Міністерство освіти і науки України
Донецький національний університет імені Василя Стуса
ДЗ "Луганський національний університет
імені Тараса Шевченка"

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Луценко Алла Володимирівна

УДК 512.548

# ДИСЕРТАЦІЯ

# КВАЗІГРУПИ З ВЛАСТИВОСТЯМИ ОБОРОТНОСТІ

111 – Математика

11 – Математика та статистика

Подається на здобуття ступеня доктора філософії.
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають покликання на відповідне джерело
_________________ А. В. Луценко

Науковий керівник: **Сохацький Федір Миколайович**, доктор фізико-математичних наук, доцент

Полтава — 2023

# АНОТАЦІЯ

**Луценко А. В. Квазігрупи з властивостями оборотності.** – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії з галузі знань 11 – Математика та статистика за спеціальністю 111 – Математика. — Донецький національний університет імені Василя Стуса, Державний заклад "Луганський національний університет імені Тараса Шевченка". — Полтава, 2022.

Алгебра, геометрія, комбінаторика, особливо планування проведення експериментів, є основними теоріями виникнення та застосування квазігруп і їх комбінаторного аналогу — латинських квадратів. Широке використання інформаційних технологій та передачі інформації призвело до пошуку різних методів захисту інформації та відновлення помилок при її передачі, тобто до задач з шифрування та кодування. Оскільки зворотні дії (дешифрування та декодування) обов'язкові, а квазігрупи визначаються як алгебри з оборотними операціями, то вивчення квазігруп становить значний інтерес. Якщо до того ж виконується властивість оборотності елементів в квазігрупі, то кажуть, що такі квазігрупи мають властивість оборотності. В них обернені операції (парастрофи) виражаються через головну і це призводить до зменшення часу обробки інформації при їх застосуванні.

Застосування квазігруп не лише в алгебрі, а й в теорії кодування випливає з праць А. Кідвела [48], Д. Денеша [37], В. Щербакова [110], С. Марковського [86], А. Мілевої [87], М. Глухова [11] та А. Крапежа [56,57]. Зокрема в працях А. Кідвела та В. Щербакова показано використання квазігруп з властивістю схрещеної оборотності.

Інтерес до вивчення квазігруп з властивостями оборотності виникав і продовжує цікавити багатьох науковців, серед яких Р. Арці, Б. Шарма, Р. Брук, В. Білоусов, А. Кідвел, І. Флоря, В. Щербаков та інші.

Квазігрупи з властивістю оборотності мають і значний алгебричний інтерес, оскільки вони містять такі відомі підкласи, як групи, лупи Муфанг та інші. До того ж, у деяких класах ізотопія рівносильна ізоморфізму. Наприклад, ізотопні групи завжди ізоморфні, ізотопні лупи з властивістю схрещеної оборотності також ізоморфні [34, Р. Арці]. Те ж саме виконується і в класі комутативних луп Муфанг [6, В.Д. Білоусов]. У праці Ф. Сохацького [84] посилено даний результат і доведено, що ізотопні $IP$ лупи є псевдоізоморфними, а якщо вони до того ж комутативні, то вони ізоморфні.

Лупи з послабленою властивістю оборотності ($WIP$ лупи) були визначені Р. Баєром [22], важливі результати $WIP$-луп були отримані Дж. Осборном [93]. Якщо кожна лупа, яка ізотопна лупі з властивістю схрещеної оборотності ($CIP$ лупі), є $CIP$ лупою, то така лупа буде абелевою групою [26, В. Білоусов, Б. Цуркан]. Раніше подібні результати отримані для $IP$ луп: лупи, всі ізотопні яким лупи є $IP$ лупами, є в точності лупами Муфанг [85].

Відомо, що найефективніші інструменти дослідження мають многовиди, тобто класи алгебр, які визначаються тотожностями. Тому природнім є питання про виявлення класифікації многовидів квазігруп з властивостями оборотності.

У дисертаційній роботі вивчаються квазігрупи, їх многовиди, в яких множини однотипних трансляцій збігаються. Кожна така квазігрупа має властивість оборотності. Класифікацію здійснено, користуючись поняттям і результатами парастрофної симетрії, яка введена Ф. Сохацьким [84].

Основними завданнями роботи є: класифікувати квазігрупи, в яких збігаються множини трансляцій різного напрямку; знайти тотожності, які характеризують такі многовиди; знайти формули обчислення функцій оборотності для кожного многовида; класифікувати групові ізотопи відповідно до властивостей оборотності; побудувати напіврешітки многовидів групових ізотопів з властивостями оборотності; описати матричні $IP$ та $CIP$ квазігрупи.

Результати цієї роботи є продовженням досліджень В. Білоусова [4, 6, 30], А. Кідвела та В. Щербакова [69–71, 80], Ф. Сохацького [84], І.А. Флорі, Р. Арці [34, 35], Р. Брука [85] та інших.

У першому розділі дисертаційної роботи наведено огляд та аналіз літератури з теми дослідження, систематизовано основні поняття і твердження, означення і теореми, описано відомі допоміжні поняття та результати з вивчення квазігруп з властивостями оборотності. Також доповнено властивості $IP$ квазігруп, які досліджували В. Білоусов [6], Р. Брук [85], Г. Пфлюгфельдер [95] та В. Щербаков [109]. Зокрема, вони розглянули елементарні співвідношення в лівих та правих $IP$ квазігрупах, а в цій роботі введено поняття середньої $IP$ квазігрупи та досліджено елементарні співвідношення і для середніх $IP$ квазігруп.

Квазігрупа $(Q;\cdot)$ називається:

1) *лівою $IP$-квазігрупою* ($LIP$), якщо існує перетворення $\lambda$ таке, що виконується рівність
$$\lambda(x)\cdot(x\cdot y)=y,$$
2) *правою $IP$-квазігрупою* ($RIP$), якщо існує перетворення $\rho$ таке, що виконується рівність
$$(y\cdot x)\cdot\rho(x)=y,$$
3) *середньою $IP$-квазігрупою* ($MIP$), якщо існує перетворення $\mu$ таке, що виконується рівність
$$x\cdot y=\mu(y\cdot x),$$
при цьому $\lambda$, $\rho$, $\mu$ називаються лівою, правою та середньою функціями оборотності відповідно.

Приклад, наведений В. Білоусовим [6], демонструє квазігрупу, яка є лівою та правою $IP$ квазігрупою з різними функціями оборотності. Нами показано, що дана квазігрупа є не лише лівою та правою $IP$ квазігрупою, а є і середньою $IP$ квазігрупою.

Приклад. Нехай $(G;+)$ — абелева група. Операція $(\cdot)$ визначена на множині $G \times G$:

$$(a,b)\cdot(c,d) := (a+c, d-b).$$

Перетворення $\lambda$, $\rho$ (ліва та права функції оборотності відповідно) визначені в [6]. Перетворення $\mu$ визначаємо так:

$$\lambda(a,b) := (-a,-b), \qquad \rho(a,b) := (-a,b), \qquad \mu(a,b) := (a,-b).$$

Доведено, що $\mu$ є середньою функцією оборотності, більше того, не є ні лівою, ні правою функцією оборотності. Цей приклад показує існування тристороньої $IP$ квазігрупи з різними функціями оборотності.

У другому розділі досліджуються трансляції, їх множини та класи квазігруп, які визначаються рівностями множин трансляцій.

У параграфі 2.1. доведено, що кожна трансляція в квазігрупі має два незалежних параметра. Один з цих параметрів є бієкцією множини носія, а другий новий і названий напрямком трансляції. Розглянуто властивості напрямків у квазігрупі. Зокрема, у межах цих понять характеризуються тотально-симетричні, напівсиметричні, комутативні, ліво та право симетричні, а також асиметричні квазігрупи.

У кожній квазігрупі $Q$ визначено шість типів трансляцій: ліві, праві і середні трансляції та їм обернені.

$$\mathscr{M}_a := \{M_a, M_a^{-1}, L_a, L_a^{-1}, R_a, R_a^{-1}\}.$$

Кожен елемент $a \in Q$ визначає одну й ту ж множину бієкцій у кожному парастрофі квазігрупи (див. для прикладу [31, 32, 41]).

Дві трансляції із $\mathscr{M}_a$, як перестановки множини $Q$, можуть збігатися, але вони перетинаються в одній точці, як прямі в 3-сітці, яка визначена даною квазігрупою. Називатимемо кожен тип трансляції напрямком і асоціюватимемо його з одним із елементів $\iota$, $\ell$, $r$, $s$, $\ell s$ і $rs$, тобто з елементами симетричної групи $S_3$. ${}^{\sigma}\mathcal{M}$ позначає множину всіх трансляцій напрямку $\sigma \in S_3$.

Основним результатом розділу є знаходження класів квазігруп з властивостями оборотності за характерною властивістю, коли множини трансляцій різних напрямків збігаються. У параграфі 2.2. проаналізовано рівності множин трансляцій.

Умови ${}^{\sigma}\mathcal{M} = {}^{\kappa}\mathcal{M}$, де $\sigma, \kappa \in S_3$ і $\sigma \neq \kappa$, визначають 9 класів квазігруп. Три з них є добре відомими: класи $LIP$, $RIP$ і $CIP$ квазігруп. Решта 6 класів квазігруп є новими, це є класи середніх $IP$, лівих та правих $CIP$ квазігруп та узагальнення комутативних, ліво та право симетричних квазігруп, які названо середніми, лівими та правими дзеркальними квазігрупами. Доведено, що ці 9 класів розбиваються на три парастрофні орбіти: парастрофна орбіта $IP$ квазігруп, парастрофна орбіта $CIP$ квазігруп та парастрофна орбіта дзеркальних квазігруп.

У параграфі 2.3. знайдено тотожності, які визначають кожний з цих класів та доведено, що вони є многовидами. Також для кожного многовиду знайдено функції оборотності.

Розділ 3 присвячений дослідженню групових ізотопів з властивостями оборотності. У параграфі 3.1 знайдено умови, коли груповий ізотоп, унітарна центральна квазігрупа та матрична квазігрупа мають властивість оборотності ($IP$); досліджено матричні $IP$ квазігрупи 4-го та 9-го порядку, зокрема знайдено кількісну характеристику матричних $IP$ квазігруп 4-го порядку; у параграфі 3.2 описано, за яких умов груповий ізотоп, унітарна центральна квазігрупа та матрична квазігрупа мають властивість схрещеної оборотності ($CIP$); у параграфі 3.3. представлено умови, коли груповий ізотоп є дзеркальною квазігрупою.

У цьому розділі дано повну класифікацію групових ізотопів за властивостями оборотності, знайдено відповідні функції оборотності; показано зв'язок дзеркальних квазігруп з ліво-симетричними, правосиметричними та комутативними квазігрупами.

Основними результатами, які визначають наукову новизну дисертації є:

— знайдено класи квазігруп з властивостями оборотності за напрямами трансляцій;
— описано розподіл відповідних класів квазігруп на парастрофні орбіти(пучки) згідно з парастрофною симетрією;
— доведено, що ці класи квазігруп з властивостями оборотності є многовидами та знайдено відповідні тотожності;
— знайдено функції оборотності для кожного многовида квазігруп з властивостями оборотності;
— знайдено класифікацію групових ізотопів з властивостями оборотності та побудовано в'язки многовидів з властивостями оборотності;
— описано матричні $IP$ квазігрупи та $CIP$ квазігрупи.

Результати дисертації носять теоретичний характер і є внеском у теорію неасоціативних структур, теорію квазігруп, теорію квазігруп з властивостями оборотності і можуть застосовуватися в алгебрі, геометрії, топології, математичному аналізі, криптографії, дискретній математиці тощо.

*Ключові слова:* група, квазігрупа, напівгрупа, лупа, оборотна операція, парастроф, ізотоп, тотожність, парастрофна рівносильність, парастрофно-первинна рівносильність, парастрофна симетрія, парастрофна орбіта, автоморфізм, ендоморфізм, конгруенція, матричне рівняння, матриця, кільце, матрична квазігрупа, теплецева матриця, повна матриця.

## ABSTRACT

*Lutsenko A. V.* Quasigroups with inverse properties. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the Degree Doctor of Philosophy in the speciality 111 — Mathematics. — Vasyl' Stus Donetsk National University.

Algebra, geometry, and combinatorics, especially the design of experiments, are the main theories of the origin and application of quasigroups and their combinatorial analog Latin squares. Extensive use of information technology and information transfer has led to the search for different methods of information protection and recovery of errors in its transmission, i.e., the tasks of encryption and decryption. Since inverse actions (decryption and decoding) are mandatory, and quasigroups are defined as algebras with inverse operations, the study of quasigroups is of considerable interest. If, moreover, the property of invertibility of elements in a quasigroup is satisfied, it is said that such quasigroups have the has inverse property. In them the inverse operations (parastrophes) are expressed through the main and it leads to reduction of time of information processing at their application.

Applicability of quasigroups not only in algebra but also in coding theory can be found in the works of A.D. Keedwell [48], D. Denesh [37], V.O. Shcherbakov [110], S. Markovsky [86], A. Mileva [87], M.M. Glukhov [11] and A. Krapezh [56,57] and others. In particular, the application of quasigroups with the cross inverse property has been shown in the works of A.D. Keedwell and V.O. Shcherbakov.

Interest in the study of quasigroups with inverse properties arose and is arising in many scientists, including R. Artsy, B. Sharma, R. Bruck, V.D. Belousov, A.D. Keedwell, I.A. Florya, V.O. Shcherbakov, and others.

Quasigroups with inverse properties are of considerable algebraic interest because they contain such well-known subclasses as groups, Moufang's loops, and others. In addition, in some quasigroup classes isotopy is equivalent to

isomorphy. For example, isotopic groups are always isomorphic, isotopic cross inverse loops are also isomorphic [34, R. Artsy]. The same is proved in the class of commutative Moufang's loops [6, V.D. Belousov]. F.M. Sokhatsky [84] strengthened this result and proved it that isotopic $IP$ loops are pseudoisomorphic, and if they are also commutative, they are isomorphic.

Loops with weak inverse property ($WIP$ loops) were determined by R. Baer [22]. Important results of $WIP$-loops were obtained by J. Osborn [93]. If all loops being isotopic to a cross inverse loop ($CIP$ loop) are also $CIP$ loops, then the given loop is an Abelian group [26, V.D. Belousov, B.V. Tsurkan]. Previously, similar results were obtained for $IP$ loops: loops, all isotopes of which are $IP$ loops, are exactly Moufang's loops [85].

It is well known that varieties have the most effective tools for investigation, that is, classes of algebras defined by identities. Therefore, the question of classification of many types of quasigroups with the properties of reversibility is relevant.

In the PhD thesis we study quasigroups and quasigroup varieties in which the sets of similar translations coincide. Each such quasigroup has the inverse properties. The classification is carried out using the concepts and results of parastrophic symmetry, which was introduced by F.M. Sokhatsky in [84].

The main objectives of the work are: to classify quasigroups in which the set of translations of different directions coincide; find the identities that characterize such varieties; find formulas for calculating invertibility functions for each variety; classify group isotopes according to the inverse properties; to construct semilattices of varieties of group isotopes with inverse properties; describe matrix $IP$ and $CIP$ quasigroups.

The results of this work are a continuation of the research of V.D. Belousov [4,6,30,30], A.D. Keedwell and V.O. Shcherbakov [70,71,71,80] F.M. Sokhatsky [84], I.A. Florya, R. Artzy [34,35], R. Bruck [85] and others.

The first section of the dissertation presents a review and analysis of the literature on the topic of research, systematizes the basic concepts and statements, definitions and theorems, and describes the known auxiliary concepts and results of studying quasigroups with inverse properties. The properties of the $IP$ quasigroups studied by V.D. Belousov [6], R. Bruck [85], G. Pflugfelder [95] and V. Shcherbakov [109]. In particular, the elementary relations in the left and right $IP$ quasigroups are considered, the concept of the middle $IP$ quasigroup is introduced and the elementary relations for the middle $IP$ quasigroups are investigated.

**Definition 1.1.** A quasigroup $(Q;\cdot)$ is called:

1) *left $IP$-quasigroup* $(LIP)$, if there is a transformation $\lambda$ such that

$$\lambda(x)\cdot(x\cdot y)=y,$$

2) *right $IP$-quasigroup* $(RIP)$, if there is a transformation $\rho$ such that

$$(y\cdot x)\cdot\rho(x)=y,$$

3) *middle $IP$-quasigroup* $(MIP)$ if there is a transformation $\mu$ such that

$$x\cdot y=\mu(y\cdot x).$$

The functions $\lambda$, $\rho$ and $\mu$ are called the left, right and middle invertibility functions respectively.

The quasigroup constructed by V.D. Belousov [6] is a left and a right $IP$ quasigroup with different inverse functions. We have shown that this quasigroup is also a middle $IP$ quasigroup.

Example. Let $(G;+)$ be an Abelian group. The operation $(\cdot)$ is defined on the set $G\times G$:

$$(a,b)\cdot(c,d):=(a+c,d-b).$$

The transformations $\lambda$, $\rho$ (left and right invertibility functions, respectively) are defined in [6]. The transformation $\mu$ (middle invertibility function) we define as follows:

$$\lambda(a,b):=(-a,-b),\qquad \rho(a,b):=(-a,b),\qquad \mu(a,b):=(a,-b).$$

It is easy to verify that the $\mu$ is a middle invertibility function, moreover it is neither a left nor a right invertibility function. This example shows the existence of three-sided $IP$ quasigroups with different invertibility functions.

The second section investigates translations, translation sets, and classes of quasigroups that are determined by the equality of translation sets.

In paragraph 2.1. it is proved that each translation in a quasigroup has two independent parameters. One of them is the permutation of the carrier set. The second parameter is new and is called a direction. The properties of directions in a quasigroup are considered. In particular, these concepts are characterized by total-symmetric, semi-symmetric, commutative, left and right symmetric, as well as asymmetric quasigroups.

In each quasigroup $Q$, six types of translations are defined: left, right and middle translations and inverse.

$$\mathscr{M}_a := \{M_a, M_a^{-1}, L_a, L_a^{-1}, R_a, R_a^{-1}\}.$$

Each element defines the same set of bijections in each parastrophe of a quasigroup (see for example [31, 32, 41]).

Two translations of $\mathscr{M}_a$, as permutations of the set $Q$, may coincide, but they intersect at one point as lines in the 3-net defined by this quasigroup. We will call each type of a translation a direction and associate it with one of the elements $\iota$, $\ell$, $r$, $s$, $\ell s$ and $rs$, i.e., with the elements of the symmetric group $S_3$. ${}^{\sigma}\mathcal{M}$ denotes the set of all translations of $\sigma \in S_3$.

The main result of the section is the finding of classes of quasigroups with inverse properties by characteristic property, when the sets of translations of different directions coincide. In paragraph 2.2. the equality of translation sets is analyzed.

Conditions ${}^{\sigma}\mathcal{M} = {}^{\kappa}\mathcal{M}$, where $\sigma, \kappa \in S_3$ and $\sigma \neq \kappa$, define 9 classes of quasigroups. Three of them are well known: the classes $LIP$, $RIP$ and $CIP$ quasigroups. The other 6 classes of quasigroups are new, these are the classes of middle $IP$, left and right $CIP$ quasigroups and generalizations of commutative, left and right symmetric quasigroups, which are called middle, left and right mirror quasigroups. It is proved that these 9 classes are divided into three parastrophic orbits: parastrophic orbit of $IP$ quasigroups, parastrophic orbit of $CIP$ quasigroups and parastrophic orbit of mirror quasigroups.

In paragraph 2.3., the identities defining each of these classes are found and so the classes are varieties. Invertibility functions are also found for each variety.

Chapter 3 is devoted to the study of group isotopes with inverse properties. In Section 3.1, conditions under which group isotopes, unitary central quasigroups, and matrix quasigroups have the inverse property $(IP)$ are found; in Section 3.2 conditions under which group isotopes have the cross inverse property $(CIP)$ are found; in paragraph 3.3. conditions under which group isotopes are mirror quasigroups are given.

In this chapter, a complete classification of group isotopes according to the inverse properties is given, and the corresponding invertibility functions are found; the connection of mirror quasigroups with left-symmetric, right-symmetric and commutative quasigroups is shown.

The main results that determine the scientific novelty of the dissertation:

— quasigroup classes with inverse properties by translation directions have been found;
— the distribution of the corresponding classes of quasigroups into parastrophic orbits (trusses) according to parastrophic symmetry has been described;
— it is proved that these classes of quasigroups with inverse properties are varieties and it is found the corresponding identities;
— invertibility functions for each variety of quasigroups with inverse properties has been found;
— the classification of group isotopes with inverse properties has been found and constructed the bunch of varieties with inverse properties;

— matrix $IP$ quasigroups and $CIP$ quasigroups are described.

The results of the dissertation research are theoretical. The results obtained in the dissertation are a contribution to the theory of non-associative structures, quasigroup theory, and quasigroup theory with invertibility properties and can be used in algebra, geometry, topology, mathematical analysis, cryptography, discrete mathematics, and so on.

*Key words:* group, quasigroup, semigroup, loop, invertible operation, parastroph, isotope, identity, parastrophic equivalence, parastrophically primary equivalence, parastrophic symmetry, parastrophic orbit, automorphism, endomorphism, congruence, matrix equation, matrix, ring, matrix quasigroup, toeplitz matrix, full matrix.

# СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, В ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНІ ОСНОВНІ НАУКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ

**Публікації у фахових виданнях України і виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:**

1. Sokhatsky F. M., Lutsenko A. V. *The bunch of varieties of inverse property quasigroups.* Bulletin of Donetsk University Series A: Natural Sciences. 2018. Vol. 1-2. P. 56–69.

   DOI: https://doi.org/10.31558/1817-2237.2018.1-2.4

2. Lutsenko A. V. *Classification of group isotopes according to their inverse properties.* Applied problems of mechanics and mathematics. 2020. Vol. 13, 48–62.

   DOI:10.15407/apmm2020.18.48-61

3. Сохацький Ф.М., Луценко А.В., Фриз І.В. *Побудова квазігруп з властивістю оборотності.* Математичні методи і фізико-механічні поля. 2021. Вип.64, №4, 5–17.

**Публікації у зарубіжних виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:**

4. Sokhatsky F. M., Lutsenko A. V. *Classification of quasigroups according to directions of translations I.* Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. 2020. Vol. 61, No. 4. 567–579.

   DOI: DOI 10.14712/1213-7243.2021.002

5. Sokhatsky F. M., Lutsenko A. V. *Classification of quasigroups according to directions of translations II.* Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. 2021. Vol. 62, No. 3. 309–323.

   DOI: DOI 10.14712/1213-7243.2021.021

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ МАТЕРІАЛІВ ДИСЕРТАЦІЇ

6. Федір Сохацький, Алла Луценко *Пучок многовидів IP-квазігруп.* Матеріали конференції молодих учених "Підстригачівські читання – 2019", Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, 27-29 травня 2019. – URL: http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2019/abstracts/Lucenko.pdf

7. F. Sokhatsky, A. Lutsenko, *About group isotopes with inverse property.* In: Abstracts of XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. Vasyl' Stus Donetsk National University. July 02–06, 2019, Vinnytsia.

8. A. Lutsenko, *Definition of invertibility property for loops via translations.* In: Abstracts of XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. Vasyl' Stus Donetsk National University. July 02–06, 2019, Vinnytsia.

9. F. Sokhatsky, A. Lutsenko, *A classification of quasigroups according to the sets of translations.* In: Abstracts of the young disciplines "Pidstryhach reading - 2020" Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics (in Ukrainian). Lviv 26-28 May, 2020.

10. F. Sokhatsky, A. Lutsenko, *Quasigroup varieties with inverse properties.* In: Abstracts of International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv 14-17 July, 2020. c.75

11. Ф. Сохацький, А. Луценко, *Парастрофні орбіти многовидів квазігруп з властивостями оборотності.* Матеріали наукової конференції професорсько-викладацького складу, наукових працівників і здобувачів наукового ступеня за підсумками науково-дослідної роботи

"Фестивалю науки-2021". Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, 2021.

12. Алла Луценко, *Про групові ізотопи з властивістю схрещеної оборотності.* Матеріали конференції молодих учених "Підстригачівські читання – 2021", Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, 26-28 травня 2021. URL: http://iapmm.lviv.ua/chyt2021/abstracts/Lutsenko.pdf

13. A.V. Lutsenko. *The bunch of varieties of mirror group isotope.* In: Abstracts of International Conference of Young Mathematicians, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, June 3–5, 2021.

14. F. Sokhatsky, A. Lutsenko, *Quasigroups with inverse properties* In: Abstracts of 13th International Algebraic Conference in Ukraine, Taras Shevchenko National University of Kyiv, July 6–9, 2021. P. 78.

15. F. Sokhatsky, A. Lutsenko, *Matrix quasigroups with invertibility property.* In: The book of abstracts of 29th conference on applied and industrial mathematics dedicated to the memory of Academician Mitrofan M. Cioban. Chisinau, Republic of Moldova, August 25-27, 2022. P. 163–165.

16. I. Fryz, A. Lutsenko, *Orthogonality of matrix quasigroups.* In: The book of abstracts of 29th conference on applied and industrial mathematics dedicated to the memory of Academician Mitrofan M. Cioban. Chisinau, Republic of Moldova, August 25-27, 2022. P. 154–156.

# ЗМІСТ

# ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$:=$ — рівність за означенням

$:\Leftrightarrow$ — рівносильність за означенням

$f(x;y)$, $(x \cdot y)$ — бінарна операція (функція) $f$, $(\cdot)$

${}^{\sigma}f(x;y)$, $(x \overset{\sigma}{\cdot} y)$ — $\sigma$ -парастроф операції $f$ $(\cdot)$

$\mathrm{Ps}(\cdot)$ — парастрофна симетрія операції $(\cdot)$

$\mathrm{Po}(\mathfrak{A})$ — парастрофна орбіта многовида $(\mathfrak{A})$

$R_a$ — права трансляція за елементом $a$

$L_a$ — ліва транслія за елементом $a$

$M_a$ — середня транслія за елементом $a$

$R_a^{-1}$ — права обернена трансляція за елементом $a$

$L_a^{-1}$ — ліва обернена трансляція за елементом $a$

$M_a^{-1}$ — середня обернена трансляція за елементом $a$

$\mathscr{M}_a := \{M_a, M_a^{-1}, L_a, L_a^{-1}, R_a, R_a^{-1}\}$ — множина бієкцій у кожному парастрофі квазігрупи

${}^{\kappa}M_a$ — $\kappa$-парастроф трансляції, трансляція напрямку $\kappa$ визначена елементом $a$

${}^{\sigma}\mathcal{M}$ — множина всіх трансляцій

$\mathfrak{I}$ — многовид середніх $IP$ квазігруп

${}^{\ell}\mathfrak{I}$ — многовид лівих $IP$ квазігруп

${}^{r}\mathfrak{I}$ — многовид правих $IP$ квазігруп

$\mathfrak{C}$ — многовид середніх $CIP$ квазігруп

${}^{\ell}\mathfrak{C}$ — многовид лівих $CIP$ квазігруп

${}^{r}\mathfrak{C}$ — многовид правих $CIP$ квазігруп

$\mathfrak{M}$ — многовид середніх дзеркальних квазігруп

${}^{\ell}\mathfrak{M}$ — многовид лівих дзеркальних квазігруп

${}^{r}\mathfrak{M}$ — многовид правих дзеркальних квазігруп

# ВСТУП

**Обгрунтування вибору теми дослідження**. Дисертаційна робота присвячена вивченню квазігруп з властивостями оборотності.

У 20-30-тих роках XX ст. почали інтенсивно вивчатися неасоціативні алгебраїчні структури. З розвитком криптографії та пошуком нових методів захисту інформації з'явилася можливість використання таких неасоціативних структур, як квазігрупи. Це призвело до необхідності створення та побудови структурованої теорії квазігруп. Квазігрупи мають різноманітне застосування в диференціальній геометрії, теорії автоматів, фізиці, у теорії планування експериментів, у теорії кодування, у криптографії та в інших науках, суміжних з математикою.

У зв'язку з комп'ютеризацією практично всіх сфер життя, стрімко зросла потреба в захисті інформації, а тому і в розробці нових методів шифрування. Кількість квазігруп уже 12-порядку неможливо підрахувати навіть на сучасних комп'ютерах, тому перебір їх неможливий. У той же час, квазігрупи є оборотними функціями. Ці та інші особливості квазігруп є підставою для ефективного застосування квазігруп при вирішенні різних проблем як шифрування (розшифрування), так і кодування (декодування) інформації. Хоча квазігрупи уже мають багату історію застосування в криптографії, перспектива також не менш обнадійлива. Досить повний огляд і аналіз цих процесів можна знайти в працях М. Глухова [11], В. Щербакова [109], К. Косельни, Г. Муленна [52], А. Крапежа [57] та інших.

Велика кількість квазігруп дозволяє для кожної проблеми виділити класи квазігруп з більш ефективним її розв'язанням. Однією з таких проблем є швидкість обробки інформації. Тому для розшифрування інформації доцільно використовувати квазігрупи з оборотністю елементів, в яких відповідна обернена операція (парастроф) виражається через головну операцію і деяку одномісну функцію, яка названа функцією оборотності.

Квазігрупи з властивостями оборотності вивчалися у працях Р. Арці [34], Р. Осборна [93], В. Білоусова [6], Г. Пфлюгфельдер [95], Ф. Сохацького [98], В. Щербакова [109, 110], І. Флоря, Н. Дідурик [33] та ін., многовиди квазігруп вивчалися у працях Ф. Сохацького [84], Г. Крайнічук [53], О. Тарковської [108] та ін., застосування квазігруп з властивостями оборотності вивчалися у працях А. Кідвела [49], [48], В. Щербакова [110] та ін.

У теорії квазігруп розглядаються багато типів властивостей оборотності. Найвідоміші типи знані під абревіатурами $IP$ (inverse property) [28], [71], [95], [85], $LIP$ (left inverse property) [30], [71], $RIP$ (right inverse property) [28], [71], [109], $CIP$ (cross inverse property) [28], [26], [34, 35], [68], $WIP$ (weak inverse property) [22], [93] і $AAIP$ [47], [85]. Лупи з такими властивостями тісно пов'язані з деякими найбільш широко вивченими видами луп, наприклад лупи Муфанг, лупи Бола та лупи Брука.

Треба зазначити, що лупа є лупою Муфанг тоді і тільки тоді, коли всі її ізотопи — це $IP$ лупи. Лупи з властивостями оборотності мають властивості, які спрощують їх вивчення. Наприклад, у класі $IP$ луп: (1) ліве, праве та середнє ядра збігаються, (2) ізотопні $IP$ лупи псевдоізоморфні, (3) ізотопні комутативні $IP$ лупи ізоморфні [76].

Досліджуючи $CIP$ квазігрупи, А. Кідвел [48] побудував і навів приклад з детальним поясненням процедури використання $CIP$ з довгим оборотним циклом у криптографії. Постає питання про існування класів квазігруп з властивостями оборотності з ефективним застосуванням не лише в криптографії, а й в інших галузях науки. А це, в свою чергу, спричиняє потребу знаходження нових класів квазігруп з властивостями оборотності, їх класифікації та розробки інструментів для детального дослідження. З алгебричної точки зору найбагатший інструмент для дослідження мають многовиди квазігруп, тобто класи алгебр, які визначаються тотожностями, позаяк саме такі класи замкнені стосовно прямих добутків, гомоморфних образів та підалгебр.

Виявилося, що частина відомих класів квазігруп з властивостями оборотності можна визначити за допомогою зсувів у квазігрупі, а саме, як рівність двох множин певних типів однотипних зсувів. Розглянувши всі можливі рівності, було встановлено, що всього таких многовидів квазігруп є дев'ять [101]. Три з них, а саме, $LIP$, $RIP$ та $CIP$, були відомі і їх вивчення та застосування відображене в багатьох працях, наприклад, [6], [47], [71], [69], [70], [35], [95], [109], [98]. Інші шість многовидів є новими.

Встановлено, що кожний зсув у квазігрупі визначається двома параметрами: підстановкою носія та напрямком. Для визначення напрямку зсуву введено відношення парастрофії між зсувами та вивчено їх властивості. У довільній квазігрупі один і той самий елемент $a$ визначає шість зсувів: лівий, правий, середній та обернені до них.

Множина цих зсувів інваріантна при парастрофії квазігрупи, тобто це одна й та ж множина $\mathcal{M}_a$ в кожному із шести парастрофів квазігрупи. До того ж, шість різних парастрофів будь-якого із цих зсувів збігається з цією множиною. Наприклад, множина із шести парастрофів середнього зсуву, що визначений елементом $a$, збігається з множиною $\mathcal{M}_a$:

$$\mathcal{M}_a = \{M_a, {}^{\ell}M_a, {}^{r}M_a, {}^{s}M_a, {}^{s\ell}M_a, {}^{sr}M_a\}.$$

Перестановку $\sigma \in S_3$, зсуву ${}^{\sigma}M_a$, названо напрямком даного зсуву.

Нехай ${}^{\sigma}\mathcal{M}$ позначається множина всіх $\sigma$-трансляцій в квазігрупі. За означенням легко перевірити, що клас $LIP$ квазігруп — це клас квазігруп, коли ${}^{\ell}\mathcal{M} = {}^{\ell s}\mathcal{M}$; клас всіх $CIP$ квазігруп — це клас квазігруп, коли ${}^{\ell}\mathcal{M} = {}^{r}\mathcal{M}$.

Симетрична група $S_3$ діє на множині всіх квазігрупових класів, визначених рівностями ${}^{\sigma}\mathcal{M} = {}^{\kappa}\mathcal{M}$, $\sigma \neq \kappa$. Доведено, що за цією дією існує три парастрофні орбіти (пучки), і кожна парастрофна орбіта має три попарно парастрофні класи (теорема 2.1).

Перша парастрофна орбіта — це парастрофна орбіта (пучок), що складається з відомих класів: $MIP$, $LIP$, $RIP$ квазігруп. Звернемо увагу, що ці класи квазігруп були детально розглянуті в [77], де вперше дано означення середній $IP$ квазігрупі.

Друга парастрофна орбіта (пучок) відповідає відомому класу квазігруп з властивістю схрещеної оборотності. Два класи, парастрофні для класу $CIP$ квазігруп, раніше не були описані. Ми будемо називати їх лівою та правою квазігрупами з властивістю схрещеної оборотності. Класичні $CIP$ квазігрупи називаються в цьому контексті середніми квазігрупами з властивістю схрещеної оборотності. Означення лівої та правої $CIP$ квазігрупи було дано вперше.

Третя парастрофна орбіта (пучок) складається з трьох нових класів квазігруп, які є певними узагальненнями комутативних, лівосиметричних та правосиметричних квазігруп відповідно. Вони називаються середньою, лівою та правою дзеркальними квазігрупами.

Доведено, що усі дев'ять класів квазігруп є многовидами, визначальні тотожності були знайдені вперше та їх можна знайти в теоремі 2.2, теоремі 2.3 та теоремі 2.4. Кожен многовид має деяку властивість оборотності. Відповідні функції оборотності знайдені та представлені у вищеописаних теоремах.

Дано повну класифікацію групових ізотопів за властивостями оборотності, знайдено необхідні та достатні умови, коли груповий ізотоп матиме властивість оборотності. Знайдено функції оборотності та показано, що квазігрупа має ліву, праву та середню властивість оборотності з різними функціями оборотності.

**Мета і завдання дослідження**. *Метою дослідження* є отримання зв'язку квазігруп з властивостями оборотності з множинами трансляцій, відповідними многовидами та класифікафія групових ізотопів.

*Завдання дослідження:*

— дослідити зв'язок між рівностями множин трансляцій та знайти відповідні многовиди квазігруп;

— класифікувати отримані многовиди квазігруп за парастрофною рівносильністю;

— знайти тотожності, які визначають дані многовиди;

— знайти функції оборотності для кожного многовида;

— класифікувати групові ізотопи за отриманими властивостями оборотності;

— описати матричні квазігрупи з властивостями оборотності.

*Об'єктом дослідження* є квазігрупи з властивостями оборотності та многовиди, які їх визначають.

*Предметом дослідження* є множини трансляцій квазігруп, відповідні многовиди квазігруп з властивостями оборотності, їх парастрофні орбіти та групові ізотопи.

*Методи дослідження.* У роботі використовуються сучасні методи теорії квазігруп, загальні методи алгебри, математичного аналізу, комбінаторики та логіки.

**Наукова новизна отриманих результатів**. Основні наукові результати, отримані автором самостійно, є новими і полягають в такому:

— знайдено класи квазігруп з властивостями оборотності за напрямами трансляцій;

— описано розподіл відповідних класів квазігруп на парастрофні орбіти(пучки) згідно з парастрофною симетрією;

— доведено, що ці класи квазігруп з властивостями оборотності є многовидами та знайдено відповідні тотожності;

— знайдено функції оборотності для кожного многовида квазігруп з властивостями оборотності;

— знайдено класифікацію групових ізотопів з властивостями оборотності та побудовано в'язки многовидів з властивостями оборотності;

— описано матричні $IP$ квазігрупи та $CIP$ квазігрупи.

**Практичне значення отриманих результатів**. Результати дисертації носять теоретичний характер і можуть застосовуватися: в алгебрі — при вивченні квазігрупових тотожностей; у топології — при вивченні тотожностей у топологічних квазігрупах і лупах; у геометрії — при вивченні сіток та номограм; у дискретній математиці та k-значній логіці — при вивченні розкладів багатомісних операцій за допомогою суперпозицій; а також можуть бути корисними в комбінаториці — при вивченні латинських квадратів, у криптографії — при вивченні оборотних хеш-функцій та написанні секретних ключів, шифрів та кодів. Отримані результати є внеском у теорію неасоціативних структур, теорію квазігруп з властивостями оборотності та в суміжних галузях математики, зокрема в криптографії.

**Особистий внесок здобувача**. Основні результати, висвітлені в дисертації, отримано здобувачем самостійно. У праці [77] Ф. Сохацькому належить теореми 6, 7, наслідки 4, 5; у праці [100] науковому керівникові належить теорема 1, лема 3, наслідок 13. У праці [101] Ф. Сохацькому належить наслідок 1, лема 3. У праці [102] Ф. Сохацькому належить наслідок 1, 4, 5, твердження 2, І. Фриз належать твердження 5, 6, теорема 8, наслідки 9-16.

**Апробація результатів дисертації**. Результати дисертаційної роботи доповідалися на таких конференціях та семінарах:

1. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання - 2019", Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України (Львів, 25–27 травня 2019 р.);

2. XII Міжнародна алгебрична конференція присвячена 215-річчю В. Буняковського, Донецький національний університет імені Василя

Стуса (Вінниця, 2-6 липня 2019 р.);

3. Міжнародна математична конференція з квазігруп і луп “Loops‘11” (Будапешт, Угорщина 7–13 липня 2019 р.);
4. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання - 2020", Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України (Львів, 26–28 травня 2020 р.);
5. Міжнародна математична конференція, присвячена 60-річчю кафедри алгебри та математичної логіки Національного університету Тараса Шевченка (Київ, 14-17 липня 2020 р.);
6. Special meeting of the scientific seminar "Algebra and Mathematical Logic", dedicated to Prof. Valentin Belousov (Chisinau, Republic of Moldova, February 26, 2021);
7. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання - 2021", Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України Львів, 26–28 травня 2021 р.);
8. Фестиваль науки-2021, Донецький національний університет імені Василя Стуса, (Вінниця, 2021);
9. Міжнародна конференція молодих математиків, Інститут математики НАН України (Київ, 3–5 липня 2021 р.);
10. XIII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, Національний університет імені Тараса Шевченка (Київ, 6–9 липня 2021 р.);
11. The 29th conference on applied and industrial mathematics dedicated to the memory of Academician Mitrofan M. Cioban. P. 163–165. (Chisinau, Republic of Moldova, August 25-27, 2022)

**Публікації**. Результати дисертації опубліковано в 16 працях, з них 3 – у фахових виданнях України і виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз [77], [61], [102], 2 – у виданнях, включених до міжнародної наукометричної бази “Scopus” [100], [101] та 11 – у матеріалах міжнародних наукових конференцій [1, 18, 19, 62–67], [106, 107].

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел та додатку. Загальний обсяг дисертації — 153 сторінки. Список використаних джерел займає 11 сторінок та містить 110 найменувань.

# РОЗДІЛ 1

# ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Цей розділ має вступний характер та стосується ключових понять дослідження: бінарні квазігрупи, квазігрупи з властивостями оборотності, многовиди та тотожності, які визначаються ними. У ньому наведено огляд літератури та допоміжних понять, лемів та теорем, які використовуються для результатів дисертації, а також студіювання різних матеріалів напрямку нашого дослідження дисертаційної роботи.

## 1.1. Огляд літератури

Властивість оборотності має важливе значення в теорії квазігруп. Серед класів квазігруп з властивостями оборотності можна виділити такі класи: $IP$ квазігрупи, $CIP$ квазігрупи, $WIP$ квазігрупи, $\rho$-$I$-квазігрупи, $\lambda$-$I$-квазігрупи, $(\alpha, \beta, \gamma)$-$I$-квазігрупи (див., [6], [35], [47], [71], [69], [70], [95]). До того ж, клас луп з універсальною властивістю оборотності збігається з класом луп Муфанга.

