & 2 & -2{,}333 & 3 \end{pmatrix}$	4. $i=1, j=4$ $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 6 \\ 12 & 2{,}667 & 16 & 1 \\ 4{,}5 & 5{,}333 & 0{,}8 & 1{,}386 \\ 16/8 & 2/5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
5. $i=2, j=1$ $A=\begin{pmatrix} 5 & 2{,}5 & 3{,}5 & 10 \\ 12 & 5 & 25 & 1{,}25 \\ 5{,}5 & 8{,}333 & 0{,}8333 & 1{,}609 \\ 26 & 3 & -1{,}667 & 5 \end{pmatrix}$	6. $i=2, j=2$ $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 15 \\ 18 & 8 & 36 & 1{,}5 \\ 6{,}5 & 12 & 0{,}8570 & 1{,}792 \\ 37{,}2 & 3{,}5 & -1{,}333 & 6 \end{pmatrix}$
7. $i=2, j=3$ $A=\begin{pmatrix} 7 & 3/5 & 4/5 & 21 \\ 21 & 11{,}67 & 49 & 1{,}750 \\ 7{,}5 & 16{,}33 & 0{,}8750 & 1{,}946 \\ 50{,}4 & 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$	8. $i=2, j=4$ $A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 & 28 \\ 24 & 16 & 64 & 2 \\ 8{,}5 & 21{,}33 & 0{,}8890 & 2{,}079 \\ 65{,}60 & 4{,}5 & -0{,}6667 & 6 \end{pmatrix}$

9. $i=3,\ j=1$ $A=\begin{pmatrix} 9 & 4{,}5 & 5{,}5 & 36 \\ 27 & 21 & 81 & 2{,}25 \\ 9{,}5 & 27 & 0{,}9 & 2{,}197 \\ 82{,}8 & 5 & -0{,}3333 & 9 \end{pmatrix}$	10. $i=3,\ j=2$ $A=\begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 & 45 \\ 30 & 26{,}67 & 100 & 2{,}5 \\ 10{,}5 & 33{,}33 & 0{,}9090 & 2{,}303 \\ 102 & 5{,}5 & 0 & 10 \end{pmatrix}$
11. $i=3,\ j=3$ $A=\begin{pmatrix} 11 & 5{,}5 & 6{,}5 & 55 \\ 33 & 33 & 121 & 2{,}75 \\ 11{,}5 & 40{,}33 & 0{,}9170 & 2{,}398 \\ 123{,}2 & 6 & 0{,}3333 & 11 \end{pmatrix}$	12. $i=3,\ j=4$ $A=\begin{pmatrix} 12 & 6 & 7 & 66 \\ 36 & 40 & 144 & 3 \\ 12{,}5 & 48 & 0{,}9230 & 2{,}4850 \\ 146{,}4 & 6{,}5 & 0{,}6667 & 12 \end{pmatrix}$
13. $i=1,\ j=3$ $A=\begin{pmatrix} 13 & 6{,}5 & 7{,}5 & 78 \\ 39 & 46{,}67 & 169 & 3{,}25 \\ 13{,}50 & 56{,}33 & 0{,}9290 & 2{,}565 \\ 171{,}6 & 7 & 1 & 13 \end{pmatrix}$	14. $i=1,\ j=2$ $A=\begin{pmatrix} 14 & 7 & 8 & 91 \\ 42 & 56 & 196 & 3{,}5 \\ 14{,}50 & 65{,}33 & 0{,}9333 & 2{,}639 \\ 198{,}8 & 7{,}5 & 1{,}333 & 14 \end{pmatrix}$
15. $i=1,\ j=3$ $A=\begin{pmatrix} 15 & 7{,}5 & 8{,}5 & 105 \\ 45 & 65 & 225 & 3{,}75 \\ 15{,}5 & 75 & 0{,}9380 & 2{,}708 \\ 228 & 8 & 1{,}667 & 15 \end{pmatrix}$	16. $i=1,\ j=4$ $A=\begin{pmatrix} 16 & 8 & 9 & 120 \\ 48 & 74{,}67 & 256 & 4 \\ 16{,}50 & 85{,}33 & 0{,}941 & 2{,}773 \\ 259{,}2 & 8{,}5 & 2 & 16 \end{pmatrix}$
17. $i=2,\ j=1$ $A=\begin{pmatrix} 17 & 8.5 & 9.5 & 136 \\ 51 & 85 & 289 & 4{,}25 \\ 17{,}5 & 96{,}33 & 0{,}9440 & 2{,}833 \\ 292{,}4 & 9 & 2{,}333 & 17 \end{pmatrix}$	18. $i=2,\ j=2$ $A=\begin{pmatrix} 18 & 9 & 10 & 153 \\ 54 & 96 & 324 & 4{,}5 \\ 48{,}50 & 108 & 0{,}947 & 2{,}89 \\ 327{,}6 & 9{,}5 & 2{,}667 & 18 \end{pmatrix}$
19. $i=2,\ j=3$ $A=\begin{pmatrix} 19 & 9{,}5 & 10{,}5 & 171 \\ 57 & 107{,}7 & 361 & 4{,}75 \\ 19{,}5 & 120{,}3 & 0{,}9500 & 2{,}944 \\ 364{,}8 & 10 & 3 & 19 \end{pmatrix}$	20. $i=2,\ j=4$ $A=\begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 & 190 \\ 60 & 120 & 400 & 5 \\ 20{,}5 & 133{,}3 & 0{,}9520 & 2{,}996 \\ 404 & 10{,}5 & 3{,}333 & 20 \end{pmatrix}$

Список варіантів до завдання 2

1. $P=\begin{pmatrix} 0{,}646 & -0{,}227 & -0{,}421 \\ -0{,}227 & 0{,}854 & -0{,}270 \\ -0{,}421 & -0{,}270 & 0{,}500 \end{pmatrix}$	2. $P=\begin{pmatrix} 0{,}587 & 0{,}189 & -0{,}455 \\ 0{,}189 & 0{,}913 & 0{,}208 \\ -0{,}455 & 0{,}208 & 0{,}500 \end{pmatrix}$
3. $P=\begin{pmatrix} 0{,}990 & 0{,}070 & -0{,}071 \\ 0{,}070 & 0{,}510 & 0{,}495 \\ -0{,}071 & 0{,}495 & 0{,}500 \end{pmatrix}$	4. $P=\begin{pmatrix} 0{,}714 & -0{,}247 & 0{,}378 \\ -0{,}247 & 0{,}786 & 0{,}327 \\ 0{,}378 & 0{,}327 & 0{,}500 \end{pmatrix}$
5. $P=\begin{pmatrix} 0{,}540 & 0{,}136 & 0{,}479 \\ 0{,}136 & 0{,}960 & -0{,}142 \\ 0{,}479 & -0{,}142 & 0{,}500 \end{pmatrix}$	6. $P=\begin{pmatrix} 0{,}961 & 0{,}134 & 0{,}140 \\ 0{,}134 & 0{,}539 & -0{,}480 \\ 0{,}140 & -0{,}480 & 0{,}500 \end{pmatrix}$
7. $P=\begin{pmatrix} 0.784 & -0{,}248 & -0{,}328 \\ -0{,}248 & 0{,}716 & -0{,}377 \\ -0{,}328 & -0{,}377 & 0{,}500 \end{pmatrix}$	8. $P=\begin{pmatrix} 0.511 & 0.072 & -0{,}495 \\ 0.072 & 0.989 & 0.073 \\ -0{,}495 & 0.073 & 0{,}500 \end{pmatrix}$
9. $P=\begin{pmatrix} 0{,}915 & 0{,}188 & -0{,}206 \\ 0{,}188 & 0{,}585 & 0{,}456 \\ -0{,}206 & 0{,}456 & 0{,}500 \end{pmatrix}$	10. $P=\begin{pmatrix} 0{,}852 & -0{,}228 & 0{,}272 \\ -0{,}228 & 0{,}648 & 0{,}420 \\ 0{,}272 & 0{,}420 & 0{,}500 \end{pmatrix}$
11. $P=\begin{pmatrix} 0{,}872 & 0{,}218 & 0{,}253 \\ 0{,}218 & 0{,}628 & -0{,}431 \\ 0{,}253 & -0{,}431 & 0{,}500 \end{pmatrix}$	12. $P=\begin{pmatrix} 0{,}856 & 0{,}226 & 0{,}268 \\ 0{,}226 & 0{,}644 & -0{,}422 \\ 0{,}268 & -0{,}422 & 0{,}500 \end{pmatrix}$
13. $P=\begin{pmatrix} 0{,}912 & -0{,}191 & -0{,}210 \\ -0{,}191 & 0{,}588 & -0{,}454 \\ -0{,}210 & -0{,}454 & 0{,}500 \end{pmatrix}$	14. $P=\begin{pmatrix} 0{,}509 & -0{,}068 & -0{,}495 \\ -0{,}068 & 0{,}991 & -0{,}068 \\ -0{,}495 & -0{,}068 & 0{,}500 \end{pmatrix}$
15. $P=\begin{pmatrix} 0{,}789 & 0{,}247 & -0{,}325 \\ 0{,}247 & 0{,}711 & 0{,}380 \\ -0{,}325 & 0{,}380 & 0{,}500 \end{pmatrix}$	16. $P=\begin{pmatrix} 0{,}959 & -0{,}138 & 0{,}144 \\ -0{,}138 & 0{,}541 & 0{,}479 \\ 0{,}144 & 0{,}479 & 0{,}500 \end{pmatrix}$

