МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,

МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

СХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ім. ВОЛОДИМИРА ДАЛЯ

КРАСНОДОНСЬКИЙ ФАКУЛЬТЕТ ІНЖЕНЕРІЇ ТА МЕНЕДЖМЕНТУ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

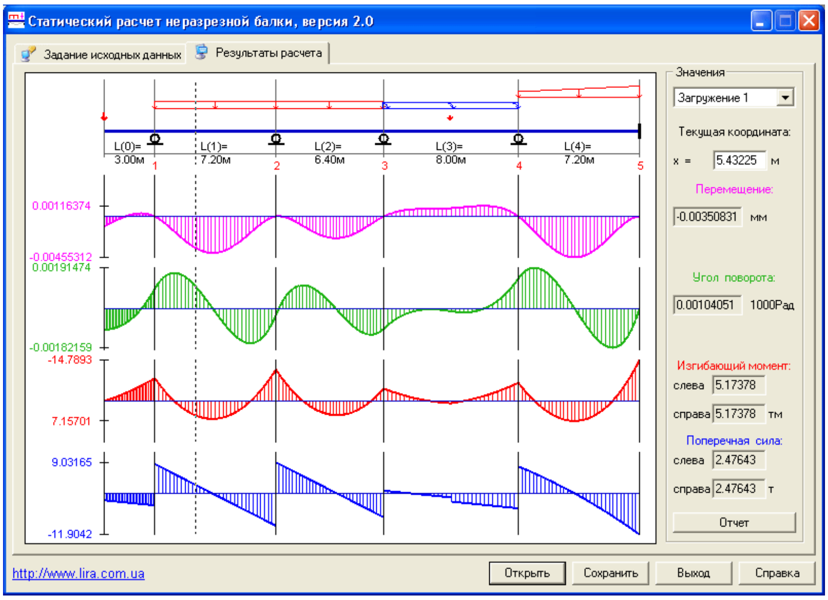
ДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

З ДИСЦИПЛІНИ «**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА**»

Розділи «СТАТИКА», «КІНЕМАТИКА»

ВЕСНЯНИЙ СЕМЕСТР

для студентів, що навчаються за напрямком «Машинобудування» - 4 навчальний семестр



КРАСНОДОН 2011

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,

МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

СХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ім. ВОЛОДИМИРА ДАЛЯ

КРАСНОДОНСЬКИЙ ФАКУЛЬТЕТ ІНЖЕНЕРІЇ ТА МЕНЕДЖМЕНТУ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ
З ДИСЦИПЛІНИ «ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»
ВЕСНЯНИЙ СЕМЕСТР

Розділи «СТАТИКА», «КІНЕМАТИКА»

для студентів, що навчаються за напрямком «Машинобудування» - 4 навчальний семестр

ЗАТВЕРДЖЕНО

На засіданні кафедри

«Інженерних дисциплін»

Протокол № 12 від 12.03.11 р.

КРАСНОДОН 2011

УДК 539.38

Методичні вказівки з дисципліни «Теоретична механіка». Розділ **«СТАТИКА», «КІНЕМАТИКА»** (для студентів, що навчаються за напрямами «Машинобудування», 4 навчальний семестр, заочне відділення). Доповнені та перероблені. Склали: Колесніков В.О., Верітельник Є.А., Краснодон: вид-во СНУ ім. В.Даля, 2011.- 72 с.

Надано порядок і всі етапи вирішення завдань з розділів «Статика» та «Кінематика» дисципліни теоретична механіка. У завданнях розділу «Статика» визначаються реакції плоских і просторових статичних систем. Орієнтовна трудомісткість виконання контрольної роботи складає близько 10 - 15 годин.

Укладачі: В.О. Колесніков, доц., к.т.н.,
Є.А. Верітельник, ас.

Відп. за випуск В.О. Колесніков, доц., к.т.н.

Рецензент:
зав. каф.
технології машинобудування
та інженерного консалтингу,
д.т.н., проф. В.О. Вітренко

ВСТУП

Теоретична механіка вивчає найбільш загальні закони руху і взаємодії тіл, вважаючи своїм головним завданням пізнання кількісних і якісних закономірностей, що спостерігаються у природі. Вона належить до фундаментальних природничих наук, оскільки природознавство вивчає різні форми руху матерії. Теоретична механіка має велике значення в підготовці інженерних кадрів. Вона є фундаментом для вивчення таких дисциплін, як опір матеріалів, теорія коливань, гідравліка, теорія пружності, аеро- і гідромеханіка, електродинаміка, біомеханіка, теорія автоматичного керування рухомими об'єктами, теорія механізмів і машин, приладів, роботів-маніпуляторів. Знання законів теоретичної механіки дає змогу науково передбачити хід процесів у нових задачах, що виникають при розвитку науки, техніки і технології.

Засновниками теоретичної механіки вважають великих вчених Галілео Галілея (1564-1642) і Исаака Ньютона (1643-1727). Подальший розвиток теоретичної механіки пов'язаний з іменами багатьох вчених, найбільш видатні з який Гюйгенс (1629-1695), Даламбер (1717-1783), Ейлер (1707-1783), Лагранж (1736-1813) і багато інших.

Великий внесок у розвиток сучасної механіки належить вченим, таким, як М.В. Остроградський (1801-1862), С.В. Ковалевська (1850-1891), Н.Є. Жуковський (1847-1921), А.М. Ляпунов (1851-1918), К.Е. Ціолковський (1857-1935) та ін. Своїми дослідженнями і відкриттями вони значною мірою сприяли розвитку механіки і її додатків у техніці й природознавстві.

Теоретична механіка – це наука, яка дає універсальні методи складання і аналізу рівнянь руху і рівноваги складних матеріальних систем, що є основою їх моделювання.

Теоретична механіка спирається на знання з аналітичної геометрії, векторної алгебри, математичного аналізу, фізики та інформатики [1].

При вивченні матеріалу курсу за підручником потрібно, перш за все, з'ясувати сутність кожного висловлюваного там питання. Головне — це зрозуміти викладене в підручнику, а не «завчити».

Вивчати матеріал рекомендується за темами (пунктами програми, що приводяться нижче) або за розділами (параграфами) підручника. Спочатку слід прочитати весь матеріал теми (параграфа), особливо не затримуючись на тому, що показалося не зовсім зрозумілим; часто це стає зрозумілим з подальшого. Потім треба повернутися до місць, що викликали ускладнення і уважно розібратися в тому, що було незрозуміло. Особливу увагу при повторному читанні зверніть на формулювання відповідних визначень, теорем тощо (вони зазвичай бувають набрані в підручнику курсивом або розрядкою); у точних формулюваннях, як правило, буває важливе кожне слово і дуже корисно зрозуміти, чому дане положення сформульоване саме так. Проте не слід прагнути заучувати формулювання, важливо зрозуміти їх сенс і вміти викласти результат своїми словами.

Необхідно також зрозуміти хід всіх доказів (у механіці вони зазвичай нескладні) і розібратися в їх деталях. Докази треба вміти викладати самостійно, що не важко зробити, зрозумівши ідею доказу, намагатися просто їх «заучувати» не слід, ніякої користі це не принесе.

Закінчивши вивчення теми, корисно скласти короткий конспект, по можливості не заглядаючи в підручник.

При вивченні курсу особливу увагу слід приділити придбанню навиків вирішення завдань. Для цього, вивчивши матеріал даної теми, треба спочатку обов'язково розібратися у вирішеннях відповідних завдань, які приводяться в підручнику, звернувши особливу увагу на методичні вказівки по їх рішенню. Потім намагайтеся вирішити самостійно декілька аналогічних завдань із збірки завдань І. В. Мещерського і після цього вирішите відповідну задачу з контрольного завдання.

Закінчивши вивчення теми, потрібно перевірити, чи можете ви дати відповідь на всі питання програми курсу за цією темою (здійснити самоперевірку).

Оскільки всі питання, які повинні бути вивчені і засвоєні, в програмі перелічені достатньо детально, додаткові питання для самоперевірки тут не приводяться. Проте дуже корисно скласти перелік таких питань самостійно (у окремому зошиті) у такій черзі.

Почавши вивчення чергової теми програми, виписати спочатку в зошиті послідовно всі перелічені в програмі питання цієї теми, залишивши праворуч широку колонку (поле). При цьому якщо, наприклад, в програмі сказано «Умови рівноваги просторової і плоскої систем сил, що сходяться», то слід записати окремо питання. «Умови рівноваги просторової системи сил, що сходяться» і «Умови рівноваги плоскої системи сил, що сходяться» тощо.

Потім при вивченні матеріалу теми (читання підручника) слід в правій колонці вказати сторінку підручника, на якій висловлюється відповідне питання, а також номер формули або рівняння (рівнянь), які виражають відповідь на питання математично. У результаті в даному зошиті буде повний перелік питань для самоперевірки, який можна використовувати і при підготовці до іспиту. Крім того, відповівши на питання або написавши відповідну формулу (рівняння), ви можете за підручником швидко перевірити чи правильно це зроблено, якщо в правильності своєї відповіді є сумніви. Нарешті, по зошиту з такими питаннями ви можете встановити, чи весь матеріал, передбачений програмою, вами вивчений (якщо вивчений весь матеріал, то проти кожного питання в правій колонці буде вказана відповідна сторінка підручника).

Слід мати на увазі, що в різних підручниках матеріал може висловлюватися в різній послідовності. Тому відповідь на будь-яке питання даної теми може опинитися в іншому розділі підручника. Наприклад, в статиці теорема про приведення системи сил до центру може бути дана відразу для довільної системи сил (як вказано в програмі), а може бути дана спочатку для плоскої системи сил, а потім для довільної тощо.

1. ЩО ВИВЧАЄ РОЗДІЛ СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА?

«Статика твердого тіла» вивчає основні поняття та закони механіки; методи вивчення умов рівноваги фізичних об’єктів, які моделюють у вигляді матеріальної точки, твердого тіла і механічної системи; методи перетворення систем сил у інші, їм еквівалентні; розрахунок будівельних конструкцій та визначення зусиль, які в них виникають; способи визначення центра ваги заданої фігури (аналітичні, графічні, із застосуванням комп’ютера).

Враховуючи бурхливий розвиток техніки і проникненням механіки у всі галузі людської діяльності (електроніку, медицину, біологію, діагностику систем і т.і.), підготовка спеціалістів для більшості галузей промисловості неможлива без знань законів природи, які описуються законами класичної механіки. Тому основна увага приділяється вивченню законів механіки.

Зараз відбувається бурхливий розвиток інформаційних технологій і для вирішення багатьох задач, в тому числі й статичних, на допомогу проектувальникам можуть прийти нові інформаційні пакети. Наприклад, такий, як представлений у наступному електронному ресурсі [2].

2. ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ ПИТАНЬ У РОЗДІЛІ СТАТИКА

Основні поняття й аксіоми статики. Предмет статики. Основні поняття статики: абсолютно тверде тіло, сила, еквівалентні й урівноважені системи сил, рівнодіюча, сили зовнішні та внутрішні. Аксіоми статики. Зв'язки і реакції зв'язків. Основні види зв'язків: гладка площина або поверхня, гладка опора, гнучка нитка, циліндровий і сферичний шарніри, невагомий стрижень, реакції цих зв'язків.

Система сил, що сходяться. Геометричний і аналітичний способи складання сил. Сили, що сходяться. Рівнодіюча сил, що сходяться. Геометрична умова рівноваги системи сил, що сходяться. Аналітичні умови рівноваги просторової та плоскої систем сил, що сходяться. (Теорема про рівновагу трьох непаралельних сил).

Теорія пар сил. Момент сили щодо крапки (центру) як вектор. Поняття про пару сил. Момент пари сил як вектор. Теореми про еквівалентність пар. Складання пар сил, довільно розташованих в просторі. (Умови рівноваги системи пар сил).

Приведення довільної системи сил до даного центру. Теорема про паралельне перенесення сили. Основна теорема статики про приведення системи сил до даного центру. Головний вектор і головний момент системи сил.