Узаємозв'язки між класами квазігруп з різними властивостями оборотності є цікавими для дослідження, оскільки, досліджуючи один клас квазігруп з властивістю оборотності згідно закону парастрофної симетрії, [84] можна дослідити інші класи, які належать до однієї парастрофної орбіти. Зокрема, питання опису парастрофних орбіт (пучків) та парастрофнозамкнених напіврешіток (в'язок) многовидів квазігруп з властивостями оборотності є важливим.

У праці [77] розглядаються всі можливі парастрофи $IP$ квазігруп, які формують парастрофну орбіту $IP$ квазігруп та описано групові ізотопи, які є лівою, правою та середньою $IP$ квазігрупою з функціями оборотності

$\lambda(0) = 0$, $\rho(0) = 0$, $\mu$ відповідно.

Ліві $IP$ квазігрупи можна визначити як квазігрупи, в яких кожна ліва трансляція збігається з деякою лівою трансляцією тієї ж квазігрупи, праві $IP$ квазігрупи можна визначити як квазігрупи, в яких кожна права трансляція збігається з деякою правою трансляцією тієї ж квазігрупи [6].

Майже всі відомі (класичні) види квазігруп та луп, такі як $IP$-, $LIP$-, $RIP$-, $WIP$- та $CIP$-лупи та квазігрупи, включені до класів квазігрупи, які мають певну властивість оборотності. Нагадаємо, що $IP$- та $LIP$-квазігрупи та лупи вивчалися у працях В. Білоусова [6], Р. Брука [85], [36], $WIP$-лупи у працях Р. Баєра [22], Дж. Осборна [93], $CIP$ лупи у працях Р. Арці [35], [34], $WIP$-квазігрупи у працях Р. Баєра [22], $CIP$-квазігрупи в [26], А. Кідвела [48], $I$-, $PI$-квазігрупи та лупи в працях В.Д. Білоусова [28], [29].

У [49] показано, що всі вищезазначені види квазігруп з властивістю оборотності можна класифікувати на три типи, які назвали $\lambda$-, $\rho$-інверсними та $(\alpha, \beta, \gamma)$-інверсними.

В. Білоусов визначив $\lambda$-інверсні та $\rho$-інверсні квазігрупи [28]. Ці квазігрупи є узагальненням лівих $IP$ та правих $IP$ квазігруп.

Серед класичних об'єктів теорії квазігруп виділяють лупи зі слабкою властивістю оборотності ($WIP$ лупи) та лупи з властивістю схрещеної оборотності ($CIP$ лупи). Перший тип був визначений Р. Баєром [22] в одній з перших статей, присвячених теорії квазігруп, а другий тип — Р. Арці [34]. Дж. Осборн [93] отримав важливі результати щодо $WIP$ луп, тоді як досить детальне дослідження $CIP$ луп було зроблено Р. Арці у серії статей. Пізніше узагальнення обох цих типів луп було введено Б. Карклін та В. Карклінш [47], яке ці автори назвали $m$-оборотною лупою. Крім того, визначили автоморфно-інверсну лупу та універсально-автоморфно-інверсну лупу.

А. Кідвел та В. Щербаков [71] показали, що $CIP$-лупи та квазігрупи з довгими оборотними циклами мають певні властивості, що робить їх особливо придатними для використання в криптографії. Те саме стосується узагальненої структури, що називаються $m$-інверсними лупами і квазігрупами.

А. Кідвел і В. Щербаков у праці [70] довели існування $(r, s, t)$-інверсних квазігруп для кожного набору натуральних чисел $r$, $s$, $t$, як узагальнення $WIP$, $CIP$, $m$-інверсних луп (квазігруп) та описали можливе застосування в криптографії. Зокрема, $CIP$ квазігрупа є 0-інверсною лупою, введених Б. Карклін та В. Карклінш у праці [47] та $CIP$ квазігрупа є $(r, s, t)$-інверсною квазігрупою, якщо $r = t = 0$, $s = 1$ [71]. Також вони узагальнили це поняття до поняття $(r, s, t)$-інверсної квазігрупи та показали, що $CIP$-квазігрупи, $WIP$ квазігрупи та $m$-інверсні квазігрупи можуть розглядатися як особливі приклади цієї нової структури. Таким чином, вони описали властивості, які мають вищезгадані типи квазігруп та луп у більш загальному вигляді.

У праці [35] Р. Арці доведено, що ізотопні $IP$ лупи є ізоморфними, знайдена необхідна умова існування скінченної автоморфно-оборотної лупи, що містить лише одиничний елемент та оборотні цикли однакової довжини. В [47] визначено автоморфно-оборотну лупу та універсально-автоморфно-оборотну лупу.

Автоморфно-оборотною лупою $(Q; \cdot)$ називається лупа, в якій підстановка правого оберненого елемента є автоморфізмом: $J(x \cdot y) = J(x) \cdot J(y)$ для всіх $x, y \in Q$. Деяка $IP$ лупа ($CIP$ лупа), у всіх ізотопах яких перетворення $J$ є автоморфізмом, є лупою Муфанг (абелевою групою) [34].

У праці [55] дано повну класифікацію групових ізотопів за групами їх парастрофних симетрій, уточнено класифікацію лінійних ізотопів скінченних циклічних груп та ізотопів груп простого порядку.

У [31] представлено деяке узагальнення оборотних тотожностей для луп, знайдено приклади, на яких показано метод обчислення цих тотожностей, описано деякі універсальні співвідношення між лівою, правою та середньою трансляціями.

В. Білоусов і Б. Цуркан [30] дають основні елементарні властивості $CIP$ квазігруп, знайдено необхідні та достатні умови, щоб ізотоп $CIP$ квазігрупи був також $CIP$ квазігрупою і прийшли до деякого класу квазігруп, який визначається тотожностями Муфанг. Виявилось, що квазігрупи даного класу є $CIP$ квазігрупами і вони є ізотопні абелевим групам. У [30] доведено, що, якщо довільна лупа, ізотопна $CIP$ квазігрупі є $CIP$ лупою, то $CIP$ квазігрупа буде медіальною.

Інакше кажучи, показано, що, якщо властивість $CIP$ є універсальною (інваріантна при ізотопії луп), то ця лупа є абелевою групою.

У праці [43] введено поняття неасоціативних скінченних оборотних луп ($NAFIL$) — це лупи, кожен елемент яких має єдиний двосторонній обернений елемент. Про такий клас луп не так багато відомо, але знаємо, що клас луп $NAFIL$ включає такі відомі лупи: $IP$ лупи ($LIP$, $RIP$), лупи Муфанг, лупи Бола та лупи з властивістю схрещеної оборотності ($CIP$). Ці дослідження показали, що клас луп $NAFIL$ застосовується в таких різних галузях, як комбінаторика, скінченна геометрія, теорія квазігруп, алгебри Келі, а також у теоретичній фізиці.

Результати визначення та характеристики всіх неасоціативних скінченних оборотних луп ($NAFIL$) порядку 7, які мають властивості оборотності, представлені в роботі [42]. Показано, що з 2333 неізоморфних луп NAFIL порядку 7 лише один має властивість оборотності ($IP$), десять мають ліву властивість оборотності ($LIP$) і десять — праву властивість оборотності ($RIP$). Деякі з цих луп мають характерні закономірності, які можна узагальнити та використати при побудові подібних систем вищих порядків.

Деяке узагальнення рівностей для $IP$ луп представлено у праці [38] і доведено, що лупи порядку $n < 7$ задовольняють одній із цих узагальнених рівностей. Крім того, було описано деякі універсальні співвідношення між лівою, правою та середньою трансляціями.

Знайдено необхідні і достатні умови, щоб квазігрупа $(Q; \circ)$, визначена над лупою $(Q; +)$, була $WIP$-квазігрупою.

Згідно з законом парастрофної симетрії, Г. Крайнічук доведено, що тотожності довжини два визначають 14 многовидів, а тотожності довжини три — 74 многовиди, які розподілені, згідно з законом парастрофної симетрії, в 6 та 20 парастрофних орбіт відповідно [53], [55].

Класично теорія оборотних функцій (квазігруп) та їх супутніх об'єктів: луп, латинських квадратів, кубів і гіперкубів, застосовується в комбінаториці, дискретній математиці, алгебрі, геометрії, теорії планування і проведення експериментів тощо.

Останнім часом сфера використання оборотних функцій та фукційних рівнянь їх різновидів розширилася до застосування у криптографії та написанні кодів у шифруванні. Особливо це стосується $n$-арних функцій. Найбільш вивченими серед них є двомісні функції (бінарні операції) із певними властивостями для застосування.

## 1.2. Оборотні операції, квазігрупи

У дисертації розглядається сукупність усіх оборотних (квазігрупових) операцій, що визначені на одній і тій же множині. Множину називають базовою або носієм і позначають через $Q$. Операції будемо розглядати на множині бінарних операцій.

***Оборотні операції.*** Нехай $Q$ буде базовою множиною для операцій, які розглядаються. Бінарна операція $f$ називається *оборотною* якщо вона є оборотним елементом в обох моноїдах: *лівосиметричний моноїд* $(\Omega; \underset{\ell}{\oplus}, e_\ell)$ і *правосиметричний моноїд* $(\Omega; \underset{r}{\oplus}, e_r)$ бінарних операцій, де $\Omega$ є множиною всіх бінарних операцій і

$$
\begin{aligned}
(g \underset{\ell}{\oplus} h)(x,y) &:= g(h(x,y),y), \qquad & e_\ell(x,y) &:= x,\\
(g \underset{r}{\oplus} h)(x,y) &:= g(x,h(x,y)), \qquad & e_r(x,y) &:= y.
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

Множина всіх бінарних оборотних операцій позначається через $\Delta$. Іншими словами, операція $f$ є оборотною, якщо існує її ліва ${}^{\ell}f$ та права ${}^{r}f$ обернені, тобто рівності

$$
f \underset{\ell}{\oplus} {}^{\ell}f = e_\ell, \quad {}^{\ell}f \underset{\ell}{\oplus} f = e_\ell, \qquad f \underset{r}{\oplus} {}^{r}f = e_r, \quad {}^{r}f \underset{r}{\oplus} f = e_r \tag{1.2}
$$

виконуються. Звідси, значення будь-яких двох змінних і рівності $f(x_1,x_2) = x_3$ однозначно визначає третю. Отже, для кожного $\sigma$ з $S_3$ співвідношення

$$
{}^{\sigma}\!f(x_{1\sigma}, x_{2\sigma}) = x_{3\sigma} :\Leftrightarrow \; f(x_1,x_2) = x_3 \tag{1.3}
$$

визначає операцію ${}^{\sigma}\!f$, яка називається *парастрофом* операції $f$. Легко доводиться, що для всіх $\sigma, \kappa \in S_3$ і для всіх оборотних операцій $f$

$$
{}^{\iota}f = f, \qquad {}^{\sigma}({}^{\kappa}f) = {}^{\sigma\kappa}f. \tag{1.4}
$$

Перші дві рівності з (1.2) є еквівалентними рівності

$$
{}^{\ell}f(x_3,x_2) = x_1 :\Leftrightarrow \; f(x_1,x_2) = x_3.
$$

Співвідношення (1.3) при $\sigma = (13)$ матиме вигляд

$$
{}^{(13)}f(x_3,x_2) = x_1 :\Leftrightarrow \; f(x_1,x_2) = x_3.
$$

Отже, ${}^{\ell}f = {}^{(13)}f$.

Аналогічно третя і четверта рівності з (1.2) є еквівалентними рівності

$$
{}^{r}f(x_1,x_3) = x_2 :\Leftrightarrow \; f(x_1,x_2) = x_3.
$$

Співвідношення (1.3) при $\sigma = (23)$ матиме вигляд

$$
{}^{(23)}f(x_1,x_3) = x_2 :\Leftrightarrow \; f(x_1,x_2) = x_3.
$$

Отже, ${}^{r}f = {}^{(23)}f$.

Звідси зручно дотримуватись таких позначень $\ell := (13)$, $r := (23)$, $s := \ell r \ell = (12)$, $S_3 := \{\iota, \ell, r, s, s\ell, sr\}$.

Згідно рівності (1.4), $(\sigma, f) \mapsto {}^{\sigma}f$ є дією групи $S_3$ на множину $\Delta$ всіх бінарних оборотних операцій, визначених на базовій множині $Q$. Цю дію будемо називати *парастрофною дією.*

*Зауваження.* Як правило, ми складаємо відображення справа наліво. Тому $\alpha\beta(x)$ означає

$$\alpha\beta(x) = (\alpha \circ \beta)(x) = \alpha(\beta(x)).$$

Таким чином, згідно цього правила запис $M^{\alpha\beta}$ означає $M^{\alpha\circ\beta}$. Однак, індекси трактуються по-різному. Як продиктовано дією парастрофії, $x_{i\sigma\kappa}$ означає $x_{(i\sigma)\kappa}$. Це єдина ситуація, коли ми складаємо зліва направо.

**Квазігрупи.**

Бінарною операцією на множині $Q$ називається відображення декартового добутку $Q \times Q$ в множину $Q$. Бінарну операцію називають двоелементною або двомісною операцією.

Квазігруповою (оборотною) операцією називається функція, що визначена на скінченній чи нескінченній множині, якщо вона оборотна по кожній своїй змінній.

**Означення 1.1.** *[6] Квазігрупою називаєтьcя множина $Q$ з визначеною на ній операцією $(\cdot)$, якщо для довільних $a$, $b$ рівняння*

$$a \cdot x = b, \qquad y \cdot a = b$$

*має єдиний розв'язок. Таку квазігрупу називають ще бінарною квазігрупою.*

Квазігрупа — алгебраїчна структура в абстрактній алгебрі, яка подібна до групи тим, що в ній завжди можливе ділення (інших властивостей групи квазігрупа немає).

Алгебра $(Q; \cdot; \overset{\ell}{\cdot}; \overset{r}{\cdot})$ з тотожностями

$$(x \cdot y) \overset{\ell}{\cdot} y = x, \quad (x \overset{\ell}{\cdot} y) \cdot y = x, \quad x \overset{r}{\cdot} (x \cdot y) = y, \quad x \cdot (x \overset{r}{\cdot} y) = y \qquad (1.5)$$

називається *квазігрупою*; операція $(\cdot)$ — *головною*, операції $(\overset{\ell}{\cdot})$, $(\overset{r}{\cdot})$ називаються *лівим* та *правим діленнями* операції $(\cdot)$. Ці операції також називають *лівими* та *правими оберненими* до операції $(\cdot)$, оскільки вони є оберненими до операції $(\cdot)$ в напівгрупі $(\mathcal{O}_2, \underset{\ell}{\oplus})$ і $(\mathcal{O}_2, \underset{r}{\oplus})$ відповідно, де $\mathcal{O}_2$ позначає множину всіх бінарних операцій, визначених на множині $Q$ і виконуються такі рівності

$$(f \underset{\ell}{\oplus} g)(x, y) := f(g(x, y), y), \qquad (f \underset{r}{\oplus} g) := f(x, g(x, y)).$$

Алгебра $(Q; \cdot; \overset{\ell}{\cdot}; \overset{r}{\cdot})$ називається *лупою*, якщо вона має нейтральний елемент $e$: $ex = xe = x$ [6].

Квазігрупу зручно розглядати як алгебру з усіма її парастрофами в сигнатурі: $(Q; \cdot, \overset{\ell}{\cdot}, \overset{r}{\cdot}, \overset{s}{\cdot}, \overset{s\ell}{\cdot}, \overset{sr}{\cdot})$, коротко будемо записувати $(Q; \cdot)$, де $(\cdot)$ є її головною операцією. Якщо замінити головну операцію $(\cdot)$ на її $\sigma$-парастроф $(\overset{\sigma}{\cdot})$, то ми отримаємо алгебру $(Q; \overset{\sigma}{\cdot}, \overset{\ell\sigma}{\cdot}, \overset{r\sigma}{\cdot}, \overset{s\sigma}{\cdot}, \overset{s\ell\sigma}{\cdot}, \overset{sr\sigma}{\cdot})$, яка називається $\sigma$-парастрофом даної квазігрупи. Оскільки її головною операцією є $(\overset{\sigma}{\cdot})$, то $\sigma$-парастроф позначається через $(Q; \overset{\sigma}{\cdot})$.

Бієкції $L_a$, $R_a$, $M_a$ квазігрупи $(Q; \cdot)$ називаються *лівою*, *правою* та *середньою трансляціями*, якщо

$$L_a(x) := a \cdot x, \qquad R_a(x) := x \cdot a, \qquad M_a(x) := x \overset{r}{\cdot} a. \tag{1.6}$$

Звідси,

$$L_a^{-1}(x) = a \overset{r}{\cdot} x, \qquad R_a^{-1}(x) = x \overset{\ell}{\cdot} a, \qquad M_a^{-1}(x) = a \overset{\ell}{\cdot} x. \tag{1.7}$$

У працях [32, 41] середня трансляція позначається через $T_a$.

## 1.3. Квазігрупи з властивостями оборотності

Для асоціативних бінарних систем поняття оберненого елемента або властивості оборотності має значення лише у тому випадку, якщо система має одиничний елемент.

Однак для квазігруп властивість оборотності можна визначити навіть за відсутності одиничного елемента.

**Означення 1.2** (В. Білоусов, [30]). *Квазігрупа* $(Q;\cdot)$ *називається:*

*(I)* $\lambda$*-інверсною квазігрупою, якщо існують підстановки* $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ *множини* $Q$ *такі, що виконується рівність*

$$\lambda_1(x)\cdot\lambda_2(x\cdot y)=\lambda_3(y), \tag{1.8}$$

*(II)* $\rho$*-інверсною квазігрупою, якщо існують підстановки* $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$ *множини* $Q$ *такі, що виконується рівність*

$$\rho_1(y\cdot x)\cdot\rho_2(x)=\rho_3(y), \tag{1.9}$$

*для всіх* $x$, $y$ *з* $Q$.

**Означення 1.3** (В. Білоусов, [30]). *Квазігрупа* $(Q;\cdot)$, *яка має* $\lambda-$, $\rho-$*властивість оборотності називається* $I$*-квазігрупою.*

**Означення 1.4** (В. Білоусов, [30]). *Квазігрупа* $(Q;\cdot)$ *називається* $PI$*-квазігрупою, якщо існують підстановки* $\lambda_1$, $\lambda_2$ *множини* $Q$ *такі, що* $\lambda_1(x)\cdot\lambda_2(x\cdot y)=y$ *та існують підстановки* $\rho_1$, $\rho_2$ *множини* $Q$ *такі, що* $\rho_1(y\cdot x)\cdot\rho_2(x)=(y)$ *для всіх* $x$, $y$ *з* $Q$.

**Означення 1.5** ( [6, 95, 109]). *Квазігрупа* $(Q;\cdot)$ *називається:*

*1)* лівою $IP$-квазігрупою *(має ліву властивість оборотності), якщо існує перетворення* $\lambda$ *таке, що виконується рівність*

$$\lambda(x)\cdot(x\cdot y)=y, \tag{1.10}$$

*2)* правою $IP$-квазігрупою *(має праву властивість оборотності), якщо існує перетворення* $\rho$ *таке, що виконується рівність*

$$(y\cdot x)\cdot\rho(x)=y, \tag{1.11}$$

*при цьому* $\lambda$, $\rho$ *називаються лівою та правою функціями оборотності відповідно.*

Іншими словами, означення лівої та правої $IP$-квазігрупи можна дати таким чином:

а) квазігрупа $(Q;\cdot)$ називається лівою $IP$-квазігрупою, якщо множини лівих трансляцій та обернених до лівих трансляцій є рівними:

$$\{L_x^{-1} \mid x \in Q\} = \{L_x \mid x \in Q\}.$$

б) квазігрупа $(Q;\cdot)$ називається правою $IP$-квазігрупою, якщо множини правих трансляцій та обернених до правих трансляцій є рівними:

$$\{R_x^{-1} \mid x \in Q\} = \{R_x \mid x \in Q\}.$$

**Означення 1.6.** *[109] Квазігрупа $(Q;\cdot)$ називається $\mu$-інверсною квазігрупою, якщо існують підстановки $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ множини $Q$ такі, що виконується рівність*

$$\mu_1(x) \cdot \mu_2(y) = \mu_3(y \cdot x), \tag{1.12}$$

*для всіх $x$, $y$ з $Q$.*

**Означення 1.7** ( [77]). *Квазігрупа $(Q;\cdot)$ називається* середньою $IP$-квазігрупою *(має середню властивість оборотності), якщо існує перетворення $\mu$ таке, що виконується рівність*

$$x \cdot y = \mu(y \cdot x), \tag{1.13}$$

*при цьому $\mu$ називається середньою функцією оборотності.*

Виявляється, що квазігрупа $(Q;\cdot)$ називається *середньою $IP$ квазігрупою*, якщо множини середніх трансляцій та обернених до середніх трансляцій є рівними:

$$\{M_x^{-1} \mid x \in Q\} = \{M_x \mid x \in Q\}.$$

Квазігрупу, яка є лівою $IP$, правою $IP$ та середньою $IP$ квазігрупою називають $IP$ квазігрупою.

Р. Брук у праці [85] довів таку лему.

**Лема 1.1.** *Якщо* $(Q;\cdot)$ *— IP квазігрупа, така, що виконуються рівності 3.36, 1.15, то*

*(I) якщо* $Q$ *– комутативна квазігрупа, то* $\lambda = \rho$*;*

*(II) якщо* $Q$ *має єдиний двосторонній одиничний елемент, то* $\lambda = \rho$*;*

*(III) якщо* $\lambda = \rho = J$*, то* $J$ *є анти-автоморіфізмом множини* $Q$*;*

*(IV) якщо* $\alpha$*,* $\beta$ *є автоморфізмами множини* $Q$*, причому* $\alpha^2 = \beta^2 = \iota$ *то з цього випливає, що квазігрупа* $(Q;\circ)$*, визначена рівністю*

$$x \circ y = \alpha(x) \cdot \beta(y)$$

*має також властивість оборотності. Відображення в* $(Q;\circ)$*, які відповідають відображенням* $\lambda$ *та* $\rho$ *в* $(Q;\cdot)$ *визначаються такими рівностями:*

$$\lambda_\circ = \alpha\beta\lambda\alpha, \quad \rho_\circ = \beta\alpha\rho\beta.$$

Основні властивості лівих та правих $IP$ квазігруп були досліджені для деяких відображень $\lambda$ та $\rho$ (див. [6, 95]) та є добре відомими.

$1^\circ$ *Перетворення* $\rho$*,* $\lambda$ *є інволютивними.* [6, 95]

$2^\circ$ $(y \cdot \rho(x)) \cdot x = y$,

$x \cdot (\lambda(x) \cdot y) = y$,

$\rho(x \cdot y) = \lambda y \cdot \lambda x$,

$\lambda(x \cdot y) = \rho y \cdot \rho x$.

$3^\circ$ *Для довільного* $a$ [6, 95]

$L_{\lambda a} = L_a^{-1}$,

$R_{\rho a} = R_a^{-1}$,

$4^\circ$ *Для довільного* $a$ маємо [6, 95]:

$$\rho R_a \lambda = L_a^{-1}, \qquad \lambda L_a \rho = R_a^{-1},$$
$$\lambda R_a \rho = L_{\rho a}, \qquad \rho L_a \lambda = R_{\lambda a}.$$

Оскільки поняття середньої $IP$ квазігрупи було введено в [77], тому ми довели тільки співвідношення, які містять перетворення $\mu$ (середню функцію оборотності), які представлені в розділі 2.

Частковим випадком $IP$ квазігрупи є $TS$ квазігрупа, яка визначається таким чином:

Квазігрупа $(Q;\cdot)$ називається $TS$ *квазігрупою*, якщо в $(Q;\cdot)$ виконуються такі тотожності:

$$xy = yx, \quad x \cdot xy = y.$$

Приклад, наведений В. Білоусовим [6], демонструє квазігрупу з властивістю оборотності, де ліва та права функції оборотності є різними. Тобто ця квазігрупа має двосторонню властивість оборотності.

Нами показано, що ця квазігрупа має тристоронню властивість оборотності та середня функція оборотності є відмінною від лівої та правої функцій оборотності.

Нехай $(G;+)$ — абелева група. Операція $(\cdot)$ визначена на множині $G \times G$, ставлячи:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a + c, d - b).$$

Перетворення $\lambda$, $\rho$ визначені в [6]:

$$\lambda(a, b) := (-a, -b), \qquad \rho(a, b) := (-a, b).$$

Перетворення $\mu$ визначили наступним чином [77]:

$$\mu(a, b) := (a, -b).$$

У [6] показано, що $\lambda$, $\rho$ є лівою та правою функціями оборотності відповідно та вони є різними:

$$\lambda(c, d) \cdot [(c, d) \cdot (a, b)] = (-c, -d)(c + a, b - d) = (-c + c + d, b - d + d) = (a, b),$$

$$[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot \rho(c, d) = (a + c, d - b)(-c, d) = (a + c - c, d - d + b) = (a, b).$$

Доведемо, що $\mu$ є середньою функцією оборотності, крім того $\mu \neq \lambda$ and $\mu \neq \rho$.

Справді, перевіримо виконання рівності (1.17).

$$\mu((a,b)\cdot(c,d)) = \mu(a+c, d-b) = (a+c, -(d-b)) = (a+c, b-d) = (c,d)\cdot(a,b),$$

Візьмемо пару $(a,a)$ і $a \neq -a$. Припустимо, що $\mu = \lambda$, тоді $\mu(a,a) = \lambda(a,a)$, іншими словами $(a,-a) = (-a,-a)$. Звідси ми отримуємо $a = -a$. Це означає, що $\mu \neq \lambda$. Доведемо, що $\mu \neq \rho$.

Припустимо, що $\mu = \rho$, тоді $\mu(a,a) = \rho(a,a)$, іншими словами $(a,-a) = (-a,a)$. Звідси ми отримуємо $a = -a$. Це означає, що $\mu \neq \rho$.

Отже, $\mu$ є середньою функцією оборотності, більше того, не є ні лівою, ні правою функціями оборотності. Цей приклад показав, що існують тристоронні $IP$ квазігрупи з різними функціями оборотності.

Якщо $(Q;\cdot)$ є лупою з одиничним елементом $\iota$ і кожен елемент $x \in Q$ має єдиний лівий обернений елемент $\lambda(x)$ і єдиний правий обернений елемент $\rho(x)$ такий, що $\lambda(x)\cdot x = x\cdot\rho(x) = \iota$.

Однак саме існування цих обернених елементів не означає виконання тотожностей (3.36), (1.15). Таким чином, не кожна лупа має властивість оборотності. У [95] показано приклад, який підтверджує представлений факт.

**Означення 1.8** ( [6, 28, 95, 109]). *Квазігрупа $(Q;\cdot)$ називаеться:*

*1)* $CIP$-квазігрупою*, якщо існує перетворення $\gamma$ таке, що виконуеться рівність*

$$(x\cdot y)\cdot\gamma(x) = y, \tag{1.14}$$

*2)* $WIP$-квазігрупою*, якщо існує перетворення $\varphi$ таке, що виконуеться рівність*

$$x\cdot\varphi(y\cdot x) = \varphi(y), \tag{1.15}$$

*3)* $m$-інверсною квазігрупою*, якщо існує перетворення $J$ таке, що виконуеться рівність*

$$J^m(x\cdot y)\cdot J^{m+1}(x) = J^m(y), \tag{1.16}$$

*4)* $(r,s,t)$- інверсною квазігрупою*, якщо існує перетворення* $J$ *таке, що виконується рівність*

$$J^r(x \cdot y) \cdot J^s(x) = J^t(y), \tag{1.17}$$

*при цьому* $\gamma$*,* $\varphi$ *та* $J$ *називаються функціями оборотності.*

**Означення 1.9.** *Лупа* $(Q; \cdot)$*, в якій підстановка правого оберненого елемента є автоморфізмом:*

$$J(xy) = J(x) \cdot J(y), \quad x, y \in Q$$

*називається автоморфно-інверсною лупою (*$AI$*-лупою).*

**Означення 1.10.** $AI$*-лупа* $(Q; \cdot)$*, будь-який* $LP$*-ізотоп якої є* $AI$*-лупою, називається універсально-автоморфно-інверсною лупою (*$UAI$*-лупою).*

У праці [35] доведено, що у $CIP$ квазігрупі перетворення $\gamma$ є автоморфізмом.

І. Флоря, Н. Дідурик навели приклад, коли $IP$ квазігрупа не є $WIP$ квазігрупою. Г. Пфлюгфельдер у праці [95] довела, що кожна $CIP$ лупа є $WIP$ лупою.

Приклад лупи з властивістю схрещеної оборотності, яка не є $IP$ лупою, побудовано у працях Р. Арці [34, 35].

**Приклад.** [34] Лупа $(Q; \cdot)$ з операцією $(\cdot)$, яка визначена таблицею

| $\cdot$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 2 | 1 | 4 | 5 | 3 |
| 3 | 3 | 5 | 1 | 2 | 4 |
| 4 | 4 | 3 | 5 | 1 | 2 |
| 5 | 5 | 4 | 2 | 3 | 1 |

є $CIP$ лупою.

У праці [33] Н. Дідурик побудувала приклад $WIP$ квазігрупи та ввела поняття узагальненої $WIP$ квазігрупи ($OWIP$ квазігрупи) і дослідила їх властивості.

**Приклад.** [33] Квазігрупа $(Q; \circ)$, де $x \circ y = ax + a^{-1}y$, $(Q; +)$ – поле раціональних чисел, $a$ – фіксоване раціональне число, $a \neq 0, 1$ буде $WIP$ квазігрупою з функцією оборотності $J = -a^3y$.

Також доведено, що довільна $CIP$ квазігрупа $(Q; \cdot)$ є $WIP$ квазігрупою.

**Означення 1.11.** *Квазігрупа* $(Q; \cdot)$ *називається* $OWIP$ *квазігрупою, якщо в* $(Q; \cdot)$ *має місце рівність*

$$x \cdot J(y \cdot \alpha(x)) = J(y),$$

для довільних $x$, $y$ з $Q$, де $J$, $\alpha$ – деякі підстановки множини $Q$.

Б. Цуркан у праці [30] довів, що класи $CIP$ квазігруп та $IP$ квазігруп не співпадають і побудував $CIP$ квазігрупу, задану таблицею,

| $\cdot$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 3 | 1 | 2 | 4 |
| 1 | 2 | 1 | 4 | 0 | 3 |
| 2 | 3 | 0 | 2 | 4 | 1 |
| 3 | 1 | 4 | 0 | 3 | 2 |
| 4 | 4 | 2 | 3 | 1 | 0 |

яка не є $IP$ квазігрупою.

Властивості $CIP$ квазігруп доведені в праці [26]:

1) Якщо $(Q; \cdot)$ — $CI$ лупа з одиницею 1, то $\gamma(x) = x^{-1}$. Тому для $CI$ лупи виконується рівність $(x \cdot y) \cdot x^{-1}$=y.

2) Відображення $\gamma : x \to x^{-1}$ є підстановкою множини $Q$ і $\gamma\gamma^{-1} = \iota$. У довільній $CI$ квазігрупі виконується рівність ${}^{-1}(x^{-1}) = ({}^{-1}x)^{-1} = x$.

3) Розв'язком рівняння $ax = b$ буде $x = ba^{-1}$, а рівняння $ya = b$ – відповідно $y = {}^{-1}ab$.

4) Виконуються рівності $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$, ${}^{-1}(xy) = {}^{-1}x^{-1}y$.

5) Підстановка $\gamma$ є автоморфізмом квазігрупи $(Q;\cdot)$.

6) У довільній $CI$ квазігрупі виконуються рівності:

$\gamma R_a \gamma^{-1} = R_{\gamma a}$,

$\gamma^{-1} L_a \gamma = L_{\gamma^{-1} a}$,

$\gamma^{-1} R_a \gamma = R_{\gamma^{-1} a}$,

$\gamma L_a \gamma^{-1} = L_{\gamma a}$.

## 1.4. Закон парастрофної симетрії

У праці Ф. Сохацького [84] детально представлено закон парастрофної симетрії.

Нехай $P$ довільне твердження в класі квазігруп $\mathfrak{A}$. Твердження ${}^{\sigma}P$ називаємо $\sigma$-парастрофом твердження $P$, якщо його можна отримати з $P$ заміною кожного парастрофа $(\overset{\tau}{\cdot})$ на $(\overset{\tau\sigma^{-1}}{\cdot})$; де ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$ позначає клас всіх $\sigma$-парастрофів квазігруп з класу $\mathfrak{A}$.

**Теорема 1.1.** [84] *Нехай $\mathfrak{A}$ – клас квазігруп, то твердження $P$ є істинним $\mathfrak{A}$ тоді і тільки тоді, коли ${}^{\sigma}P$ є істинним в ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$.*

**Наслідок 1.1.** [84] *Нехай $P$ є істинним в класі квазігруп $\mathfrak{A}$, тоді ${}^{\sigma}P$ є істинним в $\mathfrak{A}$ для всіх $\sigma \in \mathrm{Ps}(\mathfrak{A})$.*

**Наслідок 1.2.** [84] *У тотально-симетричному класі квазігруп разом з довільним твердженням істинний довільний парастроф цього твердження.*

Наприклад, нехай $P$ буде твердженням у многовиді всіх дистрибутивних квазігруп, тоді ${}^{\sigma}P$ буде істинним у цьому многовиді для всіх $\sigma \in S_3$, оскільки многовид дистрибутивних квазігруп є тотально-симетричним, тобто кожний парастроф дистрибутивної квазігрупи є також дистрибутивним [76].

**Наслідок 1.3.** [84] *Тотожність* $\omega = \upsilon$ *визначає многовид квазігруп* $\mathfrak{A}$*, тоді і тільки тоді, коли* $\sigma$*-парастроф* ${}^{\sigma}(\omega = \upsilon)$ *цієї тотожності визначає многовид* ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$*, де* $\sigma \in S_3$*.*

Тотожність ${}^{\sigma}(\omega = \upsilon)$ отримується з тотожності $\omega = \upsilon$ заміною довільного парастрофа $(\overset{\tau}{\cdot})$ на $(\overset{\tau\sigma^{-1}}{\cdot})$.

Згідно означення $s\ell$-парастрофом тотожності $xy \cdot y = x$ є тотожність $(x \overset{sr}{\cdot} y) \overset{sr}{\cdot} y = x$, оскільки $(s\ell)^{-1} = sr$. Отриману тотожність запишемо у вигляді $(x \; {}^{s}(\overset{r}{\cdot}) \; y) \; {}^{s}(\overset{r}{\cdot}) \; y = x$.

З означення $s$-парастрофа випливає, що $t_1 \overset{s}{\cdot} t_2 = t_2 \cdot t_1$ для довільних термів $t_1$, $t_2$. Тому маємо рівносильну їй тотожність $y \overset{r}{\cdot} (y \overset{r}{\cdot} x) = x$.

За означенням $r$-парастрофа, маємо $y \cdot x = y \overset{r}{\cdot} x$. Знову застосуємо означення $r$-парастрофа: $x = y \cdot yx$. Отже, клас ${}^{s\ell}\mathfrak{A}$ є многовидом, який визначається тотожністю $y \cdot yx = x$.

Зауважимо, що має місце такий наслідок.

**Наслідок 1.4.** *Тотожність* ${}^{\tau}({}^{\sigma}(\omega = \upsilon))$ *рівносильна тотожності* ${}^{\tau\sigma}(\omega = \upsilon)$*, де* $\sigma, \tau \in S_3$*.*

Прикладами тотально-симетричних класів є многовид дистрибутивних квазігруп, многовид всіх квазігруп, многовид ідемпотентних квазігруп, многовид уніпотентних луп тощо [55].

Клас усіх квазігруп покритий шістьма класами [55]: класом всіх асиметричних квазігруп і п'ятьма многовидами квазігруп (комутативних, лівосиметричних, правосиметричних, напівсиметричних і тотально-симетричних). Кожен з цих класів характеризується групою симетрії його квазігрупи.

*Квазігрупа має властивість симетрії*, якщо вона задовольняє одній з таких властивостей симетрії: комутативність, симетрію зліва, симетрію справа, напівсиметрію або тотальну симетрію [55].

Якщо всі парастрофи оборотної функції збігаються, то функція називається *TS-квазігрупою.*

Елемент $e$ квазігрупи $(Q; f)$ називається односторонньо нейтральним, якщо в $(Q; f)$ виконується принаймні одна із тотожностей

$$f(e, x) = x, \qquad f(x, e) = x, \qquad f(x, x) = e.$$

Із твердження 6 із [84] випливає такий наслідок.

**Лема 1.2.** *[81] Якщо елемент квазігрупи односторонньо нейтральний, то він є односторонньо нейтральним в довільному парастрофі цієї квазігрупи.*

Аналогічно вводиться парастрофна симетрія для многовидів квазігруп [84].

**Означення 1.12.** *Многовид ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$, який складається з усіх $\sigma$-парастрофів квазігруп із $\mathfrak{A}$, називається* $\sigma$-парастрофом многовида $\mathfrak{A}$.

Многовид називається [84]:

— тотально-симетричним, якщо група парастрофних симетрій є шестиелементною множиною, тобто $\mathrm{Ps}(\mathfrak{A}) = S_3$;

— напівсиметричним, якщо група парастрофних симетрій є триелементною множиною, тобто $\mathrm{Ps}(\mathfrak{A}) = A_3$;

— однобічно-симетричним, якщо група парастрофних симетрій є двоелементною множиною, тобто $|\mathrm{Ps}(\mathfrak{A})| = 2$;

— асиметричним, якщо група парастрофних симетрій є одноелементною множиною, тобто $|\mathrm{Ps}(\mathfrak{A})| = 1$.

Парастрофною орбітою (пучком) многовидів називається множина всіх попарно парастрофних між собою многовидів. Група парастрофних симетрій многовида $\mathrm{Ps}(\mathfrak{A}) := \{\sigma \mid {}^{\sigma}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\}$ є підгрупою групи $S_3$.

Парастрофну орбіту многовидів називаємо [84]:

- *тотально-симетричною*, якщо вона має один многовид;
- *напівсиметричною*, якщо вона має 2 многовиди;
- *однобічно-симетричною*, якщо вона має 3 многовиди;

- *асиметричною*, якщо вона має 6 многовидів.

**Означення 1.13.** *[84] Перехід від тотожності $\mathfrak{id}$ до тотожності ${}^{\sigma}\mathfrak{id}$ називається парастрофним перетворенням ($\sigma$-парастрофним перетворенням), якщо її можна отримати заміною головної операції на її $\sigma^{-1}$-парастроф.*

Перетворення від тотожності $\mathfrak{id}$ до тотожності $\mathfrak{id}'$ з використанням первинних тотожностей називається первинним перетворенням. У статті Ф. Сохацького [14] вживається термін "парастрофне" перетворення.

Дві тотожності називаємо [84]:
— рівносильними, якщо вони визначають один і той самий многовид;
— первинно-рівносильними, якщо одну з них можна отримати з іншої за допомогою скінченної кількості застосувань первинних тотожностей (первинно-рівносильні тотожності є рівносильними);
— $\sigma$-парастрофними, якщо одну з іншої можна отримати за допомогою $\sigma$-парастрофних перетворень;
— $\sigma$-парастрофно-рівносильними, якщо вони визначають $\sigma$-парастрофні многовиди ($\sigma$-парастрофно-рівносильні тотожності визначають $\sigma$-парастрофні многовиди);
— $\sigma$-парастрофно-первинно-рівносильними, якщо одну з них можна отримати з іншої за допомогою скінченної кількості застосувань первинних тотожностей і $\sigma_1$-, $\sigma_2$-, $\ldots$, $\sigma_k$-парастрофних перетворень, таких що $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k = \sigma$ для деяких $k \in \mathbb{N}$.

У загальному випадку $\sigma$ будемо опускати. Наприклад, дві тотожності називаємо парастрофно-рівносильними, якщо вони $\sigma$-парастрофно-рівносильні для деяких $\sigma \in S_3$.

**Означення 1.14.** *Дія симетричної групи $S_3 = \{\iota, \ell, r, s, s\ell, sr\}$, де $\ell := (13)$, $s := (12)$, $r := (23)$, на множині $K$ називають* парастрофною дією, *тобто рівності ${}^{\iota}k = k$ і ${}^{\sigma}({}^{\tau}k) = {}^{\sigma\tau}k$ виконуються для всіх $\sigma, \tau \in S_3$, де ${}^{\sigma}k$ позначає образ пари $(\sigma, k)$. Для деякого елемента $k$ її стабілізатор* *групи* $\mathrm{Ps}(k)$ *називається* групою парастрофної симетрії *та її орбіта* $\mathrm{Po}(k)$ *називається* парастрофною орбітою.