17. $P = \begin{pmatrix} 0,538 & -0,132 & 0,481 \\ -0,132 & 0,962 & 0,138 \\ 0,481 & 0,138 & 0,500 \end{pmatrix}$	18. $P = \begin{pmatrix} 0,718 & 0,248 & 0,375 \\ 0,248 & 0,782 & -0,330 \\ 0,375 & -0,330 & 0,500 \end{pmatrix}$
19. $P = \begin{pmatrix} 0,989 & -0,074 & -0,075 \\ -0,074 & 0,511 & -0,494 \\ -0,075 & -0,494 & 0,500 \end{pmatrix}$	20. $P = \begin{pmatrix} 0,583 & -0,186 & -0,456 \\ -0,186 & 0,917 & -0,204 \\ -0,456 & -0,204 & 0,500 \end{pmatrix}$

Контрольні питання

1. Як можна знайти суму, добуток, визначник матриці?
2. Яким чином задається матриця в програмі MathCad?
3. Які функції MathCad для роботи з матрицями Ви знаєте?

Лабораторна робота № 8-9. Розв'язання систем лінійних рівнянь в MathCAD

Мета:

- навчитися використовувати програму MathCAD для пошуку коренів системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Для успішного виконання даної лабораторної роботи необхідно засвоїти теоретичний матеріал *теми 5*.

Завдання й порядок виконання роботи

Дослідіть і, якщо рішення існує, знайдіть рішення системи $Ax = b$ за допомогою:

1. Формул Крамера;
2. Методом Гауса;
3. За допомогою зворотної матриці.

Варіанти завдань

1. $A = \begin{pmatrix} 0.005 & 0.004 & 0.150 & 0 \\ -0.090 & -0.033 & 0.0067 & -0.098 \\ 0.150 & 0.033 & 0.050 & 0 \\ 2.857 & 0.100 & -0.300 & 0.025 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 0.057 \\ -0.098 \\ 0.183 \\ -0.041 \end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix} 0.010 & 0.008 & 0.200 & 0.050 \\ -0.080 & 0 & 0.013 & 0.050 \\ 0.250 & 0.067 & 0.067 & 0.069 \\ 0.0057 & 0.150 & -0.267 & 0.050 \end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix} 0.186 \\ -0.126 \\ 0.646 \\ 0.0086 \end{pmatrix}$
3. $A=\begin{pmatrix} 0.015 & 0.012 & 0.250 & 0.100 \\ -0.070 & 0.033 & 0.020 & 0.075 \\ 0.350 & 0.100 & 0.075 & 0.110 \\ 0.0086 & 0.200 & -0.233 & 0.075 \end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix} 0.388 \\ -0.084 \\ 1.357 \\ 0.149 \end{pmatrix}$
4. $A=\begin{pmatrix} 0.020 & 0.016 & 0.300 & 0.150 \\ -0.060 & 0.067 & 0.027 & 0.100 \\ 0.450 & 0.133 & 0.080 & 0.139 \\ 0.011 & 0.250 & -0.200 & 0.100 \end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix} 0.662 \\ 0.029 \\ 2.312 \\ 0.379 \end{pmatrix}$
5. $A=\begin{pmatrix} 0.025 & 0.020 & 0.350 & 0.200 \\ -0.050 & 0.100 & 0.033 & 0.125 \\ 0.550 & 0.167 & 0.083 & 0.161 \\ 0.014 & 0.300 & -0.167 & 0.125 \end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix} 1.008 \\ 0.212 \\ 3.507 \\ 0.700 \end{pmatrix}$
6. $A=\begin{pmatrix} 0.030 & 0.024 & 0.400 & 0.250 \\ -0.040 & 0.133 & 0.040 & 0.150 \\ 0.650 & 0.200 & 0.086 & 0.179 \\ 0.017 & 0.350 & -0.133 & 0.150 \end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix} 1.427 \\ 0.465 \\ 4.940 \\ 1.111 \end{pmatrix}$
7. $A=\begin{pmatrix} 0.035 & 0.028 & 0.450 & 0.300 \\ -0.030 & 0.167 & 0.047 & 0.175 \\ 0.750 & 0.233 & 0.088 & 0.195 \\ 0.020 & 0.400 & -0.100 & 0.175 \end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix} 1.918 \\ 0.788 \\ 6.611 \\ 1.613 \end{pmatrix}$
8. $A=\begin{pmatrix} 0.040 & 0.032 & 0.500 & 0.350 \\ -0.020 & 0.200 & 0.053 & 0.200 \\ 0.850 & 0.267 & 0.089 & 0.208 \\ 0.023 & 0.450 & -0.067 & 0.200 \end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix} 2.481 \\ 1.182 \\ 8.520 \\ 2.205 \end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix} 0.045 & 0.036 & 0.550 & 0.400 \\ -0.010 & 0.233 & 0.060 & 0.255 \\ 0.950 & 0.300 & 0.090 & 0.220 \\ 0.026 & 0.500 & -0.033 & 0.225 \end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix} 3.117 \\ 1.646 \\ 10.664 \\ 2.888 \end{pmatrix}$
10. $A=\begin{pmatrix} 0.050 & 0.040 & 0.600 & 0.450 \\ 0 & 0.267 & 0.067 & 0.250 \\ 1.050 & 0.333 & 0.091 & 0.230 \\ 0.029 & 0.550 & 0 & 0.250 \end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix} 3.825 \\ 2.181 \\ 13.045 \\ 3.661 \end{pmatrix}$
11. $A=\begin{pmatrix} 0.055 & 0.044 & 0.065 & 0.500 \\ 0.010 & 0.300 & 0.073 & 0.275 \\ 1.150 & 0.367 & 0.092 & 0.240 \\ 0.031 & 0.600 & 0.033 & 0.75 \end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix} 4.605 \\ 2.785 \\ 15.662 \\ 4.524 \end{pmatrix}$
12. $A=\begin{pmatrix} 0.060 & 0.048 & 0.700 & 0.550 \\ 0.020 & 0.333 & 0.080 & 0.300 \\ 1.250 & 0.400 & 0.092 & 0.248 \\ 0.034 & 0.650 & 0.067 & 0.300 \end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix} 5.458 \\ 3.460 \\ 18.515 \\ 5.478 \end{pmatrix}$
13. $A=\begin{pmatrix} 0.065 & 0.052 & 0.750 & 0.600 \\ 0.030 & 0.367 & 0.087 & 0.325 \\ 1.350 & 0.433 & 0.093 & 0.256 \\ 0.037 & 0.700 & 0.100 & 0.325 \end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix} 6.383 \\ 4.205 \\ 21.603 \\ 6.522 \end{pmatrix}$
14. $A=\begin{pmatrix} 0.070 & 0.056 & 0.800 & 0.650 \\ 0.040 & 0.400 & 0.093 & 0.350 \\ 1.450 & 0.467 & 0.093 & 0.264 \\ 0.040 & 0.750 & 0.133 & 0.350 \end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix} 7.380 \\ 5.021 \\ 24.926 \\ 7.657 \end{pmatrix}$
15. $A=\begin{pmatrix} 0.075 & 0.060 & 0.850 & 0.700 \\ 0.050 & 0.433 & 0.100 & 0.375 \\ 1.550 & 0.500 & 0.094 & 0.248 \\ 0.043 & 0.800 & 0.167 & 0.375 \end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix} 8.450 \\ 5.906 \\ 28.484 \\ 8.882 \end{pmatrix}$