Система сил, довільно розташованих на площині (плоска система сил). Алгебраїчна величина моменту сили. (Обчислення головного вектора і головного моменту плоскої системи сил. Окремі випадки приведення плоскої системи сил: приведення до пари сил, до рівнодіючої і випадок рівноваги). Аналітичні умови рівноваги плоскої системи сил. Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил. Теорема Варіньона про момент рівнодіючої.

Рівновага системи тіл. (Статично визначні н статично невизначні системи. Рівновага за наявності сил тертя).

Система сил, довільно розташованих в просторі (просторова система сил). Момент сили щодо осі. Залежність між моментами сили щодо центру і щодо осі, що проходить через цей центр. (Аналітичні формули для обчислення моментів сили відносно трьох координатних осей. Обчислення головного вектора і головного моменту просторової системи сил.) Аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил. Умови рівноваги просторової системи паралельних сил.

Центр тяжіння. Центр тяжіння твердого тіла і його координати. Центр тяжіння об'єму, площі і лінії. Способи визначення положення центрів тяжіння тіл.

3. СТИСЛИЙ КОНСПЕКТ З РОЗДІЛУ СТАТИКА [1 - 6]

3.1. ПРЕДМЕТ СТАТИКИ. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ І ПОНЯТТЯ

Статика – розділ механіки, в якому вивчаються методи перетворення сил і з'ясовуються умови рівноваги тіл.

Реальні об'єкти замінюються моделями – абсолютно твердими тілами, відстань між двома точками яких не змінюється.

Абсолютно твердим тілом називають таке тіло, відстань між кожними двома точками якого завжди залишається постійною. Усі тіла у природі тією чи іншою мірою деформуються, але деформаціями тіл можна зневажити. При розв'язанні задач статики всі тіла розглядаються як абсолютно тверді.

Тіло, що може робити з даного положення будь-які переміщення в просторі, називається ***вільним*** (наприклад, повітряна куля в повітрі). Тіло, переміщенням якого в просторі перешкоджають які-небудь інші, скріплені чи дотичні з ним, тіла, називаються ***невільними*** (вантаж, який лежить на столі, двері, які підвішені на петлях, і т.п.).

Все те, що обмежує переміщення даного тіла в просторі, називають *зв'язком*. Наприклад, у випадку невільного тіла зв'язком буде: для вантажу - площина столу, що не дає вантажу переміщатися по вертикалі вниз; для дверей -петлі, що не дають дверям відійти від косяка.

Реальна взаємодія тіл (об'єктів) замінюється моделлю, механічна взаємодія тіл – силою.

Сукупність таких взаємодій твердого тіла з іншими тілами називається системою сил, що діють на дане тверде тіло. При розв'язанні задач тверді тіла і діючі на них сили називають схематичними.

У статиці вирішуються дві основні проблеми:

- заміна системи сил, що діють на тверде тіло, простішою;
- визначення умов рівноваги твердих тіл під дією прикладених до них систем сил.

Основні поняття статики - це сила, система сил, абсолютно тверде тіло, вільне тіло.

Сила. Проекція сили на вісь і на площину

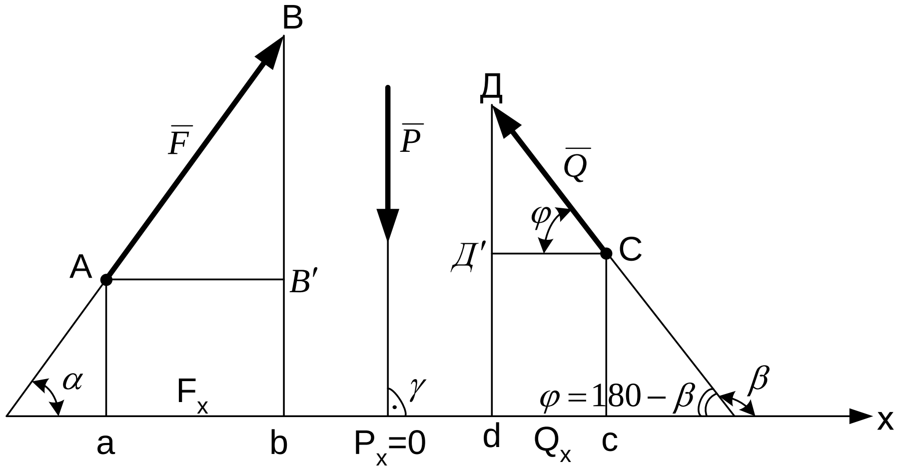
Сила $\overline{F}$ як вектор вважається заданою, якщо визначені її модуль, напрям і точка прикладання. Силу можна задавати графічно або аналітично.

Графічно силу зображують у вигляді вектора з указанням її модуля (абсолютної величини довжини вектора) і напрямку.

Напрямок указується стрілкою, а довжина прямолінійного відрізка в масштабі відповідає довжині вектора. Модуль вектора позначається як і сам вектор, але літерами звичайного шрифту і без риски зверху.

Аналітично силу задають проекціями на осі координат.

Проекцією сили на вісь називається скалярна величина, що дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між додатним напрямом осі і напрямком сили, наприклад на вісь ‘‘x’’ (рис. 3.1).



$F_X = ab = F \cdot cos\alpha = AB'$ $\qquad$ $Q_X = cd = CD cos\beta = -Q \cdot cos\varphi$

Рис. 3.1

Проекції надається знак “+”, якщо складає гострий кут з додатним напрямом осі, і знак “-”, якщо – тупий.

Проекція сили P на вісь, яка їй перпендикулярна, дорівнює нулю:

$$P_X = P \cdot cos\gamma = P \cdot cos 90^0 = 0 .$$

Проекцією сили $\overline{F}$ на площину OXY називається вектор F_{xy}, який міститься між проекціями початку і кінця сили на цю площину (рис. 3.2).

Модуль вектора $F_{xy} = F \cdot cos\,\varphi$

$$\overline{F} = F_X \cdot \bar{i} + F_y \cdot \bar{j} + F_Z \cdot \bar{k} ,$$

де $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - орти, одиничні вектори, що напрямлені уздовж осей x, y, z;

F_x, F_y, F_z - проекції вектора сили F на відповідні осі.

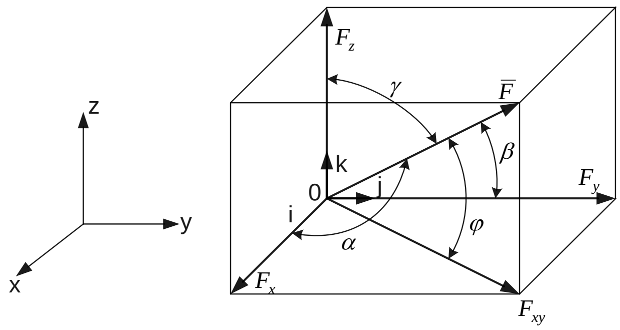


Рис. 3.2

Проекції сили : $F_x = F \cdot \cos\alpha$; $F_y = F \cdot \cos\beta$; $F_Z = F \cdot \cos\gamma$,

Модуль сили: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_Z^2}$, а її напрям – кут між додатним напрямом осі і напрямом сили:

$cos\alpha = \dfrac{F_X}{F}$; $\cos\beta = \dfrac{F_y}{F}$; $\cos\gamma = \dfrac{F_Z}{F}$ - напрямні косинуси.

Матеріальною точкою називається геометрична точка, якій приписана певна маса-модель матеріального тіла, розмірами якого при певних умовах можна знехтувати.

Система матеріальних точок механічна система - сукупність матеріальних точок, положення і рухи яких взаємопов'язані між собою.

Абсолютно твердим тілом називається тіло, що складається із системи матеріальних точок, відстань між будь-якими двома його точками залишається незмінною.

Системою сил називається сукупність сил, що діють на тверде тіло або матеріальну точку. Розрізняють три системи сил, що діють на тверде тіло у площині й просторі: збіжна система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці; паралельна система сил, лінії дії яких паралельні між собою; довільна система сил, лінії дії яких не паралельні між собою і всі разом не перетинаються в одній точці.

Еквівалентна система сил така, якою можна замінити систему сил, що діє на тверде тіло, й при цьому характер руху або рівноваги не зміниться. Позначається ”~”.

Рівнодійною $\overline{R}$ називається одна сила , яка еквівалентна заданій системі сил *(* $\overline{F}_1........\overline{F}_n$ *)*.

Зрівноважуюча (або еквівалентна нулю) система сил така, що залишає в рівновазі матеріальну точку, на яку вона діє.

Зрівноважуюча сила дорівнює за модулем і протилежна за напрямком до рівнодійної сили $\overline{R}$.

Матеріальна точка перебуває в рівновазі, якщо вона знаходиться у стані спокою або рівномірного прямолінійного руху – принцип інерції.

Система матеріальних точок перебуває в рівновазі, якщо всі точки системи знаходяться у спокої або рухаються рівномірно, прямолінійно з однаковою швидкістю за величиною і напрямком.

<u>**УЗАГАЛЬНЕННЯ**</u>

Величина, що є основною мірою механічної взаємодії матеріальних тіл, називається *силою*.

Сила - величина векторна. Її дія на тіло визначається:
1) *чисельним значенням чи модулем сили,* 2) *напрямком сили,*
3) *точкою прикладення сили*.

Сила, як і всі інші векторні величини, наприклад, позначається *F*, а модуль сили - символом $/F/$. Графічно сила, як і інші вектори, зображується спрямованим відрізком.

Сили, що діють на дане тіло, можна розділити на **зовнішні** і **внутрішні**. *Зовнішніми* називаються сили, що діють на це тіло з боку інших тіл, а <u>***внутрішніми***</u> -сили, з якими частини даного тіла діють одна на одну.

Сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називаються силами, що *сходяться*, а сили, лінії дії яких рівнобіжні один одному, - <u>***рівнобіжними***</u>.

Сила, прикладена до тіла в якій-небудь одній його точці, називається *зосередженою*. Сили, що діють на всі точки даного обсягу чи даної частини поверхні тіла, називаються <u>***розподіленими***</u>.

<u>***Системою сил***</u> називають сукупність сил, що діють на розглянуте тіло. Якщо лінії дії всіх сил лежать в одній площині, система сил називається *плоскою*, а якщо ці лінії дії не лежать в одній площині, - <u>***просторовою***</u>.

Система сил, під дією якої вільне тверде тіло може знаходитися в спокої, називається <u>***еквівалентною нулю***</u>.

Якщо одну систему сил, що діє на вільне тверде тіло, можна замінити іншою системою, не змінюючи при цьому стану спокою чи руху, у якому знаходиться тіло, то такі дві системи сил називаються <u>***еквівалентними***</u>.

Сила, з якою даний зв'язок діє на тіло, перешкоджаючи тим чи іншим його переміщенням, називається <u>***силою реакції зв'язку***</u> чи просто <u>***реакцією зв'язку***</u>.

<u>***Парою сил***</u> *називається система двох рівних по модулю, рівнобіжних і спрямованих у протилежні сторони сил, що діють на абсолютно тверде тіло*.

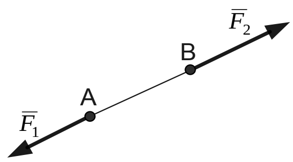
Відомо, що під дією пари сил вільне тверде тіло виходить з рівноваги. Звичайно пари сил (F_1, F_2) докладаються до тіла, що повинне обертатися, наприклад, до маховика вентиля при його закриванні і відкриванні.

Пара сил не складає системи сил, еквівалентної нулю. Тому пару сил не можна замінити однією силою і, отже, вона не має рівнодіючої, а є такою системою сил, спростити яку не можна. Кожна із сил, вхідних до складу пари сил, має властивості звичайних сил

3.2. АКСІОМИ СТАТИКИ (ПРИНЦИПИ СТАТИКИ)

1. Аксіома про дві сили (рис. 3.3)

Дві сили, що діють на абсолютно тверде тіло, зрівноважуються тоді і тільки тоді, коли вони діють уздовж однієї лінії в протилежні боки і дорівнюються за модулем.



$$\overline{F}_1 = -\overline{F}_2$$
$$|\overline{F}_1| = |\overline{F}_2|$$

Рис. 3.3

2. Додання (виключення) до діючої на тверде тіло будь – якої зрівноваженої системи сил не змінює дію на тіло, не порушує рівновагу (рис. 3.4).