*Обидві група парастрофної симетрії та її парастрофна орбіта визначаються такими рівностями*

$$\mathrm{Ps}(k) := \{\sigma \mid {}^{\sigma}k = k\}, \qquad \mathrm{Po}(k) := \{k_1 \mid (\exists\sigma \in S_3)\ k_1 = {}^{\sigma}k\}. \tag{1.18}$$

Квазігрупа називається [53]:

— *асиметричною*, якщо всі парастрофи попарно різні, тобто, $\mathrm{Ps}(\cdot) = \{\iota\}$;

— *комутативною*, якщо $\mathrm{Ps}(\cdot) \supseteq \{\iota, s\}$, тобто, клас усіх комутативних квазігруп описується тотожністю

$$xy = yx, \tag{1.19}$$

це означає, що $(\cdot) = \overset{s}{(\cdot)}$, $\overset{\ell}{(\cdot)} = \overset{sr}{(\cdot)}$, $\overset{r}{(\cdot)} = \overset{s\ell}{(\cdot)}$;

— лівосиметричною, якщо $\mathrm{Ps}(\cdot) \supseteq \{\iota, r\}$, тобто, клас усіх лівосиметричних квазігруп описується тотожністю

$$x \cdot xy = y, \tag{1.20}$$

це означає, що $(\cdot) = \overset{r}{(\cdot)}$, $\overset{s}{(\cdot)} = \overset{\ell}{(\cdot)}$, $\overset{s\ell}{(\cdot)} = \overset{sr}{(\cdot)}$;

— правосиметричною, якщо $\mathrm{Ps}(\cdot) \supseteq \{\iota, \ell\}$, тобто, клас усіх правосиметричних квазігруп описується тотожністю

$$xy \cdot y = x, \tag{1.21}$$

це означає, що $(\cdot) = \overset{\ell}{(\cdot)}$, $\overset{s}{(\cdot)} = \overset{r}{(\cdot)}$, $\overset{sr}{(\cdot)} = \overset{s\ell}{(\cdot)}$;

— напівсиметричною, якщо $\mathrm{Ps}(\cdot) \supseteq A_3$, тобто, клас усіх напівсиметричних квазігруп описується тотожністю

$$xy \cdot x = y, \tag{1.22}$$

це означає, що

$$(\cdot) = \overset{s\ell}{(\cdot)} = \overset{sr}{(\cdot)}, \quad \overset{s}{(\cdot)} = \overset{\ell}{(\cdot)} = \overset{r}{(\cdot)}; \tag{1.23}$$

— тотально-симетричною, якщо $\mathrm{Ps}(\cdot) = S_3$, тобто, клас усіх тотально-симетричних квазігруп описується тотожностями (1.19) і (1.21), це означає, що всі парастрофи збігаються.

Неважко перевірити правильність такої теореми.

**Теорема 1.2.** [100] *Нехай $k$ – елемент множини $K$. Кожна парастрофна дія на множині $K$ задовольняє таким властивостям:*

**1)** *парастрофна орбіта формує розбиття множини $K$;*

**2)** *група парастрофної симетрії* $\mathrm{Ps}(k)$ *буде підгрупою $S_3$;*

**3)** $\mathrm{Ps}({}^{\sigma}k) = \sigma \mathrm{Ps}(k)\sigma^{-1}$, $\sigma \in S_3$*;*

**4)** $|\mathrm{Ps}(k)| \cdot |\mathrm{Po}(k)| = 6$*;*

**5)** *потужність $|Po(k)|$ буде 1, 2, 3 або 6. Назвемо елемент $k$:*

*(I)* асиметричним*, якщо* $|\mathrm{Ps}(k)| = 1$*. Тоді його орбіта має шість різних елементів*

$$\mathrm{Po}(k) = \{k, {}^{\ell}k, {}^{r}k, {}^{s}k, {}^{s\ell}k, {}^{sr}k\}$$

*і кожен з них має $\{\iota\}$ як її групу парастрофної симетрії;*

*(II)* одно симетричним*, якщо* $|\mathrm{Ps}(k)| = 2$*. Тоді його орбіта має три різних елемента*

$$\mathrm{Po}(k) = \{k, {}^{\ell}k, {}^{r}k\},$$

*а її групи парастрофної симетрії $\{\iota, s\}$, $\{\iota, \ell\}$, $\{\iota, r\}$ є спряженими;*

*(III)* напівсиметричним*, якщо* $|\mathrm{Ps}(k)| = 3$*. Тоді його орбіта має два різних елемента*

$$\mathrm{Po}(k) = \{k, {}^{s}k\}, \qquad k = {}^{s\ell}k = {}^{sr}k, \quad {}^{s}k = {}^{\ell}k = {}^{r}k,$$

*і кожен з них має $A_3$ як її групу парастрофної симетрії;*

*(IV)* тотально симетричним*, якщо* $|\mathrm{Ps}(k)| = 6$*. Тоді його орбіта має один елемент, група парастрофної симетрії якого є симетрична група $S_3$.*

Парастрофна орбіта $IP$ квазігруп детально була розглянута в [77].

Нехай ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$ позначає клас всіх $\sigma$-парастрофів квазігрупи з $\mathfrak{A}$. Множина всіх попарно-парастрофних класів називається *парастрофною орбітою класу* $\mathfrak{A}$ [84]:

$$\mathrm{Po}(\mathfrak{A}) := \{{}^{\sigma}\mathfrak{A} \mid \sigma \in S_3\} = \{\mathfrak{A}, {}^{\ell}\mathfrak{A}, {}^{r}\mathfrak{A}, {}^{s}\mathfrak{A}, {}^{s\ell}\mathfrak{A}, {}^{sr}\mathfrak{A}\}. \tag{1.24}$$

Оскільки $(\sigma, \mathfrak{A}) \mapsto {}^{\sigma}\mathfrak{A}$ є парастрофною дією на $\mathrm{Po}(\mathfrak{A})$, то

$$|\mathrm{Ps}(\mathfrak{A})| \cdot |\mathrm{Po}(\mathfrak{A})| = 6.$$

Парастрофна орбіта многовидів однозначно визначається одним із її многовидів, тобто, якщо $\mathfrak{A}$ є многовидом, то всі елементи з $\mathrm{Po}(\mathfrak{A})$ є також многовидами, і кожен з них визначає $\mathrm{Po}(\mathfrak{A})$ повністю.

Отже, якщо тотожність визначає многовид, то вона визначає всі многовиди зі своєї парастрофної орбіти.

## 1.5. Висновки до розділу 1

У розділі подано допоміжні результати, огляд літератури із теми дослідження, наведено і систематизовано основні поняття і твердження. Зокрема:

— проаналізовано літературу з теми дослідження;

— розглянуто поняття оборотних операцій;

— наведено різні формулювання поняття квазігрупи;

— розглянуто різні означення квазігруп з властивостями оборотності;

— подано основні поняття та теореми методу парастрофної симетрії.

# РОЗДІЛ 2

# КЛАСИФІКАЦІЯ МНОГОВИДІВ КВАЗІГРУП З ВЛАСТИВОСТЯМИ ОБОРОТНОСТІ ЗА МНОЖИНАМИ ТРАНСЛЯЦІЙ

У даному розділі доведено, що трансляція має два незалежних параметри, один з яких є бієкцією носія, а другий параметр ми назвали напрямком. Розглянули властивості напрямків у квазігрупі (довели відповідні твердження). Досліджено рівність множин трансляцій різних напрямків, знайдено відповідні класи квазігруп та доведено, що ці класи є многовидами (відповідні тотожності знайдені).

## 2.1. Відношення парастрофії на трансляціях

У цьому підрозділі ми розглядаємо деякі співвідношення між трансляціями, які визначені одним і тим самим елементом у квазігрупі.

Нехай $F$ є функційною змінною квазігрупи, тобто змінна набуває значення в множині оборотних операцій носія. $\sigma$-парастроф змінної позначається через ${}^{\sigma}F$ та набуває значення ${}^{\sigma}f$, якщо $F$ набуває значення $f$. Також для функційних змінних можливі такі позначення $(\cdot)$, $(\circ)$.

У підрозділі ми розглядаємо лише предикати $P(F)$ логіки другого порядку, такщо $P(f)$ є твердженням логіки першого порядку, де $F$ є функційною змінною і $f$ є функцією, визначеною на множині.

**Означення 2.1.** *Нехай $P(F)$ є предикат в класі квазігруп $\mathfrak{A}$, де $F$ приймає значення в головних операціях квазігруп з $\mathfrak{A}$. Предикат ${}^{\sigma}P(F)$ називають* $\sigma$-парастрофом *$P(F)$, якщо його можна отримати з $P(F)$ замінивши $F$ на ${}^{\sigma^{-1}}F$.*

"*$P(F)$ є предикатом у класі квазігруп $\mathfrak{A}$*" означає, що $P(F)$ не містить ні функційних, ні окремих констант, а функційні змінні $F$ приймають значення серед головних операцій у класі квазігруп $\mathfrak{A}$.

Ми говоримо, що “$P(\cdot)$ *є істинним в квазігрупі* $(Q; f)$”, якщо $P(f)$ є істинне твердження в $(Q; f)$ та “$P(\cdot)$ *є істинним в класі квазігруп* $\mathfrak{A}$”, якщо це істина в кожній квазігрупі класу $\mathfrak{A}$.

**Твердження 2.1.** ${}^{\kappa}({}^{\sigma}P)$ *і* ${}^{\kappa\sigma}P$ *є тотожніми предикатами.*

**Доведення.** Нехай $P(\cdot)$ є предикатом в класі квазігруп $\mathfrak{A}$. Згідно означення, ${}^{\sigma}P(\cdot)$ отримано з $P(\cdot)$ заміною $(\cdot)$ на $(\overset{\sigma^{-1}}{\cdot})$.

Щоб отримати ${}^{\kappa}({}^{\sigma}P)(\cdot)$, потрібно замінити $(\cdot)$ на $(\overset{\kappa^{-1}}{\cdot})$ в ${}^{\sigma}P(\cdot)$.

Таким чином, ${}^{\kappa}({}^{\sigma}P)(\cdot)$ отримується з $P(\cdot)$ замінюючи $(\cdot)$ на $(\overset{\sigma^{-1}\kappa^{-1}}{\cdot}) = (\overset{(\kappa\sigma)^{-1}}{\cdot})$. Тому ${}^{\kappa}({}^{\sigma}P)$ і ${}^{\kappa\sigma}P$ є тотожніми предикатами. $\square$

Нехай $(Q; \circ)$ буде квазігрупою та $P$ є твердженням, визначеним в $(Q; \circ)$. *Парастрофна орбіта* $\mathrm{Po}(P)$ та *множина парастрофної симетрії* $\mathrm{Ps}^{\circ}(P)$ твердження $P$ визначаються рівностями:

$$\mathrm{Po}(P) := \{{}^{\sigma}P \mid \sigma \in S_3\}, \qquad \mathrm{Ps}^{\circ}(P) := \{\sigma \mid {}^{\sigma}P \text{ є істинним в } (Q; \circ)\}.$$

Будемо писати $\mathrm{Ps}^{\sigma}(P)$ замість $\mathrm{Ps}^{\overset{\sigma}{\circ}}(P)$, якщо це не призведе до непорозуміння.

**Лема 2.1.** *[100] Нехай $(Q; \circ)$ буде квазігрупою, $P(\cdot)$ є твердженням та $(\cdot)$ буде функційною змінною.*

*(I) Якщо $P(\cdot)$ є істинним в квазіруппі $(Q; \circ)$, тобто $P(\circ)$ є істинним, тоді для всіх $\sigma \in S_3$, ${}^{\sigma}P(\cdot)$ є істинним в його $\sigma$-парастрофі $(Q; \overset{\sigma}{\circ})$;*

*(II) “${}^{\sigma}P(\cdot)$ є істинним в $\nu$-парастрофі $(Q; \circ)$” еквівалентне $\sigma \in \nu\mathrm{Ps}^{\iota}(P)$;*

*(III) $\mathrm{Ps}^{\nu}(P) = \nu\mathrm{Ps}^{\iota}(P)$;*

*(IV) Якщо $\mathrm{Ps}^{\iota}(P)$ є групою, тоді $S_3$ діє на $\mathrm{Po}(P)$ щодо бінарного співвідношення “бути істинним у парастрофі даної квазігрупи”.*

Кожен елемент $a$ квазігрупи $(Q; \cdot)$ визначає шість бієкцій: ліві, праві, середні трансляції та їх обернені.

$$\mathscr{M}_a := \{M_a, M_a^{-1}, L_a, L_a^{-1}, R_a, R_a^{-1}\}. \tag{2.1}$$

Загальновідомо, що кожен елемент визначає однакову множину біекцій у кожному парастрофі квазігрупи (див. для прикладу [20, 31, 32, 41]). Але виникає питання: яка залежність між трансляціями в квазігрупі та трансляціями в $\sigma$-парастрофі квазігрупи?

В. Білоусов [30], Д. Дуплак [31], В. Щербаков [20] парастрофи трансляцій представили в таблиці

| | $\iota$ | $s$ | $\ell$ | $r$ | $s\ell$ | $sr$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_a$ | $L_a$ | $R_a$ | $M_a^{-1}$ | $L_a^{-1}$ | $R_a^{-1}$ | $M_a$ |
| $R_a$ | $R_a$ | $L_a$ | $R_a^{-1}$ | $M_a$ | $M_a^{-1}$ | $L_a^{-1}$ |
| $M_a$ | $M_a$ | $M_a^{-1}$ | $L_a^{-1}$ | $R_a$ | $L_a$ | $R_a^{-1}$ |
| $L_a^{-1}$ | $L_a^{-1}$ | $R_a^{-1}$ | $M_a$ | $L_a$ | $R_a$ | $M_a^{-1}$ |
| $R_a^{-1}$ | $R_a^{-1}$ | $L_a^{-1}$ | $R_a$ | $M_a^{-1}$ | $M_a$ | $L_a$ |
| $M_a^{-1}$ | $M_a^{-1}$ | $M_a$ | $L_a$ | $R_a^{-1}$ | $L_a^{-1}$ | $R_a$ |

У тотально-симетричній квазігрупі всі трансляції визначені одним і тим самим елементом збігаються. Незважаючи на це, відповідну сітку можна побудувати. Ось чому дві трансляції можна вважати різними, навіть коли вони збігаються як відображення. Для цього ми введемо додатковий параметр, який назвемо напрямком. Кожна трансляція матиме певний напрямок.

Означення *$\sigma$-парастрофа* лівої, правої та середньої трансляцій отримаємо з означеннь відповідних трансляцій, замінюючи головну операцію на її $\sigma^{-1}$-парастроф:

$$^{\sigma}L_a(x) := a \overset{\sigma^{-1}}{\cdot} x, \qquad ^{\sigma}R_a(x) := x \overset{\sigma^{-1}}{\cdot} a, \qquad ^{\sigma}M_a(x) := x \overset{r\sigma^{-1}}{\cdot} a, \tag{2.2}$$

де $\sigma \in S_3$.

Замінивши головну операцію на її $\kappa^{-1}$-парастроф у цих рівностях, ми отримаємо

$$^{\kappa}(^{\sigma}L_a) = {}^{\kappa\sigma}L_a, \qquad ^{\kappa}(^{\sigma}R_a) = {}^{\kappa\sigma}R_a, \qquad ^{\kappa}(^{\sigma}M_a) = {}^{\kappa\sigma}M_a. \tag{2.3}$$

Співвідношення між парастрофами різних трансляцій та їх оберненими представлені такими рівностями:

$$^{\sigma}L_a = {}^{\sigma sr}M_a, \qquad ^{\sigma}R_a = {}^{\sigma r}M_a, \qquad ^{\sigma s}M_a = (^{\sigma}M_a)^{-1}. \tag{2.4}$$

Справді,

$$^{\sigma}L_a(x) = a \overset{\sigma^{-1}}{\cdot} x = x \overset{s\sigma^{-1}}{\cdot} a = a \overset{r(\sigma sr)^{-1}}{\cdot} x = {}^{\sigma sr}M_a(x);$$

$$^{\sigma}R_a(x) = x \overset{\sigma^{-1}}{\cdot} a = x \overset{r(\sigma r)^{-1}}{\cdot} a = {}^{\sigma r}M_a(x);$$

$$^{\sigma s}M_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \; x \overset{(\sigma s)^{-1}}{\cdot} y = a \; \Leftrightarrow \; x \overset{s\sigma^{-1}}{\cdot} y = a \; \Leftrightarrow \; y \overset{\sigma^{-1}}{\cdot} x = a \; \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; ^{\sigma}M_a(y) = x \; \Leftrightarrow \; (^{\sigma}M_a)^{-1}(x) = y.$$

**Твердження 2.2.** *У всіх парастрофах квазігрупи* $(Q;\cdot)$ *деякий елемент* $a$ *визначає одну і ту ж множину трансляцій* $\mathscr{M}_a$ *(див.* (2.1)*). Більше того,*

$$\mathscr{M}_a = \{^{\sigma}L_a \mid \sigma \in S_3\} = \{^{\sigma}R_a \mid \sigma \in S_3\} = \{^{\sigma}M_a \mid \sigma \in S_3\}. \tag{2.5}$$

*А саме, такі рівності є істинними*

$$\begin{aligned} &^{\iota}M_a = M_a, && ^{\ell s}M_a = L_a, && ^{r}M_a = R_a, \\ &^{s}M_a = M_a^{-1}, && ^{\ell}M_a = L_a^{-1}, && ^{rs}M_a = R_a^{-1}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\mathscr{M}_a = \{^{\iota}M_a, {}^{s}M_a, {}^{\ell}M_a, {}^{r}M_a, {}^{\ell s}M_a, {}^{rs}M_a\}.$$

**Доведення.**

$$
\begin{aligned}
&{}^{\iota}M_a(x) \overset{(2.2)}{=} x \overset{r}{\circ} a \overset{(1.6)}{=} M_a(x),\\
&{}^{s}M_a(x) \overset{(2.2)}{=} x \overset{rs}{\circ} a = x \overset{s\ell}{\circ} a = a \overset{\ell}{\circ} x \overset{(1.7)}{=} M_a^{-1}(x),\\
&{}^{\ell}M_a(x) \overset{(2.2)}{=} x \overset{r\ell}{\circ} a = x \overset{sr}{\circ} a = x \overset{r}{\circ} a \overset{(1.7)}{=} L_a^{-1}(x),\\
&{}^{r}M_a(x) \overset{(2.2)}{=} x \overset{rr}{\circ} a = x \circ a \overset{(1.6)}{=} R_a(x),\\
&{}^{sr}M_a(x) \overset{(2.2)}{=} x \overset{rrs}{\circ} a = x \overset{s}{\circ} a = a \circ x = a \overset{(1.6)}{=} L_a(x),\\
&{}^{s\ell}M_a(x) \overset{(2.2)}{=} x \overset{r\ell s}{\circ} a = x \overset{rsr}{\circ} a = x \overset{\ell}{\circ} a \overset{(1.7)}{=} R_a^{-1}(x).
\end{aligned}
$$

□

Перетворення ${}^{\kappa}M_a$ будемо називати *$\kappa$-трансляцією* або *$\kappa$-парастрофом трансляції* $M_a$, підстановку $\kappa$ будемо називати *напрямком* трансляції ${}^{\kappa}M_a$.

Зауважимо, що трансляції напрямків $\sigma$ та $\sigma s$ є взаємооберненими для всіх $\sigma$:

$\iota$ та $s$ є напрямками середньої трансляції та оберненої до неї;

$\ell$ та $\ell s$ є напрямками лівої трансляції та оберненої до неї;

$r$ та $rs$ є напрямками правої трансляції та оберненої до неї.

Розглянемо додаткове пояснення поняття *напрямок.* Кожна квазігрупа $(Q;\circ)$ має властивість: "*В рівності*

$$x_1 \circ x_2 = x_3,$$

*значення кожної зі змінних $x_1$, $x_2$, $x_3$ однозначно визначає дві бієкції*". Отже, кожен елемент $a$ визначає шість бієкцій носія:

$$ {}^{\sigma}M_a: \quad x_{1\sigma^{-1}} \mapsto x_{2\sigma^{-1}}, \ \ x_{3\sigma^{-1}} = a, \quad \sigma \in S_3. \tag{2.7}$$

Розглянемо детальніше дану властивість:

$$\begin{array}{llllll}
\iota & {}^{\iota}M_a: \ x_{1\iota} \mapsto x_{2\iota}, & x_{3\iota}=a, & \text{тобто}, & M_a: \ x_1 \mapsto x_2, & x_3=a,\\
s & {}^{s}M_a: \ x_{1s} \mapsto x_{2s}, & x_{3s}=a, & \text{тобто}, & M_a^{-1}: \ x_2 \mapsto x_1, & x_3=a,\\
\ell s & {}^{\ell s}M_a: \ x_{1s\ell} \mapsto x_{2s\ell}, & x_{3s\ell}=a, & \text{тобто}, & L_a: \ x_2 \mapsto x_3, & x_1=a,\\
\ell & {}^{\ell}M_a: \ x_{1\ell} \mapsto x_{2\ell}, & x_{3\ell}=a, & \text{тобто}, & L_a^{-1}: \ x_3 \mapsto x_2, & x_1=a,\\
r & {}^{r}M_a: \ x_{1r} \mapsto x_{2r}, & x_{3r}=a, & \text{тобто}, & R_a: \ x_1 \mapsto x_3, & x_2=a,\\
rs & {}^{rs}M_a: \ x_{1sr} \mapsto x_{2sr}, & x_{3sr}=a, & \text{тобто}, & R_a^{-1}: \ x_3 \mapsto x_1, & x_2=a.
\end{array}$$

У тотально-симетричній квазігрупі ці перетворення збігаються як бієкції носія, але вони мають попарно різні напрямки. Отже, кожне з цих перетворень (трансляції та їх обернені) має два незалежних параметри: напрямок і підстановку базової множини. Аналогічно вектору, який також має два параметри: напрямок і довжину.

*Зауваження.* Трансляція напрямку $\kappa$ визначена елементом $a$ квазігрупи з головною операцією $\circ$ позначається через ${}^{\kappa}M_a^{\circ}$. Ми будемо опускати $(\circ)$, якщо це не призведе до непорозуміння. А саме, ми будемо писати ${}^{\kappa}M_a$ замість ${}^{\kappa}M_a^{\circ}$ та ${}^{\kappa}M_a^{\sigma}$ замість ${}^{\kappa}M_a^{\overset{\sigma}{\circ}}$.

**Лема 2.2.** *Нехай $(Q;\circ)$ – квазігрупа, тоді для всіх $a \in Q$ такі твердження є істинними:*

*(I) якщо трансляція та обернена до неї, визначені елементом $a$ мають напрямок $\kappa$ в $\sigma$-парастрофі, то вона має напрямок $\nu\kappa$ в $\nu\sigma$-парастрофі, тобто,*

$$ {}^{\kappa}M_a^{\sigma} = {}^{\nu\kappa}M_a^{\nu\sigma}; $$

*(II) множина всіх трансляцій визначених одним і тим же елементом є однаковою в кожному парастрофі цієї квазігрупи.*

**Доведення.** Для кожного $x \in Q$

$$ {}^{\nu\kappa}M_a^{\nu\sigma}(x) \overset{(2.2)}{=} x \overset{r(\nu\kappa)^{-1}(\nu\sigma)}{\circ} a = x \overset{r\kappa^{-1}\sigma}{\circ} a \overset{(2.2)}{=} {}^{\kappa}M_a^{\sigma}(x). $$

Доведення пункту II випливає з пункту I та твердження 2.2. $\square$

Нехай $(Q;\circ)$ буде квазігрупою. Розглянемо твердження $P^{\circ}(M_a)$:

$$\text{“}M_a = {}^{\kappa}M_a^{\iota} = \cdots = {}^{\omega}M_a^{\iota}\text{”},$$

$$\mathrm{Ps}^{\circ}(M_a) := \{\kappa \mid {}^{\kappa}M_a^{\iota} = M_a\}. \tag{2.8}$$

Нехай $\mathrm{Ps}(M_a)$ – група. Згідно Леми 2.1, група $S_3$ діє на парастрофну орбіту твердження $P^{\circ}(M_a)$.

Отже, кількість різних трансляцій, визначених елементом $a$ дорівнює 1, 2, 3 або 6. А це означає, що трансляції можуть бути тотально-симетричними, напівсиметричними, односиметричними або асиметричними.

Розглянемо випадки, коли трансляції будуть тотально-симетричними, напівсиметричними, односиметричними або асиметричними.

**Тотально-симетричні трансляції**. Трансляція, визначена елементом $a$ буде *тотально-симетричною*, якщо всі її трансляції, визначені елементом $a$ збігаються. А це означає, що $\mathrm{Ps}(M_a) = S_3$. Лема 2.2 означає, що всі парастрофи трансляції $M_a$ збігаються в усіх парастрофах квазігрупи.

**Твердження 2.3.** *Трансляція $M_a$ є тотально-симетричною тоді і тільки тоді, коли для всіх $x$*

$$ax = xa, \qquad x \cdot xa = a, \qquad a \cdot ax = x. \tag{2.9}$$

**Доведення.** Застосувавши рівність (1.6) та (1.7), ці рівності можуть бути записані як

$$L_a = R_a, \qquad M_a = R_a, \qquad L_a = L_a^{-1}.$$

Це означає, що трансляції усіх напрямків, визначені елементом $a$ збігаються як перетворення базової множини $Q$. $\square$

**Наслідок 2.1.** *Усі трансляції квазігрупи є тотально-симетричними тоді і тільки тоді, коли квазігрупа є тотально-симетричною.*

**Доведення.**

Нехай всі трансляції квазігрупи $(Q;\cdot)$ є тотально-симетричними, тому згідно твердження 2.3 для всіх $x, a \in Q$ виконуються такі рівності

$$ax = xa, \qquad x \cdot xa = a, \qquad a \cdot ax = x.$$

Тому, за означенням, квазігрупа $(Q;\cdot)$ є тотально-симетричною.

І навпаки, якщо квазігрупа $(Q;\cdot)$ є тотальносиметричною, то за означенням для всіх $x, a \in Q$ виконуються рівності

$$ax = xa, \qquad x \cdot xa = a, \qquad a \cdot ax = x.$$

А це означає, що згідно твердження 2.3 всі трансляції квазігрупи є тотально-симетричними. □

Наприклад, кожна група показника два є тотально-симетричною.

**Напівсиметричні трансляції.** Трансляція $M_a$ вважається *напівсиметричною*, якщо $\mathrm{Ps}(M_a) \supseteq A_3 := \{\iota, s\ell, sr\}$; *строго напівсиметричною*, якщо $\mathrm{Ps}(M_a) = A_3$, тобто кожен парастроф квазігрупи має щонайбільше дві (відповідно точно дві) різні трансляції, визначені елементом $a$.

Тому кожна напівсиметрична трансляція є або тотально симетричною, або сильно напівсиметричною. А саме, згідно з Лемою 2.2, $\iota$-, $s\ell$-, $sr$-парастрофи трансляції $M_a$ збігаються в $\iota$-, $s\ell$-, $sr$-парастрофах квазігрупи $(Q;\cdot)$ і $s$-, $\ell$-, $r$-парастрофах трансляції $M_a$ збігаються в $s$-, $\ell$-, $r$-парастрофах квазігрупи.

**Твердження 2.4.** *Трансляція $M_a$ буде напівсиметричною тоді і тільки тоді, коли для всіх $x$ виконуються рівності*

$$ax \cdot a = x, \qquad x \cdot ax = a. \tag{2.10}$$

**Доведення.** Застосовуючи рівності (1.6) і (1.7), рівності (2.10) є еквівалентними рівностям

$$L_a = R_a^{-1}, \qquad L_a = M_a. \tag{2.11}$$

Застосовуючи рівність (2.6), маємо $M_a = {}^{s\ell}M_a = {}^{sr}M_a$, а це означає, що $A_3 \subseteq \mathrm{Ps}(M_a)$ і отже трансляція $M_a$ є напівсиметричною. $\square$

Якщо всі трансляції квазігрупи будуть напівсиметричними, то рівності (2.10) є істинними для всіх $x$ та $a$ в квазігрупі $Q$, тобто рівності (2.10) є еквівалентними тотожностям, які визначають многовид напівсиметричних квазігруп. Тотожності, що означають напівсиметрію наведені в [81, Наслідки 11,12].

**Наслідок 2.2.** *Квазігрупа є напівсиметричною тоді і тільки тоді, коли всі її середні трансляції є напівсиметричними.*

**Доведення.** Якщо квазігрупа є напівсиметричною, то за означенням виконуються рівності (2.10), а це означає за твердженням 2.4, що середні трансляції є напівсиметричними. І навпаки, якщо середні трансляції є напівсиметричними, то згідно твердження 2.4 виконуються рівності (2.10). А це за означенням виявляється, що квазігрупа є напівсиметричною. $\square$

Як наслідок з отриманих результатів маємо:

**Наслідок 2.3.** *У довільній квазігрупі рівносильні такі умови:*

*(I) квазігрупа є напівсиметричною;*

*(II) довільна трансляція є напівсиметричною;*

*(III) для довільного $x$, $L_x = M_x = R_x^{-1}$.*

**Доведення.** Нехай квазігрупа — напівсиметрична, тоді за означенням виконуються рівності $ax \cdot a = x$, $x \cdot ax = a$.

Згідно твердження 2.4 це означає, що трансляція буде напівсиметричною. Тобто виконується пункт (2). З пункту (2) за твердженням 2.4 випливає, що виконуються рівності (2.10). А з рівностей (2.10) маємо, що $L_a = R_a^{-1}$, $L_a = M_a$, тобто виконується пункт (3).

Виконання пункту (3) спричиняє виконання пункту (1) згідно твердження 2.4 та рівності (2.10) з означення напівсиметричної квазігрупи.

□

**Односиметричні трансляції.** Трансляція $M_a$ називається *односиметричною*, якщо її множина парастрофної симетрії є двоелементною групою $\{\iota, \sigma\}$, де $\sigma^2 = \iota$, тому, трансляція має тільки одну симетрію ${}^{\iota}M_a = {}^{\sigma}M_a$.

Група $S_3$ має три двоелементні підгрупи: $\{\iota, \sigma\}$, $\sigma = \ell, r, s$. Фактор-група $S_3/\{\iota, \sigma\}$ має три блоки:

$$\ell\{\iota, \sigma\} = \{\ell, \ell\sigma\}, \qquad r\{\iota, \sigma\} = \{r, r\sigma\}, \qquad s\{\iota, \sigma\} = \{s, s\sigma\}.$$

Отже, елемент $a$ визначає три різні трансляції. Згідно Леми 2.2

- $\ell$- та $\ell\sigma$-парастрофи трансляції $M_a$ збігаються в $\ell$- та $\ell\sigma$-парастрофах $(Q; \overset{\ell}{\circ})$, $(Q; \overset{\ell\sigma}{\circ})$: ${}^{\ell}M_a = {}^{\ell\sigma}M_a$;
- $r$- та $r\sigma$-парастрофи трансляції $M_a$ збігаються в $r$- та $r\sigma$-парастрофах $(Q; \overset{r}{\cdot})$, $(Q; \overset{r\sigma}{\cdot})$ : ${}^{r}M_a^{r} = {}^{r\sigma}M_a^{r\sigma}$;
- $s$- та $s\sigma$-парастрофи трансляції $M_a$ збігаються в $s$- та $s\sigma$-парастрофах $(Q; \overset{s}{\cdot})$, $(Q; \overset{s\sigma}{\cdot})$ : ${}^{s}M_a^{s} = {}^{s\sigma}M_a^{s\sigma}$.

**Твердження 2.5.** *Нехай $(Q; \cdot)$ — квазігрупа, тоді такі твердження є істинними:*

*(I)* $\mathrm{Ps}^{\cdot}(M_a) = \{\iota, s\}$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$x(a \overset{\ell}{\cdot} x) = a. \tag{2.12}$$

*для всіх $x \in Q$;*

*(II)* $\mathrm{Ps}^{\cdot}(M_a) = \{\iota, \ell\}$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$ax \cdot x = a; \tag{2.13}$$

*для всіх $x \in Q$;*

*(III)* $\mathrm{Ps}^{\cdot}(M_a) = \{\iota, r\}$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$x \cdot xa = a. \tag{2.14}$$

*для всіх $x \in Q$.*

**Доведення.** Рівність $\mathrm{Ps}(M_a) = \{\iota, s\}$ означає $M_a = {}^sM_a$, тобто $x \overset{r}{\cdot} a = a \overset{\ell}{\cdot} x$ що є еквівалентною до $x(a \overset{\ell}{\cdot} x) = a$.

$\mathrm{Ps}(M_a) = \{\iota, \ell\}$ означає $M_a = {}^{\ell}M_a$. Згідно (1.6), (1.7), (2.6): $M_a(y) = L_a^{-1}(y)$ для всіх $y \in Q$, тобто $y \overset{r}{\cdot} a = a \overset{r}{\cdot} y$.

Ця рівність є еквівалентною до $y \cdot (a \overset{r}{\cdot} y) = a$. Позначимо $x := a \overset{r}{\cdot} y$, тоді $y = ax$. Отже, $ax \cdot x = a$ виконується для всіх $x$.

Рівність $\mathrm{Ps}(M_a) = \{\iota, r\}$ означає $M_a = {}^rM_a$, тобто $x \overset{r}{\cdot} a = x \cdot a$ це означає $x \cdot xa = a$. □

З Твердження 2.5 випливає такий наслідок.

**Наслідок 2.4.** *[100] Кожна трансляція квазігрупи має групу* $\{\iota, s\}$ *(*$\{\iota, \ell\}$ *та* $\{\iota, r\}$*) як множину парастрофної симетрії тоді і тільки тоді, коли квазігрупа є комутативною (відповідно, ліво симетричною та право симетричною).*

**Асиметричні трансляції.** Трансляцію $M_a$ будемо називати *асиметричною*, якщо її множина парастрофної симетрії є тривіальною, тобто $\mathrm{Ps}(M_a) = \{\iota\}$. Іншими словами, елемент $a$ визначає шість різних трансляцій:

$$\mathrm{Po}(M_a) = \{M_a, {}^{\ell}M_a, {}^{r}M_a, {}^{s}M_a, {}^{s\ell}M_a, {}^{sr}M_a\}.$$

Якщо всі трансляції є асиметричними, то квазігрупа називається асиметричною.

Відмітимо, що множина $\mathrm{Ps}(M_a)$ не завжди є групою.

**Приклад 1.** Розглянемо квазігрупу $(\mathbb{Z}_5; \circ)$, де $\mathbb{Z}_5$ – кільце за модулем 5 і операція задана рівністю

$$x \circ y = x + 2y + 1.$$

Всі її трансляції, визначені елементом 2 будуть

$$ {}^{\iota}M_2(x) = M_2(x) = 2x + 3, $$

$$ {}^{\ell s}M_2(x) = L_2(x) = 2x + 3, $$

$$ {}^{r}M_2(x) = R_2(x) = x, $$

$$ {}^{s}M_2(x) = M_2^{-1}(x) = 3x + 1, $$

$$ {}^{\ell}M_2(x) = L_2^{-1}(x) = 3x + 1, $$

$$ {}^{rs}M_2(x) = R_2^{-1}(x) = x. $$

Отже, $\mathrm{Ps}(M_2) = \{\iota, \ell s\} = \{\iota, sr\}$. Це не є група, оскільки $(sr)^2 = s\ell \notin \mathrm{Ps}(M_2)$.

## 2.2. Парастрофні орбіти квазігруп з властивостями оборотності

Основними класами квазігруп, які розглядатимуться, є многовиди, тобто класи квазігруп, що визначаються тотожностями.

Рівносильні тотожності визначають один і той самий многовид, а тому визначають одну і ту саму парастрофну орбіту многовидів.

Отже, будь-які рівносильні тотожності є парастрофно-рівносильними. Проте, навпаки це не так: якщо тотожності визначають різні парастрофні многовиди, то вони нерівносильні, але парастрофно-рівносильні, оскільки парастрофні многовиди належать одній парастрофній орбіті.

Парастрофно-рівносильні тотожності визначають парастрофні многовиди [53], тобто одну і ту ж парастрофну орбіту многовидів. Оскільки кількість елементів в парастрофній орбіті многовидів дорівнює $6/|G|$, де $G$ — група парастрофних симетрій довільного многовида парастрофної орбіти, то тотожності парастрофно-нерівносильні, якщо групи симетрій відповідних многовидів різнопотужні.

*$\sigma$-напрямок множини трансляцій*, тобто *множина всіх трансляцій*

*напрямку* $\sigma$ квазігрупи $(Q;\circ)$ визначається через такі рівності

$$ {}^{\sigma}\mathcal{M}^{\circ} := \{{}^{\sigma}M_x^{\circ} \mid x \in Q\}, \quad \sigma \in S_3. $$

Ми також будемо писати ${}^{\sigma}\mathcal{M}^{\tau}$ замість ${}^{\sigma}\mathcal{M}^{\overset{\tau}{\circ}}$. Нехай

$$ \mathcal{M}^{\circ} := \{{}^{\iota}\mathcal{M}^{\circ},\ {}^{\ell}\mathcal{M}^{\circ}, {}^{r}\mathcal{M}^{\circ},\ {}^{s}\mathcal{M}^{\circ},\ {}^{\ell s}\mathcal{M}^{\circ},\ {}^{\ell r}\mathcal{M}^{\circ}\}. $$

Деякі квазігрупи задовольняють властивість: *дві або більше множини трансляцій однакового напрямку збігаються.* Наприклад, деяка ліва $IP$ квазігрупа визначається рівністю

$$ (\exists\alpha)(\forall x, y) \quad \alpha(x)\circ(x\circ y) = y. $$

Ця умова є еквівалентною такій умові $(\exists\alpha)(\forall x)\ \ L^{\circ}_{\alpha(x)} = (L^{\circ}_x)^{-1}$. Застосовуючи [100, (14)], ця рівність перетворюється на таку рівність

$$ (\exists\alpha)(\forall x) \quad {}^{\ell s}M^{\circ}_{\alpha(x)} = {}^{\ell}M^{\circ}_x. $$

Оскільки $\alpha$ є бієкцією множини $Q$, ця умова означає, що множини ${}^{\ell s}\mathcal{M}^{\circ}$ і ${}^{\ell}\mathcal{M}^{\circ}$ будуть рівними.

Отже, квазігрупа $(Q;\circ)$ є лівою $IP$ квазігрупою тоді і тільки тоді, коли

$$ {}^{\ell s}\mathcal{M}^{\circ} = {}^{\ell}\mathcal{M}^{\circ}, $$

тобто її множини трансляцій напрямків $\ell s$ і $\ell$ збігаються. Отже, клас усіх $LIP$ квазігруп визначається рівністю

$$ {}^{\ell s}\mathcal{M}^{\cdot} = {}^{\ell}\mathcal{M}^{\cdot} $$

термів, в яких $(\cdot)$ є функційною змінною, яка приймає свої значення серед головної операції у класі квазігруп. Знак $(\cdot)$ ми будемо опускати.

**Означення 2.2.** *Терм* ${}^{\sigma}M_y := x \overset{r\sigma^{-1}}{\cdot} y$ *називається* абстрактною трансляцією *напрямку* $\sigma$, *яка визначається через* $y$; ${}^{\sigma}\mathcal{M}$ *тлумачиться* абстрактною множиною трансляцій *напрямку* $\sigma$; *формула* ${}^{\sigma}\mathcal{M} = {}^{\tau}\mathcal{M}$ *є коротким записом формули*

$$ (\exists\alpha)(\forall x)(\forall y) \quad x \overset{r\sigma^{-1}}{\cdot} y = x \overset{r\kappa^{-1}}{\cdot} \alpha(y). $$

*Цю рівність будемо називати* абстрактною рівністю двох множин трансляцій напрямків $\sigma$ та $\kappa$.

У Теоремі 2.1 ми визначимо всі класи квазігруп, які розглядаються вищезазначеними рівностями.

Для цього нам потрібна наступна властивість.

**Лема 2.3.** *[100] Для всіх $\sigma, \kappa \in S_3$, $\kappa$-напрямок множини трансляцій $\sigma$-парастрофа квазігрупи має напрямок $\nu\kappa$ в $\nu\sigma$-парастрофі квазігрупи:*

$$^{\kappa}\mathcal{M}^{\sigma} = {}^{\nu\kappa}\mathcal{M}^{\nu\sigma}.$$

**Означення 2.3.** *Квазігрупа $(Q;\cdot)$ називається:*

*1)* середньою $CIP$ квазігрупою*, якщо існує перетворення $\alpha$ таке, що виконується рівність*

$$\alpha(x) \cdot yx = y, \tag{2.15}$$

*2)* лівою $CIP$ квазігрупою*, якщо існує перетворення $\beta$ таке, що виконується рівність*

$$yx \cdot y = \beta(x), \tag{2.16}$$

*3)* правою $CIP$ квазігрупою*, якщо існує перетворення $\gamma$ таке, що виконується рівність*

$$y \cdot xy = \gamma(x), \tag{2.17}$$

*при цьому $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ називаються середньою, лівою та правою функціями оборотності відповідно.*

**Означення 2.4.** *Квазігрупа $(Q;\cdot)$ називається:*

*1)* лівою дзеркальною квазігрупою*, якщо існує перетворення $\delta$ таке, що виконується рівність*

$$x \cdot xy = \delta(y), \tag{2.18}$$

*2)* правою дзеркальною квазігрупою*, якщо існує перетворення $\xi$ таке, що виконується рівність*

$$xy \cdot y = \xi(x), \tag{2.19}$$

*3)* середньою дзеркальною квазігрупою, *якщо існує перетворення $\varphi$ таке, що виконується рівність*

$$\varphi(x) \cdot y = y \cdot x, \tag{2.20}$$

*при цьому $\delta$, $\xi$ та $\varphi$ називаються лівою, правою та середньою функціями оборотності відповідно.*

**Наслідок 2.5.** *[101] Нехай $S_3$ діє на множині $K$. Якщо $k$ є таким елементом множини $K$, що ${}^s k = k$ і $k$ не збігається з жодним елементом* $\mathrm{Po}(k)$*, то елемент $k$ є односиметричним.*

Відомо, що є дві умови:

– *рівносильні*, якщо вони визначають один і той же клас квазігруп;

– *парастрофно-рівносильні*, якщо вони визначають парастрофні класи квазігруп.