16. $A = \begin{pmatrix} 0.080 & 0.064 & 0.900 & 0.750 \\ 0.060 & 0.467 & 0.107 & 0.400 \\ 1.650 & 0.533 & 0.094 & 0.277 \\ 0.046 & 0.850 & 0.200 & 0.400 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 10.806 \\ 7.888 \\ 36.306 \\ 11.604 \end{pmatrix}$
17. $A = \begin{pmatrix} 0.085 & 0.068 & 0.950 & 0.800 \\ 0.070 & 0.500 & 0.133 & 0.425 \\ 1.750 & 0.567 & 0.094 & 0.283 \\ 0.049 & 0.900 & 0.233 & 0.425 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 10.806 \\ 7.888 \\ 36.306 \\ 11.604 \end{pmatrix}$
18. $A = \begin{pmatrix} 0.09 & 0.072 & 1 & 0.85 \\ 0.08 & 0.533 & 0.12 & 0.45 \\ 1.85 & 0.6 & 0.095 & 0.289 \\ 0.051 & 0.95 & 0.267 & 0.45 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 12.093 \\ 8.985 \\ 40.569 \\ 13.101 \end{pmatrix}$
19. $A = \begin{pmatrix} 0.095 & 0.076 & 1.050 & 0.900 \\ 0.090 & 0.567 & 0.127 & 0.475 \\ 1.950 & 0.633 & 0.095 & 0.294 \\ 0.054 & 1.000 & 0.300 & 0.475 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 13.452 \\ 10.152 \\ 45.067 \\ 14.688 \end{pmatrix}$
20. $A = \begin{pmatrix} 0.100 & 0.080 & 1.100 & 0.950 \\ 0.100 & 0.600 & 0.133 & 0.500 \\ 2.050 & 0.667 & 0.095 & 0.300 \\ 0.057 & 1.050 & 0.333 & 0.500 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 14.883 \\ 11.389 \\ 49.799 \\ 16.365 \end{pmatrix}$

Контрольні питання

1. Які способи рішення систем лінійних рівнять Вам відомі?
2. Як розв’язати систему лінійних рівнянь за допомогою формул Крамера?
3. У чому полягає суть розв’язання системи лінійних рівнянь методом зворотної матриці?
4. Яким чином реалізувати метод Гауса для пошуку коренів системи лінійних рівнянь в MathCad?

Лабораторна робота № 10. Чисельне розв'язання систем нелінійних рівнянь в MathCAD (метод простих ітерацій)

Мета:
- навчитися розв'язувати систему двох нелінійних рівнянь в MathCAD, використовуючи обчислювальний алгоритм методу простих ітерацій;
- навчитися будувати ітеруючі функції для системи рівнянь;
- навчитися розв'язувати системи n рівнянь з n невідомими методом простих ітерацій;
- навчитися розв'язувати системи нелінійних рівнянь, використвуючи стандарту функцію MathCAD *Find*;
- навчитися розв'язувати нелінійне рівняння, використовуючі стандартну функцію MathCAD *Minerr*.

Для успішного виконання даної лабораторної роботи необхідно засвоїти теоретичний матеріал *теми 6*.

Завдання й порядок виконання роботи

Завдання 1. Розв'язати системи рівнянь методом простої ітерації. Результати отримати з 5 вірними знаками.

1. $$\left.\begin{aligned} x^2y^2-3x^3-6y^3+8=0 \\ x^4+9y+2=0 \end{aligned}\right\}.$$

2. $$\left.\begin{aligned} \sin x - y = 1{,}32 \\ \cos y - x = -0{,}85 \end{aligned}\right\}.$$

3. $$\left.\begin{aligned} y &= 0{,}4+z^2-2x^2 \\ x &= \lg\frac{y}{x}+1 \\ z &= 2+\frac{xy}{20} \end{aligned}\right\} \quad x_0=1,\ y_0=2{,}2,\ z_0=2.$$

Завдання 2. Розв'язати, використовуючи функції *Find* та *Minerr*, задачі із завдання 1.

Контрольні питання

1. У чому полягає суть обчислювального алгоритму методу простих ітерацій?
2. Яким чином реалізувати метод простих ітерацій для пошуку коренів системи нелінійних рівнянь в MathCad?
3. Як розв'язати систему трьох нелінійних рівнянь методом ітерацій?

4. Як розв’язати систему нелінійних рівнянь за допомогою функції *Find*?

5. Як розв’язати систему нелінійних рівнянь за допомогою функції *Minerr*?

Лабораторна робота № 11-12. Символьні дії математичного аналізу в MathCAD

Мета:

- навчитися використовувати символьні операції;
- обчислення меж функцій;
- завдання операторів користувача;
- визначення невизначених і визначених інтегралів й похідних у програмі з використанням символьних операцій.

Для успішного виконання даної лабораторної роботи необхідно засвоїти теоретичний матеріал *теми 7*.

Завдання й порядок виконання роботи

Запустіть програму MathCAD.

Завдання 1. Використовуючи операцію *Символи* ⇒ *Розрахунки* ⇒ *Із плаваючої коми…*, представте:

1) число в 7 позиціях;
2) число 12, 345667 в 3 позиціях.

Завдання 2. Виведіть наступні числа в комплексній формі, використовуючи операцію *Розрахунки* ⇒ *Комплексні меню Символи*:

1) $\sqrt{-7}$;
2) tg (a $\sqrt{-3}$);
3) $e^{1+\frac{\pi}{4}i}$;
4) для вираження 3) послідовно виконайте операції *Розрахунки* ⇒ *Комплексні й Спростити меню Символи.*

Завдання 3. Для полінома $g(x)$ (див. Табл. 1) виконати наступні дії:

1) розкласти на множники, використовуючи операцію *Символи* ⇒ *Фактор;*

2) підставте вираження $x = y + z$ в $g(x)$, використовуючи операцію *Символи* ⇒ *Змінні* ⇒ *Заміна* (попередньо скопіювавши підставте вираження, виділивши його й нажавши комбінацію клавіш *Ctrl* + *C*);

3) використовуючи операцію *Символи* ⇒ *Розширити,* розкладіть по ступеням вираження, отримане в 2);

4) використовуючи операцію *Символи* $\Rightarrow$ *Подібні,* згорніть вираження, отримане в 3), по змінної **z.**

Таблиця 1

Варіанти до завдання 3

№ варі-анта	g(x)	№ варі-анта	$g(x)$
1	$x^4 - 2x^3 + x^2 - 12x + 20$	**9**	$x^4 + x^3 - 17x^2 - 45x - 100$
2	$x^4 + 6x^3 + x^2 - 4x - 60$	**10**	$x^4 - 5x^3 + x^2 - 15x + 50$
3	$x^4 - 14x^2 - 40x - 75$	**11**	$x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 20x + 25$
4	$x^4 - x^3 + x^2 - 11x + 10$	**12**	$x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x - 20$
5	$x^4 - x^3 - 29x^2 - 71x - 140$	**13**	$x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 5x + 100$
6	$x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 13x - 30$	**14**	$x^4 + 10x^3 + 36x^2 + 70x + 75$
7	$x^4 + 3x^3 - 23x^2 - 55x - 150$	**15**	$x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 59x + 60$
8	$x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 10x + 75$		

Завдання 4. Розкладіть вираження на елементарні дроби, використовуючи операцію *Символи* $\Rightarrow$ *Змінні* $\Rightarrow$ *Перетворення в часткові частки:*

1) $\dfrac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x}$;

2) $\dfrac{3x^2 - 2}{\left(x^2 + x + 1\right)\left(x + 1\right)}$;

3) $\dfrac{x + 1}{x\left(x - 1\right)^3}$;

4) $\dfrac{5x^2 - 4x + 16}{\left(x^2 - x + 1\right)^2\left(x - 3\right)}$.

Завдання 5. Розкладіть вираження в ряд із заданою точністю, використовуючи операцію *Символи* $\Rightarrow$ *Змінні* $\Rightarrow$ *Розкласти на складові:*

1) ln (1 + x), $x_0 = 0$, порядок розкладання 6;
2) sin $(x)^2$, $x_0 = 0$, порядок розкладання 6.