Рух твердого тіла не зміниться від переносу точки прикладення сили вздовж її лінії дії в будь-яку іншу точку тіла.

Наслідок: *дія сили на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо перенести точку додатка сили уздовж її лінії дії в будь-яку іншу точку тіла*. Справді, нехай на тверде тіло діє прикладена у точці *A* сила *F* (рис. 3.4). Візьмемо на лінії дії цієї сили довільну точку В и прикладемо до неї дві урівноважені сили F_1 і F_2,такі, що F_1=*F* та F_2= - *F*. Від цього дія сили *F* на тіло не зміниться. Але сили *F* і F_2 також утворять урівноважену систему, що може бути відкинута. В результаті на тіло буде діяти тільки одна сила F_1, що дорівнює *F*, але прикладена в точці *B*.

Таким чином, вектор, що зображує силу *F*, можна вважати прикладеним у будь-якій точці на лінії дії сили (такий вектор називається *ковзним*).

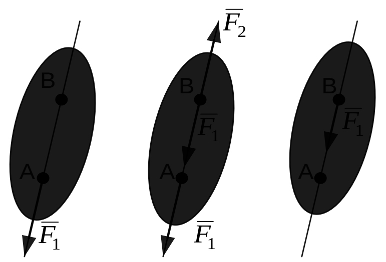
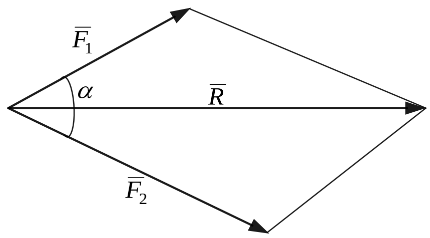


Рис. 3.4

3. Аксіома про паралелограм сил.

Рівнодійна двох сил, прикладених до тіла в одній точці, дорівнює векторній сумі цих сил і прикладена в тій самій точці (рис. 3.5).



$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$$

Рис. 3.5

Модуль рівнодійної сили $\overline{R}$ визначається за теоремою косинусів:

$$R = \left|\overline{R}\right| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\left(\overline{F_1}, \overline{F_2}\right)}.$$

Напрямок рівнодійної двох сил визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах.

На основі аксіоми 3 будь-яке число сил, прикладених в одній точці, можна складати геометрично. Рівнодійну сил визначають як векторну суму цих сил (рис. 3.6).

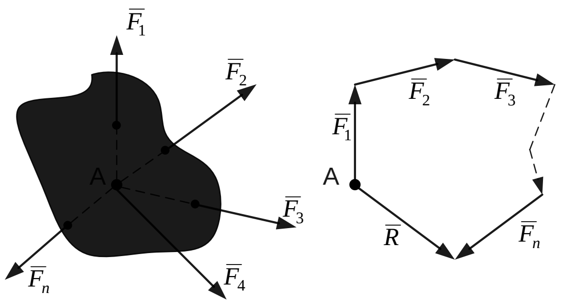


Рис. 3.6

Для цього з кінця вектора, що дорівнює першій силі $\overline{F_1}$, відкидаємо вектор, що дорівнює силі $\overline{F_2}$, і т.д. З'єднуючи початок першого вектора $\overline{F_1}$ з кінцем останнього $\overline{F_n}$, знаходимо рівнодійну силу:

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} + \ldots + \overline{F_n} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i}.$$

Цей многокутник називається многокутником сил, або силовим многокутником.

4. Закон дії і протидії (3-й закон Ньютона).

При деякій дії одного тіла на друге має місце протидія, чисельно рівна, але протилежна за напрямком (рис. 3.7).

Сили дії і протидії $\left(\overline{F}', \overline{F}\right)$ дорівнюються за модулем, діють уздовж однієї лінії в протилежному напрямку, але прикладені до різних тіл. Тому сили дії і протидії не врівноважені.

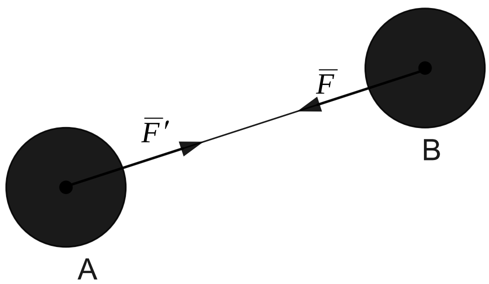


Рис. 3.7

5. Принцип тверднення. Рівновага деформованого (змінюваного) тіла, яке знаходиться під дією даної системи сил, не порушується, якщо його вважати затверділим (абсолютно твердим). Сенс аксіоми полягає в тому, що при вивченні руху деформованих тіл можна користуватися правилами теоретичної механіки, які отримані для твердих тіл.

Система матеріальних точок називається вільною, якщо на рух цих точок не накладено обмежень. У протилежному разі система матеріальних точок називається невільною.

Тіла, або поля, що обмежують свободу руху системи матеріальних точок або твердого тіла, називаються в'язами.

Наприклад, ясно, що рівновага ланцюга не порушиться, якщо її ланки вважати звареними один з одним даний принцип можна ще висловити в такій формі: *при рівновазі сили, які діють на будь-яке змінюване (деформуєме) чи тіло змінюваної конструкції, задовольняють тим же умовам, що і для тіла абсолютно твердого*.

6. Аксіома про звільнення від в'язів. Не змінюючи механічного стану (руху або рівноваги) системи матеріальних точок або твердого тіла, в'язь, накладену на систему або тверде тіло, можна відкинути, замінивши дію в'язі її реакцією, прикладеною до цього тіла або системи в точці взаємодії тіла і в'язі.

Невільні матеріальні точки, систему матеріальних точок або тверде тіло можна розглядати як вільні, якщо їх звільнити від в'язів, заміняючи дію останніх їхніми реакціями.

3.3. В'ЯЗІ І ЇХНІ РЕАКЦІЇ

Сила, з якою в'язь діє на тіло, називається реакцією в'язі і спрямована у бік, протилежний тому, в якому в'язь не дає тілу можливості переміщатися.

Модуль реакції в'язів визначається у процесі розв'язання задач.

Від виду в'язів і її конструктивного виконання залежить напрямок реакції в'язів (може бути частково або повністю відомою).

Рекомендації щодо напрямку реакції в'язів або її складових по осях координат OX, OY, OZ залишаються корисними і їх величини знаходять з умов рівноваги.

1) Гладка поверхня (плоскість)

Гладкою називається поверхня, тертям об яку даного тіла можна зневажити. Реакція N гладкої поверхні спрямована по загальній нормалі до поверхонь дотичних тіл у точці їхнього торкання і спрямована вбік тіла. (рис. 3.8):

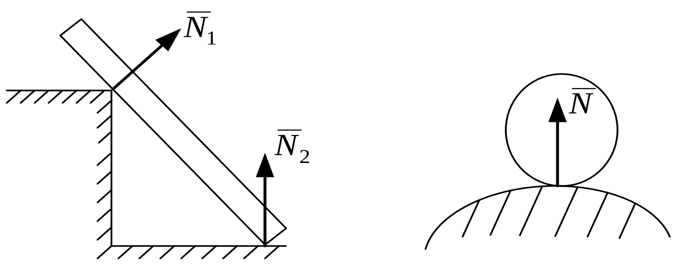


Рис. 3.8

Реакція ідеально гладкої поверхні напрямлена по нормалі від поверхні і позначається через $\overline{N}$

2) Нитка (рис. 3.9):

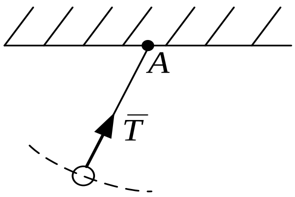


Рис. 3.9

Реакція нитки напрямлена вздовж нитки до точки її закріплення А і позначається через $\overline{T}$.

2) Невагомий стержень, що з'єднує два шарніри А, В. Реакція спрямована вздовж лінії, що з'єднує шарніри (рис. 3.10):

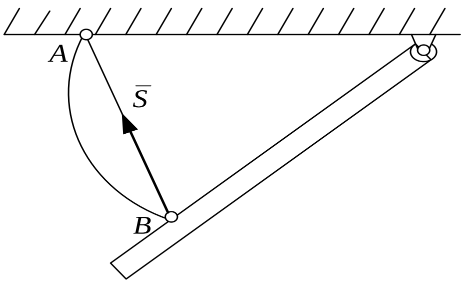


Рис. 3.10

Реакція може бути спрямована й у протилежному напрямку. Про правильність обраного напрямку свідчить позитивне значення відповідної реакції, знайдене в процесі розв'язання задачі.

4) Котки (рухомі шарніри) (рис. 3.11):

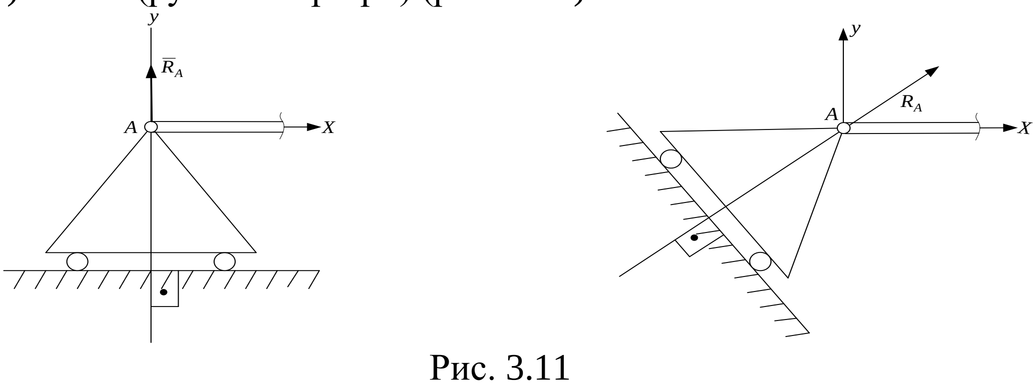
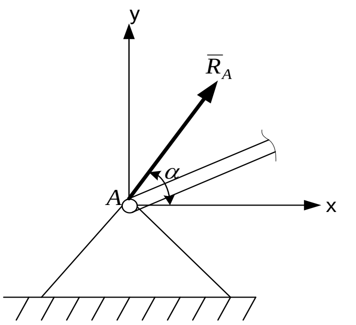
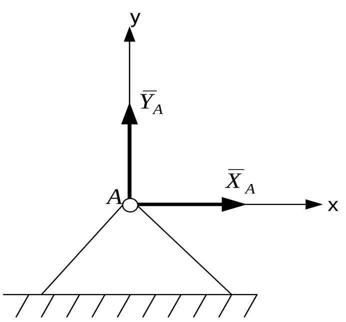


Рис. 3.11

Реакція котка напрямлена перпендикулярно до опорної площини котка.

5. Нерухомий шарнір, циліндричний (підшипник) (рис. 3.12):



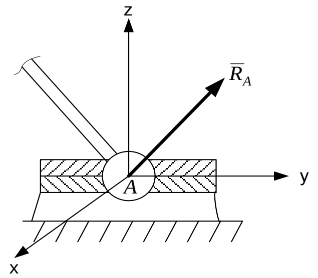


$$\overline{R}_A = \overline{Y}_A + \overline{X}_A$$

Рис. 3.12

Напрям реакцій таких в’язів заздалегідь визначити не можна. Невідомий вектор реакції в’язі $\overline{R}_A$ в площині визначається двома складовими $\overline{Y}_A$ и $\overline{X}_A$ по осях OX и OY.