Рівність множин лівої та оберненої до лівої трансляцій визначають многовид лівих $IP$ квазігруп [6], тобто, рівність множин трансляцій напрямків $\ell$ та $\ell s$.

Тому виникає питання: які квазігрупові класи визначаються всіма рівностями множин трансляції? Відповідь на це питання даємо в теоремі 2.1.

**Теорема 2.1.** *Кожна рівність двох множин трансляцій різних напрямків визначає точно один клас квазігруп. А саме,*

- *парастрофна орбіта (середніх, лівих, правих) $IP$ квазігруп:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ${}^{\iota}\mathcal{M} = {}^{s}\mathcal{M}$ | $M_x^{-1} = M_{\mu(x)}$ | $yz = \mu(zy)$ | $MIP$ *квазігрупа* | $\mathfrak{I} = {}^{s}\mathfrak{I}$ |
| ${}^{\ell}\mathcal{M} = {}^{\ell s}\mathcal{M}$ | $L_x^{-1} = L_{\lambda(x)}$ | $\lambda(x) \cdot xy = y$ | $LIP$ *квазігрупа* | ${}^{\ell}\mathfrak{I} = {}^{\ell s}\mathfrak{I}$ |
| ${}^{r}\mathcal{M} = {}^{rs}\mathcal{M}$ | $R_x^{-1} = R_{\rho(x)}$ | $yx \cdot \rho(x) = y$ | $RIP$ *квазігрупа* | ${}^{r}\mathfrak{I} = {}^{rs}\mathfrak{I}$ |

- *парастрофна орбіта (середніх, лівих, правих) $CIP$ квазігруп:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ${}^{\ell}\mathcal{M} = {}^{r}\mathcal{M}$<br>${}^{rs}\mathcal{M} = {}^{\ell s}\mathcal{M}$ | $L_x^{-1} = R_{\alpha(x)}$<br>$R_x^{-1} = L_{\alpha(x)}$ | $\alpha(x) \cdot yx = y$ | *CIP квазігрупа*<br>*MCIP квазігрупа* | $\mathfrak{C} = {}^{s}\mathfrak{C}$ |
| ${}^{\iota}\mathcal{M} = {}^{rs}\mathcal{M}$<br>${}^{s}\mathcal{M} = {}^{r}\mathcal{M}$ | $R_x^{-1} = M_{\beta(x)}$<br>$M_x^{-1} = R_{\beta(x)}$ | $xy \cdot x = \beta(y)$ | *LCIP квазігрупа* | ${}^{\ell}\mathfrak{C} = {}^{\ell s}\mathfrak{C}$ |
| ${}^{\ell s}\mathcal{M} = {}^{\iota}\mathcal{M}$<br>${}^{s}\mathcal{M} = {}^{\ell}\mathcal{M}$ | $L_x = M_{\gamma(x)}$<br>$M_x^{-1} = L_{\gamma(x)}^{-1}$ | $x \cdot yx = \gamma(y)$ | *RCIP квазігрупа* | ${}^{r}\mathfrak{C} = {}^{rs}\mathfrak{C}$ |

- *парастрофна орбіта (середніх, лівих, правих) дзеркальних квазігруп:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ${}^{sr}\mathcal{M} = {}^{r}\mathcal{M}$<br>${}^{\ell}\mathcal{M} = {}^{rs}\mathcal{M}$ | $L_x = R_{\varphi(x)}$<br>$R_x^{-1} = L_{\varphi(x)}^{-1}$ | $\varphi(x) \cdot y = y \cdot x$ | *MMP квазігрупа* | $\mathfrak{M} = {}^{s}\mathfrak{M}$ |
| ${}^{r}\mathcal{M} = {}^{\iota}\mathcal{M}$<br>${}^{s}\mathcal{M} = {}^{rs}\mathcal{M}$ | $R_x = M_{\delta(x)}$<br>$M_x^{-1} = R_{\delta(x)}^{-1}$ | $x \cdot xy = \delta(y)$ | *LMP квазігрупа* | ${}^{\ell}\mathfrak{M} = {}^{\ell s}\mathfrak{M}$ |
| ${}^{\ell}\mathcal{M} = {}^{\iota}\mathcal{M}$<br>${}^{s}\mathcal{M} = {}^{\ell s}\mathcal{M}$ | $L_x^{-1} = M_{\xi(x)}$<br>$M_x^{-1} = L_{\xi(x)}$ | $xy \cdot y = \xi(x)$ | *RMP квазігрупа* | ${}^{r}\mathfrak{M} = {}^{rs}\mathfrak{M}$ |

**Доведення.** Нехай ${}^{\sigma}\mathcal{M} = {}^{\kappa}\mathcal{M}$ буде рівністю множин абстрактних трансляцій. Лема 2.3 означає, що рівність є парастрофно еквівалентною до рівності ${}^{\iota}\mathcal{M} = {}^{\sigma^{-1}\kappa}\mathcal{M}$. Тому, достатньо розглянути рівності

$$ {}^{\iota}\mathcal{M} = {}^{\ell}\mathcal{M}, \qquad {}^{\iota}\mathcal{M} = {}^{r}\mathcal{M}, \qquad {}^{\iota}\mathcal{M} = {}^{s}\mathcal{M}, \qquad \mathcal{M} = {}^{s\ell}\mathcal{M}, \qquad \mathcal{M} = {}^{sr}\mathcal{M}. $$

За Лемою 2.3, рівність ${}^{\iota}\mathcal{M} = {}^{rs}\mathcal{M}$ є парастрофно еквівалентною до рівності ${}^{\ell s}\mathcal{M} = {}^{(\ell s)(rs)}\mathcal{M}$, тобто ${}^{\iota}\mathcal{M} = {}^{\ell s}\mathcal{M}$ є парастрофно еквівалентною до рівності ${}^{r}\mathcal{M} = {}^{r\ell s}\mathcal{M}$, іншими словами, ${}^{r}\mathcal{M} = {}^{\ell}\mathcal{M}$.

Рівність ${}^{\iota}\mathcal{M} = {}^{\ell}\mathcal{M}$ буде парастрофно еквівалентною до рівності ${}^{s}\mathcal{M} = {}^{s\ell}\mathcal{M}$ і ця рівність є еквівалентною до рівності $({}^{s}\mathcal{M})^{-1} = ({}^{s\ell}\mathcal{M})^{-1}$.

Згідно [100, (12)], це є рівність ${}^{\iota}\mathcal{M} = {}^{r}\mathcal{M}$, яка є парастрофно еквівалентною до рівності ${}^{s}\mathcal{M} = {}^{sr}\mathcal{M}$.

Таким чином, кожна множина абстрактних трансляцій буде парастрофно еквівалентною принаймні одній з рівностей

$$ {}^{\iota}\mathcal{M} = {}^{s}\mathcal{M}, \qquad {}^{r}\mathcal{M} = {}^{\ell}\mathcal{M}, \qquad {}^{sr}\mathcal{M} = {}^{r}\mathcal{M}. \tag{2.21} $$

Класи квазігруп, що визначаються цими рівностями позначимо $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{M}$ відповідно.

За Лемою 2.3, $s$-парастрофи цих класів відповідно визначаються

$$^{s}\mathcal{M} = {}^{ss}\mathcal{M}, \qquad {}^{sr}\mathcal{M} = {}^{s\ell}\mathcal{M}, \quad {}^{ssr}\mathcal{M} = {}^{sr}\mathcal{M}.$$

Оскільки $sr = \ell s$ і $s\ell = rs$, то друга рівність матиме вигляд ${}^{\ell s}\mathcal{M} = {}^{rs}\mathcal{M}$. Згідно [100, (12)], маємо рівність $({}^{\ell}\mathcal{M})^{-1} = ({}^{r}\mathcal{M})^{-1}$, яка є еквівалентною другій рівності в (2.21). Звідси, $s$-парастроф кожного з цих класів збігається сам з собою:

$$^{s}\mathfrak{I} = \mathfrak{I}, \qquad {}^{s}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}, \qquad {}^{s}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}. \tag{2.22}$$

Згідно Наслідка 2.5, щоб довести, що кожен з класів є односиметричним, достатньо зазначити, що $\ell$-парастрофи цих класів не збігаються самі з собою. З цією метою ми знайдемо умови, які визначають ці класи квазігруп.

За означенням 2.2, рівності (2.21) є відповідно еквівалентними формулам

$$(\exists\alpha)(\forall x, y)\ x \overset{r}{\cdot} y = x \overset{rs}{\cdot} \mu(y),$$

$$(\exists\beta)(\forall x, y)\ x \cdot y = x \overset{r\ell}{\cdot} \alpha(y),$$

$$(\exists\gamma)(\forall x, y)\ x \overset{s}{\cdot} y = x \cdot \varphi(y).$$

Оскільки $rs = s\ell$, то

$$(\exists\alpha)(\forall x, y)\ x \overset{r}{\cdot} y = \mu(y) \overset{\ell}{\cdot} x,$$

$$(\exists\alpha)(\forall x, y)\ \alpha(y) = x \overset{\ell}{\cdot} xy,$$

$$(\exists\alpha)(\forall x, y)\ xy = y \cdot \varphi(x).$$

Першу рівність можна записати як $\mu(y) = (x \overset{r}{\cdot} y) \cdot x$. Замінимо $x \overset{r}{\cdot} y$ на $z$, тобто $xz = y$, тому $\mu(xz) = zx$.

Отже, класи $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{M}$ відповідно визначаються:

$$(\exists\alpha)(\forall x,y)\ \mu(xy)=yx,$$

$$(\exists\alpha)(\forall x,y)\ \alpha(y)\cdot xy=x, \tag{2.23}$$

$$(\exists\alpha)(\forall x,y)\ xy=y\cdot\varphi(x).$$

Існує щонайменше два способи пошуку умов для опису $\sigma$-парастрофів ${}^{\sigma}\mathfrak{I}$, ${}^{\sigma}\mathfrak{C}$, ${}^{\sigma}\mathfrak{M}$ цих класів квазігруп:

1) знайти $\sigma$-парастрофи (2.23), замінивши головну функційну змінну $(\cdot)$ на її $\sigma^{-1}$-парастроф $(\overset{\sigma^{-1}}{\cdot})$;

2) знайти $\sigma$-парастрофи цих рівностей (2.21) застосовуючи Лему 2.3, а потім знайти умови, використовуючи Означення 2.2. Ми проілюструємо обидва з них якщо $\sigma=\ell$ і $\sigma=r$.

Нехай $\sigma=\ell$. Знайдемо $\ell$-парастрофи умов (2.23), ми замінимо $(\cdot)$ на $(\overset{\ell}{\cdot})$ тому що $\ell^{-1}=\ell$:

$$(\exists\alpha)(\forall x,y)\ \lambda(x\overset{\ell}{\cdot}y)=y\overset{\ell}{\cdot}x,$$

$$(\exists\alpha)(\forall x,y)\ \beta(y)\overset{\ell}{\cdot}(x\overset{\ell}{\cdot}y)=x,$$

$$(\exists\alpha)(\forall x,y)\ x\overset{\ell}{\cdot}y=y\overset{\ell}{\cdot}\delta(x).$$

Нехай $z:=x\overset{\ell}{\cdot}y$, тобто $zy=x$, тоді маємо

$$(\exists\alpha)(\forall x,z)\ \lambda(z)=y\overset{\ell}{\cdot}zy,$$

$$(\exists\alpha)(\forall x,z)\ \beta(y)\overset{\ell}{\cdot}z=zy,$$

$$(\exists\alpha)(\forall x,z)\ z=y\overset{\ell}{\cdot}\delta(zy)$$

а саме,

$$(\exists\alpha)(\forall x,z)\ \lambda(z)\cdot zy=y,$$

$$(\exists\alpha)(\forall x,z)\ zy\cdot z=\beta(y),$$

$$(\exists\alpha)(\forall x,z)\ z\cdot\delta(zy)=y.$$

Помножимо третю рівніть на $z$ зліва і замінимо $zy$ на $y$: $z(z\cdot\lambda(y))=y$. Таким чином, квазігрупові класи ${}^{\ell}\mathfrak{I}$, ${}^{\ell}\mathfrak{C}$, ${}^{\ell}\mathfrak{M}$ описуються умовами

$$
\begin{aligned}
&(\exists\alpha)(\forall x, z)\ \lambda(x)\cdot xy = y,\\
&(\exists\alpha)(\forall x, z)\ xy\cdot x = \beta(y),\\
&(\exists\alpha)(\forall x, z)\ x\cdot xy = \delta(y).
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Нехай $\sigma = r$. Знайдемо $r$-парастрофи рівностей (2.21), використовуючи Лему 2.3:

$$
{}^{r}\mathcal{M} = {}^{rs}\mathcal{M}, \qquad \mathcal{M} = {}^{r\ell}\mathcal{M}, \qquad {}^{rsr}\mathcal{M} = \mathcal{M},
$$

а саме,

$$
{}^{r}\mathcal{M} = {}^{s\ell}\mathcal{M}, \qquad \mathcal{M} = {}^{sr}\mathcal{M}, \qquad {}^{\ell}\mathcal{M} = \mathcal{M}.
$$

Згідно Означення 2.2 (опустивши квантори) маємо

$$
xy = x \overset{rsr}{\cdot} \rho(y), \qquad x \overset{r}{\cdot} y = x \overset{s}{\cdot} \gamma(y), \qquad x \overset{r\ell}{\cdot} y = x \overset{r}{\cdot} \xi(y),
$$

тобто,

$$
xy = x \overset{\ell}{\cdot} \rho(y), \qquad x \overset{r}{\cdot} y = \gamma(y)\cdot x, \qquad y \overset{r}{\cdot} x = x \overset{r}{\cdot} \xi(y).
$$

Використовуючи властивості лівої та правої оборотності, ми маємо

$$
xy\cdot\rho(y) = x, \qquad x(\gamma(y)\cdot x) = y, \qquad x(y \overset{r}{\cdot} x) = \xi(y).
$$

Замінимо $y$ на $\gamma^{-1}(y)$ в другій рівності та перетворимо третю рівність, замінивши $y \overset{r}{\cdot} x =: z$ і $yz = x$: $yz\cdot z = \gamma(y)$.

Отже, квазігрупові класи ${}^{r}\mathfrak{I}$, ${}^{r}\mathfrak{C}$, ${}^{r}\mathfrak{M}$ описуються такими умовами

$$
yx\cdot\rho(x) = y, \qquad x\cdot yx = \gamma(y), \qquad xy\cdot y = \xi(x).
$$

Оскільки група $S_3$ діє на кожну множину $\mathrm{Po}(\mathfrak{I})$, $\mathrm{Po}(\mathfrak{C})$, $\mathrm{Po}(\mathfrak{M})$ та рівність (2.22) виконується, тоді згідно Наслідка 2.5 покажемо, що кожен клас $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{M}$ є односиметричним, достатньо довести наступні нерівності:

$$
\mathfrak{I} \neq {}^{\ell}\mathfrak{I}, \qquad \mathfrak{C} \neq {}^{\ell}\mathfrak{C}, \qquad \mathfrak{M} \neq {}^{\ell}\mathfrak{M}.
$$

Перша нерівність доведена в [77].

Розглянемо квазігрупу $(\mathbb{Z}_5;\circ)$, де $\mathbb{Z}_5$ є кільцем за модулем 5 і

$$x \circ y := 2x + 2 + 3y.$$

Нехай $\alpha(x) := 3x + 1$, тоді $(\mathbb{Z}_5;\circ)$ має властивість схрещеної оборотності:

$$\alpha(x) \circ (y \circ x) = 2\alpha(x) + 2 + 3(2y + 2 + 3x) = 2(3x + 1) + y + 3 - x = y,$$

отже, $(\mathbb{Z}_5;\circ)$ належить многовиду $\mathfrak{C}$ і тому $(\mathbb{Z}_5;\overset{\ell}{\circ})$ належить многовиду ${}^{\ell}\mathfrak{C}$. Це легко перевірити

$$x \overset{\ell}{\circ} y = 3x + 4 + y.$$

Припустимо, що квазігрупа $(\mathbb{Z}_5;\overset{\ell}{\circ})$ належить многовиду $\mathfrak{C}$. Це означає, що існує бієкція $\beta$ квазігрупи $\mathbb{Z}_5$ така що рівність

$$\beta(x) \overset{\ell}{\circ} (y \overset{\ell}{\circ} x) = y$$

виконується. Така рівність еквівалентна рівності $3\beta(x)+4+(3y+4+x) = y$, тобто $3\beta(x) = 4x+2y+3$ і тому $\beta(x) = 2x+y+4$. Прийшли до суперечності, оскільки $\beta(x)$ залежить від зміної $y$.

Отже, квазігрупа $(\mathbb{Z}_5;\overset{\ell}{\circ})$ не належить многовиду $\mathfrak{C}$ і тому многовиди є різними, тобто $\mathfrak{C} \neq {}^{\ell}\mathfrak{C}$.

Нехай квазігрупа $(\mathbb{Z}_7;*)$ визначається операцією $x * y := 4x + 2 + 4y$. Квазігрупа є комутативною, тому вона належить многовиду $\mathfrak{M}$ якщо $\alpha = \iota$. Це легко перевірити

$$x \overset{\ell}{*} y = 2x + 3 + 6y.$$

Квазігрупа $(\mathbb{Z}_7;\overset{\ell}{*})$ належить многовиду ${}^{\ell}\mathfrak{M}$ за означенням. Якщо вона належить многовиду $\mathfrak{M}$, то існує бієкція $\gamma$ квазігрупи $\mathbb{Z}_7$ така, що $\gamma(x)\overset{\ell}{*}y = y \overset{\ell}{*} x$ для всіх $x$ та $y$ з $\mathbb{Z}_7$.

Отже, $2\gamma(x) + 3 + 6y = 2y + 3 + 6x$ і таким чином $\gamma(x) = 5y + 3x$. Але $\gamma$ є унарною операцією (бієкцією). Тому, квазігрупа $(\mathbb{Z}_7;\overset{\ell}{\circ})$ не належить класу $\mathfrak{M}$ і таким чином $\mathfrak{M} \neq {}^{\ell}\mathfrak{M}$.

Отже, кожен із класів $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{M}$ є односиметричним. Залишається довести, що всі орбіти $\mathrm{Po}(\mathfrak{I})$, $\mathrm{Po}(\mathfrak{C})$, $\mathrm{Po}(\mathfrak{M})$ є попарно різними.

Всі групи належать класу ${}^{\ell}\mathfrak{I}$. Група, що належить класу з $\mathrm{Po}(\mathfrak{C})$ або $\mathrm{Po}(\mathfrak{M})$ є комутативною. Отже, $\mathrm{Po}(\mathfrak{I}) \neq \mathrm{Po}(\mathfrak{C})$ and $\mathrm{Po}(\mathfrak{I}) \neq \mathrm{Po}(\mathfrak{M})$.

Лупа, що належить класу з парастрофної орбіти $\mathrm{Po}(\mathfrak{C})$ задовольняє рівність $xy \cdot y = x$ і тому $yy = e$. Кожна комутативна група належить до класу $\mathfrak{M}$ і тому комутативна група порядку більше двох не належить до жодного класу з $\mathrm{Po}(\mathfrak{C})$. Отже, $\mathrm{Po}(\mathfrak{C}) \neq \mathrm{Po}(\mathfrak{M})$. □

Наприклад, коли $\alpha = \beta = \gamma = \iota$, підмноговид є многовидом усіх напівсиметричних квазігруп, які досліджувалися в [74, 81, 83].

Якщо розглянути рівності трансляцій для луп, то отримаємо такий наслідок.

**Наслідок 2.6.** *[63] Якщо обернений до деякого виду трансляції лупи $(Q; \cdot, e)$ є трансляцією деякого фіксованого виду, то лупа належить одному з таких класів луп:*

| | | |
|---|---|---|
| $L_x^{-1} = L_{\alpha x}$ | $x^{-1} \cdot xy = y$ | $LIP$ *лупа* |
| $R_x^{-1} = R_{\alpha x}$ | $yx \cdot x^{-1} = y$ | $RIP$ *лупа* |
| $M_x^{-1} = M_{\alpha x}$ | $yx = xy$ | *комутативна лупа* |
| $L_x^{-1} = R_{\alpha x}$<br>$R_x^{-1} = L_{\alpha x}$ | $xy \cdot x^{-1} = y$ | $CIP$ *лупа* |
| $L_x^{-1} = M_{\alpha x}$<br>$M_x^{-1} = L_{\alpha x}$ | $xy \cdot y = x$ | *правосиметрична лупа* |
| $R_x^{-1} = M_{\alpha x}$<br>$M_x^{-1} = R_{\alpha x}$ | $xy \cdot x = y$ | *напівсиметрична лупа* |

*де* ${}^{-1}x \cdot x = e$ *і* $x \cdot x^{-1} = e$.

## 2.3. Многовиди квазігруп з властивостями оборотності

Відмітимо, що середня $CIP$ квазігрупа є добре відомою $CIP$ квазігрупою.

Легко показати (див. [30], [68], [71]), що формули

$$xy \cdot \gamma(x) = y, \qquad x \cdot y\gamma(x) = y, \qquad \gamma(x) \cdot yx = y, \qquad \gamma(x)y \cdot x = y \quad (2.25)$$

є еквівалентними в квазігрупі $(Q; \cdot)$. Іншими словами, кожна з цих формул описує клас усіх середніх *$CIP$ квазігруп.* У праці [68], доведено такі твердження:

**Твердження 2.6.** *(I) Гомоморфний образ $CIP$ групоїда є $CIP$ групоїдом;*

*(II) Прямий добуток двох $CIP$ групоїдів є $CIP$ групоїд.*

**Лема 2.4.** *(I) Гомоморфний образ $CIP$ квазігрупи є $CIP$ квазігрупа;*

*(II) Підквазігрупа $CIP$ квазігрупи є $CIP$ квазігрупою.*

Тобто доведено, що клас всіх $CIP$ квазігруп є многовидом.

Лупа $(Q; \cdot)$ є $CIP$, якщо виконується тотожність $xy \cdot x^{-1} = y$.

У наступних теоремах знаходимо тотожності многовидів $IP$ квазігруп, $CIP$ квазігруп та дзеркальних квазігруп.

**Теорема 2.2.** *Кожний многовид парастрофної орбіти $IP$ квазігруп може бути описаний такими тотожностями:*

| *Многовид* | *Визначаюча формула* | *Визначаюча тотожність* |
|---|---|---|
| $\mathfrak{I} = {}^{s}\mathfrak{I}$ | $xy = \mu(yx)$ | $yx = z \cdot (xy \overset{\ell}{\cdot} z)$ |
| ${}^{\ell}\mathfrak{I} = {}^{sr}\mathfrak{I}$ | $\lambda(x) \cdot xy = y$ | $(z \overset{\ell}{\cdot} xz) \cdot xy = y$ |
| ${}^{r}\mathfrak{I} = {}^{s\ell}\mathfrak{I}$ | $yx \cdot \rho(x) = y$ | $yx \cdot (zx \overset{r}{\cdot} z) = y$ |

**Наслідок 2.7.** *Для кожного многовида парастрофної орбіти $IP$ квазігруп функція оборотності матиме вигляд:*

$$\mathfrak{I} = {}^{s}\mathfrak{I}\text{:} \quad (\forall z)\ \mu = L_z R_z^{-1} = {}^{\ell s}M_z{}^{rs}M_z;$$

$${}^{\ell}\mathfrak{I} = {}^{sr}\mathfrak{I}\text{:} \quad (\forall z)\ \lambda = M_z^{-1} R_z = {}^{s}M_z{}^{r}M_z;$$

$${}^{r}\mathfrak{I} = {}^{s\ell}\mathfrak{I}\text{:} \quad (\forall z)\ \rho = M_z L_z = {}^{\iota}M_z{}^{\ell s}M_z$$

**Доведення теореми 2.2 і наслідку 2.7.** У [77] доведено, що середні, ліві та праві $IP$ квазігрупові многовиди належать одній парастрофній орбіті.

Нехай $\mathfrak{I}$ позначається клас усіх середніх $IP$ квазігруп, тобто квазігрупи $(Q;\cdot)$ з визначаючою рівністю $xy = \mu(yx)$ для деякого перетворення $\mu$ множини $Q$. Рівність може бути записана як $L_y = \mu R_y$.

Таким чином, $\mu = L_y R_y^{-1}$ для всіх $y \in Q$. Підставивши $L_z R_z^{-1}$ замість $\mu$ в рівність $yx = \mu(xy)$, ми маємо $yx = L_z R_z^{-1}(xy)$.

Застосовуючи [100, (6)] і [100, (7)], отримаємо тотожність

$$yx = z \cdot (xy \overset{\ell}{\cdot} z). \tag{2.26}$$

І навпаки, нехай $(Q; \cdot, \overset{\ell}{\cdot}, \overset{r}{\cdot})$ буде квазігрупою, що задовольняє (2.26). Тотожність може бути записана як

$$z \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} z) = y \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} y), \qquad \text{тобто,} \quad L_z R_z^{-1} = L_y R_y^{-1} := \mu \quad \text{для всіх } y, z \in Q.$$

Бієкція $\mu$ не залежить від змінної $y$ та $z$, тому це функційна константа. Замінивши $z \cdot (x \overset{\ell}{\cdot} z)$ на $\mu x$ в тотожність (2.26), ми матимемо рівність $yx = \mu(xy)$. Це означає, що $IP$ квазігрупа має середню властивість оборотності.

Отже, клас $IP$ квазігруп з середньою властивістю оборотності є многовидом $\mathfrak{I}$, який визначається тотожністю (2.26).

За теоремою 2.1, клас ${}^{\ell}\mathfrak{I}$ є класом всіх лівих $IP$ квазігруп, тобто квазігрупа $(Q;\cdot)$ з визначаючою формулою

$$\lambda(x) \cdot xy = y.$$

За означеннями трансляцій, ця рівність може бути записана таким чином:

$$M_y \lambda(x) = R_y(x). \tag{2.27}$$

Звідси,

$$\lambda = M_y^{-1} R_y.$$

для всіх $y \in Q$. Замінивши $\lambda$ на $M_z^{-1} R_z$ в рівності $\lambda(x) \cdot xy = y$, ми отримаємо:

$$M_z^{-1} R_z(x) \cdot xy = y.$$

Беручи до уваги [100, (6)] та [100, (7)], ми маємо

$$(z \overset{\ell}{\cdot} xz) \cdot xy = y. \tag{2.28}$$

Навпаки, нехай $(Q; \cdot, \overset{\ell}{\cdot}, \overset{r}{\cdot})$ є квазігрупою, яка задовольняє рівність (2.28). Тотожність можна записати як

$$z \overset{\ell}{\cdot} xz = y \overset{\ell}{\cdot} xy,$$

тобто,

$$M_z^{-1} R_z = M_y^{-1} R_y := \lambda$$

для всіх $y, z \in Q$. Отже, бієкція $\lambda$ не залежить від $y$ та $z$ і є функційними константами. Замінивши $z \overset{\ell}{\cdot} xz$ на $\lambda(x)$ в тотожності (2.28), отримаємо рівність $\lambda(x) \cdot xy = y$.

Отже, клас ${}^{\ell}\mathfrak{I}$ квазігруп з лівою властивістю оборотності є многовидом, який визначається тотожністю (2.28).

За теоремою 2.1, клас ${}^{r}\mathfrak{I}$ є класом всіх правих $IP$ квазігруп, тобто квазігрупа $(D; \circ)$ з визначаючою формулою

$$(y \circ x) \circ \rho(x) = y.$$

За означеннями трансляцій, цю рівність можна записати таким чином:

$$L_{y,\circ} x \circ \rho(x) = y. \tag{2.29}$$

Звідси,

$$\rho = M_{y,\circ} L_{y,\circ}$$

для всіх $y \in Q$. Замінивши $\rho$ на $M_{z,\circ} L_{z,\circ}$ в рівності $(y \circ x) \circ \rho(x) = y$, ми отримаємо:

$$(y \circ x) \circ M_{z,\circ} L_{z,\circ}(x) = y.$$

Беручи до уваги [100, (6)] та [100, (7)], ми маємо

$$(y \circ x) \circ ((z \circ x) \overset{r}{\circ} z) = y. \tag{2.30}$$

Навпаки, нехай $(Q; \circ, \overset{\ell}{\circ}, \overset{r}{\circ})$ є квазігрупою, яка задовольняє рівність (2.30). Тотожності можна записати як

$$(y \circ x) \circ ((z \circ x) \overset{r}{\circ} z) = y,$$

тобто,

$$M_{z,\circ} L_{z,\circ} = M_{y,\circ} L_{y,\circ} := \rho$$

для всіх $y, z \in Q$. Отже, бієкція $\rho$ не залежать від $y$ та $z$ і є функційною константою. Замінивши $(z \circ x) \overset{r}{\circ} z$ на $\rho(x)$ в тотожності (2.30), отримаємо рівність $(y \circ x) \circ \rho(x) = y$.

Отже, клас $\mathfrak{I}$, ${}^{\ell}\mathfrak{I}$ та ${}^{r}\mathfrak{I}$ є квазігруповими многовидами, які визначаються тотожностями (2.26), (2.28) і (2.30) відповідно. Теорема доведена. $\square$

**Теорема 2.3.** *Кожний многовид парастрофної орбіти $CIP$ квазігруп може бути описаний такими тотожностями:*

| *Многовид* | *Визначаюча формула* | *Визначаюча тотожність* |
|---|---|---|
| $\mathfrak{C} = {}^{s}\mathfrak{C}$ | $\alpha(x) \cdot yx = y$ | $xy \cdot (xz \overset{r}{\cdot} z) = y$ |
| ${}^{\ell}\mathfrak{C} = {}^{sr}\mathfrak{C}$ | $yx \cdot y = \beta(x)$ | $yx \cdot y = zx \cdot z$ |
| ${}^{r}\mathfrak{C} = {}^{s\ell}\mathfrak{C}$ | $y \cdot xy = \gamma(x)$ | $y \cdot xy = z \cdot xz$ |

**Наслідок 2.8.** *Для кожного многовида парастрофної орбіти $CIP$ квазігруп функція оборотності матиме вигляд:*

$$\mathfrak{C} = {}^{s}\mathfrak{C}: \quad (\forall z)\ \alpha = M_z R_z = {}^{\iota}M_z {}^{r}M_z;$$

$$ {}^{\ell}\mathfrak{C} = {}^{sr}\mathfrak{C}: \quad (\forall z)\ \beta = R_z L_z = {}^{r}M_z {}^{\ell s}M_z;$$

$$ {}^{r}\mathfrak{C} = {}^{s\ell}\mathfrak{C}: \quad (\forall z)\ \gamma = L_z R_z = {}^{\ell s}M_z {}^{r}M_z$$

**Доведення теореми 2.3 та наслідку 2.8.** Нехай $\mathfrak{C}$ позначається клас всіх $CIP$ квазігруп (*з властивістю схрещеної оборотності*), тобто квазігрупи $(Q;\cdot)$, які визначаються рівністю $xy\cdot\alpha(x)=y$ для деякого перетворення $\alpha$ множини $Q$.

За Наслідком 1.3, многовид ${}^s\mathfrak{C}$ визначається рівністю

$$(x\overset{s}{\cdot}y)\overset{s}{\cdot}\alpha x=y,\quad \text{тобто,}\quad \alpha x\cdot yx=y.$$

Замінимо $x$ на $\alpha^{-1}(x)$: $x\cdot(y\cdot\alpha^{-1}(x))=y$, звідки маємо

$$x(y\cdot\alpha^{-1}(x))\cdot\alpha^{-1}(x)=y\cdot\alpha^{-1}(x).$$

Замінимо $y\cdot\alpha^{-1}(x)$ на $y$: $(x\cdot y)\cdot\alpha^{-1}(x)=y$. Оскільки формули

$$(\exists\alpha)(\forall x,y)\ xy\cdot\alpha(x)=y\quad \text{і}\quad (\exists\alpha)(\forall x,y)\ xy\cdot\alpha^{-1}(x)=y$$

є еквівалентними, то $\mathfrak{C}={}^s\mathfrak{C}$.

Відповідно до означення правої трансляції, рівність $xy\cdot\alpha(x)=y$ можна записати як $R_yx\cdot\alpha(x)=y$. За означенням середньої трансляції, ми маємо $\alpha=M_yR_y$ для всіх $y\in Q$. Замінимо $\alpha$ на $M_zR_z$ в рівності $xy\cdot\alpha(x)=y$, отримаємо рівність

$$xy\cdot M_zR_z(x)=y.$$

Беручи до уваги рівність $M_z(x)=x\overset{r}{\cdot}z$, ми маємо

$$xy\cdot(xz\overset{r}{\cdot}z)=y. \tag{2.31}$$

І навпаки, нехай $(Q;\cdot,\overset{\ell}{\cdot},\overset{r}{\cdot})$ буде квазігрупою, яка задовольняє тотожності (2.31). Цю тотожність можна записати як

$$xy\overset{r}{\cdot}y=xz\overset{r}{\cdot}z,\qquad \text{тобто}\qquad M_yR_y=M_zR_z:=\alpha\quad \text{для всіх } y,z\in Q.$$

Отже, біекція $\alpha$ не залежить від змінних $y$ та $z$ і є функційною константою. Замінимо $xz\overset{r}{\cdot}z$ на $\alpha(x)$ в тотожності (2.31), тоді отримаємо рівність $xy\cdot\alpha(x)=y$. Це означає, що квазігрупа має властивість схрещеної оборотності.

Звідси випливає, що клас квазігруп з властивістю схрещеної оборотності є многовидом $\mathfrak{C}$, визначеним тотожністю (2.31).

Залишилося знайти тотожності многовидів та їх функції оборотності. Відповідно до Наслідка 1.3, многовид ${}^{\ell}\mathfrak{C}$ описується формулою

$$(x \overset{\ell}{\circ} y) \overset{\ell}{\circ} \beta x = y$$

для деякого перетворення $\beta$. Іншими словами, якщо квазігрупа $(A;\circ)$ належить многовиду ${}^{\ell}\mathfrak{C}$, то ця тотожність виконується. Неважко переконатися, що перетворення $\beta$ є оборотними та формула є еквівалентною до рівності

$$(y \circ x) \circ y = \beta^{-1}(x). \tag{2.32}$$

Отже, $\beta^{-1} = R_{y,\circ}L_{y,\circ}$ для всіх $x, y$. Оскільки $\beta$ є функційною константою, то $\beta$ не залежить від $y$ і $x$. Отже, замінюючи їх новою змінною $z$, ми отримаємо тотожність

$$(y \circ x) \circ y = (z \circ x) \circ z. \tag{2.33}$$

Навпаки, нехай квазігрупа $(A;\circ)$ задовольняє тотожність (2.33). Вона може бути записана як $R_{y,\circ}L_{y,\circ} = R_{z,\circ}L_{z,\circ} =: \beta^{-1}$.

Звідси випливає, що співвідношення не залежить від будь-яких змінних і визначає сталу функцію $\beta$. Ось чому тотожність (2.33) означає тотожність (2.32).

Отже, тотожність (2.33) визначає многовид ${}^{\ell}\mathfrak{C}$.

Відповідно до Наслідка 1.3, многовиди ${}^{r}\mathfrak{C}$ описується формулою

$$(x \overset{r}{*} y) \overset{r}{*} \gamma x = y$$

для деякого перетворення $\gamma$. Іншими словами, якщо квазігрупа $(B;*)$ належить многовиду ${}^{r}\mathfrak{C}$, то ця тотожність виконується. Неважко переконатися, що перетворення $\gamma$ є оборотним та формула є еквівалентною до рівності

$$x * (y * x) = \gamma^{-1}(y). \tag{2.34}$$

Отже, $\gamma^{-1} = L_{x,*}R_{x,*}$ для всіх $x, y$. Оскільки $\gamma$ є функційною константою, то $\gamma$ не залежить від $y$ і $x$. Отже, замінюючи їх новою змінною $z$, ми отримаємо тотожність

$$x * (y * x) = z * (y * z). \tag{2.35}$$

Навпаки, нехай квазігрупа $(B; *)$ задовольняє тотожність (2.34). Вона може бути записана як $L_{x,*}R_{x,*} = L_{z,*}R_{z,*} := \gamma^{-1}$.

Звідси випливає, що співвідношення не залежить від будь-яких змінних і визначають деяку сталу функцію $\gamma$. Ось чому тотожність (2.35) означає тотожність (2.34). Отже, тотожність (2.35) визначає многовид ${}^{r}\mathfrak{C}$.

Теорема доведена. □

**Теорема 2.4.** *Кожний многовид парастрофної орбіти дзеркальних квазігруп описується такими тотожностями:*

| *Многовид* | *Визначаюча формула* | *Визначаюча тотожність* |
|---|---|---|
| $\mathfrak{M} = {}^{s}\mathfrak{M}$ | $\varphi(x) \cdot y = y \cdot x$ | $(zx \overset{\ell}{\cdot} z) \cdot y = yx$ |
| ${}^{\ell}\mathfrak{M} = {}^{sr}\mathfrak{M}$ | $y \cdot yx = \delta(x)$ | $y \cdot yx = z \cdot zx$ |
| ${}^{r}\mathfrak{M} = {}^{s\ell}\mathfrak{M}$ | $xy \cdot y = \xi(x)$ | $xy \cdot y = xz \cdot z$ |

**Наслідок 2.9.** *Для кожного многовида парастрофної орбіти дзеркальних квазігруп функція оборотності матиме вигляд:*

$$\mathfrak{M} = {}^{s}\mathfrak{M}: \quad (\forall z)\ \varphi = R_z^{-1}L_z = {}^{rs}M_z {}^{\ell s}M_z;$$

$${}^{\ell}\mathfrak{M} = {}^{sr}\mathfrak{M}: \quad (\forall z)\ \delta = L_z^2 = ({}^{\ell s}M_z)^2;$$

$${}^{r}\mathfrak{M} = {}^{s\ell}\mathfrak{M}: \quad (\forall z)\ \xi = R_z^2 = ({}^{r}M_z)^2$$

**Доведення теореми 2.4 та наслідку 2.9.** Нехай через $\mathfrak{M}$ позначається клас квазігруп, визначених такою умовою: існує перетворення $\varphi$ таке, що рівність $\varphi(x) \cdot y = y \cdot x$ є істинною для всіх $x$, $y$.

Згідно Наслідка 1.3, клас квазігруп ${}^{s}\mathfrak{M}$ визначається рівністю $\varphi(x) \overset{s}{\cdot} y = y \overset{s}{\cdot} x$, тобто $y \cdot \varphi(x) = x \cdot y$. У результаті фіксування змінної $y$, $\varphi$ є бієкцією. Таким чином, $x$ можемо замінити на $\varphi^{-1}x$: $y \cdot x = \varphi^{-1}x \cdot y$, або $\varphi^{-1}(x) \cdot y = y \cdot x$. Оскільки формули

$$(\exists\alpha)(\forall x, y)\ \varphi(x) \cdot y = y \cdot x \quad \text{і} \quad (\exists\varphi)(\forall x, y)\ \varphi^{-1}(x) \cdot y = y \cdot x$$

еквівалентні, тоді $\mathfrak{M} = {}^s\mathfrak{M}$. Формула $\varphi(x) \cdot y = y \cdot x$ може бути записана як $R_y\varphi = L_y$. Звідси, $\varphi = R_y^{-1}L_y$ для всіх $y \in Q$. Замінюючи $R_z^{-1}L_z$ замість $\varphi$ у рівність $\varphi(x) \cdot y = y \cdot x$, отримаємо $R_z^{-1}L_z(x) \cdot y = y \cdot x$. Беручи до уваги рівність $R_z^{-1}(x) = x \overset{\ell}{\cdot} z$, маємо

$$(zx \overset{\ell}{\cdot} z) \cdot y = yx. \tag{2.36}$$

Навпаки, нехай $(Q; \cdot, \overset{\ell}{\cdot}, \overset{r}{\cdot})$ — квазігрупа, яка задовольняє тотожність (2.36), що еквівалентно тотожності $zx \overset{\ell}{\cdot} z = yx \overset{\ell}{\cdot} y$, тобто $R_z^{-1}L_z = R_y^{-1}L_y := \varphi$ для всіх $y, z \in Q$. Отже, бієкція $\varphi$ є функціональною константою. Замінюючи $zx \overset{\ell}{\cdot} z$ на $\varphi(x)$ в тотожності (2.36), отримаємо $\varphi(x) \cdot y = yx$. Отже, клас квазігруп, який визначається тотожністю (2.36), є многовидом $\mathfrak{M}$.