Завдання 6. Знайти первісну аналітично заданої функції $f(x)$ (Табл. 2), використовуючи операцію *Символи* $\Rightarrow$ *Змінні* $\Rightarrow$ *Інтеграція*.

Завдання 7. Визначити символьне значення першої й другої похідних *f*(x) (Табл. 2), використовуючи команду *Символи ⇒ Змінні ⇒ Диференціали.*

Таблиця 2

Варіанти до завдань 6, 7

№ варі-анта	*f*(*x*)	№ варі-анта	*f*(*x*)	№ варі-анта	*f*(*x*)
1	$1/(\mathrm{tg}2x+1)$	**6**	$x^2 \cdot \mathrm{arctg}(x/3)$	**11**	$(2x + 3) \sin x$
2	$\cos x/(2x+5)$	**7**	$e^{2x} \sin 3x$	**12**	$\cos 3x/(1-\cos 3x)^2$
3	$1/ (x\sqrt{x^3+4})$	**8**	$\mathrm{ctg}2x/(\sin 2x)^2$	**13**	$1/ (1 + x + x^2)$
4	$\sin x/(1+\sin x)$	**9**	$(x + 1) \sin x$	**14**	$(1+x)/(2+x)$
5	$x^2 \cdot \lg(x+2)$	**10**	$5x + x \lg x$	**15**	$\sqrt{1+e^{-x}}$

Завдання 8.

1) Транспонуйте матрицю *M*

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ x & 2 & c \\ x^2 & 3 & d \end{pmatrix}$$

за допомогою операції *Символи ⇒ Матриці ⇒ Транспонування.*

2) Інвертуйте матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & 2 \end{pmatrix}$$

за допомогою операції *Символи ⇒ Матриці ⇒ Інвертування.*

3) Обчисліть визначник матриці *M*

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ x & 2 & c \\ x^2 & 3 & d \end{pmatrix}$$

за допомогою операції *Символи ⇒ Матриці ⇒ Визначник*.

Завдання 9. Обчисліть межі:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 2\cdot x + 5}{x^2 + 1}$ 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (2\cdot\sin(x) - \cos(x) + \mathrm{ctg}(x))$

3) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h}$ 4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3}+1} \to 1$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ 8) $\lim\limits_{n\to\infty} -\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Завдання 10. Задайте оператори користувача:

1) Для перерахування одиниць електричної енергії (кВт/г у Дж, еВ у Дж) якщо відомо, що

1 кВт/г = 3,6 · 10^6 Дж;
1 еВ = 1,602 · 10^{-19} Дж.

2) Для перерахування одиниць магнітної індукції (Вб/см^2 у Т, Гс у Т) якщо відомо, що

1 Вб/см^2 = 1 · 10^4 Т;
1 Гс = 1 · 10^{-4} Т.

3) Для перерахування одиниць потужності (ерг/с у Вт, кгс*м/с у Вт) якщо відомо, що

1 ерг/с = 1 · 10^{-7} Вт;
1 кгс*м/с = 9,80665 Вт.

Завдання 11. Запишіть на робочому листі згідно номеру варіанта формули для обчислення невизначених інтегралів, визначених інтегралів та похідних першого порядку. Від похідних першого порядку визначте похідні другого та третього порядків.

Застосувати послідовно до кожної функції команди меню Symbolic ⇒ Simplify, зазначивши послідовно кожну з функцій.

Варіанти до завдання 11

№ вар	Невизначені інтеграли	Визначені інтеграли	Похідні
1	$\int \frac{x^4 - 3\cdot x^2 + 5\cdot\sqrt[3]{x} - 7\cdot x + 6}{\sqrt[3]{x}}\,dx$	$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$	$\frac{d}{dx}\left[(x+1)^2\cdot(x-2)^3\right]$
2	$\int \left[\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}}\right]dx$	$\int_0^{1} e^{k\cdot x}\,dx$	$\frac{d}{dx}(\sin(x) + \cos(x) + \tan($
3	$\int \frac{x^2}{\left(4\cdot x^3 + 9\right)^4}\,dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}\,dx$	$\frac{d}{dx}\left(2^x\cdot\sin(x) + e^{3\cdot x}\right)$
4	$\int \frac{1}{\sin(x)^2\cdot\cos(x)^2}\,dx$	$\int_3^{10} \frac{1}{(x-1)\cdot\sqrt{x+6}}\,d$	$\frac{d}{dx}\left(\sin\left(x^2\right) + \tan(x)\right)$
5	$\int \frac{1}{1+\sin(x)}\,dx$	$\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3}\,dx$	$\frac{d}{dx}\left[e^{(\tan(x))^2}\right]$
6	$\int \cos(\ln(x))\cdot\frac{1}{x}\,dx$	$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$	$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt[4]{\ln(\sin(x)+2)}}{(\tan(x))^3}\right]$
7	$\int \frac{1}{\cos(x)^2}\,dx$	$\int_0^{1} \ln(x)\,dx$	$\frac{d}{dx}\left(2^x\cdot\sin(x) + e^{3\cdot x}\right)$
8	$\int \frac{1}{\sin(x)\cdot\cos(x)}\,dx$	$\int_0^{1} e^x\,dx$	$\frac{d}{dx}\left(\sin\left(x^2\right) + \tan(x)\right)$

9	$\int \frac{x+3}{x^2+2}\,dx$	$\int_0^{2\cdot\pi} 4\cdot a^2\cdot(1-\cos(\phi))^2\,d\phi$	$\frac{d}{dx}\left[e^{(\tan(x))^2}\right]$
10	$\int \frac{1}{\sqrt{7-8\cdot x^2}}\,dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}\,dx$	$\frac{d}{dx}\left(\sin\left(x^2\right)+\tan(x)\right)$
11	$\int \frac{\sin(2\cdot x)}{\sqrt{5-3\cdot\sin(x)^4}}\,dx$	$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$	$\frac{d}{dx}\left[e^{(\tan(x))^2}\right]$
12	$\int \frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$	$\int_0^1 \ln(x)\,dx$	$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt[4]{\ln(\sin(x)+2)}}{(\tan(x))^3}\right]$
13	$\int \frac{1}{\sin(x)^4\cdot\cos(x)^2}\,dx$	$\int_0^1 \frac{\operatorname{asin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\frac{d}{dx}\left(e^x+\ln(x)-\operatorname{asin}(x)+\sqrt[3]{x}\right)$
14	$\int \ln(x)^2\,dx$	$\int_0^1 e^x\,dx$	$\frac{d}{dx}\left(2^x\cdot\sin(x)+e^{3\cdot x}\right)$
15	$\int \frac{3\cdot x+4}{x^2+7\cdot x+14}\,dx$	$\int_0^1 e^{k\cdot x}\,dx$	$\frac{d}{dx}\left(\sin\left(x^2\right)+\tan(x)\right)$
16	$\int \frac{1}{\left(3\cdot x^2+x+7\right)^2}\,dx$	$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$	$\frac{d}{dx}\left[e^{(\tan(x))^2}\right]$

17	$\displaystyle\int \frac{x^2+x-1}{x^3\cdot(x-2)^2}\,dx$	$\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$	$\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt[4]{\ln(\sin(x)+2)}}{(\tan(x))^3}\right]$
18	$\displaystyle\int \frac{x^4+5\cdot x^3-7\cdot x^2+5}{x^3-x^2+5\cdot x-5}\,dx$	$\displaystyle\int_0^{1} e^{k\cdot x}\,dx$	$\displaystyle\frac{d}{dx}\left[(x+1)^2\cdot(x-2)^3\right]$
19	$\displaystyle\int \frac{1}{1-x^4}\,dx$	$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$	$\displaystyle\frac{d}{dx}(\sin(x)+\cos(x)+\tan(x))$
20	$\displaystyle\int \sin\left(\frac{3\cdot x}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx$	$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}\,dx$	$\displaystyle\frac{d}{dx}\left(e^x+\ln(x)-\operatorname{asin}(x)+\sqrt[3]{x}\right)$
21	$\displaystyle\int \sin(2\cdot x)\cdot\cos(5\cdot x)\cdot\sin(9\cdot x)\,dx$	$\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{x\cdot\left(1+x^4\right)}\,dx$	$\displaystyle\frac{d}{dx}\left(2^x\cdot\sin(x)+e^{3\cdot x}\right)$
22	$\displaystyle\int \sin(x)^2\cdot\cos(x)^5\,dx$	$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3}\,dx$	$\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\sin\left(x^2\right)+\tan(x)\right)$
23	$\displaystyle\int \frac{\sin(x)^5}{\cos(x)^4}\,dx$	$\displaystyle\int_0^{1} \ln(x)\,dx$	$\displaystyle\frac{d}{dx}\left[e^{(\tan(x))^2}\right]$
24	$\displaystyle\int \cos(x)^6\,dx$	$\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{asin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt[4]{\ln(\sin(x)+2)}}{(\tan(x))^3}\right]$

Приклади:

1. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{1}{\left(x^2-10\right)\cdot\sqrt{x^2-10}}\,dx$.