6. Сферичний шарнір (кульковий шарнір) (рис.3.13):



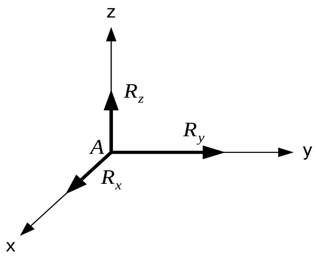


Рис. 3.13

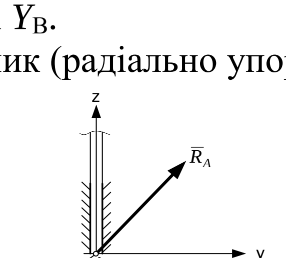
Реакція $\overline{R}_A$ сферичного шарніра складається з трьох її проекцій на три координатні осі $\overline{R}_x, \overline{R}_y, \overline{R}_z$

$$\overline{R}_A = \overline{R}_X + \overline{R}_y + \overline{R}_Z$$

Вона прикладена в центрі шарніра (підп'ятника) і може бути розкладена на три взаємно перпендикулярні складові.

Рухливий і нерухомий циліндричний шарніри. Реакція R_A рухливого циліндричного шарніра проходить через центр шарніра і спрямована перпендикулярно до опорної поверхні, по якій шарнір може переміщатися. Реакція нерухомого циліндричного проходить через центр шарніра, спрямована перпендикулярно до осі шарніра і може бути замінена двома складовими $X_Б$ і $Y_В$.

7. Підп’ятник (радіально упорний підшипник) (рис. 3.14):



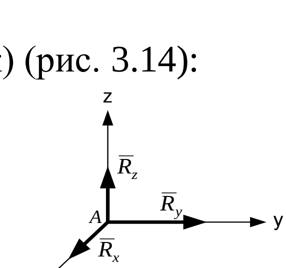


Рис. 1.14

Як і кульковий шарнір, підп’ятник має три складові просторові: $\overline{R}_x, \overline{R}_y, \overline{R}_z$

$$\overline{R}_A = \overline{R}_X + \overline{R}_y + \overline{R}_Z$$

8. Жорстке защемлення - тут три невідомі величини (рис. 3.15):

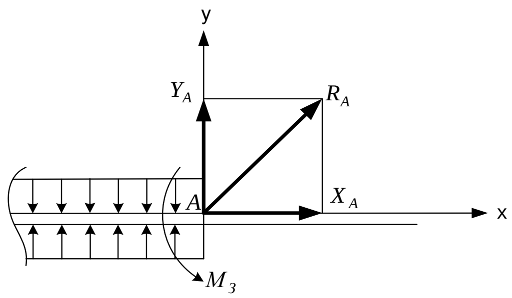


Рис. 3.15

Реакція жорсткого защемлення складається із сили $\overline{R}_A$ та пари сил з моментом $M_З$.

9. Шорстка поверхня (рис. 3.16):

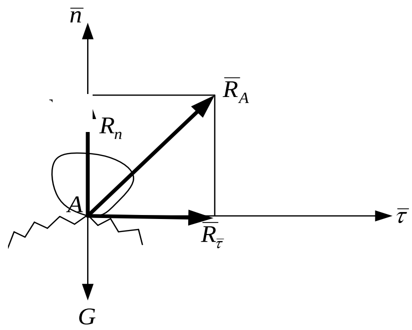


Рис. 3.16

Реакція $\overline{R}_A$ шорсткої поверхні розкладається на дві складові:

$\overline{R}_n$ - нормальну і $\overline{R}_\tau$ дотичну, напрямлену по дотичній τ до поверхні.

Дотична складова реакції $\overline{R}_\tau$ є силою тертя.

Сила тертя дорівнює $R_\tau \le f \cdot R_n$, де f - коефіцієнт тертя ковзання, нормальна складова реакції $\overline{R}_n$ дорівнює вазі тіла, $R_n = G$.

3.4. НАЙПРОСТІШІ ТЕОРЕМИ СТАТИКИ

<u>Теорема про силу як ковзний вектор</u>

Дія сили на тверде тіло не зміниться, якщо перенести силу по лінії її дії в будь-яку точку (рис. 3.17) (наприклад, з точки А в точку В)

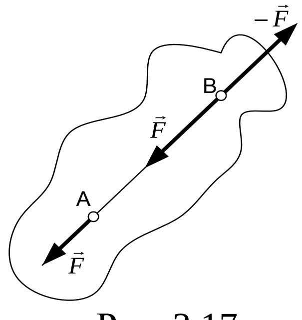


Рис. 3.17

Теорема про три сили

Якщо абсолютно тверде тіло перебуває в рівновазі під дією трьох непаралельних сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3\right)$ і лінії дії двох сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2\right)$ перетинаються, то всі сили лежать в одній площині і їхні лінії дії перетинаються в одній точці (O) (рис. 3.18).

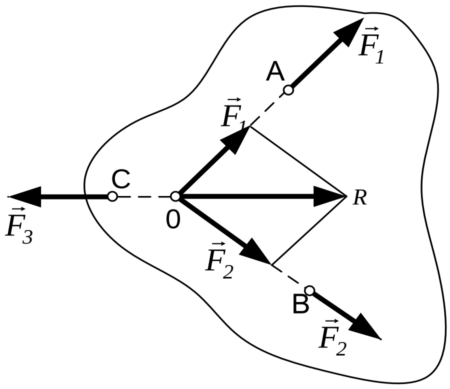


Рис. 3.18

Теорема про проекцію рівнодійної на вісь

Ця теорема відома з векторної алгебри. Проекція векторної (геометричної) суми на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових вектора на цю саму вісь (рис. 3.19)

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{F}_4$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = oa + ab - bc + cd$$

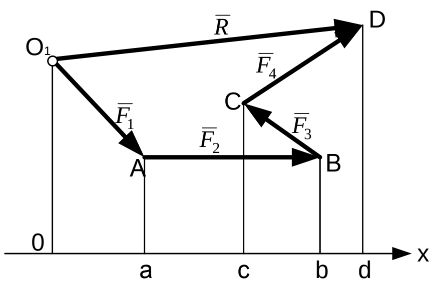


Рис. 3.19

3.5. Система збіжних сил. Умови рівноваги системи збіжних сил (рис. 3.20)

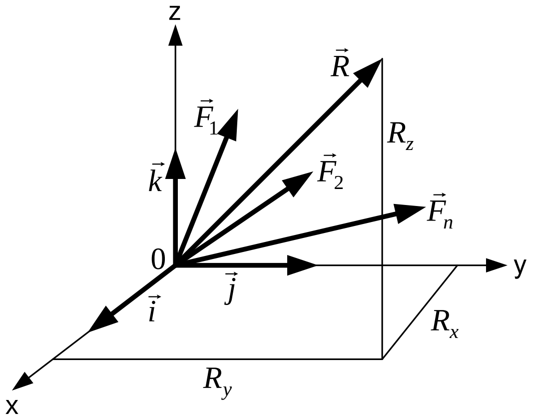


Рис. 3.20

Користуючись аксіомою про паралелограм сил, рівнодійна $\bar{R}$ системи збіжних сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2 \ldots \bar{F}_n$ визначається графічно як замикальна сторона многокутника сил:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i$$

Аналітично рівнодійну силу можна визначити за її проекціями на осі прямокутної системи координат (рис. 1.20) за теоремою про проекції векторної суми на осі координат.

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}, \qquad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz},$$

де F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} - проекції відповідних сил на осі координат.

Подамо рівнодійну $\bar{R}$ у вигляді розкладання по ортах:

$$\bar{R} = \bar{i}R_x + \bar{j}R_y + \bar{k}R_z$$

Тоді її модуль $\qquad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$,

або $\qquad R = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iz}\right)^2}$.

Напрямні косинуси рівнодійної сили:

$$\cos(\bar{R}, \bar{i}) = \frac{R_x}{R}; \qquad \cos(\bar{R}, \bar{j}) = \frac{R_y}{R}; \qquad \cos(\bar{R}, \bar{k}) = \frac{R_z}{R}.$$

Теорема. Для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна сила дорівнювала нулю $\bar{R} = 0$. Ця умова є геометричною умовою рівноваги збіжної системи сил.

Оскільки $\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = 0$, то многокутник сил має бути замкненим, тобто кінець останньої сили $\bar{F}_n$ збігається з початком першої сили.

Умови рівноваги системи збіжних сил в аналітичній формі формулюються так: для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій сил на три взаємно перпендикулярні осі дорівнювали нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0$$

4. МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ЦЕНТРА ТА ОСІ. МОМЕНТ ПАРИ СИЛ

4.1. Момент сили. Векторний і алгебраїчний моменти сили відносно центра

Векторний момент сили $\vec{F}$ відносно центра O дорівнює векторному добутку радіуса вектора точки A прикладення сили відносно цього центра на вектор сили: $\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F}$.

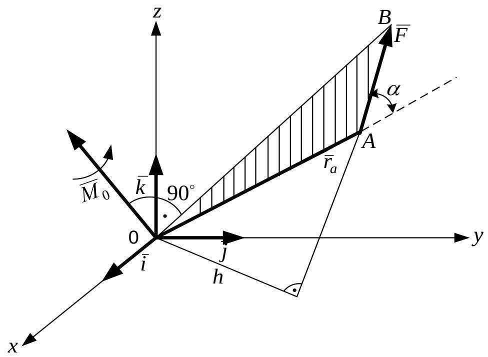


Рис. 4.1

Модуль векторного моменту:

$$M_0(\overline{F}) = F \cdot r_A \sin(\overline{r}_A, \overline{F}) = F \cdot r_A \sin\alpha = F \cdot h,$$

Тут h - плече сили, тобто довжина перпендикуляра, який проведений із центра до лінії дії сили.

Вектор $\vec{M}_0$ спрямований у той бік, звідки обертаюча дія сили згідно з центром O видна спрямованою проти ходу годинникової стрілки.

Алгебраїчним моментом сили відносно точки (центра) називається величина, яка дорівнює взятому з відповідним знаком добутку модуля сили на плече: $M_0(\overline{F}) = \pm F \cdot h$.

Отже, момент сили $\overline{F}$ відносно центра O чисельно дорівнює добутку модуля сили на плече h і напрямлений перпендикулярно до площини, що проходить через точку O і лінію дії сили, в той бік, звідки обертання тіла під дією сили $\overline{F}$ навколо точки O (або найкоротший поворот вектора $\overline{r}$ до напряму вектора $\overline{F}$) спостерігач бачить таким, що відбувається проти ходу годинникової стрілки. Спостерігач дивиться назустріч вектора-моменту (рис. 4.1, 4.2).

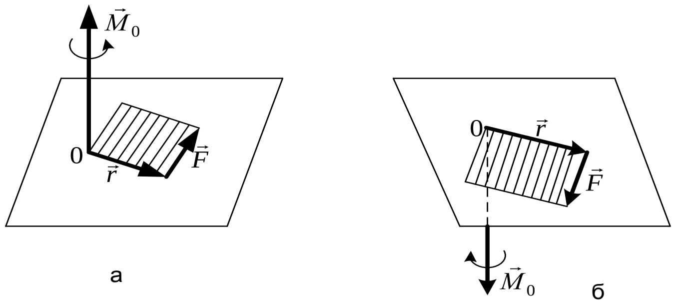


Рис. 4.2

Очевидно, момент сили відносно центра має всі властивості векторного добутку.

$$\overline{M}_0\left(\overline{F}\right) = \overline{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

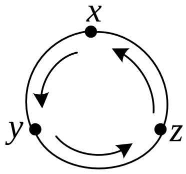
Розкриваючи цей визначник за елементами першого рядка і розкладаючи вектор $\bar{M}_0(\bar{F})$ на складові $M_{0x}(\bar{F}), M_{0y}(\bar{F}), M_{0z}(\bar{F})$ по осях координат, одержимо

$$\begin{aligned} \bar{M}_0(\bar{F}) &= M_{0x}(\bar{F}) \cdot \bar{i} + M_{0y}(\bar{F}) \cdot \bar{j} + M_{0z}(\bar{F}) \cdot \bar{k} = \\ &= \bar{i}\left(yF_z - zF_y\right) + \bar{j}\left(zF_x - xF_z\right) + \bar{k}\left(xF_y - yF_x\right) \end{aligned}.$$

Порівнюючи ліву й праву частини рівності, маємо аналітичні вирази моменту сили відносно осей x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} M_{0x}(\bar{F}) &= yF_z - zF_y \\ M_{0y}(\bar{F}) &= zF_x - xF_z \\ M_{0z}(\bar{F}) &= xF_y - yF_x \end{aligned}\right\}$$

Ці формули легко одержати, користуючись правилом циклічної перестановки індексів



Модуль і напрям моменту сили відносно центра можна визначити ще так:

$$M_0(\bar{F}) = \sqrt{M_{0x}^2(\bar{F}) + M_{0y}^2(\bar{F}) + M_{0z}^2(\bar{F})},$$

$$cos\left(\overline{M}_0, \bar{i}\right) = \frac{M_{0x}}{M_0};\ cos\left(\overline{M}_0, \bar{j}\right) = \frac{M_{0y}}{M_0};\ cos\left(\overline{M}_0, \bar{k}\right) = \frac{M_{0z}}{M_0}.$$

Із визначення моменту сили відносно центра маємо:

1. Якщо перемістити силу вздовж лінії її дії, то момент сили відносно центра не зміниться.