Тотожності многовида та функцію оборотності потрібно знайти. Відповідно до наслідку 1.3, многовид ${}^\ell\mathfrak{M}$ описується формулою

$$\delta(x) \overset{\ell}{*} y = y \overset{\ell}{*} x,$$

для деякого перетворення $\delta$, а саме, приналежність квазігрупи $(A; *)$ многовиду ${}^\ell\mathfrak{M}$ означає, що ця тотожність виконується. У результаті фіксації $y$, перетворення $\delta$ є бієктивним. Використовуючи означення лівої оборотної $(\overset{\ell}{\circ})$, легко перевірити, що ця формула еквівалентна формулі

$$y * (y * x) = \delta(x). \tag{2.37}$$

Отже, функція оборотності $\delta$ виражається формулою $\delta = L_{y,*}^2$ для всіх $x$, $y$. Оскільки $\delta$ є сталою функцією, то $\delta$, не залежить від змінних $y$ та $x$. Тому, замінюючи її новою змінною $z$, отримаємо

$$y * (y * x) = L_{y,*}^2(x),$$

яка є еквівалентною тотожності

$$y * (y * x) = z * (z * x). \tag{2.38}$$

Навпаки, нехай квазігрупа $(A; *)$ задовольнятиме тотожності (2.38). Цю тотожність можна записати як $L^2_{y,*} = L^2_{z,*} =: \delta$ .

Таким чином, співвідношення не залежить від змінних та визначає деяку сталу функцію $\delta$. Тому, виконання тотожності (2.38), означає виконання рівності (2.37).

Отже, тотожність (2.38) визначає многовид ${}^{\ell}\mathfrak{M}$.

Тотожність многовида та функцію оборотності потрібно знайти. Відповідно до наслідку 1.3, многовид ${}^{r}\mathfrak{M}$ відповідно описується формулою

$$\xi(x) \overset{r}{\cdot} y = y \overset{r}{\cdot} x$$

для деякого перетворення $\xi$, а саме, приналежність квазігрупи $(B; \cdot)$ многовиду ${}^{r}\mathfrak{M}$ означає, що ця тотожність виконується. У результаті фіксації $y$, перетворення $\xi$ є бієктивним. Використовуючи означення правої оборотної $(\overset{r}{\circ})$, легко перевірити, що ця формула еквівалентна формулі

$$(y \cdot x) \cdot x = \xi(y). \tag{2.39}$$

Отже, функція оборотності виражається формулою $\xi = R^2_{x,\cdot}$ для всіх $x$, $y$. Оскільки $\xi$ є сталою функцією, то $\xi$ не залежить від $y$ та $x$. Тому, замінюючи її новою змінною $z$, отримаємо

$$(y \cdot x) \cdot x = R^2_{x,\cdot}(y),$$

яка є відповідно еквівалентною тотожності

$$(y \cdot x) \cdot x = (y \cdot z) \cdot z. \tag{2.40}$$

Навпаки, нехай квазігруп $(B; \cdot)$ задовольняє тотожність (2.40). Цю тотожність можна записати як $R^2_{x,\cdot} = R^2_{z,\cdot} := \xi$.

Таким чином, представлене співвідношення не залежить від змінних та визначає деяку сталу функцію $\xi$. Тому, виконання тотожності (2.40) означає виконання рівності (2.39).

Отже, тотожність (2.40) визначає многовид ${}^r\mathfrak{M}$. Теорема доведена. $\square$

Тотожності $yx \cdot y = zx \cdot z$, $y \cdot xy = z \cdot xz$, $y \cdot yx = z \cdot zx$, $xy \cdot y = xz \cdot z$ з Теореми 6 та Теореми 7 були знайдені в А. Крапежем у [72]. Дивись також [41].

## 2.4. Про деякі властивості $IP$ квазігруп

У цьому розділі описано деякі властивості $IP$ квазігруп, враховуючи закон парастрофної симетрії. Наведено приклад групоїда, який одночасно є лівою, правою та середньою $IP$ квазігрупою. Розглянуті парастрофні орбіти, що містять многовиди двосторонніх $IP$ квазігруп та тристоронніх $IP$ квазігруп.

Властивості для лівої та правої $IP$ квазігруп є добре відомими. А, оскільки поняття середньої $IP$ квазігрупи було введено вперше, тому властивості $IP$ квазігруп, які містять середню функцію оборотності $\mu$, було доповнено:

$1^\circ$ *Перетворення $\mu$ є інволютивним.*

Справді, $\mu^2(xy) = \mu(\mu(xy)) = \mu(yx) = xy$, тому $\mu^2 = \iota$.

$2^\circ$ $\lambda(x) \cdot \mu(y \cdot x) = y$,

$\mu(x \cdot y) \cdot \rho(x) = y$.

Доведення випливає з (1.17).

$3^\circ$ *Для довільного $a$ $M_{\mu a} = M_a^{-1}$.*

Нехай $M_{\mu a}(x) = y$, за означенням $x \cdot y = a$. Застосуємо $\mu$ до обох частин рівності: $y \cdot x = \mu a$, тобто $M_{\mu a}(y) = x$, тому $y = M_{\mu a}^{-1}(x)$. Отже, $M_{\mu a}^{-1} = M_a$.

4° *Для довільного* $a$ маємо :

$$\begin{aligned}
\rho R_a\lambda &= L_a^{-1}, & \lambda L_a\rho &= R_a^{-1},\\
\lambda R_a\rho &= L_{\rho a}, & \rho L_a\lambda &= R_{\lambda a},\\
\lambda L_a\mu &= R_a^{-1}\rho\mu, & \mu R_a\rho &= L_a\rho,\\
\lambda R_a\mu &= L_{\rho a}\rho\mu, & \mu R_a\lambda &= L_a\lambda,\\
\rho R_a\mu &= L_a^{-1}\lambda\mu, & \rho L_a\mu &= R_{\lambda a}\lambda\mu,\\
\mu L_a\lambda &= R_a\lambda, & \mu L_a\rho &= R_a\rho,\\
L_{\mu a}\rho &= M_a, & R_a\lambda &= M_{\mu a}^{-1}.
\end{aligned}$$

Справді, для всіх $x \in Q$ ми отримали

$\lambda L_a\mu(x) = \lambda(a \cdot \mu(x)) \overset{2^\circ}{=} \rho\mu(x) \cdot \rho a = R_{\rho a}\rho\mu(x) = R_a^{-1}\rho\mu(x);$

$\mu R_a\rho(x) = \mu(\rho(x) \cdot a) \overset{(1.17)}{=} a \cdot \rho(x) = L_a\rho(x);$

$\lambda R_a\mu(x) = \lambda(\mu(x) \cdot a) \overset{2^\circ}{=} \rho a \cdot \rho\mu(x) = L_{\rho a}\rho\mu(x);$

$\mu R_a\lambda(x) = \mu(\lambda(x) \cdot a) \overset{(1.17)}{=} a \cdot \lambda(x) = L_a\lambda(x);$

$\rho R_a\mu(x) = \rho(\mu(x) \cdot a) \overset{2^\circ}{=} \lambda a \cdot \lambda\mu(x) = L_{\lambda a}\lambda\mu(x) = L_a^{-1}\lambda\mu(x);$

$\rho L_a\mu(x) = \rho(a \cdot \mu(x)) \overset{2^\circ}{=} \lambda\mu(x) \cdot \lambda a = R_{\lambda a}\lambda\mu(x);$

$\mu L_a\lambda(x) = \mu(a \cdot \lambda(x)) \overset{(1.17)}{=} \lambda(x) \cdot a = R_a\lambda(x);$

$\mu L_a\rho(x) = \mu(a \cdot \rho(x)) \overset{(1.17)}{=} \rho(x) \cdot a = R_a\rho(x);$

Доведемо рівність: $L_{\mu a}\rho = M_a$. Маємо за означенням, що $L_{\mu a}\rho(x) = \mu a \cdot \rho(x)$.

Нехай $M_a(x) = y$, згідно означення $x \cdot y = a$, маємо $L_{\mu a}\rho(x) = \mu(x \cdot y) \cdot \rho(x) \overset{2^\circ}{=} y = M_a(x)$;

Доведемо рівність: $R_a\lambda(x) = M_{\mu a}^{-1}$. $R_a\lambda(x) = \lambda(x) \cdot a$.

Нехай $M_a(x) = y$, згідно означення $x \cdot y = a$, маємо $R_a\lambda(x) = \lambda(x) \cdot (x \cdot y) \overset{(3.36)}{=} y = M_a(x) \overset{3^\circ}{=} M_{\mu a}^{-1}(x)$.

Якщо квазігрупа має властивість оборотності, то її $\sigma$-парастроф також має властивість оборотності з такою ж функцією оборотності.

| $\iota$ | *ліва IP*, $\lambda$ | *права IP*, $\rho$ | *середня IP*, $\mu$ |
|---|---|---|---|
| $s$*-парастроф* | *права IP*, $\lambda$ | *ліва IP*, $\rho$ | *середня IP*, $\mu$ |
| $\ell$*-парастроф* | *середня IP*, $\lambda$ | *права IP*, $\rho$ | *ліва IP*, $\mu$ |
| $r$*-парастроф* | *ліва IP*, $\lambda$ | *середня IP*, $\rho$ | *права IP*, $\mu$ |
| $s\ell$*-парастроф* | *середня IP*, $\lambda$ | *ліва IP*, $\rho$ | *права IP*, $\mu$ |
| $sr$*-парастроф* | *права IP*, $\lambda$ | *середня IP*, $\rho$ | *ліва IP*, $\mu$ |

**Приклад 2.** Розглянемо квазігрупу $(\mathbb{Z}_{15}; \circ)$ з канонічним розкладом

$$x \circ y = 2x + 3 + 4y.$$

$(\mathbb{Z}_{15}; \circ)$ буде лівою $IP$-квазігрупою з функцією оборотності $\lambda(x) = -4x$.

Тобто, квазігрупа $(\mathbb{Z}_{15}; \circ)$ визначає многовид лівих $IP$ квазігруп ${}^{\ell}\mathfrak{I}$. Оскільки многовид лівих $IP$ квазігруп визначається рівністю (3.36), то $s$ - парастроф цього многовида визначає многовид правих $IP$ квазігруп згідно таблиці.

Справді, з рівності $\lambda(x) \overset{s}{\circ} (x \overset{s}{\circ} y) = y$ випливає рівність $(y \circ x) \circ \lambda(x) = y$. З рівностей (3.2) отримуємо

$$x \overset{s}{\circ} y = 4x + 3 + 2y,$$

Квазігрупа $(\mathbb{Z}_{15}; \overset{s}{\circ})$ визначає многовид правих $IP$ квазігруп ${}^{r}\mathfrak{I}$.

$\ell$-парастроф лівих $IP$-квазігруп означає $\lambda(x) \overset{\ell}{\circ} (x \overset{\ell}{\circ} y) = y$.

Нехай $x \overset{\ell}{\circ} y = z$, then $y \circ z = x$. Тому маємо таку рівність $y \circ z = \lambda(z \circ y)$. Отже, отримали рівність, яка визначає многовид середніх $IP$-квазігруп. Рівності (3.2) означають

$$x \overset{\ell}{\circ} y = 8x + 6 - 2y.$$

Квазігрупа $(\mathbb{Z}_{15}; \overset{\ell}{\circ})$ визначає многовид середніх $IP$-квазігруп $\mathfrak{I}$.

Звідси випливає, що многовиди $\mathfrak{I}, {}^{\ell}\mathfrak{I}, {}^{r}\mathfrak{I}$ є різними і належать одній парастрофній орбіті.

Операції $(\circ)$, $(\overset{s}{\circ})$, $(\overset{\ell}{\circ})$ визначені на множині $\mathbb{Z}_{15}$ рівностями

$$x \circ y := 2x + 3 + 4y, \qquad x \overset{s}{\circ} y := 4x + 3 + 2y, \qquad x \overset{\ell}{\circ} y := 8x + 6 - 2y$$

мають ліву, праву та середню властивості оборотності відповідно, зокрема функції оборотності $\lambda(x) = 11x$, $\rho(x) = 11x$, $\mu(x) = 11x$.

Справді,

$\lambda(x) \circ (x \circ y) = 11 \cdot 2x + 3 + 4 \cdot (2x + 3 + 4y) = 22x + 3 + 8x + 12 + 16y = y,$

$(y \circ x) \circ \rho(x) = 4 \cdot (4y + 3 + 2x) + 3 + 2 \cdot 11x = 16y + 12 + 8x + 3 + 22x = y,$

$\mu(x \circ y) = \mu(8x + 6 - 2y) = -22y + 66 + 88x - 66 + 6 = 8y + 6 - 2x = y \circ x.$

**Теорема 2.5.** *Парастрофна орбіта многовидів $IP$-квазігруп з двобічною властивістю оборотності складається з трьох многовидів: ліво-правих, ліво-середніх та право-середніх $IP$ квазігруп.*

*Більше того, многовид ліво-правих $IP$ квазігруп визначається тотожностями (3.36), (1.15); многовид ліво-середніх $IP$ квазігруп визначається тотожностями (3.36), (1.17); многовид право-середніх $IP$ квазігруп визначається тотожностями (1.15), (1.17).*

**Доведення.** Знайдемо множину всіх попарних перетинів класів пучка $Po(\mathfrak{I})$. Нехай $\mathfrak{V} = {}^r\mathfrak{I} \cap {}^\ell\mathfrak{I}$ є многовидом ліво-правих $IP$ квазігруп. Також знайдемо парастрофи многовидів і покажемо, які з них збігаються:

- многовид ліво-правих $IP$ квазігруп

$$\mathfrak{V} = {}^r\mathfrak{I} \cap {}^\ell\mathfrak{I} = {}^s({}^r\mathfrak{I} \cap {}^\ell\mathfrak{I}) = {}^s\mathfrak{V};$$

- многовидом ліво-середніх $IP$ квазігруп

$${}^\ell\mathfrak{V} = {}^\ell({}^r\mathfrak{I} \cap {}^\ell\mathfrak{I}) = {}^{rs}\mathfrak{I} \cap \mathfrak{I} = {}^r\mathfrak{I} \cap \mathfrak{I} = {}^{sr}({}^r\mathfrak{I} \cap {}^\ell\mathfrak{I}) = {}^{sr}\mathfrak{V};$$

- многовидом право-середніх $IP$ квазігруп

$${}^r\mathfrak{V} = {}^r({}^r\mathfrak{I} \cap {}^\ell\mathfrak{I}) = {}^\ell\mathfrak{I} \cap \mathfrak{I} = {}^{s\ell}({}^r\mathfrak{I} \cap {}^\ell\mathfrak{I}) = {}^{s\ell}\mathfrak{V}.$$

У результаті ми маємо множину перетинів многовидів однобічних $IP$ квазігруп, які належать парастрофній орбіті (пучку) двосторонніх $IP$ квазігруп:

$$Po(\mathfrak{V}) = \{{}^r\mathfrak{I} \cap {}^\ell\mathfrak{I}, {}^r\mathfrak{I} \cap \mathfrak{I}, {}^\ell\mathfrak{I} \cap \mathfrak{I}\} = \{\mathfrak{V}, {}^\ell\mathfrak{V}, {}^r\mathfrak{V}\}.$$

□

Наприклад, двосторонньою $IP$ квазігрупою є некомутативна лупа, якщо функція оборотності $\mu = \iota$.

**Теорема 2.6.** *Тристоронні $IP$-квазігрупи є ліво-право-середніми $IP$-квазігрупами.*

*Зокрема, многовид* $\mathfrak{B} = \mathfrak{I} \cap {}^r\mathfrak{I} \cap {}^\ell\mathfrak{I}$ *є тотально-симетричним многовидом.*

**Доведення.** Справді, легко довести, що

$$^\sigma(\mathfrak{I} \cap {}^r\mathfrak{I} \cap {}^\ell\mathfrak{I}) = \mathfrak{I} \cap {}^r\mathfrak{I} \cap {}^\ell\mathfrak{I},$$

для всіх $\sigma \in S_3$. □

## 2.5. Висновки до розділу 2

У цьому розділі введено нове поняття напрямку трансляції та поняття парастрофа трансляції. Тобто, кожне перетворення (трансляції та їх обернені) мають два незалежних параметри: напрямок і підстановка базової множини. Основними результатами розділу є:

— описано властивості тотально-симетричних трансляцій, напівсиметричних трансляцій, односиметричних трансляцій та асиметричних трансляцій;

— досліджено рівність множин трансляцій різних напрямків;

— доведено, що існує дев'ять класів за цією характеристичною властивістю;

— введено поняття середньої $IP$ квазігрупи, лівої, правої та середньої квазігрупи з властивостями схрещеної оборотності ($CIP$);

— введено поняття лівої, правої та середньої дзеркальної квазігрупи;

— зазначено, що ці дев'ять класів формують три парастрофні орбіти;

— доведено, що ці класи є многовидами та знайдено тотожності, які визначають ці многовиди квазігруп з властивостями оборотності та знайдено формули для обчислення відповідних функцій оборотності.

# РОЗДІЛ 3
# ГРУПОВІ ІЗОТОПИ З ВЛАСТИВОСТЯМИ ОБОРОТНОСТІ

Класи квазігруп, які є ізотопними групам розглядалися в роботах [15–17, 39] та інших авторів. Теорія групових ізотопів була систематизована в працях Ф. Сохацького "Про групові ізотопи". Ізотопне замикання деяких групових многовидів досліджували Г. Бєлявська [14], А. Драпал [15], А. Табаров [16]. Структуру $CI$ квазігруп, для яких усі $LP$-ізотопи є $CI$-лупами, досліджували в [2] В. Білоусов, Б. Цуркан.

У цьому розділі знайдено умови, за яких груповий ізотоп матиме певну властивість оборотності.

Групоїд $(Q;\cdot)$ називається *ізотопом групоїда* $(Q;+)$, якщо існує трійка біекцій $(\alpha,\beta,\gamma)$, яка називається *ізотопізмом* така, що виконується відношенням $x\cdot y := \gamma^{-1}(\alpha x+\beta y)$. Ізотоп групи називається *груповим ізотопом* [15].

Підстановка $\alpha$ множини $Q$ називається *унітарною* групи $(Q;+)$, якщо $\alpha(0)=0$, де $0$ є нейтральним елементом групи $(Q;+)$.

**Означення 3.1.** [15] *Нехай* $(Q;\cdot)$ *— груповий ізотоп і* $0$ *— довільний елемент із* $Q$*, тоді права частина формули*

$$x\cdot y = \alpha x + a + \beta y \tag{3.1}$$

*називається* $0$*-канонічним розкладом, якщо* $(Q;+)$ *є група,* $0$ *є її нейтральний елемент і* $\alpha$*,* $\beta$ *є унітарними підстановками групи* $(Q;+)$.

У цьому випадку ми говоримо: елемент $0$ визначає *канонічний розклад*; $(Q;+)$ — його *група розкладу*; $\alpha$, $\beta$ — його *коефіцієнти* і $a$ є його *вільним елементом.*

**Теорема 3.1.** [15] *Довільний елемент групового ізотопу однозначно визначає його канонічний розклад.*

**Наслідок 3.1.** [15] *Якщо груповий ізотоп* $(Q;\cdot)$ *задовольняє тотожність*

$$w_1(x)\cdot w_2(y) = w_3(y)\cdot w_4(x)$$

*і змінні* $x$, $y$ *є квадратичними, тоді* $(Q;\cdot)$ *ізотопний комутативній групі.*

Якщо квазігрупа $(Q;\cdot)$ ізотопна парастрофу квазігрупи $(Q;\circ)$, то $(Q;\cdot)$ і $(Q;\circ)$ називаються *ізострофними.*

Подана нижче теорема 3.2 та її наслідок 3.1 добре відомі і можуть бути знайдені в багатьох статтях, наприклад, в [6], [20], [15], [98].

**Теорема 3.2.** *Трійка* $(\alpha,\beta,\gamma)$ *підстановок множини* $Q$ *є автотопізмом групи* $(Q,+)$ *тоді і тільки тоді, коли існує автоморфізм* $\theta$ *групи* $(Q,+)$ *та елементи* $b,c\in Q$ *такі, що*

$$\alpha = L_cR_{b^{-1}}\theta, \quad \beta = L_b\theta, \quad \gamma = L_c\theta.$$

**Твердження 3.1.** [15] *Нехай* $\alpha$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, $\beta_4$ *підстановки множини* $Q$, *крім того* $\alpha$ *є унітарне перетворення групи* $(Q,+)$ *і нехай*

$$\alpha(\beta_1x+\beta_2y) = \beta_3u+\beta_4v,$$

*де* $\{x,y\}=\{u,v\}$ *виконується для всіх* $x,y\in Q$. *Тоді істинними є такі твердження:*

*1)* $\alpha$ *є довільний автоморфізм групи* $(Q,+)$, *якщо* $u=x,\ v=y$;

*2)* $\alpha$ *є довільний антиавтоморфізм групи* $(Q,+)$, *якщо* $u=y,\ v=x$.

**Наслідок 3.2.** [55] *Рівність (3.1) є канонічним розкладом групи тоді і тільки тоді, коли має місце рівність* $\alpha=\beta=\iota$.

Нехай $(+,\alpha,\beta,a)$ — канонічний розклад групового ізотопу $(Q;\cdot)$. Тоді всі парастрофи $(Q;\cdot)$ матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned}
&x\overset{\iota}{\cdot}y = \alpha x + a + \beta y, && x\overset{s}{\cdot}y = \beta x + a + \alpha y,\\
&x\overset{\ell}{\cdot}y = \alpha^{-1}(x-a-\beta y), && x\overset{s\ell}{\cdot}y = \alpha^{-1}(-\beta x - a + y),\\
&x\overset{r}{\cdot}y = \beta^{-1}(-\alpha x - a + y), && x\overset{sr}{\cdot}y = \beta^{-1}(x-a-\alpha y).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Оскільки кожний груповий ізотоп має канонічний розклад, тобто розклад завжди існує і він єдиний. Тому природньо знайти при яких умовах він матиме властивість оборотності.

Групові ізотопи з властивістю схрещеної оборотності досліджували В.О. Щербаков, І.А. Флоря,Н. Дідурік.

Квазігрупа є *лінійною* [4], якщо існує група $(Q;+)$, її автоморфізми $\varphi$, $\psi$, довільний елемент $c$ такі, що для всіх $x, y \in Q$

$$x \cdot y = \varphi(x) + c + \psi(y).$$

**Наслідок 3.3.** [15] *Ізотопне замикання многовида всіх груп є многовидом квазігруп, який описується такою тотожністю:*

$$(x(u \overset{r}{\cdot} y) \overset{\ell}{\cdot} u)z = x(u \overset{r}{\cdot} (y \overset{\ell}{\cdot} u)z). \tag{3.3}$$

О. Кирнасовським знайдено необхідні та достатні умови для комутативного, лівосиметричного та правосиметричного групових ізотопів [51]. Критерії існування для тотально-симетричного групового ізотопу описані Ф. Сохацьким [98], критерії напівсиметричності та асиметричності для групових ізотопів знайдені Г. Крайнічук в [55], теорема про класифікацію всіх групових ізотопів за групами їх симетрій.

**Теорема 3.3.** [55] *Нехай $(Q;\cdot)$ — груповий ізотоп і (3.1) його канонічний розклад, тоді*

*1) $(Q;\cdot)$ є комутативним тоді і тільки тоді, коли $(Q;+)$ є абелевою і $\beta = \alpha$;*

*2) $(Q;\cdot)$ є правосиметричним тоді і тільки тоді, коли $(Q;+)$ є абелевою і $\alpha = -\iota$;*

*3) $(Q;\cdot)$ є лівосиметричним тоді і тільки тоді, коли $(Q;+)$ є абелевою і $\beta = -\iota$;*

*4) $(Q;\cdot)$ є тотально-симетричним тоді і тільки тоді, коли $(Q;+)$ є абелевою і $\alpha = \beta = -\iota$;*

*5) $(Q;\cdot)$ є напівсиметричним тоді і тільки тоді, коли $\alpha$ є* *антиавтоморфізмом групи* $(Q;+)$, $\beta = \alpha^{-1}$, $\alpha^3 = -I_a^{-1}$, $\alpha a = -a$, *де* $I_a(x) := -a + x + a$;

*б)* $(Q;\cdot)$ *є асиметричним тоді і тільки тоді, коли* $(Q;+)$ *є неабелевою або* $-\iota \neq \alpha \neq \beta \neq -\iota$ *і принаймні одна з таких умов є істинною:* $\alpha$ *не є антиавтоморфізмом,* $\beta \neq \alpha^{-1}$, $\alpha^3 \neq -I_a^{-1}$, $\alpha a \neq -a$.

З теореми 3.3 Г. Крайнічук отримала наслідок для класифікації групових ізотопів над некомутативними групами.

**Наслідок 3.4.** [55] *Ізотоп некомутативної групи є або напівсиметричним, або асиметричним.*

**Наслідок 3.5.** [55] *Комутативні, лівосиметричні, правосиметричні і тотально-симетричні групові ізотопи є медіальними квазігрупами.*

І. Флоря та Н. Дідурик довели таке твердження:

**Твердження 3.2.** *Якщо довільна лупа* $(Q;\circ)$ *ізотопна* $CIP$ *квазігрупі* $(Q;\cdot)$, *комутативна, то квазігрупа* $(Q;\cdot)$ *- медіальна, а* $(Q;\circ)$ *- абелева група.*

## 3.1. Групові ізотопи з властивістю оборотності ($IP$)

В [77] у кожному многовиді $IP$ квазіруп було описано групові ізотопи у випадку коли $\rho(0) = 0$ та $\lambda(0) = 0$.

**Теорема 3.4.** *Нехай* $(Q;\circ)$ *— груповий ізотоп і (3.1) буде його канонічним розкладом, тоді:*

1) $(Q;\circ)$ *— права* $IP$*-квазігрупа з функцією оборотності* $\rho$ *(у випадку коли* $\rho(0) = 0$*) тоді і тільки тоді, коли* $\alpha$ *буде інволютивним автоморфізмом групи* $(Q;+)$ *і виконуються умови*

$$\alpha(a) = -a, \qquad \rho = \beta^{-1} J I_a \alpha \beta. \tag{3.4}$$

2) $(Q;\circ)$ *— ліва* $IP$*-квазігрупа з функцією оборотності* $\lambda$ *(у випадку коли* $\lambda(0) = 0$*) тоді і тільки, коли* $\beta$ *буде інволютивним автоморфізмом*

*групи $(Q;+)$ і виконуються умови*

$$\beta(a) = -a, \qquad \lambda = \alpha^{-1} J I_a^{-1} \beta\alpha. \tag{3.5}$$

**Доведення.** 1) Нехай груповий ізотоп $(Q;\circ)$ буде правою $IP$-квазігрупою з функцією оборотності $\rho$, тобто, виконується рівність $(y \circ x) \circ \rho(x) = y$. Застосувавши канонічний розклад $(Q;\circ)$ (3.1), ми маємо:

$$\alpha(\alpha(y) + a + \beta(x)) + a + \beta\rho(x) = y, \tag{3.6}$$

звідси,

$$\alpha(\alpha(y) + a + \beta(x)) = y - \beta\rho(x) - a. \tag{3.7}$$

Наслідок 3.1 означає, що $\alpha$ є автоморфізмом групи $(Q;+,0)$, то

$$\alpha^2(y) + \alpha(a) + \alpha\beta(x) = y - \beta\rho(x) - a. \tag{3.8}$$

Якщо $x = y = 0$, ми отримали $\alpha(a) = -a$ і, якщо $x = 0$, ми маємо $\alpha^2(y) = y$, тобто, $\alpha^2 = \iota$.

Замінивши отримані співвідношення в (refip12):

$$y - a + \alpha\beta(x) = y - \beta\rho(x) - a.$$

Скоротивши і рівності на $y$ зліва, маємо:

$$-a + \alpha\beta(x) + a = -\beta\rho(x).$$

Звідси, $I_a\alpha\beta = J\beta\rho$ і тому рівність (3.4) виконується.

Навпаки, нехай $(Q;\circ)$ – груповий ізотоп з канонічним розкладом (3.1), який задовольняє рівність (3.4), тоді маємо

$$\begin{aligned} (y \circ x) \circ \rho(x) &\overset{(3.1)}{=} \alpha(\alpha(y) + a + \beta(x)) + a + \beta\rho(x) = \\ &= \alpha^2(y) + \alpha(a) + \alpha\beta(x) + a + \beta\rho(x) = \\ &\overset{(3.4)}{=} y - a + \alpha\beta(x) + a + \beta(\beta^{-1} J I_a \alpha\beta)(x) = \\ &= y + I_a\alpha\beta(x) + J I_a\alpha\beta(x) = \\ &= y + I_a\alpha\beta(x) - I_a\alpha\beta(x) = y. \end{aligned}$$

Отже, груповий ізотоп $(Q;\circ)$ має праву властивість оборотності.

2) Нехай груповий ізотоп $(Q;\circ)$ буде лівою $IP$ квазігрупою з функцією оборотності $\lambda$, тобто виконується рівність $\lambda(x)\circ(x\circ y)=y$. Застосовуючи канонічний розклад $(Q;\circ)$ (3.1), ми маємо:

$$\alpha\lambda(x)+a+\beta(\alpha(x)+a+\beta(y))=y, \tag{3.9}$$

звідси,

$$\beta(\alpha(x)+a+\beta(y))=-a-\alpha\lambda(x)+y. \tag{3.10}$$

Наслідок 3.1 означає, що $\beta$ є автоморфізмом $(Q;+,0)$, тому маємо таку рівність

$$\beta\alpha(x)+\beta(a)+\beta^2(y)=-a-\alpha\lambda(x)+y. \tag{3.11}$$

Якщо $x=y=0$, отримуємо $\beta(a)=-a$; якщо $x=0$, маємо, що $\beta^2(y)=y$, $\beta^2=\iota$. Підставимо отримані співвідношення в (3.19):

$$\beta\alpha(x)-a+y=-a-\alpha\lambda(x)+y.$$

Скоротивши на $y$ справа, отримуємо $a+\beta\alpha(x)-a=-\alpha\lambda(x)$. Звідки, $I_a^{-1}\beta\alpha=J\alpha\lambda$, отже рівність (3.5) виконується.

І навпаки, нехай $(Q;\circ)$ буде груповим ізотопом з канонічним розкладом (3.1) та виконується рівність (3.5), тоді

$$\begin{aligned}\lambda(x)\circ(x\circ y) &\overset{(3.1)}{=} \alpha\lambda(x)+a+\beta(\alpha(x)+a+\beta(y))=\\ &=\alpha\lambda(x)+a+\beta\alpha(x)+\beta(a)+\beta^2(y)=\\ &\overset{(3.5)}{=} \alpha(\alpha^{-1}JI_a^{-1}\beta\alpha)(x)+a+\beta\alpha(x)-a+\beta^2(y)=\\ &= -I_a^{-1}\beta\alpha(x)+I_a^{-1}\beta\alpha(x)+y=y.\end{aligned}$$

Отже, груповий ізотоп $(Q;\circ)$ має ліву властивість оборотності. □

Більш загальний випадок розглянуто в такій теоремі.

**Теорема 3.5.** *Нехай $(Q;\circ)$ — груповий ізотоп і (3.1) її канонічний розклад, тоді:*

*1)* $(Q;\circ)$ *є правою* $IP$ *квазігрупою з функцією оборотності* $\rho$ *тоді і тільки тоді, коли* $\alpha$ *є інволютивним автоморфізмом групи* $(Q;+)$ *та*

$$\rho(x) = J\beta^{-1}(a) + J\beta^{-1}\alpha\beta(x) + J\beta^{-1}\alpha(a),$$

*2)* $(Q;\circ)$ *є лівою* $IP$ *квазігрупою з функцією оборотності* $\lambda$ *тоді і тільки тоді, коли* $\beta$ *є інволютивним автоморфізмом* $(Q;+)$ *та*

$$\lambda(x) = J\alpha^{-1}\beta(a) + J\alpha^{-1}\beta\alpha(x) + J\alpha^{-1}(a),$$

*3)* $(Q;\circ)$ *є середньою* $IP$ *квазігрупою з функцією оборотності* $\mu$ *тоді і тільки тоді, коли існує анти-автоморфізм* $\theta$ *такий, що*

$$\mu(x) = \theta(x) + c, \qquad \theta^2 = I_c^{-1}, \qquad \alpha = \theta\beta, \tag{3.12}$$

*де* $c := -\theta a + a$.

**Доведення.**

1) Нехай груповий ізотоп $(Q;\circ)$ буде правою $IP$ квазігрупою з функцією оборотності $\rho$, тобто виконується рівність $(y \circ x) \circ \rho(x) = y$. Застосовуючи канонічний розклад $(Q;\circ)$ (3.1), маємо:

$$\alpha(\alpha(y) + a + \beta(x)) + a + \beta\rho(x) = y, \tag{3.13}$$

звідси,

$$\alpha(\alpha(y) + a + \beta(x)) = y - \beta\rho(x) - a. \tag{3.14}$$

З Наслідка 3.1 випливає, що $\alpha$ є автоморфізмом групи $(Q;+,0)$, тоді

$$\alpha^2(y) + \alpha(a) + \alpha\beta(x) = y - \beta\rho(x) - a. \tag{3.15}$$

Коли $x = y = 0$, отримаємо $\alpha(a) = -\beta\rho 0 - a$ і коли $x = 0$ маємо $\alpha^2(y) + \alpha(a) = y - \beta\rho(0) - a$, тобто $\alpha^2 = \iota$.

Підставимо отримані співвідношення в (3.38):

$$y + \alpha(a) + \alpha\beta(x) = y - \beta\rho(x) - a.$$

Скоротивши на $y$ зліва в рівності, маємо:

$$\alpha(a)+\alpha\beta(x)+a=-\beta\rho(x), \quad , \quad \beta\rho(x)=-a-\alpha\beta(x)-\alpha(a).$$

Отже,

$$\rho(x)=J\beta^{-1}(a)+J\beta^{-1}\alpha\beta(x)+J\beta^{-1}\alpha(a). \tag{3.16}$$

І навпаки, нехай $(Q;\circ)$ буде груповим ізотопом з канонічним розкладом (3.1), що задовольняє рівність (3.46), тоді

$$\begin{aligned}(y\circ x)\circ\rho(x) &\overset{(3.1)}{=} \alpha(\alpha(y)+a+\beta(x))+a+\beta\rho(x)=\\ &=\alpha^2(y)+\alpha(a)+\alpha\beta(x)+a+\beta\rho(x)=\\ &\overset{(3.46)}{=} y+\alpha(a)+\alpha\beta(x)+a+\\ &+\beta(J\beta^{-1}(a)+J\beta^{-1}\alpha\beta(x)+J\beta^{-1}\alpha(a))(x)=\\ &=y+\alpha(a)+\alpha\beta(x)+a-a-\alpha\beta(x)-\alpha(a)=y.\end{aligned}$$

Отже, груповий ізотоп $(Q;\circ)$ має праву властивість оборотності.

2) Нехай груповий ізотоп $(Q;\circ)$ — ліва $IP$ квазігрупа з функцією оборотності $\lambda$, тобто виконується рівність $\lambda(x)\circ(x\circ y)=y$. Застосувавши канонічний розклад $(Q;\circ)$ (3.1), маємо:

$$\alpha\lambda(x)+a+\beta(\alpha(x)+a+\beta(y))=y, \tag{3.17}$$

звідки

$$\beta(\alpha(x)+a+\beta(y))=-a-\alpha\lambda(x)+y. \tag{3.18}$$

З Наслідка 3.1 слідує, що $\beta$ є автоморфізмом групи $(Q;+,0)$, тому

$$\beta\alpha(x)+\beta(a)+\beta^2(y)=-a-\alpha\lambda(x)+y. \tag{3.19}$$

Якщо $x=y=0$, отримуємо $\beta(a)=-a-\alpha\lambda(0)$; якщо $x=0$, маємо $\beta(a)+\beta^2(y)=-a-\alpha\lambda(0)+y$, тобто $\beta^2=\iota$.

Підставимо отримані співвідношення в рівність (3.19):

$$\beta\alpha(x)+\beta(a)+y=-a-\alpha\lambda(x)+y.$$

Скоротивши на $y$ справа в рівності, маємо:

$$\beta\alpha(x) + \beta(a) = -a - \alpha\lambda(x), \qquad \alpha\lambda(x) = -\beta(a) - \beta\alpha(x) - a.$$

Таким чином,

$$\lambda(x) = J\alpha^{-1}\beta(a) + J\alpha^{-1}\beta\alpha(x) + J\alpha^{-1}(a). \tag{3.20}$$

І навпаки, нехай $(Q;\circ)$ буде груповим ізотопом з канонічним розкладом (3.1) та виконується рівність (3.20), тоді

$$\begin{aligned}
\lambda(x)\circ(x\circ y) &\overset{(3.1)}{=} \alpha\lambda(x) + a + \beta(\alpha(x) + a + \beta(y)) = \\
&= \alpha\lambda(x) + a + \beta\alpha(x) + \beta(a) + \beta^2(y) = \\
&\overset{(3.20)}{=} \alpha(J\alpha^{-1}\beta(a) + J\alpha^{-1}\beta\alpha(x) + J\alpha^{-1}(a)) + \\
&+ a + \beta\alpha(x) - a + \beta^2(y) = \\
&= -\beta(a) - \beta\alpha(x) - a + a + \beta\alpha(x) + \beta(a) + \beta^2(y) = y.
\end{aligned}$$

Отже, груповий ізотоп $(Q;\circ)$ має ліву властивість оборотності.

3) Нехай груповий ізотоп $(Q;\circ)$ буде середньою $IP$ квазігрупою з функцією оборотності $\mu$, тобто тотожність $x\circ y = \mu(y\circ x)$ є істинною. Застосовуючи канонічний розклад $(Q;\circ)$ (3.1), маємо:

$$\alpha(x) + a + \beta(y) = \mu(\alpha(y) + a + \beta(x)). \tag{3.21}$$

Нехай $c := \mu(0)$ і $\theta := L_{(-c)}\mu$. Додамо елемент $-c$ до обох частин рівності (3.21):

$$-c + \alpha(x) + a + \beta y = L_{(-c)}\mu(\alpha(y) + a + \beta(x))$$

це означає таку рівність

$$R_aL_{(-c)}\alpha(x) + \beta(y) = \theta(R_a\alpha(y) + \beta(x)). \tag{3.22}$$

Оскільки $\theta(0) = L_{(-c)}\mu(0) = -c + \mu(0) = -c + c = 0$, тоді за наслідком 3.1 $\theta$ є антиавтоморфізмом $(Q;+)$. Отже, $\mu(x) = \theta(x) + c$ є нелінійним перетворенням групи $(Q;+)$ а отже(3.21) можна записати в такій формі

$$\alpha(x) + a + \beta(y) = \theta\beta(x) + \theta(a) + \theta\alpha(y) + c. \tag{3.23}$$

Зокрема, для $x = y = 0$ отримуємо $a = \theta(a) + c$. Для $y = 0$ з рівності (3.23) маємо, що $\alpha = \theta\beta$. Скоротимо на $\alpha x$ зліва в рівності (3.23), маємо:

$$a + \beta(y) = \theta(a) + \theta\alpha(y) + c \tag{3.24}$$

тому що $-a + \theta(a) = -c$. Потім, додавши елемент $-a$ до обох частин рівності (3.24), отримаємо:

$$\beta(y) = -c + \theta\alpha(y) + c = I_c\theta\alpha(y),$$

звідси $\beta = I_c\theta\alpha$. Оскільки $\alpha = \theta\beta$, то $\theta^2 = I_c^{-1}$.

І навпаки, нехай $(Q; \circ)$ буде груповим ізотопом з канонічним розкладом (3.1) і припустимо, що умови (3.12) є істинними. Тоді

$$\begin{aligned}\mu(y \circ x) = \theta(y \circ x) + c &\overset{(3.1)}{=} \theta(\alpha(y) + a + \beta(x)) + c = \\ &= \theta\beta(x) + \theta(a) + \theta\alpha(y) + c = \\ &= \alpha(x) + a - c + \theta\alpha(y) + c = \\ &= \alpha(x) + a + I_c\theta\alpha(y) = \\ &= \alpha(x) + a + I_c\theta^2\beta(y) = \\ &= \alpha(x) + a + \beta(y) = x \circ y.\end{aligned}$$

Отже, $(Q; \circ)$ є середньою $IP$ квазігрупою. □

Розглянемо лінійні ізотопи циклічних груп. Відповідно до теореми 3.4, кожна із цих квазігруп ізоморфна квазігрупі, операція якої є поліномом у кільці $(\mathbb{Z}_m; +)$ за модулем $m$.