Результат $\frac{-1}{10}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-10}}$;

2. Знайти визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{asin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Результат $\frac{1}{8}\cdot\pi^2$.

3. Знайти похідні першого порядку $\frac{d}{dx}2^x\cdot\sin(x)$.

Результат $2^x\cdot\ln(2)\cdot\sin(x)+2^x\cdot\cos(x)$.

4. Знайти похідні високого порядку $\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{x^3}{x^2-4}\right)$.

Результат $96\cdot x\cdot\frac{\left(x^4+40\cdot x^2+80\right)}{\left(x^2-4\right)^5}$

$$\int_a^b x^5\,dx \text{ simplify } \rightarrow \frac{1}{6}\cdot b^6-\frac{1}{6}\cdot a^6,$$

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(a\cdot x^8-b\cdot x^6\right) \text{ simplify } \rightarrow 1680\cdot a\cdot x^4-360\cdot b\cdot x^2.$$

Контрольні питання

1. Назвіть способи виконання символьних операцій в MathCAD.
2. Що необхідно зробити з виразом перед застосуванням символьних перетворень у командному режимі?
3. Назвіть символьні операції з виділеними виразами, виділеними змінними, виділеними матрицями, перетворення.
4. Які параметри визначає стиль подання результатів обчислень і де він задається?

5. У яких випадках результат символьних перетворень міститься в буфер обміну?

6. Яким образом можна обчислити межу в MathCAD?

7. Для чого необхідне завдання оператора користувача та як його задати?

8. Як знайти в символьному вигляді визначений та невизначений інтеграли?

9. Чи можна застосовувати символьні операції до інтегралів по області, до тривимірних інтегралів, до контурних інтегралів?

10. Чи можна в символьному вигляді знайти похідні вищих порядків?

ПИТАННЯ ДО МОДУЛЬНИХ РОБІТ

Контрольна модульна робота №1

1. Локалізація коренів.
2. Методи розв'язання нелінійних рівнянь. Метод бісекції (половинного ділення).
3. Методи розв'язання нелінійних рівнянь. Метод простих ітерацій.
4. Методи розв'язання нелінійних рівнянь. Метод Ньютона (метод дотичних).
5. Методи розв'язання нелінійних рівнянь. Метод січних.
6. Розв'язання нелінійних рівнянь за допомогою функції *root*.
7. Розв'язання нелінійних рівнянь за допомогою функції *polyroots.*
8. Зміна точності рішення в MathCAD.
9. Функції визначення матриць і операції з блоками матриць.
10. Функції відшукання різних числових характеристик матриць.
11. Функції, що реалізують чисельні алгоритми рішення задач лінійної алгебри.

Контрольна модульна робота №2

12. Основні матричні операції.
13. Транспонування. Обчислення зворотної матриці. Ортогональні матриці.
14. Обчислення ступеня матриці. Деякі спеціальні матриці.
15. Визначники та їх властивості.
16. Рішення системи лінійних рівнянь. Метод Крамера.
17. Рішення системи лінійних рівнянь. Метод зворотної матриці.
18. Рішення системи лінійних рівнянь. Метод Гауса.
19. Розв'язання системи двох нелінійних рівнянь методом простих ітерацій.
20. Розв'язання системи трьох нелінійних рівнянь методом простих ітерацій.
21. Розв'язання системи нелінійних рівнянь за допомогою функції *Find*.
22. Розв'язання системи нелінійних рівнянь за допомогою функції *Minerr*.
23. Символьні операції.
24. Оператори обчислення меж функцій.
25. Завдання операторів користувача.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1 Алексеев Е. Р. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9 / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова – М. : НТ Пресс, 2006. – 496 с.
2 Бидасюк Ю. М. Mathcad для студента / Ю. М. Бидасюк. – М. : Вильямс, 2006. – 224 с.
3 Васильев А. Mathcad 13 на примерах (+ CD-ROM) / А. Васильев – СПб. : БХВ-Петербург, 2006. – 512 с.
4 Гурский Д. А. Вычисления MathCad 12 / Д. А. Гурский, Е. А. Турбина. – СПб. : Питер, 2006. – 546 с.
5 Доев В. С. Сборник заданий по теоретической механике на базе Mathcad / В. С. Доев, Ф. А. Доронин. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2010. – 592 с.
6 Ивановский Р. Теория вероятностей и математическая статистика. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами в среде Mathcad / Р. Ивановский. – М. : БХВ-Петербург, 2008. – 528 с.
7 Кирьянов Д. В. Самоучитель Mathcad 13 / Д. В. Кирьянов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2006. – 528 с.
8 Коробов В. И. Химические расчеты в среде Mathcad / В. И. Коробов, В. Ф. Очков. – Днепропетровск : Днепропетровский национальный університет, 2012. – 216 с.
9 Макаров Е. Г. Инженерные расчеты в Mathcad 14 / Е. Г. Макаров. – СПб. : Питер, 2007. – 592 с.
10 Охорзин В. А. Компьютерное моделирование в системе Mathcad / В. А. Охорзин. – М. : Финансы и статистика, 2006. – 144 с.
11 Охорзин В. А. Прикладная математика в системе Mathcad. Учебное пособие / В. А. Охорзин. – 3-е изд. – СПб. : Лань, 2009. – 352 с.
12 Очков В. Ф. Mathcad 14 для студентов и инженеров: русская версия / В. Ф. Очков. – СПб. : BHV, 2009. – 512 с.
13 Очков В. Ф. Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет / В. Ф. Очков, Е. П. Богомолова, Д. А. Иванов. – СПб.: Лань, 2016. – 388 с.
14 Очков В. Ф. Теплотехнические этюды с Excel, Mathcad и Интернет / В. Ф. Очков. – СПб.: БХВ-Петербург, 2014. – 336 с.
15 Половко А. М. Mathcad для студента / А. М. Половко, И. В. Ганичев. – СПб. : БХВ-Петербург, 2006. – 336 с.
16 Поршнев С. В. Численные методы на базе Mathcad (+ CD) / С. В. Поршнев, И. В. Беленкова. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 456 с.
17 Рагулина М. И. Информационные технологии в математике / М. И. Рагулина. – М. : Академия, 2008. – 302 с.

ДОДАТОК 1. Ресурси Mathcad

Ресурси Mathcad (Mathcad Resource) – це бібліотека електронних книг, що поставляється разом з Mathcad. Вона містить обширну довідкову інформацію і володіє всіма властивостями електронних книг, що підключаються до Mathcad. Ресурси є збіркою прикладів вирішення різних математичних, фізичних і інженерних задач і містять довідкову інформацію про можливості Mathcad. Ресурси містять дуже велику кількість інформації, що поповнюється від однієї версії Mathcad до іншої. Практично по будь-якому розділу математики і будь-якому методу рішення тієї або іншої задачі в Mathcad тут можна знайти довідкові відомості. Приведемо короткий перелік розділів електронних книг Ресурсів (Див. Табл. 1).