2. Момент сили відносно центра завжди дорівнює нулю, коли лінія дії сили проходить через центр (у цьому випадку плече h дорівнює нулю).

3. Момент сили відносно точки чисельно дорівнює подвоєній площі трикутника OAB (рис. 4.3), побудованого на силі $\left(F = AB\right)$ і центрі моменту (O).

Методичні вказівки для визначення моменту сили відносно точки O (рис. 4.3).

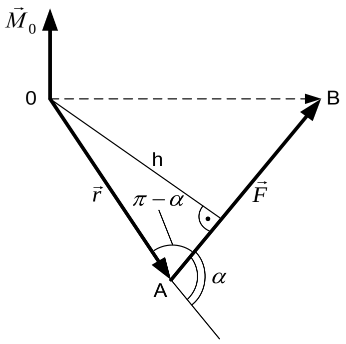


Рис. 4.3

1. Провести лінію дії сили (пряма AB).
2. З обраної точки O провести перпендикуляр на лінію дії сили (довжина перпендикуляра h - плече сили $\overline{F}$ відносно центра O).
3. Скласти добуток модуля сили на плече $(F \cdot h)$.
4. Взяти знак “+” якщо сила $\overline{F}$ прагне обертати площину відносно точки O проти руху годинникової стрілки, і знак “-” якщо за стрілкою годинника:
$$M_0(F) = F \cdot h.$$

<u>Теорема</u> про момент рівнодійної просторової системи збіжних сил (теорема Варіньона).

Момент рівнодійної просторової збіжної системи сил відносно довільного центра дорівнює векторній (геометричній) сумі моментів складових сил відносно того самого центра:

$$\overline{M}_0(\overline{R}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_0(\overline{F}_i).$$

Рівнодійна $\overline{R}$ збіжної системи сил дорівнює їх геометричній сумі

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n.$$

Тоді з визначення моменту сили відносно центру O маємо

$$\overline{M}_0\left(\overline{R}\right) = \overline{r} \times \overline{R} = \overline{r} \times \left(\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n\right) = \overline{r} \times \overline{F}_1 + \overline{r} \times \overline{F}_2 + ... + \overline{r} \times \overline{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_0\left(\overline{F}_i\right)$$

Якщо сили і центр O розміщені в <u>одній площині</u>, то їхні моменти перпендикулярні до цієї площини і лежать на одній прямій. Тому момент рівнодійної такої системи сил дорівнює <u>алгебраїчній</u> сумі моментів складових сил відносно цієї точки.

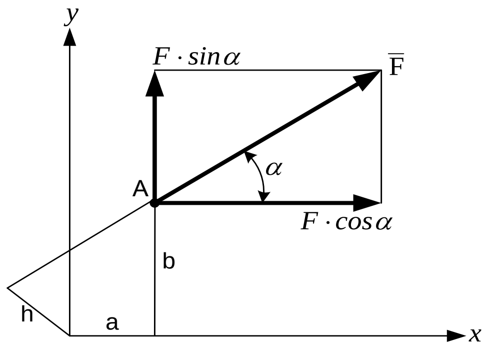


Рис. 4.4

Приклад вживання теореми Варіньона наведено на рис. 2.4.

$$M_0(\bar{F}) = F \cdot sin\alpha \cdot a - F \cdot cos\alpha \cdot b.$$

Обчислюючи ж момент сили F відносно центра O по визначенню, маємо $M_0(\bar{F}) = -P \cdot h$, однак визначити плече h сили F, якщо дані координати точки A, дещо складніше.

4.2. Момент сили відносно осі

Моментом сили відносно осі називається скалярна величина, яка дорівнює моменту проекції цієї сили на площину, перпендикулярну до осі відносно точки перетину осі цією площиною (рис. 2.5).

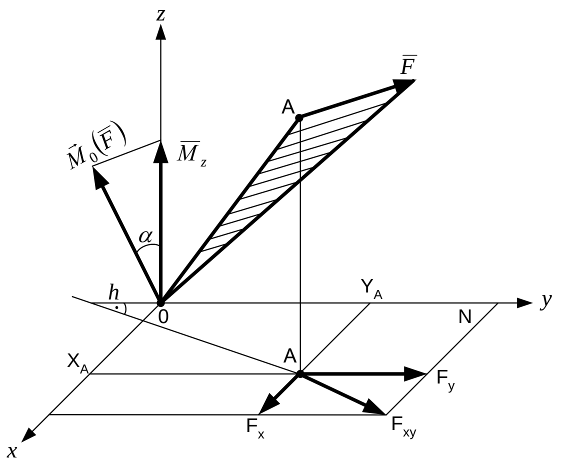


Рис. 4.5

Можна також розкласти силу на складові, які паралельні осям, і взяти суму моментів відносно точки перетину осі з перпендикулярною до неї площиною. Наприклад (рис. 4.5):

$$M_z(\vec{F}) = x_A \cdot F_y - F_x \cdot y_A = F_{xy} \cdot h.$$

Момент сили відносно осі дорівнює проекції моменту сили відносно будь-якої точки осі на цю вісь, тобто $M_z = M_0 \cdot cos\alpha$.

Якщо сила <u>паралельна або перетинає вісь</u>, то $M_z = 0$.

Моментом сили відносно осі називається проекція на цю вісь моменту сили відносно будь-якої точки, що лежить на цій осі.

При розв'язуванні конкретних задач моменти сил відносно осей зручно обчислювати за такими правилами:

1. Проводимо довільну площину N, перпендикулярну до осі OZ, і знаходимо точку O перетину цієї площини з віссю.
2. Проектуємо сили $\bar{F}$ на зазначену площину $N(xoy)$. $\bar{F}_{xy}$ – проекція сили $\bar{F}$ на площину N.

3. З точки перетину осі Z з цією площиною проводимо перпендикуляр на лінію дії проекції сили – h.
4. Обчислюємо момент проекції $\bar{F}_{xy}$ сили $\bar{F}$ на цю площину відносно точки O:
$$M(\bar{F}) = M_0(\bar{F}_{xy}) = F_{xy} \cdot h.$$
5. Визначаємо знак моменту: взяти знак "+", якщо з додатного кінця осі Z видно, що проекція сили $\bar{F}_{xy}$ намагається повернути площину навколо осі проти ходу годинникової стрілки, і знак "-", якщо за стрілкою годинника.
6. Скориставшись теоремою Варіньона, можна розкласти проекцію сили $\bar{F}_{xy}$ на складові, які паралельні осям координат, і взяти суму моментів відносно точки перетину осі з площиною N, як було визначено раніше.

4.3. Момент пари сил (рис. 4.9)

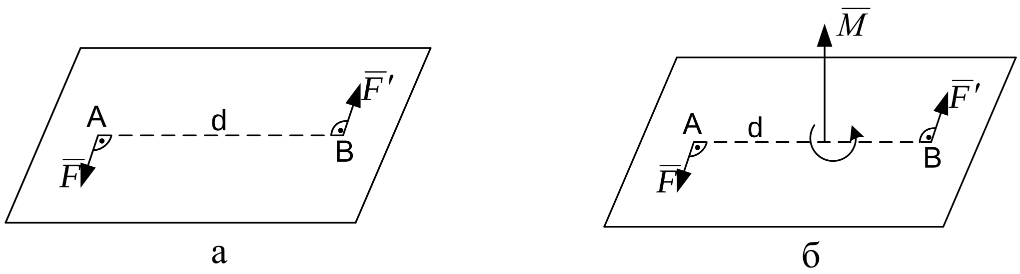


Рис. 4.9

Пара сил – це система двох чисельно рівних паралельних сил, спрямованих у протилежні боки $\bar{F} = -\bar{F}'$.

За міру механічного впливу пари сил на тверде тіло приймається векторний момент пари $\bar{M}(F, \bar{F}')$, який дорівнює векторному добутку радіуса-вектора точки прикладання однієї з сил пари відносно точки прикладання другої сили на вектор першої сили:
$$\bar{M}(\bar{F}, \bar{F}') = \overline{AB} \times \bar{F}'.$$

Сума моментів сил пари відносно осі дорівнює проекції векторного моменту пари на цю вісь.

Для пари сил, які лежать у одній площині, вводиться поняття алгебраїчного моменту пари, який дорівнює з відповідним знаком добутку модуля однієї з сил пари на плече, тобто на відстань між лініями дії сил пари.

Рис. 4.10

Площина N (рис. 4.10) називається площиною дії пари сил $(\overline{F}, \overline{F}')$. Плечем пари d називається найкоротша відстань між лініями дії пари.

Вектор момент $\overline{M}$ пари $\overline{F}, \overline{F}'$ спрямований перпендикулярно до площини дії пари сил у той бік, звідки спостерігач бачить пару сил, яка намагається повернути площину проти ходу годинникової стрілки.

Деякі властивості пар сил, що лежать в одній площині:

1. Алгебраїчна сума моментів сил пари відносно будь-якого центра O в площині пари не залежить від вибору цього центра і дорівнює моменту цієї пари (рис. 4.11):

$$M_0(\overline{F}, \overline{F}') = M_0(\overline{F}) + M_0(\overline{F}') = -F \cdot h + F' \cdot (d+h) = F' \cdot d$$

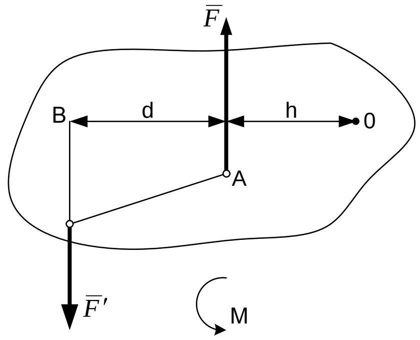


Рис. 4.11

2. Пара сил визначається лише двома параметрами: площиною дії та моментом. Пара сил не має рівнодійної, сили пари не врівноважені, тому що напрямлені паралельно. Пара сил становить зрівноважену систему (систему сил, еквівалентну нулю) тоді і тільки тоді, коли момент пари дорівнює нулю.

3. Не змінюючи дії пари сил на тверде тіло, її можна переносити і довільно повертати в площині дії, змінюючи величину сили, що входить у неї, і довжину плеча так, щоб момент пари залишався незмінним (рис. 2.12).

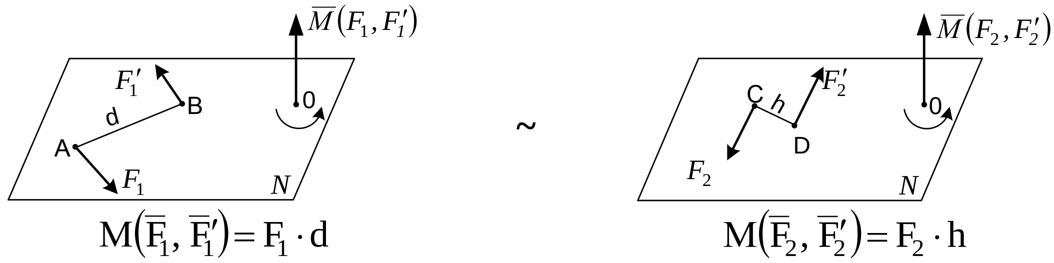


Рис. 4.12

$\overline{M}(\overline{F}_1, \overline{F}_1') = \overline{M}(\overline{F}_2, \overline{F}_2')$, якщо $F_1 \cdot d = F_2 \cdot h$

4. Пару сил можна переносити в будь-яку площину, паралельну площині дії цієї пари.