**Наслідок 3.6.** *Нехай $(\mathbb{Z}_m; \circ)$ — груповий ізотоп з канонічним розкладом*

$$x \circ y = ax + c + by, \tag{3.25}$$

*де $c$ є спільним дільником $m$ і $a + b - 1$, тоді:*

1) *$(\mathbb{Z}_m; \circ)$ буде правою $IP$ квазігрупою з функцією оборотності $\rho$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

$$a^2 = 1, \quad \rho(x) = -b^{-1}c - ax - ab^{-1}c;$$

*2) $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ буде лівою $IP$ квазігрупою з функцією оборотності $\lambda$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

$$b^2=1,\quad \lambda(x)=-a^{-1}bc-bx-a^{-1}c;$$

*3) $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ буде середньою $IP$ квазігрупою з функцією оборотності $\mu$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

$$a^2=b^2,\quad \mu(x)=a^{-1}bx-a^{-1}bc+c.$$

**Доведення.** Доведення пункту 1) і 2): 1) Нехай груповий ізотоп $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ буде правою $IP$ квазігрупою з функцією оборотності $\rho$, тобто виконується рівність $(y\circ x)\circ\rho(x)=y$. Застосовуючи канонічний розклад $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ (3.55), маємо:

$$a(ay+c+bx)+c+b\rho(x)=y. \tag{3.26}$$

Оскільки $a$ – автоморфізм групи $(\mathbb{Z}_m;+)$, то

$$a^2y+ac+abx+c+b\rho(x)=y. \tag{3.27}$$

Коли $x=y=0$, отримаємо $ac+c+b\rho(0)=0$ і коли $x=0$, маємо $a^2y+ac+c+b\rho0=y$. Звідси виходить, що $a^2y=y$. Тобто, $a^2=\iota$.

Підставимо отримане співвідношення в (3.27):

$$y+ac+abx+c+b\rho(x)=y.$$

Скоротивши на $y$ зліва в рівності, маємо:

$$ac+abx+c+b\rho(x)=0,\qquad b\rho(x)=-c-abx-ac.$$

Отже,

$$\rho(x)=-b^{-1}c-ax-b^{-1}ac. \tag{3.28}$$

І навпаки, нехай $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ буде груповим ізотопом з канонічним розкладом (3.55), що задовольняє рівність (3.28), тоді

$$\begin{aligned}(y\circ x)\circ\rho(x) &\overset{(3.55)}{=} a(ay+c+bx)+c+b\rho(x) = \\ &= a^2y+ac+abx+a+b\rho(x) = \\ &\overset{(3.28)}{=} y+ac+abx+a+b(-b^{-1}a-b^{-1}abx-b^{-1}ac) = \\ &= y+ac+abx+c-c-abx-ac = y.\end{aligned}$$

Отже, груповий ізотоп $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ має праву властивість оборотності.

2) Нехай груповий ізотоп $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ — ліва $IP$ квазігрупа з функцією оборотності $\lambda$, тобто виконується рівність $\lambda(x)\circ(x\circ y)=y$. Застосувавши канонічний розклад $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ (3.55), маємо:

$$a\lambda(x)+c+b(ax+c+by)=y, \tag{3.29}$$

Оскільки $b$ є автоморфізмом групи $(\mathbb{Z}_m;+)$, тому

$$a\lambda(x)+c+bax+bc+b^2y=y. \tag{3.30}$$

Якщо $x=y=0$, отримуємо $a\lambda(0)+c+bc=0$; якщо $x=0$, маємо $a\lambda(0)+c+bc+b^2y=y$, тобто $b^2y=y$. А це означає, що $b^2=\iota$.

Підставимо отримані співвідношення в рівність (3.30): $a\lambda(x)+c+bax+bc+y=y$. Скоротивши на $y$ справа в рівності, маємо:

$$a\lambda(x)+c+bax+bc=0, \qquad a\lambda(x)=-bc-bax-c.$$

Таким чином,

$$\lambda(x)=-a^{-1}bc-a^{-1}bax-a^{-1}c. \tag{3.31}$$

І навпаки, нехай $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ буде груповим ізотопом з канонічним розкладом (3.55) та виконується рівність (3.31), тоді

$$\begin{aligned}\lambda(x)\circ(x\circ y) &\overset{(3.55)}{=} a\lambda(x)+c+b(ax+c+by) = \\ &= a\lambda(x)+c+bax+ba+b^2y = \\ &\overset{(3.31)}{=} a(-a^{-1}bc-a^{-1}bax-a^{-1}c)+c+bax-c+b^2y = \\ &= -bc-bax-c+c+bax+bc+b^2y=y.\end{aligned}$$

Отже, груповий ізотоп $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ має ліву властивість оборотності.

Доведемо пункт 3). Нехай $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ буде середньою $IP$ квазігрупою з функцією оборотності $\mu$. Відповідно до Теореми 3.5, $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ буде середньою $IP$ квазігрупою з функцією оборотності $\mu$ тоді і тільки тоді, якщо існує автоморфізм $k$ такий, що $\mu(x) = kx + d$, $k^2 = 1$, $a = kb$, де $d := -kc + c$. Оскільки $k = ab^{-1}$, то $k^2 = 1$ еквівалентна умові $a^2 = b^2$. Тоді функція оборотності $\mu$ матиме вигляд

$$\mu(x) = kx + d = kx - kc + c = ab^{-1}x - ab^{-1}c + c.$$

□

**Наслідок 3.7.** *Якщо квазігрупа, лінійна над скінченною циклічною групою, має ліву та праву властивості оборотності, то вона також має властивість середньої оборотності.*

**Доведення.** Нехай квазігрупа, лінійна над скінченною циклічною групою і нехай має ліву і праву властивості оборотності з функціями $\lambda$ та $\rho$. Ця квазігрупа є ізоморфною квазігрупі $(Q;\circ)$, яка визначається рівністю (3.55). Тоді пункти 1) і 2) наслідку 3.6 означають, що $a^2 = b^2$. Звідси згідно пункту 3) наслідку 3.6, $\mu(x) = a^{-1}bx - a^{-1}bc + c$ є середньою функцією оборотності. □

**Приклад 1.** Розглянемо квазігрупу $(\mathbb{Z}_8;\circ)$, де $\mathbb{Z}_8$ — кільце за модулем 8 і

$$x \circ y := 5x + 4 + 3y.$$

$(\mathbb{Z}_8;\circ)$ є лівою та правою $IP$ квазігрупою з функціями оборотності $\lambda(x) = -3x$ та $\rho(x) = -5x$ відповідно.

Перевіримо, чи виконуються рівності (3.36) та (1.15):

$$\lambda(x) \circ (x \circ y) = 5(-3)x + 4 + 3(5x + 4 + 3y) = -15x + 4 + 15x + 12 + y = y,$$

$$(x \circ y) \circ \rho(y) = 5(5x + 4 + 3y) + 4 + 3(-5)y = x + 4 + 15y + 4 - 15y = x.$$

Отже, $(\mathbb{Z}_8;\circ)$ є лівою та правою $IP$ квазігрупами з функціями оборотності $\lambda$ і $\rho$.

Згідно наслідку 3.7 квазігрупа є середньою $IP$ квазігрупою та за наслідком 3.6 середня функція оборотності $\mu$ є

$$\mu(x) = a^{-1}bx - a^{-1}bc + c = 5^{-1} \cdot 3 \cdot x - 5^{-1} \cdot 3 \cdot 4 + 4 = 7x + 4 + 4 = 7x.$$

Отже, квазігрупа $(\mathbb{Z}_8; \circ)$ є лівою, правою та середньою $IP$ квазігрупою з функціями оборотності $\lambda(x) = 5x$, $\rho(x) = 3x$, $\mu(x) = 7x$.

**Теорема 3.6.** *Нехай $(Q; \circ)$ — груповий ізотоп і (3.1) її канонічний розклад, тоді:*

1) *$(Q; \circ)$ буде ліво-правою $IP$ квазігрупою з лівою функцією оборотності $\lambda$ та правою функцією оборотності $\rho$ тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти $\alpha$ і $\beta$ канонічного розкладу є інволютивними автоморфізмами групи $(Q; +)$, і виконуються умови:*

$$\alpha(a) = \beta(a) = -a, \qquad \lambda = \alpha^{-1}JI_a\beta\alpha, \qquad \rho = \beta^{-1}JI_a\alpha\beta.$$

2) *$(Q; \circ)$ буде ліво-середньою $IP$ квазігрупою з лівою функцією оборотності $\lambda$ та середньою функцією оборотності $\mu$ тоді і тільки тоді, коли $\beta$ є інволютивним анти-автоморфізмом групи $(Q; +)$ та існує анти-автоморфізм $\theta$ такий, що*

$$\beta(a) = -a, \qquad \lambda = \alpha^{-1}JI_a^{-1}\beta\alpha,$$

$$\mu(x) = \theta(x) + c, \qquad \theta^2 = I_c^{-1}, \qquad \alpha = \theta\beta,$$

*де $c := -\theta a + a$.*

3) *$(Q; \circ)$ буде право-середньою $IP$ квазігрупою з правою функцією оборотності $\rho$ та середньою функцією оборотності $\mu$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha$ — інволютивний автоморфізм групи $(Q; +)$ та існує анти-автоморфізм $\theta$ такий, що*

$$\alpha(a) = -a, \qquad \rho = \beta^{-1}JI_a\alpha\beta,$$

$$\mu(x) = \theta(x) + c, \qquad \theta^2 = I_c^{-1}, \qquad \alpha = \theta\beta,$$

*де $c := -\theta a + a$.*

**Доведення.** Доведення того, що квазігрупа є лівою та правою $IP$ квазігрупою, означає згідно теореми 3.4 виконання умов (3.5) та (3.4). Якщо квазігрупа є лівою та середньою $IP$ квазігрупою згідно теореми 3.4, означає виконання умов (3.5) та (3.12). Якщо квазігрупа є правою та середньою $IP$ квазігрупою згідно теореми 3.4, означає виконання умов (3.4) та (3.12). □

**Теорема 3.7.** *Нехай $(Q; \circ)$ — груповий ізотоп з канонічним розкладом (3.1), тоді $(Q; \circ)$ буде ліво-право-середньою $IP$ квазігрупою з лівою функцією оборотності $\lambda$, правою функцією оборотності $\rho$ та середньою функцією оборотності $\mu$ тоді і тільки тоді, коли виконуються умови (3.4), (3.5), (3.12).*

**Доведення.** Доведення того, що груповий ізотоп $(Q; \circ)$ є лівою, правою та середньою $IP$ квазігрупою згідно теореми 3.4, означає виконання умов (3.4), (3.5), (3.12). □

Нагадаємо, що парастрофно-замкнена напіврешітка називается в'язкою.

**Теорема 3.8.** *В'язка многовидів $IP$-квазігруп складається з таких многовидів:*

*1) Парастрофна орбіта односторонніх $IP$-квазігруп*

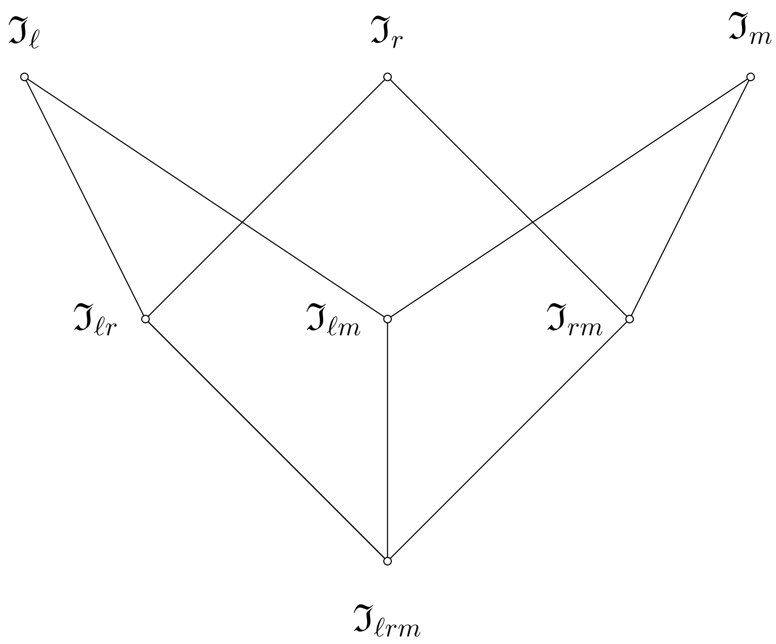
$$Po(\mathfrak{I}) = \{\mathfrak{I}, {}^{\ell}\mathfrak{I}, {}^{r}\mathfrak{I}\}$$

*2) Парастрофна орбіта двосторонніх $IP$-квазігруп*

$$Po(\mathfrak{V}) = \{\mathfrak{I}_{\ell r}, \mathfrak{I}_{\ell m}, \mathfrak{I}_{rm}\}$$

*3) Парастрофна орбіта тристоронніх $IP$-квазігруп*

$$\mathfrak{I}_{\ell rm} = \mathfrak{I} \cap {}^{r}\mathfrak{I} \cap {}^{\ell}\mathfrak{I}.$$




**Доведення.** Доведення пункту 1) доводиться в Теоремі 2.1; доведення пункту 2) є таким, як в Теоремах 2.5, 3.6 і доведення пункту 3) є таким, як в Теоремах 2.6, 3.7. □

### 3.1.1. Унітарні центральні квазігрупи з властивістю оборотності ($IP$)

Ізотоп групи назвемо *унітарним*, якщо він має одноелементну підалгебру. Якщо $\{0\}$ позначає одноелементну підалгебру групового ізотопа $(Q;\circ)$, то цей ізотоп позначатимемо $(Q;\circ,0)$. Інакше кажучи, 0 є ідемпотентом для операції $(\circ)$: $0\circ 0=0$. З (3.1) випливає рівність $a=0\circ 0$, тому має місце таке твердження.

**Наслідок 3.8.** *Груповий ізотоп* $(Q;\circ)$ *має одноелементну підалгебру* 0 *тоді і тільки тоді, коли в 0-канонічному розкладі вільний член дорівнює 0, тобто канонічний розклад* (3.1) *має вигляд:*

$$x\circ y=\alpha(x)+\beta(x), \tag{3.32}$$

*де* $\alpha 0=0,\ \beta 0=0.$

Нехай $(Q;\bullet)$ — довільний груповий ізотоп з канонічним розкладом (3.1) і нехай $(Q;\circ)$ — груповий ізотоп, отриманий із $(Q;\bullet)$ заміною вільного члена нулем, тобто ізотоп, канонічним розкладом якого є (3.32), тоді унітарний груповий ізотоп $(Q;\circ,0)$ назвемо *відповідним* груповому ізотопу $(Q;\bullet)$.

Квазігрупа $(Q;\circ)$ називається:

– *лінійною*, якщо вона є лінійним ізотопом групи, тобто в її канонічному розкладі (3.1) перетворення $\alpha$ і $\beta$ є автоморфізмами групи $(Q;+,0)$;

– *центральною*, якщо вона є лінійним ізотопом абелевої групи;

– *медіальною*, якщо виконується тотожність

$$(x\circ y)\circ(u\circ v)=(x\circ u)\circ(y\circ v);$$

– абелевою, якщо вона медіальна і має одноелементну підалгебру, скажімо $\{0\}$, тобто 0 є її ідемпотентом: $0\circ 0=0$. Таку абелеву квазігрупу позначатимемо $(Q;\circ,0)$.

Повна класифікація многовидів лінійних квазігруп подана в роботі [103]. У теоремі Брука-Тойоди знайдено канонічний розклад медіальної квазігрупової операції, проте ця теорема випливає із більш загального результату, який отриманий в [104] для медіальних та абелевих універсальних алгебр. Сформулюємо теорему Брука-Тойоди у зручному вигляді.

**Теорема 3.9.** [6] *Квазігрупа є медіальною тоді і тільки тоді, коли вона центральна і коефіцієнти канонічного розкладу комутують.*

Умови, коли груповий ізотоп буде $IP$ квазігрупою, $CIP$ квазігрупою та дзеркальною квазігрупою, доведені в теоремі 3.5, виконуються і для центральних квазігруп.

Для унітарної центральної квазігрупи отримали такий наслідок.

**Наслідок 3.9.** *Нехай $(Q;\circ,0)$ — унітарна центральна квазігрупа і (3.32) її канонічний розклад, тоді:*

1) *$(Q;\circ)$ є середньою $IP$ квазігрупою тоді і тільки тоді, коли існує автоморфізм $\theta$ такий, що $\alpha=\theta\beta$, $\theta^2=\iota$. Тоді функція оборотності $\mu$ обчислюється за формулою $\mu=\theta$;*

2) *$(Q;\circ)$ є лівою $IP$ квазігрупою тоді і тільки тоді, коли $\beta$ є інволютивним автоморфізмом $(Q;+)$. Тоді функція оборотності $\lambda$ обчислюється за формулою $\lambda=J\alpha^{-1}\beta\alpha$;*

3) *$(Q;\circ)$ є правою $IP$ квазігрупою тоді і тільки тоді, коли $\alpha$ є інволютивним автоморфізмом групи $(Q;+)$. Тоді функція оборотності $\rho$ обчислюється за формулою $\rho=J\beta^{-1}\alpha\beta$.*

**Доведення.** 1) Нехай груповий ізотоп $(Q;\circ,0)$ буде середньою $IP$ квазігрупою з функцією оборотності $\mu$, тобто тотожність $x\circ y=\mu(y\circ x)$ є істинною. Застосовуючи канонічний розклад $(Q;\circ)$ (3.32), маємо:

$$\alpha x+\beta y=\mu(\alpha y+\beta x). \tag{3.33}$$

Нехай $\mu=\theta$, де $\theta$ – автоморфізм. Від того, що $\alpha x+\beta y=\theta(\alpha y+\beta x)$, випливає, що $\alpha x+\beta y=\theta\alpha y+\theta\beta x$.

Для $x=0$ отримуємо $\beta y=\theta\alpha y$, тобто $\beta=\theta\alpha$. Для $y=0$ маємо, що $\alpha=\theta\beta$. Домноживши останню рівність на $\theta$ зліва, маємо $\theta^2=\iota$.

І навпаки, нехай $(Q;\circ,0)$ буде груповим ізотопом з канонічним розкладом (3.32) і припустимо, що умови (3.12) є істинними. Тоді

$$\mu(y\circ x)=\theta(y\circ x)\overset{(3.32)}{=}\theta(\alpha y+\beta x)=\theta\alpha y+\theta\beta x=\beta y+\alpha x=x\circ y.$$

Отже, $(Q;\circ,0)$ є середньою $IP$ квазігрупою.

2) Нехай груповий ізотоп $(Q;\circ,0)$ — ліва $IP$ квазігрупа з функцією оборотності $\lambda$, тобто виконується рівність $\lambda(x)\circ(x\circ y)=y$. Застосувавши канонічний розклад $(Q;\circ)$ (3.32), маємо:

$$\alpha\lambda(x)+\beta(\alpha x+\beta y)=y, \tag{3.34}$$

звідки $\beta(\alpha x+\beta y)=-\alpha\lambda(x)+y$.

З Наслідка 3.1 випливає, що $\beta$ є автоморфізмом групи $(Q;+,0)$, тому

$$\beta\alpha x+\beta^2 y=-\alpha\lambda(x)+y. \tag{3.35}$$

Якщо $x=y=0$, отримуємо $-\alpha\lambda(0)=0$; якщо $x=0$, маємо $\beta^2 y=-\alpha\lambda(0)+y$, тобто $\beta^2=\iota$.

Підставимо отримані співвідношення в рівність (3.35):

$$\beta\alpha x+y=-\alpha\lambda(x)+y.$$

Скоротивши на $y$ справа в рівності, маємо: $\beta\alpha x=-\alpha\lambda(x)$, тобто $\alpha\lambda(x)=-\beta\alpha x$. Таким чином,

$$\lambda=J\alpha^{-1}\beta\alpha. \tag{3.36}$$

І навпаки, нехай $(Q;\circ,0)$ буде груповим ізотопом з канонічним розкладом (3.32) та виконується рівність (3.36), тоді

$$\begin{aligned}\lambda(x)\circ(x\circ y) &\overset{(3.32)}{=} \alpha\lambda(x)+\beta(\alpha x+\beta y)=\alpha\lambda(x)+\beta\alpha x+\beta^2 y=\\ &\overset{(3.36)}{=} \alpha(J\alpha^{-1}\beta\alpha x)+\beta\alpha x+\beta^2 y\ =\ -\beta\alpha x+\beta\alpha x+y=y.\end{aligned}$$

Отже, груповий ізотоп $(Q;\circ,0)$ має ліву властивість оборотності.

3) Нехай груповий ізотоп $(Q;\circ,0)$ буде правою $IP$ квазігрупою з функцією оборотності $\rho$, тобто виконується рівність $(y\circ x)\circ\rho(x)=y$. Застосовуючи канонічний розклад $(Q;\circ,0)$ (3.32), маємо:

$$\alpha(\alpha(y)+\beta(x))+\beta\rho(x)=y, \tag{3.37}$$

звідси, $\alpha(\alpha(y)+\beta(x))=y-\beta\rho(x)$.

З Наслідка 3.1 випливає, що $\alpha$ є автоморфізмом групи $(Q;+,0)$, тоді

$$\alpha^2(y)+\alpha\beta(x)=y-\beta\rho(x). \tag{3.38}$$

Коли $x=y=0$, отримаємо $-\beta\rho 0=0$ і коли $x=0$, маємо $\alpha^2(y)=y-\beta\rho(0)$, тобто $\alpha^2=\iota$.

Підставимо отримані співвідношення в (3.38): $y+\alpha\beta(x)=y-\beta\rho(x)$.

Скоротивши на $y$ зліва в рівності, маємо: $\alpha\beta(x) = -\beta\rho(x)$, тобто, $\beta\rho(x) = -\alpha\beta(x)$. Отже,

$$\rho = J\beta^{-1}\alpha\beta. \tag{3.39}$$

І навпаки, нехай $(Q; \circ, 0)$ буде груповим ізотопом з канонічним розкладом (3.32), що задовольняє рівність (3.46), тоді

$$\begin{aligned}(y \circ x) \circ \rho(x) &\overset{(3.32)}{=} \alpha(\alpha y + \beta x) + \beta\rho(x) = \alpha^2 y + \alpha\beta x + \beta\rho(x) = \\ &\overset{(3.39)}{=} y + \alpha\beta x + \beta(J\beta^{-1}\alpha\beta)x = y + \alpha\beta x - \alpha\beta x = y.\end{aligned}$$

Отже, груповий ізотоп $(Q; \circ, 0)$ має праву властивість оборотності. $\square$

### 3.1.2. Матричні квазігрупи з властивістю оборотності ($IP$)

Серед центральних квазігруп особливу роль відіграють матричні квазігрупи. Нехай $K$ — довільне комутативне кільце з одиницею. Бінарну операцію $f$, яка визначена над комутативною групою $(K^n; +)$ назвемо:

- *матричною*, якщо існують квадратні матриці $A$, $B$ порядку $n$ над кільцем $K$ порядку $m$ і $\bar{a} \in K^n$ такі, що для всіх $\bar{x}$, $\bar{y} \in K^n$ виконується рівність
$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}A + \bar{y}B + \bar{a}. \tag{3.40}$$
При цьому пару $(K^n; f)$ назвемо *матричним групоїдом порядку* $m^n$;

- *унітарно матричною*, якщо існують квадратні матриці $A$, $B$ порядку $n$ над кільцем $K$ порядку $m$ такі, що для всіх $\bar{x}$, $\bar{y} \in K^n$ виконується рівність
$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}A + \bar{y}B. \tag{3.41}$$
При цьому пару $(K^n; f)$ назвемо *унітарним матричним групоїдом порядку* $m^n$.

**Твердження 3.3.** *Матричний групоїд $(K^n; f)$ є квазігрупою тоді і тільки тоді, коли матриці $A$ і $B$ оборотні.*

**Доведення.** Оборотність операції $f$ означає, що кожне з рівнянь

$$f(\bar{x}, \bar{b}) = \bar{c}, \qquad f(\bar{b}, \bar{y}) = \bar{c}$$

має єдиний розв'язок. Відповідно до (3.40) ці рівняння рівносильні рівнянням

$$\bar{x}A + \bar{b}B + \bar{a} = \bar{c}, \qquad \bar{b}A + \bar{y}B + \bar{a} = \bar{c},$$

тобто

$$\bar{x}A = \bar{c} - \bar{b}B - \bar{a}, \qquad \bar{y}B = \bar{c} - \bar{b}A - \bar{a}.$$

Однозначна розв'язність цих рівнянь рівносильна оборотності матриць $A$ і $B$. □

**Наслідок 3.10.** *[102] Кожна матрична квазігрупа є центральною.*

**Теорема 3.10.** *Нехай $(K^n; f, \bar{0})$ унітарна матрична квазігрупа і (3.41) її канонічний розклад, тоді:*

1) *$(K^n; f, \bar{0})$ є середньою $IP$ квазігрупою тоді і тільки тоді, коли існує оборотна матриця $C$ така, що $C^2 = E$, $B = AC$. Функція оборотності $\mu$ обчислюється за формулою $\mu(\bar{x}) = \bar{x}C$;*

2) *$(K^n; f, \bar{0})$ є лівою $IP$ квазігрупою тоді і тільки тоді, коли $B^2 = E$. Функція оборотності $\lambda$ обчислюється за формулою $\lambda(\bar{x}) = -\bar{x}ABA^{-1}$;*

3) *$(K^n; f, \bar{0})$ є правою $IP$ квазігрупою тоді і тільки тоді, коли $A^2 = E$. Функція оборотності $\rho$ обчислюється за формулою $\rho(\bar{x}) = -\bar{x}BAB^{-1}$.*

**Доведення.**

1) Нехай унітарна матрична квазігрупа $(K^n; f, \bar{0})$ буде середньою $IP$ квазігрупою з функцією оборотності $\mu$, тобто тотожність $\bar{x} \circ \bar{y} = \mu(\bar{y} \circ \bar{x})$ є істинною. Застосовуючи канонічний розклад $(K^n; f, \bar{0})$ (3.41), маємо:

$$\bar{x}A + \bar{y} = \mu(\bar{y}A + \bar{x}B). \tag{3.42}$$

Нехай існує матриця $C$ така, що і $\mu = C$. Тоді маємо:

$$\bar{x}A + \bar{y}B = C(\bar{y}A + \bar{x}B), \qquad \bar{x}A + \bar{y}B = \bar{y}AC + \bar{x}BC.$$

Якщо $\bar{x} = 0$ отримуємо $\bar{y}B = \bar{y}AC$. Для $\bar{y} = 0$ маємо, що $\bar{x}A = \bar{x}BC$. Звідси виходить:

$$B = AC, \qquad A = BC.$$

Якщо домножимо останню рівність на матрицю $C$ справа, то $AC = BC^2$. Ураховуючи те, що $AC = B$, маємо $BC^2 = B$, тобто $C^2 = E$.

І навпаки, нехай $(K^n; f, \bar{0})$ буде унітарною матричною квазігрупою з канонічним розкладом (3.41) і припустимо, що умови $B = AC$ і $C^2 = E$ є істинними. Тоді

$$\mu(\bar{y} \circ \bar{x}) \overset{(3.41)}{=} C(\bar{y}A + \bar{x}B) = \bar{y}AC + \bar{x}BC = \bar{y}B + \bar{x}A = \bar{x}A + \bar{y}B = \bar{x} \circ \bar{y}.$$

Отже, $(K^n; f, \bar{0})$ є середньою $IP$ квазігрупою.

2) Нехай унітарна матрична квазігрупа $(K^n; f, \bar{0})$ буде лівою $IP$ квазігрупою з функцією оборотності $\lambda$, тобто виконується рівність $\lambda(\bar{x}) \circ (\bar{x} \circ \bar{y}) = \bar{y}$. Застосовуючи канонічний розклад $(K^n; f, \bar{0})$ (3.41), маємо:

$$\lambda(\bar{x})A + (\bar{x}A + \bar{y}B)B = \bar{y}, \tag{3.43}$$

звідки $\lambda(\bar{x})A + \bar{x}AB + \bar{y}B^2 = \bar{y}$.

Якщо $\bar{x} = \bar{y} = 0$, отримуємо $\lambda(\bar{0})A = 0$; якщо $\bar{x} = 0$, маємо $\lambda(0)A + \bar{y}B^2 = \bar{y}$, тобто $\bar{y}B^2 = \bar{y}$. Звідси,

$$B^2 = E.$$

Таким чином,

$$\lambda(\bar{x})A + \bar{x}AB + \bar{y} = \bar{y}. \tag{3.44}$$

Скоротивши на $\bar{y}$, маємо: $\lambda(\bar{x}) = -\bar{x}ABA^{-1}$

І навпаки, нехай $(K^n; f, \bar{0})$ буде унітарною матричною квазігрупою з канонічним розкладом (3.41) та виконується рівність (3.20), тоді

$$\lambda(\bar{x}) \circ (\bar{x} \circ \bar{y}) \overset{(3.41)}{=} \lambda(\bar{x})A + (\bar{x}A + \bar{y})B = \lambda(\bar{x})A + \bar{x}A + \bar{y}B^2 =$$

$$\overset{(3.20)}{=} (-\bar{x}ABA^{-1})A + \bar{x}A + \bar{y}B^2 = -\bar{x}A + \bar{x}A + \bar{y} = \bar{y}.$$

Отже, унітарна матрична квазігрупа $(K^n; f, \bar{0})$ має ліву властивість оборотності.

3) Нехай унітарна матрична квазігрупа $(K^n; f, \bar{0})$ буде правою $IP$ квазігрупою з функцією оборотності $\rho$, тобто виконується рівність $(\bar{y} \circ \bar{x}) \circ \rho(\bar{x}) = \bar{y}$. Застосовуючи канонічний розклад $(K^n; f, \bar{0})$ (3.41), маємо:

$$(\bar{x}A + \bar{y}B)A + \rho(\bar{y})B = \bar{x}, \tag{3.45}$$

звідси, $\bar{x}A^2 + \bar{y}BA + \rho(\bar{y})B = \bar{x}$.

Коли $\bar{x} = \bar{y} = 0$, отримаємо $\rho(\bar{0})B = 0$ і коли $\bar{y} = 0$, маємо $\bar{x}A^2 + \rho(\bar{0})B = x$, тобто $A^2 = E$.

Отже,

$$\rho(\bar{y}) = -\bar{y}BAB^{-1}. \tag{3.46}$$

І навпаки, нехай $(K^n; f, \bar{0})$ буде унітарною матричною квазігрупою з канонічним розкладом (3.41), що задовольняє рівність (3.46), тоді

$$\begin{aligned}(\bar{y} \circ \bar{x}) \circ \rho(\bar{x}) &\overset{(3.41)}{=} (\bar{x}A + \bar{y}B)A + \rho(\bar{y})B = \bar{x}A^2 + \bar{y}BA + \rho(\bar{y})B = \\ &\overset{(3.46)}{=} \bar{x}A^2 + \bar{y}BA - \bar{y}BAB^{-1}B = \bar{x} + \bar{y}BA - \bar{y}BA = \bar{x}.\end{aligned}$$

Отже, унітарна матрична квазігрупа $(K^n; f, \bar{0})$ має праву властивість оборотності. □

Нагадаємо такий відомий факт:

**Твердження 3.4.** *$\theta$ є ендоморфізмом групи $(K^n; +)$ тоді і тільки тоді, коли для деякої матриці $A$ виконується рівність $\theta(\bar{x}) = \bar{x}A$. $\theta$ буде автоморфізмом тоді і тільки тоді, коли матриця $A$ – оборотна над кільцем $K$.*

Ураховуючи цей факт та теорему 3.5, маємо такий наслідок:

**Наслідок 3.11.** *Кількість $IP$ квазігруп над кільцем $K$ дорівнює кількості пар матриць $(A, C)$, де $A$ – оборотна матриця над кільцем $K$, а матриця $C$ є розв'язком матричного рівняння $X^2 = E$.*

Для того, щоб знайти вигляд односторонньої, двосторонньої матричної IP квазігрупи та тристоронньої IP квазігрупи, потрібно довести таке твердження.

**Твердження 3.5.** *Кожна матрична $IP$ квазігрупа над кільцем $K$ має вигляд:*

| | |
|---|---|
| *середня $IP$ квазігрупа* | $f(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x}A + \bar{y}AC + \bar{a}$ |
| *ліва $IP$ квазігрупа* | $f(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x}A + \bar{y}C + \bar{a}$ |
| *права $IP$ квазігрупа* | $f(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x}C + \bar{y}A + \bar{a}$ |
| *ліво-середня $IP$ квазігрупа* | $f(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x}C_1C_2 + \bar{y}C_1 + \bar{a}$ |
| *право-середня $IP$ квазігрупа* | $f(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x}C_1 + \bar{y}C_1C_2 + \bar{a}$ |
| *ліво-права $IP$ квазігрупа* | $f(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x}C_1 + \bar{y}C_2 + \bar{a}$ |
| *тристороння $IP$ квазігрупа* | $f(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x}C_1 + \bar{y}C_2 + \bar{a}$, $C_1C_2 = C_2C_1$ |

*де $A$ — оборотна матриця над кільцем $K$; $C$, $C_1$, $C_2$ — уніпотентні матриці; $\bar{a} \in K^2$.*

**Доведення.** Згідно з рівністю 3.40 та теоремою 3.10 середня, ліва та права $IP$ квазігрупи матимуть вигляд:

$$f(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x}A+\bar{y}AC+\bar{a}, \qquad f(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x}A+\bar{y}C+\bar{a}, \qquad f(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x}C+\bar{y}A+\bar{a}$$

відповідно.

Розглянемо двосторонні $IP$ квазігрупи. Право-середні: в середній IP лівий коефіцієнт має бути уніпотентною матрицею, тому такі квазігрупи визначаються рівностями

$$f(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x}C_1 + \bar{y}C_1C_2 + \bar{a}, \tag{3.47}$$

де $C_1$, $C_2$ — уніпотентні матриці, тобто вони є розв'язками рівняння $X^2 = E$. Аналогічно утворюються формули для ліво-середніх та право-лівих IP квазігруп.

Для визначення тристоронніх квазігруп розглянемо право-середню IP квазігрупу (3.47) де $C_1$, $C_2$ — уніпотентні матриці. Вона є лівою IP тоді і тільки тоді, коли правий коефіцієнт є уніпотентною матрицею, тобто $(C_1C_2)^2 = E$. Помноживши дану рівність справа на матрицю $C_2$, а потім на матрицю $C_1$, отримаємо

$$C_1C_2 = C_2C_1.$$

Отже, матричні квазігрупи з тристоронньою властивістю IP мають зазначений вигляд, коли матриці $C_1$, $C_2$ комутують. □

### 3.1.3. Матричні $IP$ квазігрупи 4-го порядку

З теореми 3.10 та наслідку 3.11 випливає таке твердження.

**Твердження 3.6.** *Для описання центральних середніх $IP$ квазігруп (а отже, лівих і правих $IP$ квазігруп) досить розв'язати матричне рівняння*

$$X^2 = E.$$

**Доведення.** Згідно теореми 3.10, щоб описати центральні середні (ліві і праві) $IP$ квазігрупи, треба знайти матриці, які будуть задовольняти умову $C^2 = E$ для середніх $IP$ квазігруп, $B^2 = E$ для лівих $IP$ квазігруп та $A^2 = E$ для правих $IP$ квазігруп. А це й означає, що треба знайти розв'язки матричного рівняння $X^2 = E$.

□

Розв'язки цього рівняння над групою Клейна $\mathbb{Z}_2^2$ подано в такій лемі.

**Лема 3.1.** *Множина $U$ всіх розв'язків матричного рівняння $X^2 = E$ над множиною квадратних матриць $M_2(\mathbb{Z}_2)$, де $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, дорівнює*

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Доведення.** Нехай $C := \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$ є розв'язком матричного рівняння

$X^2 = E$. Тобто, $\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Звідси маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + yu & = & 1, \\ xy + yv & = & 0, \\ ux + vu & = & 0, \\ yu + v^2 & = & 1. \end{cases}$$

1. Нехай $y = 1$, тому з другого рівняння маємо, що $v = x$. Тоді система рівносильна рівнянню

$$x^2 + yu = 1. \tag{3.48}$$

1.1. Нехай $x = 1$, тоді з рівняння (3.13) маємо, що $yu = 0$. Звідси, $v = 1$, $u = 0$.

Отже, матриця матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. Нехай $x = 0$, тоді $v = 0$, а $yu = 1$. Звідси, $u = 1$. Так, матриця матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Нехай $y = 0$, тоді система матиме вигляд:

$$\begin{cases} x^2 & = & 1, \\ ux + vu & = & 0, \\ v^2 & = & 1. \end{cases}$$

Оскільки, $\mathbb{Z}_2$ — поле, то з першого і третього рівняння маємо $x = 1$ і $v = 1$, з другого рівняння $u = 0$ або $u = 1$. Отже, матриці матимуть вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримали множину розв'язків $U$. Лема доведена. $\square$

Зауважимо, що всі матриці із множини $U$ теплецеві. Нагадаємо, що матриця другого порядку над комутативним кільцем K називається *теплецевою*, якщо на діагоналі елементи однакові.

Отримані результати дозволяють обчислювати матричні квазігрупи скінченного порядку. Для групи Клейна маємо такий наслідок.

**Наслідок 3.12.** *Кількість різних матричних $IP$ квазігруп над полем $\mathbb{Z}_2^2$ подано в таблиці:*

| | |
|---|---|
| *середня $IP$ квазігрупа* | *96* |
| *ліва $IP$ квазігрупа* | *96* |
| *права $IP$ квазігрупа* | *96* |
| *ліво-середня $IP$ квазігрупа* | *64* |
| *право-середня $IP$ квазігрупа* | *64* |
| *ліво-права $IP$ квазігрупа* | *64* |
| *тристороння $IP$ квазігрупа* | *40* |
| *всього* | *136* |

**Доведення.** Оскільки група Клейна має 6 автоморфізмів, то згідно твердження 3.4 та наслідку 3.11, кількість односторонніх $IP$ квазігруп над групою Клейна $\mathbb{Z}_2^2$ буде дорівнювати $6 \cdot 4 \cdot 4 = 96$.

Оскільки в двосторонніх квазігрупах 3 незалежних параметра, то їх кількість дорівнює $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Для визначення тристоронніх матричних квазігруп з тристоронньою властивістю $IP$ потрібно знайти кількість комутуючих пар матриць в множині $U$. Безпосередньою перевіркою переконуємось, що кожна матриця комутує лише сама з собою та з одиничною матрицею. Тому маємо 4 пари, в яких матриці збігються, тобто пар виду $(C, C)$, та 6 пар, в яких матриці різні, тобто пари виду $(C, E)$ і $(E, C)$, де $C \neq E$. Отже, всього 10 пар матриць. Ураховуючи вільний член, отримуємо 40 матричних квазігруп.

Для обчислення всіх різних матричних квазігруп, які мають одну із властивостей IP, скористаємось загальною формулою обчислення кількості елементів в трьох множинах $X$, $Y$, $Z$:

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|.$$

Нехай $X$, $Y$, $Z$ — це множини матричних квазігруп, які мають властивість відповідно середньої, лівої та правої IP, тоді

$$|X \cup Y \cup Z| = 3 \cdot 96 - 3 \cdot 64 + 40 = 136.$$

□

### 3.1.4. Матричні $IP$ квазігрупи 9-го порядку

Розглянемо центральну квазігрупу 9-го порядку $\mathbb{Z}_3^2$. Знайдемо розв'язки рівняння $X^2 = E$, яке є умовою для того, щоб квазігрупа була $IP$ квазігрупою.

**Лема 3.2.** *Множина $U$ всіх розв'язків матричного рівняння $X^2 = E$ над множиною квадратних матриць $M_2(\mathbb{Z}_3)$, де $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$, дорівнює*

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Доведення.**

Нехай $C := \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$ і $C^2 = E$, тоді, $\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Перепишемо цю рівність у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + yu &= 1, \\ xy + yv &= 0, \\ ux + vu &= 0, \\ yu + v^2 &= 1. \end{cases}$$

Розглянемо випадки: $y \neq 0$ та $y = 0$.

1. Нехай $y \neq 0$, тобто $y \in \{1,2\}$, тоді з другого рівняння системи випливає, що $v = -x = 2x$ і система рівносильна такому рівнянню

$$x^2 + yu = 1.$$

Розглянемо два випадки: $x \neq 0$ і $x = 0$.

1.1. Нехай $x \neq 0$, тобто $x \in \{1,2\}$, тоді $x^2 = 1$ і, оскільки $y \neq 0$, то $u = 0$. Отже, маємо перші чотири матриці із множини $U$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. Нехай $x = 0$, тоді система має вигляд:

$$\begin{cases} yu &= 1, \\ yv &= 0, \\ vu &= 0, \\ yu + v^2 &= 1. \end{cases}$$

З першого рівняння випливає, що $y = u \in \{1,2\}$, тоді з другого рівняння системи маємо $v = 0$. Цим умовам задовольняють дві матриці:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Нехай $y = 0$, то система матиме вигляд

$$\begin{cases} x^2 &= 1, \\ u(x+v) &= 0, \\ v^2 &= 1. \end{cases}$$

З першого і третього рівняння випливає, що $x, v \in \{1,2\}$.

2.1. Якщо $u = 0$, то маємо чотири матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.1. Якщо $u \neq 0$, то з другого рівняння маємо $x = -v = 2v$ і тому цим умовам задовольняють також чотири матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Отже, кожна матрична $IP$ квазігрупа порядку $3^2$ над кільцем $\mathbb{Z}_3$ збігається з однією із таких квазігруп:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}A + \bar{y}AC + \bar{a}, \qquad f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}A + \bar{y}C + \bar{a}, \qquad f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}C + \bar{y}A + \bar{a},$$

де $C$ — матриця з множини $U$ (лема 3.2), а $A$ — довільна оборотна мариця.