Таблиця 1

Tutorials (Підручники)

Назва підручника	Опис
Overview and Quick Tour (Огляд Mathcad і Швидкий старт)	Підручник для тих, хто робить перші кроки в Mathcad і абсолютно з ним не знайомий, але хоче швидко почати власні розрахунки. Містить вступні зауваження про те, що можна робити за допомогою Mathcad, і відомості про його основні можливості
New Features in Mathcad (Нові можливості Mathcad)	Підручник, адресований давнім користувачам Mathcad, які вже мали справу з його колишніми версіями і яким буде цікаво познайомитися з реальними прикладами використання нових можливостей даної версії
Getting Started Primers (Підручник для початківців)	Дуже корисний інтерактивний підручник для нових користувачів, який крок за кроком продемонструє користувачеві всі можливості Mathcad, без знання яких важко проводити будь-які розрахунки
Features in Depth (Можливості)	Підручник для користувачів, що мають досвід роботи з інтерфейсом, націлений на розкриття основних можливостей Mathcad і прийняття рішень конкретних задач
Where to Get More Help (Як отримати додаткову довідку)	Інформація про способи отримання додаткової довідки

ДОДАТОК 2. Повідомлення про помилки

Таблиця 2

Повідомлення про помилки

Помилка	Переклад	Вірогідна причина	Можливі шляхи усунення
Повідомлення про помилки в чисельних обчисленнях			
A "Find" or "Minerr" must be preceded by a matching "Given"	Find або Minerr повинні передувати ключовим словом Given	Ця помилка виділяє функцію Find або Minerr при їх неузгодженості з Given	Кожен обчислювальний блок, який закінчується функцією Find або Minerr, повинен починатися з ключового слова Given
All evaluations resulted in either an error or a complex resuit	Обчислення приводять до помилки або комплексного результату	Mathcad не може накреслити деякі крапки, тому що не існує дійсних значень для їх нанесення на графік	Це повідомлення може з'явитися, якщо є помилка або всі значення комплексні
Arguments in function definitions must be names	Аргументи у визначеннях функції мають бути іменами	Виділене визначення функції містить неправильний перелік аргументів	У списку аргументів мають бути правильно поіменовані змінні або список імен необхідно відокремити комами
At least one limit must be infinity	Принаймні одна межа має бути нескінченною	Коли для інтеграції вибраний алгоритм нескінченної межі, то принаймні одна з меж інтеграла має бути нескінченною	Тип нескінченності вводиться натисненням поєднання клавіш <Ctrl>+<Shift>+<Z>. Для зміни алгоритму, що використовує нескінченну межу, або для обчислення якого-небудь іншого інтеграла клацніть на інтегралі правою кнопкою миші і змініть алгоритм за допомогою контекстного меню
Can only evaluate an nth order derivative when n = 0,1..5.	Можна обчислити n-й порядок похідної, тільки коли n=0,1. .5	Порядок похідної має бути одним з наступних чисел: 0,1,2...5	Якщо ви хочете порахувати похідну вищого порядку, то робіть це за допомогою символьного диференціювання

Помилка	Переклад	Вірогідна причина	Можливі шляхи усунення
Can't evaluate this function when its argument less than or equal to zero	Неможливо обчислити цю функцію, коли її аргумент менше або дорівнює нулю	Помилка може полягати у використанні непозитивних даних на графіках, побудованих у логарифмічному масштабі	Негативні числа і нуль не можуть бути розташовані на логарифмічних осях. Змініть тип осей графіка або побудуйте його для інших значень
Can't converge to a solution	Не сходиться до рішення	Чисельний метод розходиться (не може знайти рішення)	Переконайтеся, що операція не застосовується до функції в області безносередньої близькості точки її сингулярності (ділення на нуль). Спробуйте поміняти параметри чисельного методу (наприклад, початкове наближення). Спробуйте збільшити константу TOL, тобто здійсніть пошук рішення з гіршою погрішністю. Спробуйте поміняти чисельний алгоритм, якщо це можливо (викликавши контекстне меню натисненням на місці помилки правою кнопкою миші)
Can't define the same variable more than once in the same expression	Неможливо визначити ту ж саму змінну більше одного разу в одному і тому ж виразі	Ви намагаєтеся обчислити одну і ту ж змінну двічі в одному виразі	Приклад подібної помилки: якщо ви створюєте вектор з лівою стороною а : = і використовуєте це ж ім'я справа, то отримаєте помилку
Can't determine what units the result of this operation	Неможливо визначити, в яких одиницях треба бути результату цієї операції	Ви звели вираз, що містить одиниці вимірювання, в ступінь, що є змінною в якихось межах або	Якщо вираз включає одиниці вимірювань, то можна підносити його тільки до дійсного фіксованого ступеня

Помилка	Переклад	Вірогідна причина	Можливі шляхи усунення
should have		вектором. В результаті неможливо визначити розмірність результату	
Can't divide by zero	Ділення на нуль неможливе	Десь в програмі або всередині чисельного методу виникло ділення на нуль	Знайдіть місце ділення на нуль і усуньте його. Спробуйте поміняти параметри чисельного методу, константи точності або сам чисельний алгоритм
Could not find a solution	Неможливо знайти рішення	Чисельний метод розходиться (не може знайти рішення)	Див. *„Can't converge to a solution”*
Can't find the data file you're trying to use	Неможливо знайти файл, який ви намагаєтеся використовувати	Неможливо знайти файл даних або інший тип файлу, до якого ви звертаєтеся	Переконайтеся, що такий файл існує в указаному місці
Can't have anything with units or dimensions here	Тут немає нічого в одиницях вимірювань або в розмірностях	Цей вираз використовує одиниці вимірювань десь, де вони не дозволені	Одиниці вимірювань не дозволені: • в аргументах більшості функцій; • в експонентах; • у верхніх і нижніх індексах. Для того, щоб використовувати вираз з одиницями вимірювань, спочатку переведіть цей вираз в UnitsOf
Can't have more than one array in a contour plot	Не можна мати більш за один масив у контурному графіку	Ви вводите більш за один масив у місцезаповнювач контурного або поверхневого графіка	Можна мати тільки один масив у даному місцезаполнітелі, оскільки графіки можуть видавати лише одну поверхню в один момент часу
Can't perform this	Неможливо представити цю операцію	Наприклад, можна побачити це повідомлення при	Для того, щоб застосовувати функцію або оператор до кожного елементу вектора

Помилка	Переклад	Вірогідна причина	Можливі шляхи усунення
operation on the entire array at once. Try using "vectorize" to perform it element by element.	в цілому масиві відразу. Спробуйте використовувати векторизацію, щоб представити елемент за елементом	спробі розділити один вектор на іншій	або матриці, використовуйте оператор векторизації
Can't plot this many points	Неможливо накреслити графік з такою великою кількістю крапок	Спроба побудови графіка з числом крапок, що перевершує можливе	Спробуйте зробити число крапок менше, ніж 150 000
Can't put a ":=" inside a solve block	Не можна поміщати" :=" всередину обчислювального блоку	Усередині обчислювального блоку не повинно бути формулювання привласнення. Він повинен містити тільки булеві вирази	Використовуйте панель з булевими операторами
Can't raise an expression having units to a complex power	Не можна підносити до комплексного ступеня вираз, що має одиниці вимірювань	Цей вираз містить одиниці вимірювань, а ви підносите його до комплексного ступеня	Вираз з одиницями вимірювань можна підносити тільки до дійсного ступеня. Для того, щоб підносити до комплексного ступеня вираз з одиницями вимірювань, спочатку переведіть цей вираз в SlUnitsOf – одиниці вимірювань будуть скасовані
Can't solve a system having this many equations	Неможливо вирішити систему, що має так багато рівнянь	Mathcad не здатний вирішити систему	
Can't understand	Неможливо щось зрозумі-	Файл, до якого ви намагаєтеся діста-	Файл має бути ASCII-текстом.

Помилка	Переклад	Вірогідна причина	Можливі шляхи усунення
something in this data file	ти у файлі даних	ти доступ при допомозі READ або READ* має дефект	Всі рядки файлу повинні мати той же номер значень, що використовується в READ*. Якщо файл має необхідний формат, а це повідомлення продовжує з'являтися, спробуйте видалити будь-яку частину тексту з файлу
Can't understand the name of this function	Неможливо зрозуміти ім'я цієї функції	Таке повідомлення може з'явитися, якщо як ім'я функції використовується, наприклад, число 6(x)	Вираз повинен відповідати вимогам, що пред'являються в Mathcad до написання імен функцій
Can't understand the way this range variable is defined	Неможливо зрозуміти визначення ранжируваної змінної	Визначення ранжируваної змінної невірне	Вводячи область визначення ранжируваної змінної, необхідно використовувати один з наступних видів: • Rvar : = nl . . n2 • Rvar := nl,n2 . .п3
Can't understand this number	Неможливо зрозуміти це число	Цей вираз містить символ або десяткову крапку там, де це недозволено	Ви побачите цю помилку, наприклад, якщо випадково запишете число так: „.452."
Can't use a range variable in a solve block.	Неможливо використовувати ранжируваню змінну в обчислювальному блоці	Ця помилка з'явиться, якщо використовувати область визначення змінної в невідповідному місці	Придумайте алгоритм, що не допускає застосування ранжируваної змінної в обчислювальному блоці
Cannot evaluate this accurately at one or more of the values you	Неможливо точно обчислити одне або більше значень	Ця помилка з'являється, якщо спробувати обчислити функцію для аргументу, що знаходиться за межами точної	Перевірте область визначення функції