5. Декілька пар сил, довільно розміщених у просторі, можна замінити однією парою, момент якої дорівнює геометричній сумі моментів складових пар:

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i \ .$$

6. Вектор момент пари сил є вільний, ковзний і математично визначений у вигляді

$$\bar{M}(\bar{F}, \bar{F}') = \overline{AB} \times \bar{F} \ .$$

Момент пари цілком визначає статичну дію пари сил на тверде тіло, тобто є повною характеристикою механічної дії пари сил на це тіло.

7. Дві пари сил, що лежать в одній або паралельних площинах і мають однакові за величиною, але протилежні за напрямом моменти, становлять систему пар сил, еквівалентну нулю.
8. Умова рівноваги системи пар сил: $\sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i = 0$.

5. ДОВІЛЬНА ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ І УМОВА ЇЇ РІВНОВАГИ

Довільною просторовою системою сил називається система сил, як завгодно розташованих у просторі.

Лема про паралельне перенесення лінії дії сили. Не змінюючи статичного стану твердого тіла, силу, прикладену до цього тіла, можна перенести у будь-яку точку паралельно самій собі, додаючи при цьому приєднану пару. Момент приєднаної пари дорівнює моменту цієї сили відносно центра зведення (рис. 3.1).

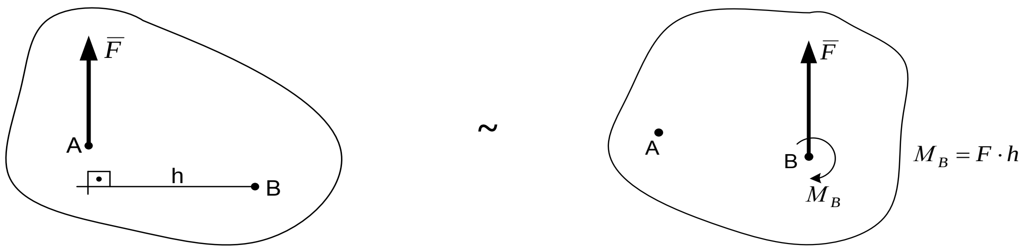


Рис. 5.1

5.1. Основна теорема статики. Головний вектор і головний момент системи сил

Приведення довільної просторової системи сил до центра (рис. 3.2).

Довільну систему сил можна замінити однією силою, яка дорівнює головному вектору системи і прикладена до центру приведення (довільна точка), і однією парою сил, момент якої дорівнює головному моменту системи відносно тієї ж точки.

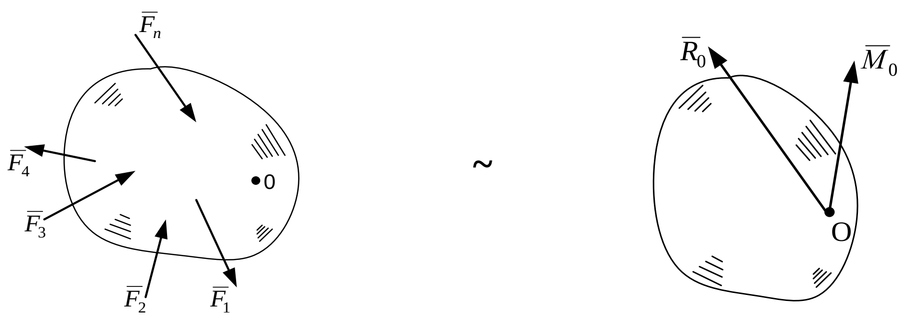


Рис. 5.2

Головний вектор $\overline{R}_0$ дорівнює геометричній сумі сил:

$$\overline{R}_0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + ... + \overline{F}_n .$$

Модулі і напрямні косинуси головного вектора визначаються виразами

$$R_0 = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} ,$$

$$\cos(\overline{R}_0;OX) = \frac{R_x}{R_0}; \qquad \cos(\overline{R}_0;OY) = \frac{R_y}{R_0}; \qquad \cos(\overline{R}_0;OZ) = \frac{R_z}{R_0}$$

Проекції головного вектора на осі координат:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} ; \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} ; \quad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}$$

<u>Головний момент</u> відносно будь-якого центра $\overline{M}_0$ дорівнює геометричній сумі векторних моментів усіх сил системи відносно того ж центра (точки *O*):

$$\overline{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_0(\overline{F}_i) = \overline{M}_0(\overline{F}_1) + \overline{M}_0(\overline{F}_2) + ... + \overline{M}_0(\overline{F}_n).$$

Модуль головного моменту $\overline{M}_0$ та його напрямні косинуси визначаються виразами

$$M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2} ,$$

$$\cos(\overline{M}_0;OX) = \frac{M_{0x}}{M_0}; \quad \cos(\overline{M}_0;OY) = \frac{M_{0y}}{M_0}; \quad \cos(\overline{M}_0;OZ) = \frac{M_{0z}}{M_0}.$$

Проекції головного моменту на осі координат M_{0x}, M_{0y}, M_{0z} дорівнюють алгебраїчним сумам моментів усіх сил відносно осей OX, OY, OZ, що проходять через центр зведення ***O***:

$$M_{0x} = \sum_{i=1}^{n} M_x(\overline{F}_{ix}); \; M_{0y} = \sum_{i=1}^{n} M_y(\overline{F}_{iy}); \; M_{0z} = \sum_{i=1}^{n} M_z(\overline{F}_{iz}).$$

Варіанти зведення сил.

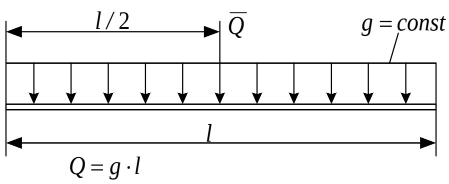
1) $\bar{M}_0 = 0$ – система є еквівалентною одній силі, яка називається рівнодійною даній системі сил. При цьому відповідно до теореми Варіньйона якщо система сил приводиться до рівнодійної відносно будь-якої точки (осі) момент рівнодійної дорівнює сумі моментів, що складають систему сил відносно тієї ж точки (осі).
2) Для плоскої системи сил – головний момент системи сил відносно будь-якого центра дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил відносно цього центра:

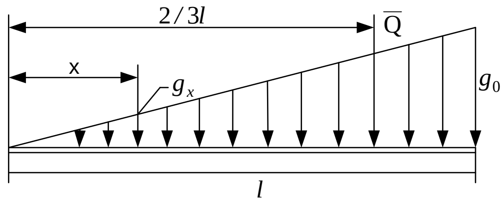
$$M_0 = M_0(\bar{F}_1) + M_0(\bar{F}_2) + \ldots + M_0(\bar{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} M_0(\bar{F}_i).$$

3) Якщо $\bar{M}_0 = 0$, $\bar{R}_0 \neq 0$, то система паралельних сил приводиться до рівнодіючої прикладенням у точці, яку називають центром паралельних сил.

Окремим випадком паралельних сил є <u>розподілені сили</u>, що характеризуються інтенсивністю розподілення $g\left[\frac{H}{м}\right]$. У розрахунках це навантаження доцільно замінити рівнодіючою, що дорівнює площині епюри розподілених сил, і прикладеній у центрі епюри паралельних сил.

Для найбільш поширених випадків





$$\frac{q(x)}{x} = \frac{q_0}{e} \qquad q(x) = \frac{q_0}{e} \cdot x$$

Рис. 5.3

5.2. Умови рівноваги довільної просторової системи сил

Для рівноваги довільної просторової системи сил (система сил була еквівалентна нулю) необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи відносно будь-якої точки *O* дорівнювали нулю, тобто

$$\bar{R}_0 = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = 0; \ \bar{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_0(\bar{F}_i) = 0.$$

Ці умови називаються умовами рівноваги довільної системи сил у <u>векторній</u> (геометричній) формі. Умови рівноваги довільної просторової системи сил в <u>аналітичній формі</u>:

$$R_{0x} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx} = 0;$$

$$R_{0y} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny} = 0;$$

$$R_{0z} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = F_{1z} + F_{2z} + ... + F_{nz} = 0;$$

$$M_{0x} = \sum_{i=1}^{n} M_{0x}(\bar{F}_i) = M_{0x}(\bar{F}_1) + M_{0x}(\bar{F}_2) + ... + M_{0x}(\bar{F}_n) = 0;$$

$$M_{0y} = \sum_{i=1}^{n} M_{0y}(\bar{F}_i) = M_{0y}(\bar{F}_1) + M_{0y}(\bar{F}_2) + ... + M_{0y}(\bar{F}_n) = 0;$$

$$M_{0z} = \sum_{i=1}^{n} M_{0z}(\bar{F}_i) = M_{0z}(\bar{F}_1) + M_{0z}(\bar{F}_2) + ... + M_{0z}(\bar{F}_n) = 0.$$

Отже, для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил на координатні осі та суми моментів цих сил відносно осей координат дорівнювали нулю.

При розв’язуванні задач про рівновагу просторової системи сил, прикладених до твердого тіла, з рівнянь можна визначити шість невідомих величин.

5.3. Умови рівноваги просторової системи паралельних сил

Для рівноваги просторової системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій усіх сил на вісь, паралельну силам, дорівнювала нулю і алгебраїчні суми моментів цих сил відносно двох інших координатних осей дорівнювали нулю (рис. 5.6).

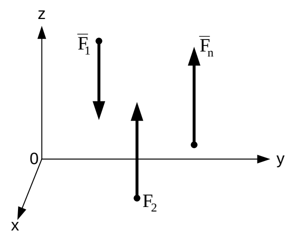


Рис. 5.6

У цьому випадку можна напрямити вісь OZ паралельно силам. Тоді з умов рівноваги просторової довільної системи сил залишаться лише три рівняння, а інші три перетворяться в тотожності.

Проекції сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n$ на осі OX і OY дорівнюють нулю, оскільки вони перпендикулярні до площини XOY. Оскільки сили паралельні осі OZ, то їхні моменти відносно цієї осі також дорівнюють нулю. Тоді з шести рівнянь рівноваги довільної просторової системи сил залишаються лише три:

$$1.\ \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0;\ F_1 + F_2 + ... + F_n = 0;$$

$$2.\ \sum_{i=1}^{n} M_{0x}(\bar{F}_i) = 0;\ M_{0x}(\bar{F}_1) + M_{0x}(\bar{F}_2) + ... + M_{0x}(\bar{F}_n) = 0;$$

$$3.\ \sum_{i=1}^{n} M_{0y}(\bar{F}_i) = 0;\ M_{0y}(\bar{F}_1) + M_{0y}(\bar{F}_2) + ... + M_{0y}(\bar{F}_n) = 0.$$

Зазначимо, що для статичної визначеності задач, які розв'язуються, число невідомих в рівняннях рівноваги не повинно перевищувати трьох.

5.4. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

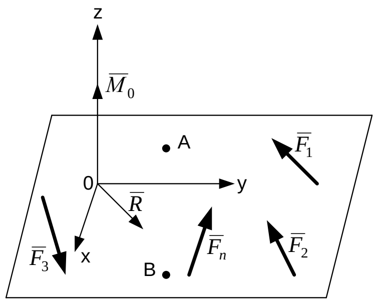


Рис. 5.7

Система сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n$ задана у площині XOY (рис. 3.7). За центр зведення візьмемо довільну точку O, що належить цій площині. Головний момент M_0 цієї системи сил перпендикулярний до площини XOY, якій належать сили. Головний вектор $\bar{\text{R}}$ також лежить у площині XOY дії сил.

З шести рівнянь рівноваги просторової довільної системи сил залишаються лише три:

$$1.\ \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;$$

$$2.\ \sum F_{iy} = 0;$$

$$3.\ \sum M_{0z}(\bar{F}_i) = 0.$$

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій сил на дві взаємно перпендикулярні осі і алгебраїчна сума моментів відносно довільно вибраної точки дорівнювали нулю.