## 3.2. Групові ізотопи з властивістю схрещеної оборотності

У [61] групові ізотопи з властивістю схрещеної оборотності були досліджені.

**Теорема 3.11.** *[30] Необхідною та достатньою умовою для того, щоб ізотоп $(Q; \circ)$ $CI$-квазігрупи $(Q; \cdot)$, причому ізотопія задається трійкою $(\lambda, \mu, \nu)$ був $CI$-квазігрупою є наступне: існує підстановка $I'$ така, що $T_1 = (I^{-1}\mu I'\lambda^{-1}, \nu\mu^{-1}, \lambda\nu^{-1})$ і $T_2 = (\nu\lambda^{-1}, I\lambda I'^{-1}\mu^{-1}, \mu\nu^{-1})$ є автотопіями квазігрупи $(Q; \cdot)$.*

**Теорема 3.12.** *[30] Якщо довільний $LP$-ізотоп $CI$ квазігрупи $(Q; \cdot)$ є $CI$-лупою, то квазігрупа $(Q; \cdot)$ ізотопна деякій абелевій групі $(Q; +)$, де $x \cdot y = \alpha x + a + \beta y$, а $\alpha$, $\beta$ є комутуючими взаємнооберненими автоморфізмами групи $(Q; +)$.*

**Теорема 3.13.** *[69] Ліва лінійна квазігрупа $(Q; \cdot)$ над лупою $(Q; +)$, де $x \cdot y = a + \alpha x + \beta y$, буде $CI$-квазігрупою з підстановкою $\gamma$, де $\gamma 0 = 0$, тоді і тільки тоді, коли $a + \alpha a = 0$, $\beta = \alpha^{-1}$, $\alpha^3 x + \gamma x = 0$ для всіх $x \in Q$ і $(Q; +)$ — $CI$-лупа.*

**Теорема 3.14.** *Нехай $(Q; \circ)$ буде груповим ізотопом та (3.1) є її канонічним розкладом, тоді:*

*1) $(Q;\circ)$ є середньою $CIP$ квазігрупа з функцією оборотності $\gamma$ тоді і тільки тоді, якщо $\alpha$ є антиавтоморфізмом $(Q;+)$ і*

$$\beta=\alpha^{-1},\quad \gamma(x)=-\alpha^{-2}(a)-\alpha^{-3}(x)-\alpha^{-1}(a),$$

*2) $(Q;\circ)$ є лівою $CIP$ квазігрупа з функцією оборотності $\gamma$ тоді і тільки тоді, якщо $\alpha$ є антиавтоморфізмом $(Q;+)$ і*

$$\beta=I_aJ\alpha^2,\quad \gamma(x)=\alpha\beta(x)+\alpha(a)+a,$$

*3) $(Q;\circ)$ є правою $CIP$ квазігрупа з функцією оборотності $\gamma$ тоді і тільки тоді, якщо $\beta$ є антиавтоморфізмом $(Q;+)$ і*

$$\alpha=I_a^{-1}J\beta^2,\quad \gamma(x)=a+\beta(a)+\beta\alpha(x).$$

**Доведення.** 1) Нехай груповий ізотоп $(Q;\circ)$ буде $MCIP$ квазігрупою, а саме, виконується тотожність

$$\gamma(x)\circ(y\circ x)=y.$$

Застосувавши канонічний розклад (3.1), маємо:

$$\alpha\gamma(x)+a+\beta(\alpha(y)+a+\beta(x))=y, \tag{3.49}$$

звідси,

$$\beta(\alpha(y)+a+\beta(x))=-a-\alpha\gamma(x)+y.$$

Твердження 3.1 означає, що $\beta$, $\alpha$ є антиавтоморфізмами групи $(Q;+,0)$ тоді

$$\beta^2(x)+\beta(a)+\beta\alpha(y)=-a-\alpha\gamma(x)+y. \tag{3.50}$$

Коли $x=y=0$, отримуємо $\beta(a)=-a-\alpha\gamma(0)$, і коли $x=0$, маємо таку рівність $\beta(a)+\beta\alpha(y)=-a-\alpha\gamma(0)+y$, тобто,

$$\beta(a)+\beta\alpha(y)=\beta(a)+y.$$

Скоротимо зліва на $\beta a$ і справа на $-a$ в першій та другій рівностях відповідно. Отримали $\alpha\beta=\beta\alpha=\iota$, тобто $\beta=\alpha^{-1}$.

Підставляємо отримані рівності в рівність (3.62):

$$(\alpha^{-1})^2(x) + \alpha^{-1}(a) + y = -a - \alpha\gamma(x) + y.$$

Скоротивши справа на $y$, отримали

$$\alpha^{-2}(x) + \alpha^{-1}(a) = -a - \alpha\gamma(x).$$

Звідси,

$$\alpha\gamma(x) = -\alpha^{-1}(a) - \alpha^{-2}(x) - a. \tag{3.51}$$

Застосуємо до обох частин першої рівності (3.63) перетворення $\alpha^{-1}$

$$\gamma(x) = -\alpha^{-2}(a) - \alpha^{-3}(x) - \alpha^{-1}(a). \tag{3.52}$$

І навпаки, нехай $(Q;\circ)$ є груповим ізотопом з канонічним розкладом (3.1), що задовольняє $\gamma(x)\circ(y\circ x) = y$:

$$\begin{aligned}\gamma(x)\circ(y\circ x) &\overset{(3.1)}{=} \alpha\gamma(x) + a + \alpha^{-1}(\alpha(y) + a + \alpha^{-1}(x)) = \\ &= \alpha\gamma(x) + a + \alpha^{-2}(x) + \alpha^{-1}(a) + y = \\ &\overset{(3.68)}{=} \alpha(-\alpha^{-2}(a) - \alpha^{-3}(x) - \alpha^{-1}(a)) + \\ &+ a + \alpha^{-2}(x) + \alpha^{-1}(a) + y = \\ &= -\alpha^{-1}(a) - \alpha^{-2}(x) - a + a + \alpha^{-2}(x) + \alpha^{-1}(a) + y = y.\end{aligned}$$

Отже, груповий ізотоп $(Q;\circ)$ буде середньою $CIP$ квазігрупою.

2) Нехай груповий ізотоп $(Q;\circ)$ буде лівою $CIP$ квазігрупою, тобто виконується тотожність $(x\circ y)\circ x = \gamma(y)$. Застосовуючи канонічний розклад (3.1), маємо:

$$\alpha(\alpha(x) + a + \beta(y)) + a + \beta(x) = \gamma(y), \tag{3.53}$$

звідси,

$$\alpha(\alpha(x) + a + \beta(y)) = \gamma(y) - \beta(x) - a.$$

Твердження 3.1 означає, що $\alpha$ є антиавтоморфізмом $(Q;+,0)$ тоді

$$\alpha\beta(y) + \alpha(a) + \alpha^2(x) = \gamma(y) - \beta(x) - a.$$

Коли $x = y = 0$, отримуємо, що $\alpha(a) = \gamma(0) - a$ і якщо $x = 0$, маємо $\alpha\beta(y) + \alpha(a) = \gamma(y) - a$. Отже,

$$\gamma(y) = \alpha\beta(y) + \alpha(a) + a.$$

Підставимо отримані співвідношення в останню рівність:

$$\alpha\beta(y) + \alpha(a) + \alpha^2(x) = \alpha\beta(y) + \alpha(a) + a - \beta(x) - a.$$

Скоротивши зліва на $\alpha\beta(y) + \alpha(a)$, маємо

$$\alpha^2(x) = a - \beta(x) - a.$$

Тому,

$$\beta(x) = -a - \alpha^2(x) + a, \quad , \quad \beta(x) = I_a J\alpha^2(x).$$

Навпаки, нехай $(Q; \circ)$ буде груповим ізотопом з канонічним розкладом (3.1), що задовольняє рівність $(x \circ y) \circ x = \gamma(y)$:

$$\begin{aligned} (x \circ y) \circ x &\overset{(3.1)}{=} \alpha(\alpha(x) + a + \beta(y)) + a + \beta(x) = \\ &= \alpha\beta(y) + \alpha(a) + \alpha^2(x) + a + I_a J\alpha^2(x) = \\ &= \alpha\beta(y) + \alpha(a) + \alpha^2(x) + a - a - \alpha^2(x) + a = \\ &= \alpha\beta(y) + \alpha(a) + a = \gamma(y). \end{aligned}$$

Отже, груповий ізотоп $(Q; \circ)$ буде лівою $CIP$ квазігрупою.

3) Нехай груповий ізотоп $(Q; \circ)$ буде правою $CIP$ квазігрупою, тобто виконується тотожність $y \circ (x \circ y) = \gamma(x)$.

Застосовуючи канонічний розклад (3.1), маємо:

$$\alpha(y) + a + \beta(\alpha(x) + a + \beta(y)) = \gamma(x), \tag{3.54}$$

звідси,

$$\beta(\alpha(x) + a + \beta(y)) = -a - \alpha y + \gamma(x).$$

Твердження 3.1 означає, що $\beta$ є антиавтоморфізмом групи $(Q; +, 0)$, тоді then

$$\beta^2(y) + \beta(a) + \beta\alpha(x) = -a - \alpha(y) + \gamma(x).$$

Коли $x = y = 0$, отримаємо $\beta(a) = -a + \gamma(0)$ і коли $y = 0$, маємо $\beta(a) + \beta\alpha(x) = -a + \gamma(x)$, тобто $\gamma(x) = a + \beta(a) + \beta\alpha(x)$.

Підставимо отримані співвідношення в останню рівність:

$$\beta^2(y) + \beta(a) + \beta\alpha(x) = -a - \alpha(y) + a + \beta(a) + \beta\alpha(x).$$

Скоротивши справа на $\beta(a) + \beta\alpha(x)$, маємо

$$\beta^2(y) = -a - \alpha(y) + a.$$

Звідси, $\alpha(y) = a - \beta^2(y) - a$, тобто $\alpha(y) = I_a^{-1} J\beta^2(y)$.

Навпаки, нехай $(Q; \circ)$ буде груповим ізотопом з канонічним розкладом (3.1), що задовольняє рівність $y \circ (x \circ y) = \gamma(x)$:

$$\begin{aligned} y \circ (x \circ y) &\overset{(3.1)}{=} \alpha(y) + a + \beta(\alpha(x) + a + \beta(y)) = \\ &= \alpha(y) + a + \beta^2(y) + \beta(a) + \beta\alpha(x) = \\ &= I_a^{-1} J\beta^2(y) + a + \beta^2(y) + \beta(a) + \beta\alpha(x) = \\ &= a - \beta^2(y) - a + a + \beta^2(y) + \beta(a) + \beta\alpha(x) = \\ &= a + \beta(a) + \beta\alpha(x) = \gamma(x). \end{aligned}$$

Отже, груповий ізотоп $(Q; \circ)$ буде правою $CIP$ квазігрупою. □

Такі ж умови виконуються і для центральних квазігруп з властивістю схрещеної оборотності.

**Теорема 3.15.** *Якщо груповий ізотоп має дві властивості оборотності з трьох: $LCIP$, $RCIP$, $MCIP$, тоді він також задовольняє і третю властивість оборотності.*

**Доведення.** Нехай $(Q; \circ)$ — груповий ізотоп і (3.1) його канонічний розклад.

З теореми 3.14 випливає, що для доведення цієї теореми досить довести, що з будь-якої пари рівностей

$$\beta = JI_a\alpha^2, \quad \alpha = JI_a^{-1}\beta^2, \quad \beta = \alpha^{-1}$$

випливає третя рівність.

Нехай виконуються перші дві рівності. Підставимо першу рівність в другу, маємо:

$$\alpha = JI_a^{-1}\beta^2 = JI_a^{-1}(JI_a\alpha^2)\cdot(JI_a\alpha^2) = \alpha^2(JI_a)\alpha^2.$$

Звідси маємо, $\alpha^{-1} = JI_a\alpha^2 = \beta$, тобто третя рівність виконується.

Нехай виконуються перша та третя рівності. Підставимо першу рівність у третю, тоді отримаємо: $\alpha^{-1} = JI_a\alpha^2$, тобто $JI_a = \alpha^{-3}$.

Отже, $JI_a^{-1}\beta^2 = JI_a^{-1}\beta\cdot\beta = JI_a^{-1}(JI_a\alpha^2)(JI_a\alpha^2) = \alpha^2(JI_a)\alpha^2 =$
$= \alpha^2\alpha^{-3}\alpha^2 = \alpha$.

Це означає, що виконується друга рівність.

Нехай виконується друга та третя рівності. Підставимо третю рівність в другу рівність, отримаємо: $\beta^{-1} = JI_a^{-1}\beta^2$, тобто $JI_a^{-1} = \beta^{-3}$.

Тому маємо:

$$JI_a\alpha^2 = JI_a\alpha\cdot\alpha = JI_a(JI_a^{-1}\beta^2)(JI_a^{-1}\beta^2) = \beta^2(JI_a^{-1})\beta^2 = \beta^2\beta^{-3}\beta^2 = \beta.$$

Отже, третя рівність також виконується. Теорему доведено. □

**Теорема 3.16.** *[91] Нехай $P(x,y) = a+bx+cy$ є лінійним многочленом над $\mathbb{Z}_n$ такий, що $(b,n) = (c,n) = 1$. $P(x,y)$ є $CIP$ квазігрупою $(Z_n, P)$ над $\mathbb{Z}_n$, якщо $bc \equiv 1(mod\ n)$.*

У [82] доведено, що кожен лінійний ізотоп циклічної групи ізоморфний квазігрупі, визначеній на кільці за модулем m (див. теорему 2). Тому для $CIP$ квазігруп доведено наступний наслідок.

**Наслідок 3.13.** *Нехай $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ — груповий ізотоп з канонічним розкладом*

$$x \circ y = ax + c + by, \tag{3.55}$$

*де $c$ є спільним дільником $m$ і $a+b-1$, тоді:*

*1) $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ буде середньою $CIP$ квазігрупою з функцією оборотності $\gamma$ тоді і тільки тоді, коли:*

$$ab = 1, \quad \gamma(x) = -a^{-3}x - a^{-2}c - a^{-1}c;$$

*2) $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ буде лівою $CIP$ квазігрупою з функцією оборотності $\gamma$ тоді і тільки тоді, коли:*

$$b = -a^2, \quad \gamma(x) = abx + ac + c;$$

*3) $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ буде правою $CIP$ квазігрупою з функцією оборотності $\gamma$ тоді і тільки тоді, коли:*

$$a = -b^2, \quad \gamma(x) = c + bc + bax.$$

**Доведення.** 1) Нехай груповий ізотоп $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ буде $MCIP$ квазігрупою, а саме, виконується тотожність $\gamma(x) \circ (y \circ x) = y$. Застосувавши канонічний розклад (3.55), маємо:

$$a\gamma(x) + c + b(ay + c + bx) = y. \tag{3.56}$$

Оскільки $b$, $a$ є елементами кільця $\mathbb{Z}_m$ тоді

$$a\gamma(x) + c + bay + bc + b^2x = y. \tag{3.57}$$

Коли $x = y = 0$, отримуємо

$$a\gamma(0) + c + bc = 0,$$

і коли $x = 0$, маємо таку рівність

$$a\gamma(0) + c + bay + bc = y,$$

тобто, $bay = y$. Це означає, що $ba = 1$, тобто $b = a^{-1}$

Підставляємо отримані рівності в рівність (3.57):

$$a\gamma(x) = y - b^2x - bc - y - c, \qquad a\gamma(x) = -b^2x - bc - c.$$

Звідси,

$$\gamma(x) = -b^3x - b^2c - bc. \tag{3.58}$$

І навпаки, нехай $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ є груповим ізотопом з канонічним розкладом (3.55), що задовольняє $\gamma(x)\circ(y\circ x)=y$:

$$\begin{aligned}\gamma(x)\circ(y\circ x) &\overset{(3.55)}{=} a\gamma(x)+c+b(ay+c+bx)=\\ &= a\gamma(x)+c+bay+bc+b^2x=\\ &\overset{(3.58)}{=} a(-b^3x-b^2c-bc)+c+b^2x+bc+y=\\ &= -b^2x-bc-c+c+b^2x+bc+y=y.\end{aligned}$$

Отже, груповий ізотоп $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ буде середньою $CIP$ квазігрупою.

2) Нехай груповий ізотоп $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ буде лівою $CIP$ квазігрупою, тобто виконується тотожність $(x\circ y)\circ x=\gamma(y)$. Застосовуючи канонічний розклад (3.55), маємо:

$$a(ax+c+by)+c+bx=\gamma(y). \tag{3.59}$$

Оскільки $b$, $a$ є елементами кільця $\mathbb{Z}_m$, тоді

$$a^2x+ac+aby+c+bx=\gamma(y).$$

Коли $x=y=0$, отримуємо $ac+c=\gamma(0)$ і якщо $x=0$, маємо $ac+aby+c=\gamma(y)$. Тобто,

$$\gamma(y)=aby+ac+c.$$

Підставимо отримані співвідношення в останню рівність:

$$a^2x+ac+aby+c+bx=aby+ac+c.$$

Звідси маємо $a^2x+bx=0$. Тому, $-bx=a^2x$.

Навпаки, нехай $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ буде груповим ізотопом з канонічним розкладом (3.55), що задовольняє рівність $(x\circ y)\circ x=\gamma(y)$:

$$\begin{aligned}(x\circ y)\circ x &\overset{(3.55)}{=} a(ax+c+by)+c+bx=a^2x+ac+aby+c+bx=\\ &= -bx+ac+aby+c+bx=aby+ac+c=\gamma(y).\end{aligned}$$

Отже, груповий ізотоп $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ буде лівою $CIP$ квазігрупою.

3) Нехай груповий ізотоп $(\mathbb{Z}_m; \circ)$ буде правою $CIP$ квазігрупою, тобто виконується тотожність $y \circ (x \circ y) = \gamma(x)$.

Застосовуючи канонічний розклад (3.55), маємо:

$$ay + c + b(ax + c + by) = \gamma(x). \tag{3.60}$$

Оскільки $b$, $a$ є елементами кільця $\mathbb{Z}_m$ тоді

$$ay + c + bax + bc + b^2y = \gamma(x).$$

Коли $x = y = 0$, отримаємо $c + bc = \gamma 0$ і коли $y = 0$, маємо $c + bax + bc = \gamma(x)$.

Підставимо отримані співвідношення в останню рівність:

$$ay + c + bax + bc + b^2y = c + bax + bc.$$

Звідси, $ay + b^2y = 0$, тобто $b^2y = -ay$.

Навпаки, нехай $(Q; \circ)$ буде груповим ізотопом з канонічним розкладом (3.1), що задовольняє рівність $y \circ (x \circ y) = \gamma(x)$:

$$y \circ (x \circ y) \overset{(3.1)}{=} ay + c + b(ax + c + by) = ay + c + bax + bc + b^2y =$$

$$= ay + c + bax + bc - ay = c + bax + bc = \gamma(x).$$

Отже, груповий ізотоп $(\mathbb{Z}_m; \circ)$ буде правою $CIP$ квазігрупою. □

**Твердження 3.7.** *Парастрофна орбіта многовидів $CIP$ квазігруп з тристоронньою властивістю оборотності складається з одного многовида, який є тотально-симетричним многовидом.*

**Доведення.** Справді, легко довести, що

$${}^{\sigma}(\mathfrak{C} \cap {}^{r}\mathfrak{C} \cap {}^{\ell}\mathfrak{C}) = \mathfrak{C} \cap {}^{r}\mathfrak{C} \cap {}^{\ell}\mathfrak{C},$$

для всіх $\sigma \in S_3$. □

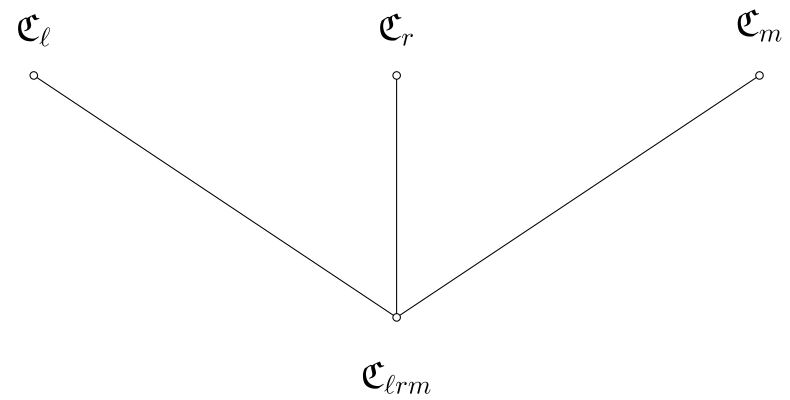
**Твердження 3.8.** *В'язка многовидів $CIP$ квазігруп містить такі многовиди:*

*1) Парастрофна орбіта односторонніх $CIP$ квазігруп*

$$Po(\mathfrak{C}) = \{\mathfrak{C}, {}^{\ell}\mathfrak{C}, {}^{r}\mathfrak{C}\};$$

*2) Парастрофна орбіта тристоронніх $CIP$ квазігруп*

$$Po(\mathfrak{C}) = \mathfrak{C} \cap {}^{r}\mathfrak{C} \cap {}^{\ell}\mathfrak{C}.$$




**Доведення.** Доведення пункту 1) доводиться в Теоремі 2.1; доведення пункту 2) є таким, як в Теоремі 3.15. □

Відмітимо, що властивості середніх $CIP$ квазігруп, які є лінійними ізотопами циклічних груп, отримані в [91].

За даними умовами, знайденими в теоремі 3.14 і наслідку 3.13 відповідні приклади квазігруп з властивістю схрещеної оборотності знайдено:

**Приклад 1.** Квазігрупа $(\mathbb{Z}_5; \circ)$ з визначеною на ній операцією $\circ$ таким чином:

$$x \circ y := 2x + 2 + 3y,$$

буде середньою $CIP$ квазігрупою та не буде ні лівою $CIP$ квазігрупою, ні правою $CIP$ квазігрупою.

Справді, відповідно до наслідка 3.13, $(\mathbb{Z}_5; \circ)$ буде середньою $CIP$ квазігрупою, оскільки виконується умова $2 \cdot 3 = 1$ в $(\mathbb{Z}_5; \circ)$.

Але відповідно до наслідка 3.13, не виконуються умови $2^2 + 3 = 4 + 3 = 2 \neq 0$, $2 + 3^2 = 2 + 4 = 1 \neq 0$, які визначають ліву та праву $CIP$ квазігрупи.

Згідно з твердженням 3.7, многовид із властивістю схрещеної оборотності є тотально симетричним. Ми демонструємо цю властивість у такому прикладі.

**Приклад 2.** Розглянемо квазігрупу $(\mathbb{Z}_7;\circ)$ і

$$x \circ y := 3x + 2 + 5y.$$

За наслідком 3.13, квазігрупа $(\mathbb{Z}_7;\circ)$ належить кожному многовиду середніх, лівих та правих $CIP$ квазігруп, тому що виконуються відповідні умови в полі $\mathbb{Z}_7$: $3 \cdot 5 = 1, \quad 3^2 + 5 = 2 + 5 = 0, \quad 3 + 5^2 = 3 + 4 = 0.$ Зауважимо, що при цьому середня, ліва та права функції оборотності будуть різними.

$$\alpha(x) := x + 4, \quad \beta(x) := x + 1, \quad \gamma(x) := x + 5.$$

Перевіримо виконання відповідних рівностей:

$$(x \circ y) \circ \alpha(x) = 3(3x + 2 + 5y) + 2 + 5(x + 4) = 2x + 6 + y + 2 + 5x + 6 = y,$$

$$(y \circ x) \circ y = 3(3y + 2 + 5x) + 2 + 5y = 2y + 6 + x + 2 + 5y = x + 1 = \beta(x),$$

$$y \circ (x \circ y) = 3y + 2 + 5(3x + 2 + 5y) = 3y + 2 + x + 3 + 4y = x + 5 = \gamma(x).$$

Позаяк рівності, які характеризують многовиди $CIP$ квазігруп виконуються, то квазігрупа $(\mathbb{Z}_7;\circ)$ є тристоронньою $CIP$ квазігрупою та тотально симетричною.

**Приклад 3.** Розглянемо квазігрупу $(\mathbb{Z}_9;\circ)$, де $\mathbb{Z}_9$ є кільцем за модулем 9 і

$$x \circ y = 2x + 3 + 5y.$$

$(\mathbb{Z}_9;\circ)$ буде середньою $CIP$-квазігрупою, $\gamma(x) = x$

Перевіримо виконання рівності $\gamma(x) \circ (y \circ x) = y$. Справді,

$$\gamma(x) \circ (y \circ x) = 2x + 3 + 5(2y + 3 + 5x) = 2x + 3 + y + 6 + (-2x) = y.$$

**Приклад 4.** Розглянемо квазігрупу $(\mathbb{Z}_{11};\circ)$ з канонічним розкладом

$$x \circ y = 3x + 5 + 4y.$$

$(\mathbb{Z}_{11};\circ)$ є $CIP$-квазігрупою з функцією оборотності $\gamma(x)=2x-1$. Справді,

$$\gamma(x)\circ(y\circ x)=3(2x-1)+5+4(3y+5+4x)=y.$$

Квазігрупа $(\mathbb{Z}_{11};\bullet)$ з канонічним розкладом

$$x\bullet y=4x+2+6y.$$

$(\mathbb{Z}_{11};\bullet)$ є квазігрупою з властивістю схрещеної оборотності з функцією оборотності $\gamma(x)=x+8$. Справді,

$$(y\bullet x)\bullet y=4(4y+2+6x)+2+6y=5y+6+x+2+6y=x+8=\gamma(x).$$

### 3.2.1. Унітарні центральні квазігрупи з властивістю схрещеної оборотності ($CIP$)

Для унітарних центральних квазігруп з властивістю схрещеної оборотності маємо такий наслідок.

**Наслідок 3.14.** *Нехай $(Q;\circ,0)$ — унітарна центральна квазігрупа і (3.32) — її канонічний розклад, тоді:*

*1) $(Q;\circ)$ є середньою $CIP$ квазігрупою тоді і тільки тоді, коли $\beta=\alpha^{-1}$. Тоді функція оборотності $\gamma$ обчислюється за формулою $\gamma=J\alpha^{-3}$;*

*2) $(Q;\circ)$ є лівою $CIP$ квазігрупою тоді і тільки тоді, коли $\beta=J\alpha^2$. Тоді функція оборотності $\gamma$ обчислюється за формулою $\gamma=\alpha\beta$;*

*3) $(Q;\circ)$ є правою $CIP$ квазігрупою тоді і тільки тоді, коли $\alpha=J\beta^2$. Тоді функція оборотності $\gamma$ обчислюється за формулою $\gamma=\beta\alpha$.*

**Доведення.** 1) Нехай груповий ізотоп $(Q;\circ,0)$ буде $MCIP$ квазігрупою, а саме, виконується тотожність $\gamma(x)\circ(y\circ x)=y$. Застосувавши канонічний розклад (3.32), маємо:

$$\alpha\gamma(x)+\beta(\alpha(y)+\beta(x))=y, \tag{3.61}$$

звідси, $\beta(\alpha(y)+\beta(x))=-\alpha\gamma(x)+y$.

Твердження 3.1 означає, що $\beta$, $\alpha$ є антиавтоморфізмами групи $(Q;+,0)$ тоді

$$\beta^2(x)+\beta\alpha(y)=-\alpha\gamma(x)+y. \tag{3.62}$$

Коли $x=y=0$, отримуємо $-\alpha\gamma(0)=0$, і коли $x=0$, маємо таку рівність $\beta\alpha(y)=-\alpha\gamma(0)+y$, тобто, $\beta\alpha=\iota$. Звідси, $\beta=\alpha^{-1}$.

Підставляємо отримані рівності в рівність (3.62):

$$(\alpha^{-1})^2(x)+y=-\alpha\gamma(x)+y.$$

Скоротивши справа на $y$, отримали $\alpha^{-2}(x)=-\alpha\gamma(x)$.

Звідси,

$$\gamma(x)=-\alpha^{-3}(x). \tag{3.63}$$

І навпаки, нехай $(Q;\circ,0)$ є груповим ізотопом з канонічним розкладом (3.32), що задовольняє $\gamma(x)\circ(y\circ x)=y$:

$$\begin{aligned}\gamma(x)\circ(y\circ x)&\overset{(3.32)}{=}\alpha\gamma(x)+\alpha^{-1}(\alpha(y)+\alpha^{-1}(x))=\alpha\gamma(x)+\alpha^{-2}(x)+y=\\&\overset{(3.63)}{=}\alpha(-\alpha^{-3})(x)+\alpha^{-2}(x)+y=-\alpha^{-2}(x)+\alpha^{-2}(x)+y=y.\end{aligned}$$

Отже, груповий ізотоп $(Q;\circ)$ буде середньою $CIP$ квазігрупою.

2) Нехай груповий ізотоп $(Q;\circ)$ буде лівою $CIP$ квазігрупою, тобто виконується тотожність $(x\circ y)\circ x=\gamma(y)$. Застосовуючи канонічний розклад (3.32), маємо:

$$\alpha(\alpha(x)+\beta(y))+\beta(x)=\gamma(y), \tag{3.64}$$

звідси, $\alpha(\alpha(x)+\beta(y))=\gamma(y)-\beta(x)$. Твердження 3.1 означає, що $\alpha$ є антиавтоморфізмом $(Q;+,0)$ тоді

$$\alpha\beta(y)+\alpha^2(x)=\gamma(y)-\beta(x).$$

Коли $x=y=0$, отримуємо, що $\gamma(0)=0$ і якщо $x=0$, маємо $\alpha\beta(y)=\gamma(y)$. Отже, $\gamma(y)=\alpha\beta(y)$. Підставимо отримані співвідношення в останню рівність:

$$\alpha\beta(y)+\alpha^2(x)=\alpha\beta(y)-\beta(x).$$

Скоротивши зліва на $\alpha\beta(y)$, маємо

$$\alpha^2(x) = -\beta(x).$$

Тому, $\beta(x) = -\alpha^2(x)$, тобто, $\beta(x) = J\alpha^2(x)$.

Навпаки, нехай $(Q;\circ)$ буде груповим ізотопом з канонічним розкладом (3.32), що задовольняє рівність $(x \circ y) \circ x = \gamma(y)$:

$$(x \circ y) \circ x \overset{(3.32)}{=} \alpha(\alpha(x) + \beta(y)) + \beta(x) = \alpha\beta(y) + \alpha^2(x) - \alpha^2(x) = \alpha\beta(y) = \gamma(y).$$

Отже, груповий ізотоп $(Q;\circ)$ буде лівою $CIP$ квазігрупою.

3) Нехай груповий ізотоп $(Q;\circ)$ буде правою $CIP$ квазігрупою, тобто виконується тотожність $y \circ (x \circ y) = \gamma(x)$.

Застосовуючи канонічний розклад (3.32), маємо:

$$\alpha y + \beta(\alpha(x) + \beta(y)) = \gamma(x), \tag{3.65}$$

звідси, $\beta(\alpha(x) + \beta(y)) = -\alpha(y) + \gamma(x)$.

Твердження 3.1 означає, що $\beta$ є анти-автоморфізмом групи $(Q;+,0)$, тоді

$$\beta^2(y) + \beta\alpha(x) = -\alpha(y) + \gamma(x).$$

Коли $x = y = 0$, отримаємо $\gamma(0) = 0$ і коли $y = 0$, маємо $\beta\alpha(x) = \gamma(x)$, тобто $\gamma(x) = \beta\alpha(x)$.

Підставимо отримані співвідношення в останню рівність:

$$\beta^2(y) + \beta\alpha(x) = -\alpha(y) + \beta\alpha(x).$$

Скоротивши справа на $\beta\alpha(x)$, маємо $\beta^2(y) = -a - \alpha(y) + a$.

Звідси, $\alpha(y) = -\beta^2(y)$, тобто $\alpha(y) = J\beta^2(y)$.

Навпаки, нехай $(Q;\circ)$ буде груповим ізотопом з канонічним розкладом (3.32), що задовольняє рівність $y \circ (x \circ y) = \gamma(x)$:

$$y \circ (x \circ y) \overset{(3.32)}{=} \alpha(y) + \beta(\alpha(x) + \beta(y)) = \alpha(y) + \beta^2(y) + \beta\alpha(x) =$$

$$= J\beta^2(y) + \beta^2(y) + \beta\alpha(x) = \beta\alpha(x) = \gamma(x).$$

Отже, груповий ізотоп $(Q;\circ)$ буде правою $CIP$ квазігрупою. $\square$

**Наслідок 3.15.** [102] *Якщо центральна квазігрупа має середню, ліву чи праву властивість $CIP$, то вона медіальна.*

### 3.2.2. Матричні квазігрупи з властивістю схрещеної оборотності ($CIP$)

**Теорема 3.17.** *Нехай $(K^n; f, \bar{0})$ унітарна матрична квазігрупа і (3.41) її канонічний розклад, тоді:*

*1) $(K^n; f, \bar{0})$ є середньою $CIP$ квазігрупою з тоді і тільки тоді, коли $B = A^{-1}$. Тоді функція оборотності $\gamma$ обчислюється за формулою $\gamma(\bar{x}) = -\bar{x}A^{-3}$;*

*2) $(K^n; f, \bar{0})$ є лівою $CIP$ квазігрупою тоді і тільки тоді, коли $B = -A^2$. Тоді функція оборотності $\gamma$ обчислюється за формулою $\gamma(\bar{x}) = \bar{x}BA$;*

*3) $(K^n; f, \bar{0})$ є правою $CIP$ квазігрупою тоді і тільки тоді, коли $A = -B^2$. Тоді функція оборотності $\gamma$ обчислюється за формулою $\gamma(\bar{x}) = \bar{x}AB$.*

**Доведення.** 1) Нехай унітарна матрична квазігрупа $(K^n; f, \bar{0})$ буде $MCIP$ квазігрупою, а саме, виконується тотожність $\gamma(\bar{x}) \circ (\bar{y} \circ \bar{x}) = \bar{y}$. Застосувавши канонічний розклад (3.41), маємо: $\gamma(\bar{x})A + (\bar{y}A + \bar{x}B)B = \bar{y}$.

Звідси,

$$\gamma(\bar{x})A + \bar{y}AB + \bar{x}B^2 = \bar{y}. \tag{3.66}$$

Коли $x = y = 0$, отримуємо $\gamma(\bar{0}) = \bar{0}$, і коли $x = 0$, маємо таку рівність $\gamma(\bar{0})A + \bar{y}AB = \bar{y}$. Звідси, $\bar{y}AB = \bar{y}$, тобто $AB = E$. Таким чином, $B = A^{-1}$.

Підставимо останню рівність у рівність (3.66),

$$\gamma(\bar{x})A + \bar{y}AA^{-1} + \bar{x}B^2 = \bar{y}. \tag{3.67}$$

А це означає, що $\gamma(\bar{x})A = -\bar{x}B^2$, тобто функція оборотності

$$\gamma(\bar{x}) = -\bar{x}B^2A^{-1} = -\bar{x}B^3. \tag{3.68}$$

І навпаки, нехай $(K^n; f, \bar{0})$ є унітарною матричною квазігрупою з канонічним розкладом (3.41), що задовольняє рівність $\gamma(\bar{x}) \circ (\bar{y} \circ \bar{x}) = \bar{y}$:

$$\begin{aligned}\gamma(\bar{x}) \circ (\bar{y} \circ \bar{x}) &\overset{(3.41)}{=} \gamma(\bar{x})A + (\bar{y}A + \bar{x}B)B = \gamma(\bar{x})A + \bar{y}AB + \bar{x}B^2 = \\ &\overset{(3.68)}{=} \gamma(\bar{x})A + \bar{y}AA^{-1} + \bar{x}A^{-2} = -\bar{x}A^{-3}A + \bar{y} + \bar{x}A^{-2} = \\ &= -\bar{x}A^{-2} + \bar{y} + \bar{x}A^{-2} = \bar{y}.\end{aligned}$$

Отже, унітарна матрична квазігрупа $(K^n; f, \bar{0})$ буде середньою $CIP$ квазігрупою.

2) Нехай унітарна матрична квазігрупа $(K^n; f, \bar{0})$ буде лівою $CIP$ квазігрупою, тобто виконується тотожність $(\bar{x} \circ \bar{y}) \circ \bar{x} = \gamma(\bar{y})$. Застосовуючи канонічний розклад (3.41), маємо: $(\bar{x}A + \bar{y}B)A + \bar{x}B = \gamma(\bar{y})$.

Звідси, $\bar{x}A^2 + \bar{y}BA + \bar{x}B = \gamma(\bar{y})$.

Коли $x = y = 0$, отримуємо, що $\gamma(\bar{0}) = \bar{0}$ і якщо $y = 0$, маємо $\bar{x}A^2 + \bar{x}B = \bar{0}$. Таким чином, $\bar{x}B = -\bar{x}A^2$, тобто, $B = -A^2$. Отже,

$$\gamma(\bar{y}) = \bar{x}A^2 + \bar{y}BA - \bar{x}A^2 = \bar{y}BA = -\bar{y}A^3. \tag{3.69}$$

Навпаки, нехай $(K^n; f, \bar{0})$ буде унітарною матричною квазігрупою з канонічним розкладом (3.41), що задовольняє рівність $(\bar{x} \circ \bar{y}) \circ \bar{x} = \gamma(\bar{y})$:

$$\begin{aligned}(\bar{x} \circ \bar{y}) \circ \bar{x} &\overset{(3.41)}{=} (\bar{x}A + \bar{y}B)A + \bar{x}B = \bar{x}A^2 + \bar{y}BA + \bar{x}B = \\ &= \bar{x}A^2 + \bar{y}BA - \bar{x}A^2 = \bar{y}BA = -\bar{y}A^3 \overset{(3.69)}{=} \gamma(\bar{y}).\end{aligned}$$

Отже, унітарна матрична квазігрупа $(K^n; f, \bar{0})$ буде лівою $CIP$ квазігрупою.

3) Нехай унітарна матрична квазігрупа $(K^n; f, \bar{0})$ буде правою $CIP$ квазігрупою, тобто виконується тотожність $\bar{y} \circ (\bar{x} \circ \bar{y}) = \gamma(\bar{x})$.

Застосовуючи канонічний розклад (3.41), маємо: $\bar{y}A + (\bar{x}A + \bar{y}B)B = \gamma(\bar{x})$, звідси, $\bar{y}A + \bar{x}AB + \bar{y}B^2 = \gamma(\bar{x})$

Коли $x = y = 0$, отримаємо $\gamma(\bar{0}) = \bar{0}$ і коли $x = 0$, маємо $\bar{y}A + \bar{y}B^2 = \bar{0}$, тобто $A = -B^2$.

Звідси,

$$\gamma(\bar{x}) = -\bar{y}B^2 + \bar{x}AB + \bar{y}B^2 = \bar{x}AB = -\bar{x}B^3. \tag{3.70}$$

Навпаки, нехай $(K^n; f, \bar{0})$ буде унітарною матричною квазігрупою з канонічним розкладом (3.41), що задовольняє рівність $\bar{y} \circ (\bar{x} \circ \bar{y}) = \gamma(\bar{x})$:

$$\bar{y} \circ (\bar{x} \circ \bar{y}) \overset{(3.41)}{=} \bar{y}A + (\bar{x}A + \bar{y}B)B = \bar{y}A + \bar{x}AB + \bar{y}B^2 =$$
$$= -\bar{y}B^2 + \bar{x}AB + \bar{y}B^2 = \bar{x}AB = -\bar{x}B^3 \overset{(3.70)}{=} \gamma(\bar{y} \circ (\bar{x} \circ \bar{y})).$$

Отже, унітарна матрична квазігрупа $(K^n; f, \bar{0})$ буде правою $CIP$ квазігрупою. □

Ураховуючи твердження 3.4 та теорему 3.14, маємо такий наслідок:

**Наслідок 3.16.** *Кількість $CIP$ квазігруп над кільцем $K$ дорівнює кількості автоморфізмів групи $(K^n; +)$, тобто кількості оборотних матриць порядку $n$ над кільцем $K$.*

## 3.3. Групові ізотопи з дзеркальною властивістю

У [101] парастрофна орбіта многовидів дзеркальних квазігруп були описані. У цьому підрозділі розглянуто та описано групові ізотопи з властивістю дзеркальності.