Помилка	Переклад	Вірогідна причина	Можливі шляхи усунення
specified		області визначення функції	
Cross product is defined only for vectors having exactly three elements	Векторний добуток визначається тільки для векторів, що мають точні три елементи	Можливо, зроблена спроба обчислити векторний добуток для векторів, що мають не три, а іншу кількість елементів	
Can't evaluate this expression. It may have resulted in an overflow or an infinite loop	Неможливо обчислити цей вираз. Це може бути результатом переповнювання або нескінченних циклів	Це функціональне визначення може містити дуже багато вкладених функцій. Або функція може бути константою в нескінченних циклах	Перевірте декілька ітерацій циклу
Degree of the polynomial must be between 1 and 99	Ступінь полінома повинна знаходитися в межах між 1 і 99	Вектор, пропущений через функцію пошуку коріння полінома, повинен містити, принаймні, 2 і не більше 99 елементів	
Dimensions must be > 4	Розмірність має бути > 4	Ця матриця повинна мати, принаймні, 4 ряди і 4 стовпці	
End of file	Кінець файлу	Ви намагаєтеся прочитати більше значень у файлі даних, ніж там є	Наприклад, якщо файл даних має 10 значень, а записаний вираз i : =1...100 xi:= READ* (file), то з'явиться це повідомлення
End points cannot be	Кінцеві крапки не	Це повідомлення з'являється при	Кінцеві точки інтервалу, на якому обчислюватиметься

Помилка	Переклад	Вірогідна причина	Можливі шляхи усунення
the same	можуть бути однаковими	некоректному вирішенні диференціальних рівнянь	рішення, мають бути різні
Equation too large	Рівняння дуже велике	Це вираз дуже складний для обчислення	Розбийте вираз на декілька простих
Floating point error	Помилка обчислень з плаваючою точкою	Функція обчислюється в точці, в якій це заборонено	
Found a singularity while evaluating this expression. You may be dividing by zero	Знайдена сингулярність при обчисленні цього виразу. Можливо, ви ділите на нуль	Обчислюється функція або виконується операція з неприпустимим значенням	Наприклад, це повідомлення виникне при спробі ділення на нуль або зверненні сингулярної матриці; розберіться, де це відбувається
Found a number with a magnitude greater than 10^307	Знайдено число, що перевищує значення 10^307		Спробуйте поміняти параметри чисельного алгоритму або сам алгоритм
Illegal context. Press <F1 > for help	Неприпустимий контекст. Натисніть <F1>, щоб отримати допомогу	Часто зустрічається при синтаксичних помилках	Перевірте синтаксис і порядок розташування формул в документі
Illegal dimensions	Неприпустимі розмірності	Матриця, на яку ви посилаєтеся, не має достатньо рядків або стовпців	Введіть ім'я матриці з клавіатури і натисніть знак „=”, щоб перевірити число її рядків і стовпців
Integer too large/ Integer too small	Ціле число дуже велике/дуже маленьке	Це число дуже велико/мало для роботи з ним	Якщо ви працюєте з вбудованими функціями, то клацніть лівою кнопкою миші на імені функції і

Помилка	Переклад	Вірогідна причина	Можливі шляхи усунення
			викличте підказку за допомогою клавіші <F1>
Invalid format	Неприпусти-мий формат	Аргументи цієї функції можуть бути некоректні	Якщо ви працюєте з вбудо-ваними функціями, то клац-ніть лівою кнопкою миші на імені функції і викличте під-казку за допомогою клавіші < F1>
Live symbo-lics not available	Символьні обчислення непридатні		
Must be <= <=10000	Значення має бути <=10000		
Must be >= >=10^-16	Значення має бути >=10^-16		
Must be string	Функція або оператор має бути строко-вим аргумен-том		
Must be function	Аргумент має бути функцією		
Must be increasing	Значення вектора мають бути такими, що зростають		Введіть з клавіатури ім'я вектора і знак „=", щоб перевірити його значення
Must be less than the number of data points	Має бути менше, ніж число точок даних	Цей аргумент має бути менше, ніж число точок наявних даних	
Must be positive	Має бути позитивним	Неможливо обчислити функцію, коли її значення менше або дорівнюють	Це повідомлення може стосуватися побудови X-Y або полярних графіків з логарифмічними осями. Негативні числа або нуль не

Помилка	Переклад	Вірогідна причина	Можливі шляхи усунення
		нулю	можуть розташовуватися на логарифмічних осях
Must be real	Має бути дійсним	Це значення має бути дійсним. Його уявна частина має бути нулем	Прикладом таких виразів можуть служити нижній і верхній індекси, вирішення диференціальних рівнянь, кути
Must be real scalar	Має бути дійсним скаляром	Це значення не має бути комплексним або уявним	
Must be real vector	Має бути дійсним вектором	Цей вектор не може мати комплексних або уявних елементів. Він має також бути вектором-стовпцем, а не рядком	
Must be square	Має бути квадратною	Ця помилка виділяє неквадратну матрицю в тій операції або функції, в якій їй слід бути квадратною	Наприклад, матриця має бути квадратною при зверненні, зведенні її в ступінь, або у функціях *eigenvals* і *eigenvec*
No solution found	Не знайдено рішення		Якщо ви використовуєте вбудовані функції, то клацніть лівою кнопкою миші на імені функції і натисніть клавішу <F1> для того, щоб бути впевненим в коректності використання функції. Проте рішення може просто не існувати. Див. також „*Can't converge to a solution*”
Not enough memory for this operation	Для цієї операції недостатньо пам’яті	Не вистачає пам’яті, щоб завершити це обчислення	Спробуйте звільнити трохи пам’яті шляхом зменшення масиву або матриці (Mathcad витрачає близько 8 байт

Помилка	Переклад	Вірогідна причина	Можливі шляхи усунення
			пам’яті на кожен елемент матриці) або видалення яких-небудь великих побітових відображень, масивів, матриць
Singular matrix	Сингулярна матриця	Ця матриця не може бути ні сингулярною, ні близькою до сингулярності	Матриця називається сингулярною, якщо її визначник дорівнює нулю. Матриця близька до сингулярної, якщо вона має високе число обумовленості
The expression to the left of the equal sign cannot be defined	Вираз зліва від знаку рівності не може бути визначено	У лівій частині знаходиться щось, що не є допустимим визначуваним виразом	У лівій частині можна розмістити одне з наступних визначень: • ім’я змінної; • ім’я змінної з верхнім або нижнім індексом; • явний вектор або матрицю; • ім’я функції з аргументами f (x,y). Будь-які інші вирази недопустимі
The number of rows and/or columns in these arrays do not match	Число рядів і/або стовпців в цих масивах не узгоджене	Спроба провести матричні або векторні операції над масивами, розміри яких не збігаються	Наприклад, складання двох матриць різного розміру неприпустимо. Матричне множення вимагає, щоб число стовпців першої матриці збігалося з числом рядків другої
The units in this expression do not match	Розмірності в цьому виразі не узгоджені	Це повідомлення з’явиться, якщо складаються два елементи різної розмірності, або створена матриця, елементи якої мають різну розмірність, або ви намагаєтеся виріши-	Перевірте використання розмірних змінних

Помилка	Переклад	Вірогідна причина	Можливі шляхи усунення
		ти систему рівнянь для невідомих змінних різної розмірності	
There is an extra comma in this expression	У виразі зайва кома		Коми повинні використовуватися для того, щоб відокремлювати: • аргументи у функції; • перші два елементи області у визначенні інтервалу; • вирази в графіці; • елементи у вхідній таблиці; • нижні індекси в матриці. Будь-які інші застосування коми приводять до помилки. Наприклад, запис 4,000 неправильна, а запис 4 000 – правильна
This expression is incomplete. You must fill in the placeholders	Вираз неповний. Необхідно додати вміст в місце заповнювачі	Не заповнені вказані місцезаповнювачі	Необхідно дописати числа або вирази в указані місцезаповнювачі
This expression is incomplete. You must provide an operator	Вираз неповний. Необхідно вставити оператор	Не заповнені місцезаповнювачі оператора або порожній простір між двома операндами	Це могло відбутися при видаленні оператора; перевірте правильність введення виразу
This function has too many arguments	Функція має дуже багато аргументів	Виділений вираз містить функцію з числом аргументів більшим, ніж потрібно	Перевірте правильність застосування функції
This	Функція не	Спроба	Наприклад, обчислення -3! і