Число невідомих у рівняннях рівноваги для довільної плоскої системи сил не повинно перевищувати трьох, тоді задача буде статично визначеною.

У випадку, якщо вісь OX не перпендикулярна до прямої AB, рівняння рівноваги можна подати у вигляді

$$1.\ \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;$$

$$2.\ \sum_{i=1}^{n} M_A(\bar{F}_i) = 0;$$

$$3.\ \sum_{i=1}^{n} M_B(\bar{F}_i) = 0.$$

Якщо три точки O, A, B не лежать на одній прямій, всі три рівняння рівноваги можна подати у вигляді рівнянь моментів відносно цих точок:

$$1.\ \sum_{i=1}^{n} M_0(\bar{F}_i) = 0;$$

$$2.\ \sum_{i=1}^{n} M_A(\bar{F}_i) = 0;$$

$$3.\ \sum_{i=1}^{n} M_B(\bar{F}_i) = 0.$$

Такими рівняннями рівноваги довільної плоскої системи сил користуються при визначенні зусиль у стержнях ферми способом Ріттера.

За центр моментів доцільно взяти точку, в якій перетинається найбільша кількість ліній дії невідомих сил (тоді моменти сил відносно цієї точки дорівнюватимуть нулю).

Якщо дві невідомі сили взаємно перпендикулярні, то осі координат доцільно направити по лініях дії цих сил.

5.5. Рівновага системи тіл

Розглянемо конструкцію, що складається з кількох твердих тіл, з'єднаних між собою за допомогою в'язів. Конструкція, що складається з двох твердих тіл AC і BDC, з'єднаних між собою за допомогою шарніра C, показана на рисунку 5.10. На конструкцію діють сила $\bar{P}$, пара сил з моментом M і розподілене навантаження інтенсивності q. У такій конструкції в'язі, з'єднуючи її частини, називаються внутрішніми (шарнір C), а в'язи A і B - зовнішніми. Реакції в'язів усієї конструкції повністю за допомогою рівнянь рівноваги довільної плоскої системи сил вирішити неможливо, бо кількість невідомих перебільшує кількість рівнянь рівноваги.

До даної конструкції, окрема активних, заданих сил, прикладені реакції зовнішніх в'язів – опор A і B. Реакція $\overline{R}_A$ шарнірно-рухомого шарніра A перпендикулярна до опорної площини.

З боку опори B, жорсткого защемлення, на конструкцію діють реакція $\overline{R}_B$ невідомого напрямку, що складається з $\overline{x}_B$ і $\overline{y}_B$, і пара сил M_B. Чотири невідомих реакцій в'язів R_A, x_B, y_B, M_B неможливо визначити з трьох рівнянь рівноваги довільної плоскої системи сил.

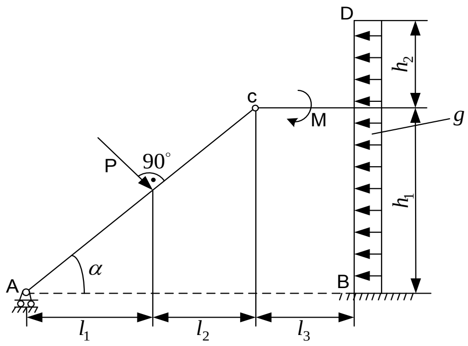


Рис. 5.10

Для їх визначення конструкцію розчленують, розрізають по шарніру C на окремі тверді тіла і розглядають рівновагу кожного з них окремо.

Реакції внутрішньої в'язі – шарніра C, яка діє на тіло AC і BDC (рис. 5.11 а, 5.11 б), попарно рівні за модулем і протилежні за напрямком за аксіомою про дію і протидію. Векторним рівнянням $\overline{x}'_C = -\overline{x}_C$ і $\overline{y}'_C = -\overline{y}_C$ відповідають алгебраїчні рівняння $x'_C = -x_C$, $y'_C = -y_C$, що використовуються при розв'язанні задачі. Властивість внутрішніх сил – утворювати зрівноважену систему сил.

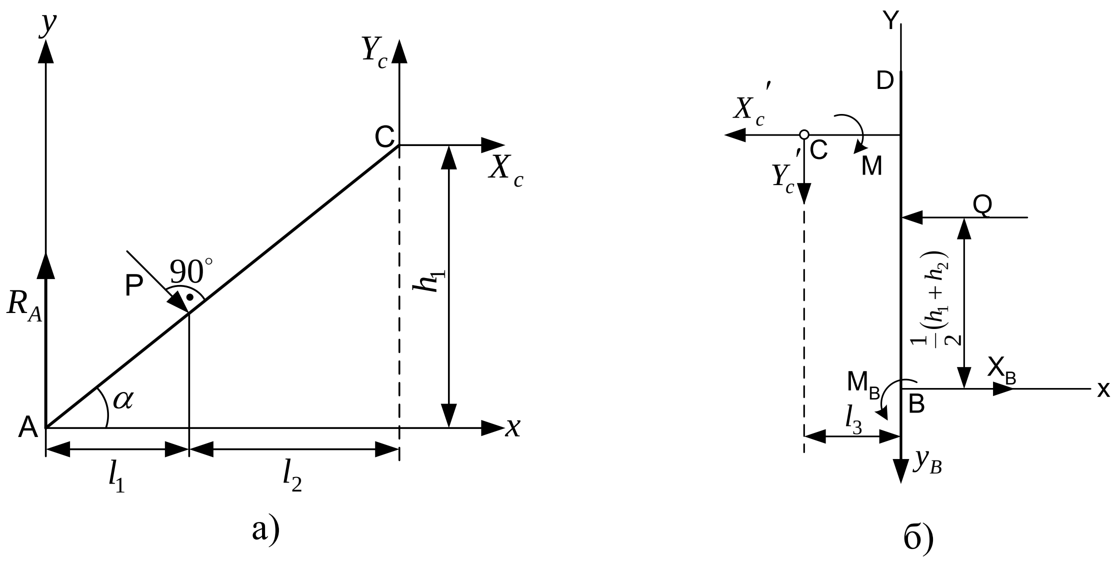


Рис. 5.11

Для системи сил, що діють на тіло AC і тіло BDC, можна скласти ще по три рівняння рівноваги сил, довільно розташованих у площині. З цих шести рівнянь можна визначити шість невідомих $R_A, x_B, y_B, M_B, x_C, y_C$.

Тоді розглядувана система сил статично визначена. Рівняння рівноваги конструкції, яка складається з двох твердих тіл, тобто $ACBD$ цілком, нерозчленованої, можливо використати для перевірки розв'язання.

5.6. Загальний план рішення задач на рівновагу.

Розв'язувані методами статики задачі, можуть бути одними з наступних двох типів: 1) задачі, у яких відомі (повністю чи цілком частково) діючі на тіло сили і потрібно знайти, у якому положенні чи при яких співвідношеннях між діючими силами тіло буде знаходитися в рівновазі; 2) задачі, у яких відомо, що тіло явно знаходиться в рівновазі і потрібно знайти чому рівні при цьому всі чи деякі з діючих на тіло сил. Реакції зв'язків є величинами, наперед невідомими у всіх задачах статики.

Процес рішення зводиться до наступних операцій:

1. *Вибір тіла, рівновага якого повинна бути розглянута.*

Для розв'язання задачі треба розглянути рівновагу тіла, до якого прикладені задані і шукані сили, що дорівнюють шуканим (наприклад, якщо треба знайти тиск на опору, то можна розглянути рівновагу тіла, до якого прикладена, чисельно рівна цій силі, реакція опори і т.п.)

2. *Зображення діючих сил.*

Визначивши, рівновагу такого тіла чи тіл розглядається, потрібно на кресленні зобразити всі діючі на це тіло зовнішні сили, включаючи як задані, так і шукані сили, у тому числі реакції всіх зв'язків.

3. *Складання умов рівноваги.*

Умови рівноваги складають для сил, що діють на тіло, рівновагу котрих розглядається.

4. *Визначення шуканих величин, перевірка правильності розв'язання і дослідження отриманих результатів.*

Особливе значення в процесі розв'язання має акуратне креслення (воно допомагає скоріше знаходити вірний шлях розв'язання й уникнути помилок при укладанні умов рівноваги).

Для розв'язання можна користатися геометричним чи аналітичним методом.

5.7. Ферми. Способи визначення зусиль у стержнях ферми

Плоскими фермами називаються конструкції, що складаються з прямолінійних стержнів, які з'єднані між собою шарнірами і утворюють незмінну геометричну фігуру. Шарніри називають вузлами ферми (рис. 5.12).

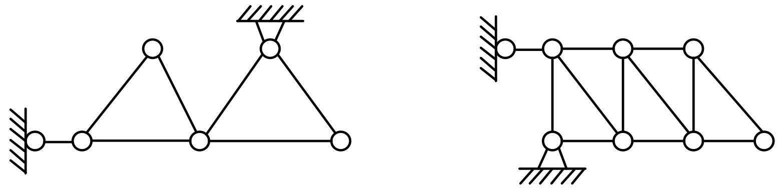


Рис. 5.12

При розрахунку ферм припускають, що:

1. шарніри розміщені тільки на кінцях стержнів;
2. вагою стержнів нехтують;
3. навантаження, що діють на ферму, прикладені у вузлах ферми, тому кожен стержень буде розтягнутий або стиснутий.

Розрахунок ферми складається з визначення опорних реакцій і зусиль в стержнях ферми. Для визначення зусиль у стержнях ферми користуються двома способами.

Спосіб вирізання вузлів полягає в тому, що кожен вузол вирізається з ферми і розглядається окремо як такий, що перебуває в рівновазі під дією прикладених до нього зовнішніх сил і зусиль розрізаних стержнів. Система сил, що діє на вузол, є плоскою системою збіжних сил, яка перебуває в рівновазі. Тому розрахунок ферми необхідно починати з вузла, в якому сходяться два стержні, два невідомих зусилля в яких визначаються з двох рівнянь рівноваги збіжної системи сил у площині.

Припускають, що всі зусилля у стержнях напрямлені від вузла, тобто стержні розтягнуті. Останній вузол розглядають для перевірки.

Спосіб Ріттера дає змогу знайти зусилля в будь-якому стержні ферми незалежно від зусиль в інших стержнях.

Спосіб Ріттера полягає в тому, що ферма розсікається так, щоб у перерізі було не більше трьох стержнів з невідомими зусиллями, які не сходяться в одному вузлі, і розглядають рівновагу відсіченої частини під дією прикладених зовнішніх сил і зусиль, які заміняють дію розсічених стержнів. Для цієї частини складають три рівняння рівноваги з трьома невідомими зусиллями. Найчастіше ці рівняння є умовами рівності нулю алгебраїчних сум моментів сил відносно трьох різних центрів, за які обирають точки попарного перетину розсічених стержнів з числа перерізаних. Ці точки називаються точками Ріттера.

Якщо два стержні з трьох розсічених паралельні, то точка Ріттера віддаляється у нескінченність. Тоді складають два рівняння моментів сил і одне рівняння проекцій сил на вісь, перпендикулярну до паралельних стержнів.

5.8. Центр паралельних сил і центр ваги

Центром паралельних сил називається точка на лінії дії рівнодійної $\overline{R}$

цих сил, яка не змінює свого положення при повороті всіх сил навколо точок їх прикладення $A_1, A_2, ..., A_n$ на один і той самий кут в одному напрямку, наприклад 90° (рис. 5.13).

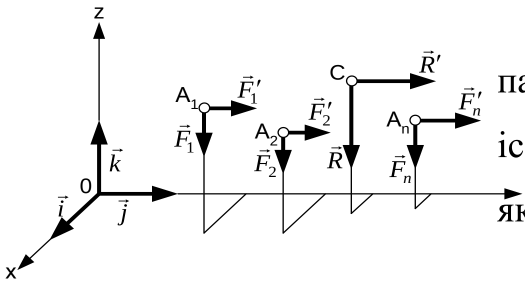


Рис. 5.13

Якщо головний вектор системи паралельних сил $\overline{R}$ не дорівнює нулю, то існує центр паралельних сил (точка C), який визначається за формулою

$$\overline{r}_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i \overline{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i},$$

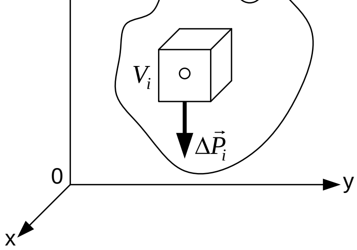
або в проекціях на координатні осі:

$$x_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i \cdot x_i}{\sum F_i}; \; y_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i \cdot y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i}; \; \mathrm{z}_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{F_i} \cdot \mathrm{z_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{F_i}},$$

де F_i - модуль ії сили; x_i, y_i, z_i - координати ії точки прикладення.