**Теорема 3.18.** *Нехай $(Q; \cdot)$ — груповий ізотоп і (3.1) її канонічний розклад, тоді:*

1) *$(Q; \cdot)$ є середньою дзеркальною квазігрупою з функцією оборотності $\phi$ тоді і тільки тоді, коли $(Q; \cdot)$ є комутативною, $(Q; +)$ є абелевою групою та виконуються умови: $\beta = \alpha, \quad \phi = \iota$,*

2) *$(Q; \cdot)$ є лівою дзеркальною квазігрупою з функцією оборотності $\phi$ тоді і тільки тоді, коли $(Q; \cdot)$ є ліво-симетричною, $(Q; +)$ є абелевою групою та виконуються умови: $\beta = -\iota, \quad \phi = \iota$,*

*3)* $(Q;\cdot)$ *є правою дзеркальною квазігрупою з функцією оборотності* $\phi$ *тоді і тільки тоді, коли* $(Q;\cdot)$ *is право-симетричною,* $(Q;+)$ *є абелевою групою та виконуються умови:* $\alpha=-\iota, \quad \phi=\iota.$

**Доведення.** 1) Нехай груповий ізотоп $(Q;\cdot)$ — середня дзеркальна квазігрупа, яка визначається тотожністю $\phi(x)\cdot y=y\cdot x$. Застосовуючи канонічний розклад $(Q;\cdot)$ (3.1), маємо:

$$\alpha\phi(x)+a+\beta(y)=\alpha(y)+a+\beta(x). \tag{3.71}$$

Наслідок 2 означає, що $(Q;+)$ буде абелевою групою. Якщо $x=y=0$, отримаємо $\alpha\phi(0)=0$, якщо $x=0$, маємо $\alpha\phi(0)+\beta(y)=\alpha(y)$, звідки $\beta=\alpha$. Якщо $y=0$, маємо $\alpha\phi(x)+a=a+\beta(x)$, отже $\alpha\phi(x)=\beta(x)$, тобто $\phi=\iota$.

Згідно теореми 3, $(Q;\cdot)$ є комутативною квазігрупою.

Навпаки, нехай $(Q;\cdot)$ — груповий ізотоп з канонічним розкладом (3.1), який задовольняє рівність $\phi(x)\cdot y=y\cdot x$:

$$\phi(x)\cdot y \overset{(3.1)}{=} \alpha\phi(x)+a+\beta(y)=\alpha(x)+a+\alpha(y)=\alpha(y)+a+\beta(x)=y\cdot x.$$

Отже, груповий ізотоп $(Q;\cdot)$ буде середньою дзеркальною квазігрупою.

2) Нехай груповий ізотоп $(Q;\cdot)$ — ліва дзеркальна квазігрупа, тобто виконується рівність $y\cdot yx=\phi(x)$. Застосовуючи канонічний розклад (3.1), маємо:

$$\alpha(y)+a+\beta(\alpha(y)+a+\beta(x))=\phi(x). \tag{3.72}$$

Замінивши $\alpha(y)+a$ на $y$, отримаємо

$$y+\beta(y+\beta(x))=\phi(x), \qquad \beta(y+\beta(x))=-y+\phi(x).$$

З Твердження 3.1 випливає, що $\beta$ є автоморфізмом групи $(Q;+,0)$. Якщо $x=0$, маємо $\beta(y)=-y$, тобто, $\beta=-\iota$.

Оскільки $\alpha$ є автоморфізмом та антиавтоморфізмом, то група $(Q;+)$ є абелевою групою.

Отже, $\phi(x) = \beta^2(x) = x$. Згідно теореми 4, якщо $\phi = \iota$, то $(Q;\cdot)$ є ліво-симетричною квазігрупою.

І навпаки, нехай $(Q;\cdot)$ — груповий ізотоп з канонічним розкладом (3.1), який задовольняє рівність $y \cdot yx = \phi(x)$:

$$y \cdot (y \cdot x) \overset{(3.1)}{=} \alpha(y) + a + \beta(\alpha(y) + a + \beta(x)) = \alpha(y) + a + \beta\alpha(y) + \beta(a) + \beta^2(x) =$$
$$= \alpha(y) + a - \alpha(y) - a + x = x = \phi(x).$$

Отже, груповий ізотоп $(Q;\cdot)$ буде лівою дзеркальною квазігрупою.

3) Нехай груповий ізотоп $(Q;\cdot)$ — права дзеркальна квазігрупа, тобто виконується рівність $xy \cdot y = \phi(x)$. Застосовуючи канонічний розклад $(Q;\cdot)$ (3.1), отримаємо:

$$\alpha(\alpha(x) + a + \beta(y)) + a + \beta(y) = \phi(x). \tag{3.73}$$

Замінюючи $a + \beta y$ на $y$:

$$\alpha(\alpha(x) + y) + y = \phi(x), \qquad \alpha(\alpha(x) + y) = \phi(x) - y.$$

З Твердження 3.1 випливає, що $\alpha$ є автоморфізмом $(Q;+,0)$. Коли $x = 0$, маємо $\alpha(y) = -y$, тобто $\alpha = -\iota$.

Отже, $\phi(x) = \alpha^2(x) = x$. Згідно Теореми 4, якщо $\phi = \iota$, тоді $(Q;\cdot)$ є право-симетричною квазігрупою.

І навпаки, нехай $(Q;\cdot)$ — груповий ізотоп з канонічним розкладом (3.1), що задовольняє рівність $(x \cdot y) \cdot y = \phi(x)$:

$$(x \cdot y) \cdot y \overset{(3.1)}{=} \alpha(\alpha(x) + a + \beta(y)) + a + \beta(y) = \alpha^2(x) + \alpha(a) + \alpha\beta(y) + a + \beta(y) =$$
$$= x - a - \beta(y) + a + \beta(y) = x = \phi(x).$$

Отже, груповий ізотоп $(Q;\cdot)$ буде правою дзеркальною квазігрупою. □

**Приклади.**

Розглянемо приклади середньої, лівої та правої дзеркальних квазігруп:

1) квазігрупа $(\mathbb{Z}_7;\cdot)$ з заданою на ній операцією $(\cdot)$:

$$x \cdot y = 4x + 2 + 4y$$

над полем $\mathbb{Z}_7$, належить многовиду середніх дзеркальних квазігруп $\mathfrak{M}$, тому що виконується умова $\alpha = \beta = 4$;

2) квазігрупа $(\mathbb{Z}_5; *)$ з заданою на ній операцією $(*)$:

$$x * y = 5x + 3 + 4y$$

над полем $\mathbb{Z}_5$, належить многовиду лівих дзеркальних квазігруп ${}^{\ell}\mathfrak{M}$, оскільки виконується умова $\beta = 4 = -\iota$;

3) квазігрупа $(\mathbb{Z}_9; \circ)$ з заданою на ній операцією $(\circ)$:

$$x \circ y = 8x + 1 + 3y$$

над кільцем $\mathbb{Z}_9$, належить многовиду правих дзеркальних квазігруп ${}^{r}\mathfrak{M}$ та виконується умова $\beta = 4 = -\iota$.

Коли груповий ізотоп має властивість дзеркальності, досліджено в праці [61]. І як висновок з отриманих результатів можемо переформулювати таку теорему.

**Теорема 3.19.** *[61] Нехай $(Q; \circ)$ — центральна квазігрупа і (3.1) — її канонічний розклад, тоді:*

*1) $(Q; \circ)$ є середньою дзеркальною квазігрупою тоді і тільки тоді, коли вона комутативна;*

*2) $(Q; \circ)$ є лівою дзеркальною квазігрупою тоді і тільки тоді, коли ліво-симетрична;*

*3) $(Q; \circ)$ є правою дзеркальною квазігрупою тоді і тільки тоді, коли вона право-симетрична.*

**Доведення:** 1) якщо центральна квазігрупа $(Q; \circ)$ є середньою дзеркальною квазігрупою, то відповідно до теореми 3.19, $(Q; +)$ є абелевою групою та виконується умова $\beta = \alpha$. А це означає згідно теореми 3.3, що $(Q; \circ)$ є комутативною квазігрупою;

2) якщо центральна квазігрупа $(Q;\circ)$ є лівою дзеркальною квазігрупою, то відповідно до теореми 3.19, $(Q;+)$ є абелевою групою та виконується умова $\beta = -\iota$. А це означає згідно теореми 3.3, що $(Q;\circ)$ є ліво-симетричною квазігрупою;

3) якщо центральна квазігрупа $(Q;\circ)$ є правою дзеркальною квазігрупою, то відповідно до теореми 3.19, $(Q;+)$ є абелевою групою та виконується умова $\alpha = -\iota$. А це означає, згідно теореми 3.3, що $(Q;\circ)$ є право-симетричною квазігрупою. Теорему доведено. □

Отже, центральна квазігрупа з властивістю дзеркальності є центральною квазігрупою з відповідною властивістю $IP$.

З теореми 3.19 випливає такий наслідок:

**Наслідок 3.17.** *Якщо груповий ізотоп має дві властивості оборотності із трьох: ліву дзеркальність, праву дзеркальність, середню дзеркальність, тоді він задовольняє також і третю властивість.*

**Доведення.** Нехай $(Q;\circ)$ — груповий ізотоп і (3.1) його канонічний розклад. Припустимо, що груповий ізотоп має ліву і праву властивості дзеркальності, тому виконуються умови: $\beta = -\iota$ та $\alpha = -\iota$. А це означає, що $\alpha = \beta$, тобто груповий ізотоп відповідно до теореми 3.19 має середню властивість дзеркальності.

Припустимо, що груповий ізотоп має ліву і середню властивості дзеркальності, тому виконуються умови: $\beta = -\iota$ та $\alpha = \beta$. Звідси випливає, що $\alpha = -\iota$, тобто груповий ізотоп відповідно до теореми 3.19 має праву властивість дзеркальності.

Нехай груповий ізотоп має праву і середню властивості дзеркальності, тому виконуються умови: $\alpha = -\iota$ та $\alpha = \beta$. А це означає, що $\beta = -\iota$, тобто груповий ізотоп відповідно до теореми 3.19 має ліву властивість дзеркальності. Наслідок доведено. □

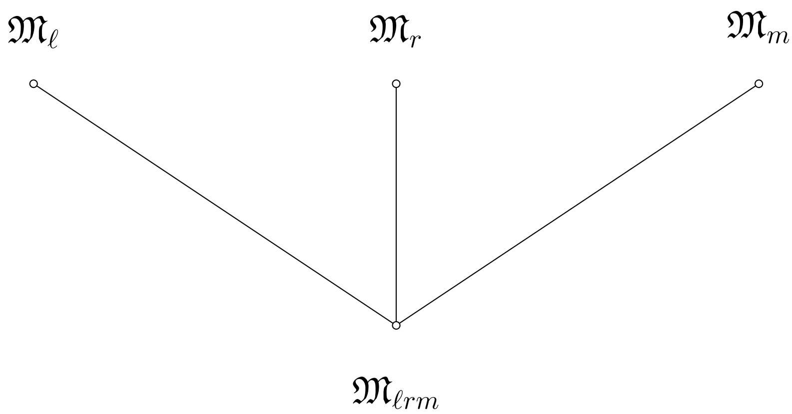
**Твердження 3.9.** *В'язка многовидів дзеркальних квазігруп складається з таких многовидів:*

*1) Парастрофна орбіта односторонніх дзеркальних квазігруп*

$$Po(\mathfrak{M}) = \{\mathfrak{M}, {}^{\ell}\mathfrak{M}, {}^{r}\mathfrak{M}\};$$

*2) Парастрофна орбіта тристоронніх дзеркальних квазігруп*

$$Po(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M} \cap {}^{r}\mathfrak{M} \cap {}^{\ell}\mathfrak{M}.$$




**Доведення.** Доведення пункту 1) доводиться в Теоремі 2.1; доведення пункту 2) є таким, як в Наслідку 3.17. □

## 3.4. Висновки до розділу 3

У цьому розділі досліджуються групові ізотопи з властивостями оборотності, а саме:

— знайдено необхідні та достатні умови, коли груповий ізотоп матиме властивість $IP$;

— знайдено необхідні та достатні умови, коли груповий ізотоп матиме властивість схрещеної оборотності;

— знайдено необхідні та достатні умови, коли груповий ізотоп матиме властивість дзеркальності;

— побудовано в'язку групових ізотопів $IP$ квазігруп;

— побудовано в'язку групових ізотопів квазігруп з властивістю схрещеної оборотності;

— побудовано в'язку групових ізотопів дзеркальних квазігруп;

— описано матричні $IP$ квазігрупи та $CIP$ квазігрупи;

— знайдено класифікацію групових ізотопів відповідно до їх властивостей оборотності, яка представлена в такій таблиці:

| Многовид | Груповий ізотоп $(Q;\cdot)$ | Умови її канонічного розкладу (3.1) |
|---|---|---|
| $\mathfrak{I}$ | $MIP$ | $\alpha = \theta\beta$, $\mu(x) = \theta x - \theta a + a$, $\theta^2 = I_c^{-1}, \quad c := -\theta a + a$ |
| ${}^{\ell}\mathfrak{I}$ | $LIP$ | $\beta^2 = \iota$, $\lambda(x) = J\alpha^{-1}\beta a + J\alpha^{-1}\beta\alpha x + J\alpha^{-1}a$ |
| ${}^{r}\mathfrak{I}$ | $RIP$ | $\alpha^2 = \iota$, $\rho(x) = J\beta^{-1}a + J\beta^{-1}\alpha\beta x + J\beta^{-1}\alpha a$ |
| $\mathfrak{C}$ | $MCIP$ | $\beta = \alpha^{-1}, \quad \gamma(x) = -\alpha^{-2}a - \alpha^{-3}x - \alpha^{-1}a,$ |
| ${}^{\ell}\mathfrak{C}$ | $LCIP$ | $\beta = I_aJ\alpha^2, \quad \gamma(x) = \alpha\beta x + \alpha a + a$ |
| ${}^{r}\mathfrak{C}$ | $RCIP$ | $\alpha = I_a^{-1}J\beta^2, \quad \gamma(x) = a + \beta a + \beta\alpha x$ |
| $\mathfrak{M}$ | $MMP$ | $(Q;+)$ — абелева група $\beta = \alpha, \quad \phi = \iota,$ |
| ${}^{\ell}\mathfrak{M}$ | $LMP$ | $(Q;+)$ — абелева група $\beta = -\iota\ (\beta = I_aJ), \quad \phi = \iota,$ |
| ${}^{r}\mathfrak{M}$ | $RMP$ | $(Q;+)$ абелева група $\alpha = -\iota\ (\alpha = I_a^{-1}J), \quad \phi = \iota$ |

Результати розділу опубліковані в працях [61], [66], [1].

# ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота має теоретичний характер і присвячена вивченню квазігруп з властивостями оборотності, відповідних тотожностей та многовидів, які визначаються ними. Результати нашого дослідження є продовженням наукових розвідок В. Білоусова, Ф. Сохацького, В. Щербакова, А. Кідвела, Р. Арці, Б. Карклін та В. Карклінш, Р. Баєра та інших.

Проаналізовано множини трансляцій, введено поняття напрямку трансляції та напрямку множини трансляцій. Розглянуто всі можливі рівності множин трансляцій різних напрямків і систематизовано їх, скориставшись законами парастрофної симетрії.

Систематизовано класи квазігруп з властивостями оборотності у відповідності до рівностей множин трансляцій. Доведено, що таких класів є дев'ять, три з яких відомі — це клас лівих $IP$, правих $IP$ квазігруп та клас $CIP$ квазігруп. Ці дев'ять класів розподілені на три парастрофні орбіти по три многовиди в кожній. Введено поняття середньої $IP$ квазігрупи; лівої і правої $CIP$ квазігруп; лівої, правої і середньої дзеркальних квазігруп.

Доведено, що всі отримані класи є многовидами, знайдено відповідні тотожності, які їх характеризують та для кожного многовида знайдено явний вигляд функції оборотності.

Дано повну класифікацію групових ізотопів за отриманими властивостями оборотності, тобто знайдено необхідні і достатні умови, за яких груповий ізотоп матиме властивість оборотності ($IP$), схрещеної оборотності ($CIP$) та дзеркальності ($MP$). Побудовано відповідні напіврешітки групових ізотопів з властивостями оборотності.

Описано матричні $IP$ квазігрупи та $CIP$ квазігрупи, досліджено матричні $IP$ квазігрупи 4-го та 9-го порядків, зокрема знайдено кількісну характеристику матричних $IP$ квазігруп 4-го порядку.

Здобуті у дисертації результати можуть бути застосованими в алгебрі, топології, геометрії, математичному аналізі, дискретній математиці тощо, а також для подальших досліджень в теорії квазігруп і функційних рівнянь.

При подальших дослідженнях можна застосовувати закони парастрофної симетрії й отримані в дисертації методи вивчення до класифікації квазігруп з властивостями оборотності, які не визначаються рівностями множин трансляцій. А саме, знаходження парастрофних орбіт, побудови напівграток квазігруп з властивостями оборотності та їх застосувань тощо.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


1. Алла Луценко, *Про групові ізотопи з властивістю схрещеної оборотності.* У: Матеріали конференції молодих учених "Підстригачівські читання - 2021". ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України. (Львів, 26–28 травня, 2021). Львів, 2021. URL: http://iapmm.lviv.ua/chyt2021/abstracts/Lutsenko.pdf

2. Белоусов В. Д. *Ассоциативные системы квазигрупп.* Успехи мат. наук. 1958.Т.13, вып. 3(81). С. 243.

3. Белоусов В. Д. *Системы квазигрупп с обобщёнными тождествами.* УМН.1965. Т. 20. № 1(121). С. 75–146.

4. Белоусов В. Д. *Уравновешенные тождества в квазигруппах.* Матем. сб. 1966. Т. 70(112), № 1. С. 55–97.

5. Белоусов В. Д. Сандик М. Д. *$n$-арные квазигруппы и лупы.* Сиб. мат. журнал. 1966. № 7(1). С. 31–54.

6. Белоусов В. Д. *Основы теории квазигрупп и луп.* Москва: Наука, 1967. 223 с.

7. Белоусов В. Д. *Уравнение общей медиальности.* Матем. исслед. Кишинев: Штиинца, 1976. Вып. 39. С. 21–31.

8. Белоусов В. Д. *Скрещенная изотопия квазигрупп.* Квазигруппы и их системы, Кишинев: Штиинца, 1990. С. 14–20.

9. Белявская Г. *Квазигруппы: тождества с подстановками, линейность и ядра.* LAMBERT Academic Publishing. 2013. 71 с.

10. Биркгофф Г. *Теория решеток.* Москва: Наука, 1984. 568 с.

11. Глухов М. М. *О применениях квазигрупп в криптографии.* Прикладная дискретная математика. 2008. № 2. С. 28–32.

12. Избаш В. И. *Моноквазигруппы и квазигруппы с дистрибутивной решёткой подквазигрупп.* Диссертация на соискание учён. степени кандидата физ.-мат. наук, Кишинёв. 1992. 108 с.

13. Сохацький Ф. М. *Асоціати та розклади багатомісних операцій.* Дис. доктора фіз.-мат. наук: 01.01.06. Вінниц. держ. пед. ун-т ім. Михайла Коцюбинського, НАН України, Ін-т математики. К., 2006. 334 с.

14. Сохацький Ф. М. *Про класифікацію функційних рівнянь на квазігрупах.* Укр. мат. журн. 2004. Т.56. № 9. С. 1259–1266.

15. Сохацький Ф. М. *Про ізотопи груп I.* Укр. мат. журн. 1995. Т 47, № 10. С. 1387–1389.

16. Сохацький Ф. М. *Про ізотопи груп II.* Укр. мат. журн. 1995. Т. 47, № 12. С. 1692–1703.

17. Сохацький Ф. М. *Про ізотопи груп III.* Укр. мат. журн. 1996. Т. 48, № 2. С. 251–259.

18. Ф. Сохацький, А. Луценко. *Пучок многовидів IP-квазігруп.* У: Матеріалах конференції молодих учених "Підстригачівські читання - 2019". ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України. (Lviv, 27-29 May, 2019). Львів, 2019. URL: http://iapmm.lviv.ua/chyt2019/abstracts/Lucenko.pdf

19. Ф. Сохацький, А. Луценко, *Парастрофні орбіти многовидів квазігруп з властивостями оборотності.* У: Матеріалах наукової конференції професорсько-викладацького складу, наукових працівників і здобувачів наукового ступеня за підсумками науково-дослідної роботи за період 2019–2020. Донецький національний університет імені Василя Стуса. (Вінниця, квітень–травень 2021 р.). Вінниця, 2021. С. 294–295.

20. Щербаков В. А. *О линейных квазигруппах и их группах автоморфизмов.* Матем. исследования. Кишинев, 1991. Вып. 120. С. 104–113.

21. Щукин К. К., Гушан В. В. *Представление парастрофов луп и квазигрупп.* Дискрет. матем., 2004. Т. 16, № 4. С.149–157.

22. Baer Reinhold, *Nets and groups. II*, Trans. Amer. Math. Soc. 1940. 47. p. 435—439. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1940-0002135-0

23. Belousov V. D. *Balanced Identities in Algebras of Quasigroups.* Aequationes Math. 1972. Vol. 8. P. 1–73.

24. Belousov V. D. *Some remarks on functional equation of generalized distributivity* // Aequationes Math. 1968. Vol. 1, 1/2. P. 54–65.

25. Belousov V. D., Hosszú M. *Some reduction theorems on the functional equation of generalized distributivity.* Publ. Math. Debrecen. 1965. Vol. 12. P. 175–180.

26. V. D. Belousov, B. V. Tsurkan. *Crossed-inverse quasigroups (CI-quasigroups).* Izvestiya Vysshih Uchebnyh Zavedenii. Matematika. 1969. no. 3, 82. C. 21–27 (in Russian).

27. Belyavskaya G. B., Popovich T. V. *Conjugate sets of loops and quasigroups. DC-quasigroups.* Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. 2012. No. 1(68). P. 21–31.

28. V. D. Belousov. *Inverse loops.* Mat. Issled. Kishinev, cStiinţe. 1987. 95. P. 3–22, (in Russian).

29. V. D. Belousov. *Autotopies in inverse loops.* Mat. Issled. Kishinev, cStiinţe. 1991. 120. P. 30–44, (in Russian).

30. V.D. Belousov. *The group associated with a quasigroup.* Math. Issed. 4(1969), no.3, 21–39 (in Russian).

31. J. Dupl'ák, *A parastrophic equivalence in quasigroups*, Quasigroups Relat. Syst. 7(2000), 7–14

32. J. Duplák, *On quasiidentities of transitive quasigroups*, Mathematica Slovaca, Vol. 34 (1984), No. 3, 281–294

33. N. Didurik, Generalized WIP-quasigroups, in The Fourth Conferece of Mathematical of the Republic of Moldova: dedicated to the centenary of Vladimir Andrunachievici (1917-1997): Proceedings CMSM 4, Chi?inau, 2017, pp. 67-70.

34. R. Artzy, *Cross inverse and related loops.* Trans. Amer. Math. Soc. 1959. 91. p. 480–492. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1959-0106958-3

35. R. Artzy, *On loops with a special property.* Trans. Amer. Math. Soc. 1955. 6. p. 448–453. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1955-0069804-4

36. R.H. Bruck, *A Survey of Binary Systems.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 20, Springer-Verlag, Berlin (1958)

37. D'enes J. and D'enes T. *Non-associative algebraic system in cryptology. Protection against "meet in the middle" attack.* Quasigroups and Related Systems. 2001. No. 8. P. 7–14.

38. Ivan I. Deriyenko. *Generalized IP-loops.* Quasigroups and Related Systems. 2012. Vol. 20. P. 177–182

39. Drápal A. *Group isotopes and a holomorphic action.* Result. Math. 2009. Vol. 54, no. 3–4. P. 253–272.

40. Dudek Wieslaw A. *Parastrophes of quasigroups.* Quasigroups Related Systems. 2015. Vol. 23. P. 221–230.

41. J. Duplák, *Quasigroups determined by balanced identities of length* $\leqslant 6$, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 36 (1986), No. 4, 599–616

42. Carrascal A.S. *Determination and characterization of all NAFIL loops of order 7 with inverse properties*. PUP Journal of Science and Technology. 2010. Vol. 3, no. 1. P. 45-58.

43. Cawagas R.E. *Introduction to Non-Associative Finite Invertible Loops*, PUP Journal of Science and Technology. 2007. Vol. 1, No. 2.

44. Etherington I. M. H. *Note on quasigroups and trees*. Proc. Edinburgh Math. Soc. 1963. Vol. 13, no. 3. P. 219–222.

45. Evans T. *Algebraic structures associated with Latin squares and orthogonal arrays*. Proc. Conf. Algebraic Aspects of Combinatorics, Congressus Numerantium 13. 1975. P. 31–52.

46. Falconer E. *Isotopes of some special quasigroup varieties*. Acta Math. Hungar. 1971. T. 22. P. 73–79.

47. B. B. Karklin's, V. B. Karklin'. *Inverse loops*. Mat. Issled. Kishinev, Shtiinta. 1976. 39. C. 87–101 (in Russian).

48. A. D. Keedwell, *Crossed-inverse quasigroups with long inverse cycles and applications to cryptography*. Australas. J. Comb. 1999. 20. C. 241–250.

49. Keedwell Anthony D., Shcherbacov Victor A. *Quasigroups with an inverse property and generalized parastrophic identities*. Quasigroups Related Systems. 2005. Vol. 13. P. 109–124.

50. Keedwell Donald A., Dénes József *Latin Squares and their Applications*. Second Edition, Amsterdam; Boston: North–Holland, 2015. 438 p.

51. Kirnasovsky O. U. *Linear isotopes of small orders groups*. Quasigroups Related Systems. 1995. Vol. 1(2). P. 51–82.

52. Kościelny C., Mullen G. L. *A quasigroup-based public-key cryptosystem*. Int. J. Appl. Math. Comp. Sci. 1999. Vol. 9, no. 4 P. 955–963.

53. Krainichuk H., Sokhatsky F. *Solution and full classification of generalized binary functional equations of the type* $(3;3;0)$. Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. 2018. № 2(87). P. 41–53.

54. Krainichuk H., Tarkovska O. *Semi-symmetric isotopic closure of some group varieties and the corresponding identities*. Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. 2017. № 3(85). P. 3–22.

55. Krainichuk H. *Classification of group isotopes according to their symmetry groups*. Folia Math. 2017. Vol. 19, no. 1. P. 84–98.

56. Krapež A. *Cryptographically Suitable Quasigroups via Functional Equations*. In: S. Markovski and M. Gusev (Eds.): ICT Innovations 2012, AISC 207, Springer Verlag Berlin Heidelberg. 2013. P. 265–274.

57. Krapež A. *Cryptographically Suitable Quasigroups via Functional Equations*. Publ. Inst. Math. of the Serbian Academy of Sciences and Arts Knez Mihailova. 2011. P. 36. (Belgrade).

58. Krapež A. *Generalized balanced functional equations on n-ary groupoids*. Proceedings of the symposium n-ary structures, Skopje. 1982. P. 13–16.

59. Krapež A., Živković D. *Parastrophically equivalent quasigroup equations*. Publications de L'Institut Mathematique, Nouvelle serie. 2010. T. 87(101). P. 39–58.

60. Krstić S. *Quadratic quasigroup identities*. (Serbocroatian) PhD thesis, University of Belgrade, 1985. 101 p.

61. Lutsenko A. V. *Classification of group isotopes according to their inverse properties*. Applied problems of mechanics and mathematics. 2020. Vol. 13, 48–62. DOI:10.15407/apmm2020.18.48-61

62. F. Sokhatsky, A. Lutsenko, *About group isotopes with inverse property*. In: Abstracts of XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated

to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. Vasyl' Stus Donetsk National University. (Vinnytsia, July 02–06, 2019). Vinnytsia, 2019. C. 108–109.

63. A. Lutsenko, *Definition of invertibility property for loops via translations.* In: Abstracts of XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. Vasyl' Stus Donetsk National University. (Vinnytsia, July 02–06, 2019). Vinnytsia, 2019. P. 65–66.

64. F. Sokhatsky, A. Lutsenko, *A classification of quasigroups according to the sets of translations.* У: Матеріалах конференції молодих учених "Підстригачівські читання - 2020". ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України. (Львів, 26-28 травня, 2020). Львів, 2020. URL: http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2020/abstracts/Lutsenko.pdf

65. F. Sokhatsky, A. Lutsenko, *Quasigroup varieties with inverse properties.* In: Abstracts of International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv. (Kyiv, 14-17 July, 2020). Kyiv, 2020. C. 75.

66. A.V. Lutsenko. *The bunch of varieties of mirror group isotope.* In: Abstracts of International Conference of Young Mathematicians, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. (Kyiv, June 3–5, 2021). Kyiv, 2021. C. 29.

67. F. Sokhatsky, A. Lutsenko, *Quasigroups with inverse properties.* In: Abstracts of 13 International Algebraic Conference in Ukraine. Taras Shevchenko National University of Kyiv. (Kyiv, July 6–9, 2021). Kyiv, 2021. P. 78.

68. V. Izbash and N. Labo. *Crossed-inverse-property groupoids.* Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat., (2): 101-106, 2007.

69. A.D. Keedwell, V.A. Shcherbacov, *Construction and properties of (r; s; t)-inverse quasigroups I*, Discrete Math. 266 (2003), 275-291.

70. A.D. Keedwell, V.A. Shcherbacov, *Construction and properties of (r; s; t)-inverse quasigroups II*, Discrete Math. 288 (2004), 61-71.

71. A.D. Keedwell, V.A. Shcherbacov, *On m-inverse loops and quasigroups with a long inverse cycle*, Australasian J. Combin. 26 (2002) 99-119.

72. Krapež A. *Generalized quadratic quasigroup equations with three variables*. Quasigroups Related Systems. 2009. Vol. 17. P. 253–270.

73. H. Krainichuk, O. Tarkovska, *Semi-symmetric isotopic closure of some group varieties and the corresponding identities*. Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat., 2017. Number 3(85). P. 3-22.

74. Lindner, C.C. *Totally symmetric and semi-symmetric quasigroups have the intersection preserving finite embeddability property*. Period Math Hung 8, 33–39 (1977).

75. A. Nourou Issa, *On quasigroups with the left loop property*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 41 (2000), No. 4, 663–669

76. F.M. Sokhatsky, *On pseudoisomorphy and distributivity of quasigroups*, Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat., 2016, Number 2, 125-142.

77. F.M. Sokhatsky, A.V. Lutsenko, *The bunch of varieties of inverse property quasigroups*. Visnyk DonNU, A: natural Sciences. 2018. Vol.1-2. P. 56–69.

78. Sokhatskyj Fedir, Syvakivskyj Petro. *On linear isotopes of cyclic groups*. Quasigroups and related systems. 1994. Vol. 1, no.1(1). P. 66–76.

79. J.D.H. Smith, *An introduction to quasigroups and their representations*. Studies in Advanced Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007.

80. J. Denes and A. D. Keedwell: *Latin squares and their applications*, Akademiai Kiado, Budapest, 1974.

81. H. Krainichuk, O. Tarkovska, *Semi-symmetric isotopic closure of some group varieties and the corresponding identities*. Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat., 2017. Number 3(85), P. 3–22.

82. F. Sokhatsky, P. Syvakivskyj, *On linear isotopes of cyclic groups*, Quasigroupsand related system. 1994. Vol. 1, no.1(1). 66–76.

83. J.D.H. Smith, An introduction to quasigroups and their representations. Studies in Advanced Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007.

84. Sokhatsky F. M. *Parastrophic symmetry in quasigroup theory*. Visnyk Donetsk national university, Ser. A: natural sciences. 2016. No. 1–2. P. 70–83.

85. Bruck R.H. Some results in the theory of quasigroups,Trans. Amer. Math. Soc., 55(1944), 19-52

86. Markovski S., Dimitrova V., Samardjiska S. *Identity sieves for quasigroups*. Quasigroups Related Systems. 2010. Vol. 18. P. 149–163.

87. Mileva Aleksandra. *New Developments in Quasigroup-Based Cryptography.* Multidisciplinary Perspectives in Cryptology and Information Security, edited by Sattar B. Sadkhan Al Maliky and Nidaa A. Abbas, IGI Global, 2014, pp. 286-317.

88. Mitschke A. and Werner H. *On groupoids representable by vector spaces over finite fields*. Arch. Math. 1973. Vol. 24, no. 1. P. 14–20.

89. Movsisyan Yu. M. *Hyperidentities and Related Concepts, I.* Armenian Journal of Mathematics. 2017. Vol. 9, no 2. P. 146–222.

90. Murdoch D. C. *Srtucture of abelian quasi-groups.* Trans. Amer. Math. Soc. 1941. Vol. 49. P. 392–409.

91. E. Ilojide, T. G. Jaiyeola, O. O. Owojori, *Varieties of groupoids and quasigroups generated bylinear-bivariate polynomials over the ring Zn*, International Journal of Mathematical Combinatorics 2011, July, 2.

92. Osborn J. M. *New loops from old geometries.* Amer. Math. Monthly. 1961. Vol. 68. P. 103–107.

93. Osborn J. M. *Loops with the weak inverse property.* Pacific J. Math. 1960. Vol. 10. P. 295–304.

94. Phillips J. D., Pushkashu D. I., Shcherbacov A. V., Shcherbacov V. A. *On Birkhoff's quasigroup axioms.* J. Algebra. 2016. Vol. 457. P. 7–17.

95. Plugfelder H. O. *Quasigroups and Loops: Introduction.* Sigma series in Pure Math., Heldermann Verlag, Berlin, 1990. Vol. 7. 147 p.

96. Smith J.D.H. *An introduction to quasigroups and their representation.* London: Chapman and Hall/CRC. 2007. 330 p.

97. Sokhatsky F. M. *On classification of distributive-like functional equations.* the $8^{th}$ International Algebraic Conference in Ukraine (Lugansk, Ukraine, July 5-12, 2011): Book of abstracts. Lugansk, 2011. P. 79.

98. Sokhatsky F. M. *Some linear conditions and their application to describing group isotopes.* Quasigroups Related Systems. 1999. Vol. 6. P. 43–59.

99. Sokhatsky Fedir M. *On pseudoisomorphy and distributivity of quasigroups.* Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. 2016. No. 2(81). P. 125–142.

100. Sokhatsky F. M., Lutsenko A. V. *Classification of quasigroups according to directions of translations I.* Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. 2020. Vol. 61, No. 4. P. 567–579.

101. Sokhatsky F. M., Lutsenko A. V. *Classification of quasigroups according to directions of translations II.* Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. 2021. Vol. 62, No. 3. P. 309–323.

102. Sokhatsky F.M., Lutsenko A.V., Fryz I.V. *Constructing quasigroups with invertibility property.* Math. Methods and Physic. Fields, **64** (2021), No.4 (in Ukrainian).

103. Sokhatsky F.M., Krainichuk H.V., Sydoruk V.A. Semi-lattice of varieties of quasigroups with linearity. Algebra and Discrete Mathematics. 2021. 31, No. 2. P. 261–285. https://doi.org/10.12958/adm1748

104. Sokhatsky F. *Factorization of operations medial and abelian algebra.* Вісник ДонНУ. Сер. А: Природничі науки. 2017. № 1–2. С. 84–96. https://doi.org/10.31558/1817-2237.2017.1-2.7

105. M. Steinberger: On loops with a general weak inverse property, Mitt. Math. Ges. Hamburg, 10 (1979), 573–586.

106. F. Sokhatsky, A. Lutsenko, *Matrix quasigroups with invertibility property.* In: The book of abstracts of 29th conference on applied and industrial mathematics dedicated to the memory of Academician Mitrofan M. Cioban. Chisinau, Republic of Moldova, August 25-27, 2022. P. 163–165.

107. I. Fryz, A. Lutsenko, *Orthogonality of matrix quasigroups.* In: The book of abstracts of 29th conference on applied and industrial mathematics dedicated to the memory of Academician Mitrofan M. Cioban. Chisinau, Republic of Moldova, August 25-27, 2022. P. 154–156.

108. Tarkovska O. O. *Variety of semisymmetry-like medial quasigroups and its subvarieties.* Visnyk Donetsk national university. Ser. A: natural sciences. 2015. No. 1-2. P. 78–88.

109. Shcherbacov V. A. *Elements of Quasigroup Theory and Applications.* London: Chapman and Hall/CRC. Chapman and Hall/CRC. 2017. P. 576.

110. Shcherbacov V. A. *Quasigroups in cryptology.* Comput. Sci. J. Moldova. 2009. Vol.17. No.2(50). P. 193–228.

# ДОДАТКИ

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Sokhatsky F. M., Lutsenko A. V. *The bunch of varieties of inverse property quasigroups.* Bulletin of Donetsk University Series A: Natural Sciences. 2018. Vol. 1-2. P. 56–69.

   DOI: https://doi.org/10.31558/1817-2237.2018.1-2.4

2. Lutsenko A. V. *Classification of group isotopes according to their inverse properties.* Applied problems of mechanics and mathematics. 2020. Vol. 13, 48–62.

   DOI:10.15407/apmm2020.18.48-61

3. Sokhatsky F. M., Lutsenko A. V. *Classification of quasigroups according to directions of translations I.* Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. 2020. Vol. 61, No. 4. 567–579.

   DOI: DOI 10.14712/1213-7243.2021.002

4. Sokhatsky F. M., Lutsenko A. V. *Classification of quasigroups according to directions of translations II.* Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. 2021. Vol. 62, No. 3. 309–323.

   DOI: DOI 10.14712/1213-7243.2021.021

5. Сохацький Ф.М., Луценко А.В., Фриз І.В. *Побудова квазігруп з властивістю оборотності.* Математичні методи і фізико-механічні поля. 2021. Вип.64, №4, с. 5–17

6. Федір Сохацький, Алла Луценко *Пучок многовидів IP-квазігруп.* У: Матеріалах конференції молодих учених "Підстригачівські читання – 2019", Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, 27-29 травня 2019. – URL: http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2019/abstracts/Lucenko.pdf

7. F. Sokhatsky, A. Lutsenko, *About group isotopes with inverse property.* In: Abstracts of XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. Vasyl' Stus Donetsk National University. July 02–06, 2019, Vinnytsia.

8. A. Lutsenko, *Definition of invertibility property for loops via translations.* In: Abstracts of XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. Vasyl' Stus Donetsk National University. July 02–06, 2019, Vinnytsia.

9. F. Sokhatsky, A. Lutsenko, *A classification of quasigroups according to the sets of translations.* In: Abstracts of the young disciplines "Pidstryhach reading - 2020" Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics (in Ukrainian). Lviv 26-28 May, 2020.

10. F. Sokhatsky, A. Lutsenko, *Quasigroup varieties with inverse properties.* In: Abstracts of International mathematical conference dedicated to the 60th anniversary of the department of algebra and mathematical logic of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv 14-17 July, 2020. c.75

11. Ф. Сохацький, А. Луценко, *Парастрофні орбіти многовидів квазігруп з властивостями оборотності.* В матеріалах наукової конференції професорсько-викладацького складу, наукових працівників і здобувачів наукового ступеня за підсумками науково-дослідної роботи "Фестивалю науки-2021". Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, 2021.

12. Алла Луценко, *Про групові ізотопи з властивістю схрещеної оборотності.* У: Матеріали конференції молодих учених "Підстригачівські читання – 2021", Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, 26-28 травня 2021. URL: http://iapmm.lviv.ua/chyt2021/abstracts/Lutsenko.pdf

13. A.V. Lutsenko. *The bunch of varieties of mirror group isotope.* In: Abstracts of International Conference of Young Mathematicians, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, June 3–5, 2021.

14. F. Sokhatsky, A. Lutsenko, *Quasigroups with inverse properties* In: Abstracts of 13th International Algebraic Conference in Ukraine, Taras Shevchenko National University of Kyiv, July 6–9, 2021. P. 78.

15. F. Sokhatsky, A. Lutsenko, *Matrix quasigroups with invertibility property.* In: The book of abstracts of 29th conference on applied and industrial mathematics dedicated to the memory of Academician Mitrofan M. Cioban. Chisinau, Republic of Moldova, August 25-27, 2022. P. 163–165.

16. I. Fryz, A. Lutsenko, *Orthogonality of matrix quasigroups.* In: The book of abstracts of 29th conference on applied and industrial mathematics dedicated to the memory of Academician Mitrofan M. Cioban. Chisinau, Republic of Moldova, August 25-27, 2022. P. 154–156.

## ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Результати дисертації здобувачка доповідала на таких конференціях та семінарах:

1. Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача “Підстригачівські читання – 2019” (м. Львів 23–25 травня 2019 р.);

2. XII Міжнародна алгебраїчна конференція присвячена 215-річчю В. Буняковського, (м. Вінниця, 2-6 липня 2019 р.);

3. Міжнародна математична конференція з квазігруп і луп “Loops‘11” (м. Будапешт, Угорщина 7–13 липня 2019 р.);

4. Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача "Підстригачівські читання – 2020" (м. Львів 23–25 травня 2020 р.);
5. Міжнародна математична конференція, присвячена 60-річчю кафедри алгебри та математичної логіки Національного університету Тараса Шевченка (м. Київ, 14-17 липня 2020 р.)
6. Special meeting of the scientific seminar "Algebra and Mathematical Logic", dedicated to Prof. Valentin Belousov (Chisinau, Republic of Moldova, 26 February, 2021);
7. Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача "Підстригачівські читання – 2021" (м. Львів, 26–28 травня 2021 р.);
8. Наукова конференція професорсько-викладацького складу, наукових працівників і здобувачів наукового ступеня за підсумками науково-дослідної роботи "Фестиваль науки-2021", Донецький національний університет імені Василя Стуса, (Вінниця, 2021);
9. Міжнародна конференція молодих математиків, Інститут математики НАН України (Київ, 3–5 липня 2021 р.);
10. XIII Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, Національний університет імені Тараса Шевченка (Київ, 6–9 липня 2021 р.).
11. The 29th conference on applied and industrial mathematics dedicated to the memory of Academician Mitrofan M. Cioban. P. 163–165 (Chisinau, Republic of Moldova, August 25-27, 2022)