Помилка	Переклад	Вірогідна причина	Можливі шляхи усунення
function is undefined at one or more of the points you specified	визначена для однієї або більшого числа точок	обчислення оператора або функції з невідповідними значеннями	ln(0) – приведе до помилки, оскільки факторіал не визначений для негативного числа, а логарифм для нуля
This function needs more arguments	Функції не вистачає аргументів	Виділений вираз містить функцію з меншим, ніж потрібно, числом аргументів	Для вбудованих функцій клацніть лівою кнопкою миші на імені функції і скористайтеся підказкою <F1>, щоб перевірити правильність числа і типу аргументів. Для функції користувача перевірте її визначення
This operation can only be performed on a function	Операція може застосовуватися тільки для функцій	Цей аргумент має бути функцією	Для вбудованих функцій клацніть лівою кнопкою миші на імені функції і скористайтеся підказкою <F1>
This operation can only be performed on an array. It can't be performed on a number	Операція може застосовуватися тільки для масивів. Вона не може бути використана для чисел		Наприклад, це повідомлення з'явиться, якщо змінна верхнього індексу визначена як скаляр. Оскільки змінна верхнього індексу є стовпцем матриці, то її слід визначати як вектор. Для поверхневих або контурних графіків масив даних повинен мати, принаймні, два ряди і два стовпці
This operation can only be performed on a number or an array	Операція може застосовуватися тільки для чисел або масивів	Використовувана функція або оператор вимагають подання у вигляді константи, матриці або вектора	
This	Ця операція	Використовувана	

Помилка	Переклад	Вірогідна причина	Можливі шляхи усунення
operation can only be performed on a string	може застосовуватися тільки для рядків	функція або оператор вимагають подання у вигляді рядка. Наприклад, строкові функції зазвичай вимагають, принаймні, один строковий аргумент	
This subscript is too large	Нижній індекс дуже великий	Спроба використовувати верхній або нижній індекс, який перевищує обмеження	
This value must be a matrix	Значення має бути матрицею	Спроба провести матричну операцію не над матрицею	
This value must be a vector. It can be neither a matrix nor a scalar	Значення має бути вектором. Воно не може бути ні матрицею, ні скаляром	Це повідомлення маркірує матрицю або скаляр в операціях, які вимагають вектора (одностовпцевого масиву). Наприклад, підсумовування елементів вектора	
This value must be an integer greater than 1	Значення має бути цілим числом, що перевершує одиницю	Значення має бути > 1	При використанні вбудованих функцій клацніть лівою кнопкою миші на імені функції і натисніть клавішу <F1>
This variable or function is not defined above	Змінна або функція не визначена вище	Ім’я невизначеної функції буде помічено червоним кольором	Переконайтеся, що ця функція або змінна визначена вище. Це повідомлення з’явиться, якщо змінна не коректно використовується в гло-

Помилка	Переклад	Вірогідна причина	Можливі шляхи усунення
			бальному визначенні. Ця помилка часто свідчить про те, що інше рівняння вище в документі є помилкою. В цьому випадку всі вирази, що використовують вираз з помилкою, будуть помічені червоним кольором
Underflow	Втрата значущості (зникнення значущих розрядів)	Із-за обмежень, властивих представленню чисел на комп'ютері, числа, які дуже малі, не можуть бути представлені. Це повідомлення з'являється, коли вираз включає таке число. Іноді, особливо в складних обчисленнях, проміжний результат буде дуже малий, і вся розрядна сітка заповниться нулями	
Value of subscript or superscript is too big (or too small) for this array	Значення нижнього або верхнього індексу дуже велике (або дуже мале) для цього масиву	Цей вираз використовує нижній або верхній індекс, який відноситься до неіснуючого елементу масиву	
This is not a scalar. Press <F1> for help	Це не скаляр. Натисніть клавішу <F1>, щоб отримати	Використаний вектор або вираз з інтервалами, або якийсь інший тип виразу, де потріб-	

Помилка	Переклад	Вірогідна причина	Можливі шляхи усунення
	допомогу	не застосування скаляра	
You have one solve block inside another. Every "Given" must have a matching "Find" or "Minerr"	Один обчислювальний блок міститься всередині іншого. Кожному ключовому слову Given повинно зіставлятися Find або Minerr	Вказано два ключові слова Given підряд без Find або Minerr всередині. Обчислювальний блок не може мати всередині себе іншого обчислювального блоку	Як альтернатива можна задати функцію в термінах одного обчислювального блоку і використовувати її всередині іншого обчислювального блоку. У багатьох випадках це дає той же самий ефект
You interrupted calculation. To resume, click here and choose "Calculate" from the "Math" menu	Обчислення перервані. Для того, щоб продовжити, клацніть тут і виберіть пункт Calculate меню Math		Обчислення перервані натисненням клавіші <Esc>. Для того, щоб перерахувати виділене рівняння, наведіть на нього курсор і скористайтеся меню Math / Calculate (Математика / Обчислити)
Повідомлення про помилки в символьних обчисленнях			
Argument too large (Integer too large in context, Object too large)	Аргумент дуже великий	Звичайно це результат обчислення виразу з плаваючою точкою із значенням більшим, ніж близько 10x10 мільярдів	
Discarding large result	Скидання великого результату	Відповідь дуже велика для відображення її в математичній області	Можна розмістити відповідь у буфері обміну
Expecting array or list	Очікується масив або список	Оператори в спрощуваному або обчислюваному ви-	

Помилка	Переклад	Вірогідна причина	Можливі шляхи усунення
		разі вимагають векторних або матричних операндів	
Expression contains nonsymbolic operators	Вираз містить несимвольні оператори	Застосована символьна операція до виразу, що містить місцезаповнювачі оператора або змінної	
Floats not handled	З плаваючою точкою не підтримується	Команда *Factor* була застосована до виразу з десятковим числом	
Illegal function syntax	Неприпустимий синтаксис функції	Символьний процесор не може інтерпретувати вираз, подібний (f) (X)	
Invalid arguments	Неприпустимі аргументи	Символьний процесор не може виконати необхідну операцію для даних аргументів	Це повідомлення з'явиться, якщо, наприклад, застосувати скалярну функцію до масиву без використання оператора векторизації і вибрати команду *Symbolics/ Simplify (Символіка / Спростити)*
Invalid range	Неприпустимий інтервал	Для пошуку чисельного вирішення рівняння символьний процесор намагається обчислити одну зі своїх вбудованих функцій за межами області її визначення	
No answer found;	Відповіді не знайдено	Символьний процесор досяг межі	

Помилка	Переклад	Вірогідна причина	Можливі шляхи усунення
stack limit reached		своїх можливостей без обчислення або спрощення, яке вимагав користувач	
No answer found	Відповіді не знайдено	Символьний процесор не зміг знайти точного вирішення рівняння	
No closed form found for	Не знайдено замкнутої форми для	Символьний процесор не зміг знайти інтеграл, або суму, або добуток в замкнутій формі	
Syntax error	Синтаксична помилка	Зазвичай результат застосування символьної операції в невід повідних або некоректних виразах. Символьні обчислення виразів з розмірностями також приведуть до появи цього повідомлення	

Навчальне видання

ЖУКОВА Вікторія Миколаївна
ПЕРЕЯСЛАВСЬКА Світлана Олександрівна

КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Навчальний посібник до вивчення дисципліни
для студентів спеціальності
6.050103 – „Програмна інженерія”

Редактор – Жукова В. М.
Комп'ютерний макет – Жукова В. М., Переяславська С. В.
Коректор – Лєсовець Н. М.

Здано до склад. 28.02.2017 р. Підп. до друку 31.03.2017 р.
Формат 60x84 1/16. Папір офсет. Гарнітура Times New Roman.
Друк ризографічний. Ум. друк. арк. 6,39. Наклад 50 прим. Зам. № 19.

Видавець і виготовлювач
Видавництво Державного закладу
„Луганський національний університет імені Тараса Шевченка”
пл. Гоголя, 1, м. Старобільськ, 92703. Тел./факс: (06461) 2-26-70.
e-mail: mail@luguniv.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3459 від 09.04.2009 р.