Положення центра паралельних сил не залежить від напряму сил, а залежить тільки від їхніх модулів і їхніх точок прикладення.

Центром ваги тіла Ⓐ називається центр паралельних сил ваги його елементарних частин (рис. 5.14). Якщо тіло можна поділити на деяку кількість частин, в яких положення центра ваги відоме, то координати центра ваги тіла будуть:



$$x_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i \cdot x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i};$$

Рис. 5.14

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot y_i}{\sum_{i=}^{n} P_i}; z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i},$$

де P_i - вага окремої частини; n - кількість частин; x_i, y_i, z_i - координати центра ваги окремої частини.

Ці вирази визначають центр ваги неоднорідного тіла.

<u>Центр ваги однорідного твердого тіла</u> (або центр об'єму тіла) визначається за формулами

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i};\ y_C = \frac{\sum_{i=}^{n} V_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i};\ z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i \cdot z_i}{\sum_{i=}^{n} V_i},$$

де $V_i = \dfrac{P_1}{\gamma}$, $\gamma = const$ - щільність, вага одиниці об'єму.

Чисельники мають назву <u>статичних моментів об'єму</u> відносно координатних площин YOZ, XOZ, XOY. У разі, якщо паралельні сили неперервно розподілені по деякій однорідній ($\gamma = const$) площині S, то вага частини P_i пропорційна їх площам S_i (рис. 5.15).

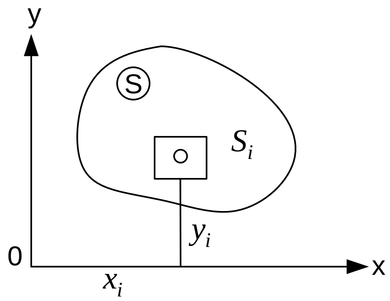


Рис. 5.15

У цьому випадку координати центра ваги площини визначаються за формулами

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i};\ y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i \cdot y_i}{\sum_{i=}^{n} S_i}.$$

Вирази $S_i x_i, S_i y_i$ називаються <u>**статичними моментами площі плоскої фігури**</u> відносно координатних осей OY і OX (рис. 5.15).

<u>**Центр ваги лінії**</u>.

Якщо однорідне тіло має форму тонкого криволінійного стержня з постійною площею S поперечного перерізу, то вага частини P_i пропорційна її довжині l_i. Тоді координати центра ваги стержня визначаються формулами

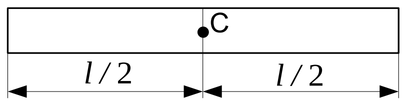
$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i \cdot x_i}{\sum_{i=}^{n} l_i}; \; y_C = \frac{\sum_{i=}^{n} l_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} l_i}; \; z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i \cdot z_i}{\sum_{i=}^{n} l_i}.$$

Чисельники є **статичними моментами лінії** відносно координатних площин YOZ, XOZ, XOY.

Методи визначення координат центра ваги однорідних тіл

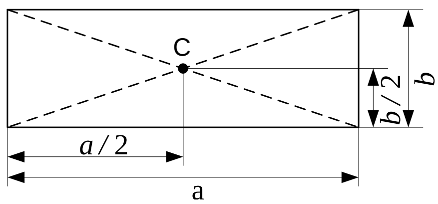
1) Метод симетрії – якщо тіло має площину, вісь або центр симетрії, то його центр ваги лежить відповідно у площині, на осі або в центрі симетрії.

Приклади:



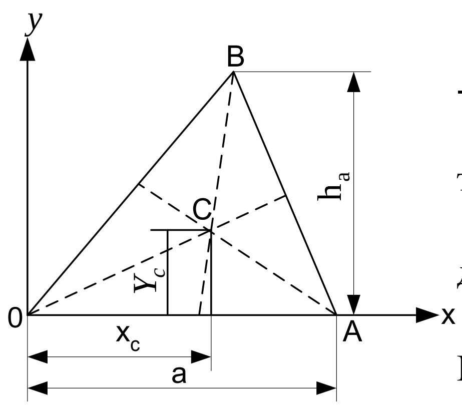
а

а) стержень: центр ваги C розташований у середині стержня (рис. 3.23,а);



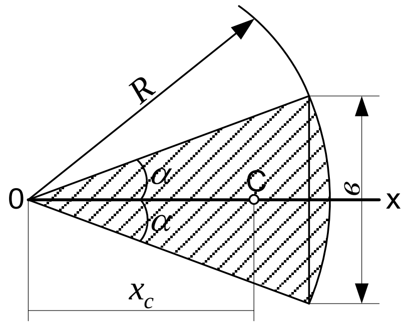
б

б) прямокутник: центр ваги C - точка перетину діагоналей прямокутника (рис.3.23,б);



с

с) трикутник (рис. 5.16,с): центр ваги C - точка перетину медіан трикутника $y_C = \frac{1}{3} h_a$, $x_C = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3)$ де x_1, x_2, x_3 - координати точок O, A, B. Площа $F = \frac{1}{2} a \cdot h_a$;

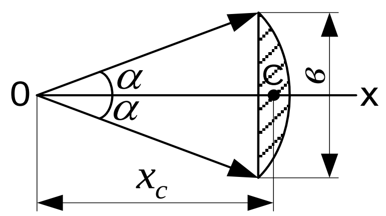


d

d) коловий сектор (рис. 5.16,d): центр ваги C лежить на бісектрисі сектора і його відстань від центра сектора $x_C = \dfrac{2R \cdot sin\alpha}{3\alpha}$.

Площа $F = \alpha \cdot R^2$, тому $x_C = \dfrac{R^2 \cdot b}{3F}$.

Півколо $(\alpha = \dfrac{\pi}{2})$. Площа $F = \dfrac{\pi \cdot R^2}{2}$, координата точки C $x_C = \dfrac{4R}{3\pi}$;



k

Рис. 5.16

k) коловий сегмент (рис. 3.23,k). Площа $F = \dfrac{1}{2}R^2(2\alpha - sin2\alpha)$. Координата точки C $x_C = \dfrac{4R \cdot sin^2\alpha}{3(2\alpha - sin2\alpha)} = \dfrac{b^3}{12F}$,

де кут α має бути виражений у радіанах.

2) **<u>Метод розбивання.</u>** Якщо тіло (або площину) можна розбити на скінчене число елементарний фігур, в яких положення центра ваги відоме, то координати центра ваги визначаються формулами, доведеними вище.

6.ПРАВИЛА ВИБОРУ ЗАВДАНЬ Й ОФОРМЛЕННЯ

До кожного завдання додається 10 рисунків і таблиця (з тим же номером, що і завдання), що містить додаткові до тексту завдання умови. Нумерація рисунків подвійна, при цьому номером рисунка є цифра, що стоїть після крапки. Наприклад, рис. 7.1.4—це рис. 4 до завдання 1 тощо (у тексті завдання при повторних посиланнях на рисунок пишеться просто рис. 4 тощо). Номери умов від 0 до 9 проставлені в 1-му стовпці (або в 1-му рядку) таблиці.

Студент у всіх завданнях вибирає номер рисунка за передостаньою цифрою шифру; а номер умови в таблиці — за останьою; наприклад, якщо шифр закінчується числом 46, то беруться рис. 4 і умови № 6 з таблиці.

Кожне завдання виконується в окремому зошиті (учнівському) або на аркушах А4, сторінки нумеруються. На обкладинці указуються: назва дисципліни, номер роботи, прізвище і ініціали студента, навчальний шифр, факультет і спеціальність.

Розв`язання кожної задачі обов'язково починати на розвороті зошиту (на парній сторінці, починаючи з другої, інакше роботу важко перевіряти). Зверху указується номер завдання, далі робиться креслення (можна олівцем) і записується, що в завданні дане, і що потрібно визначити (текст завдання не переписувати). Креслення виконується з урахуванням умов вирішуваного варіанту завдання; на ньому всі кути, сили, що діють, число тіл й їх розташування на кресленні повинні відповідати цим умовам.

У результаті в цілому ряді завдань креслення вийде більш простим, ніж загальне.

Креслення повинне бути акуратним і наочним, а його розміри повинні дозволяти ясно показати всі сили або вектори швидкості і прискорення тощо; показувати всі ці вектори і координатні осі на кресленні, а також указувати одиниці вимірювання отримуваних величин потрібно обов'язково. Розв`язання завдань необхідно супроводжувати короткими поясненнями (які формули або теореми застосовуються, звідки виходять ті або інші результати тощо) і детально висловлювати весь хід розрахунків. На кожній сторінці слід залишати поля для зауважень рецензента.

Роботи, що не відповідають всім перерахованим вимогам, перевірятися не будуть і повертатимуться для переробки.

До роботи, що висилається на повторну перевірку (якщо вона виконана в іншому зошиті), повинна обов'язково додаватися незарахована робота. На іспиті необхідно представити зараховані за даним розділом курсу роботи, в яких всі відмічені рецензентом погрішності повинні бути виправлені.

При читанні тексту кожного завдання врахувати таке. Більшість рисунків дана без дотримання масштабу. На рисунках до завдань 1 — 2 всі лінії, паралельні рядкам, вважаються горизонтальними, а перпендикулярні рядкам — вертикальними, якщо це в тексті завдань спеціально не обмовляється. Також без обмовок вважається, що всі нитки (вірьовки, троси) є нерозтяжними та невагомими, нитки, перекинуті через блок, по блоку не ковзають, катки і колеса (у кінематиці) котяться площинами без ковзання. Всі зв'язки, якщо не зроблено інших обмовок, вважаються ідеальними.

7. ЗАВДАННЯ ДЛЯ СТУДЕНТІВ

7.1. Завдання № 1

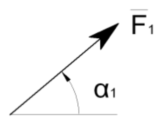
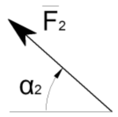
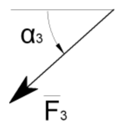
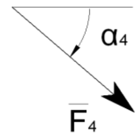
Жорстка рама (рис. 7.1.1. 7.1.3 (1.0—1.9), табл. 7.1) закріплена в точці А шарнірною, а точці В прикріплена або до невагомого стрижня BB_1 або до шарнірної опори на катках; стрижень прикріплений до рами і до нерухомої опори шарнірами.

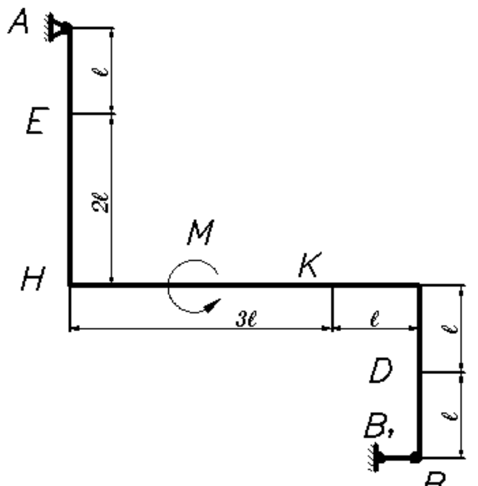
На раму діють пара сил з моментом М = 60 Нм і дві сили, величини яких, напрями і точки застосування вказані в таблиці (наприклад, в умовах №1 на раму діють сила F_1 = 10 Н під кутом 30° до горизонтальної осі, прикладена в точці К, і сила F_4 = 40 Н під кутом 60° до горизонтальної осі, прикладена в точці Н).

Визначити реакції зв'язків в точках А і В, що викликаються заданими навантаженнями. При остаточних підрахунках прийняти l=0,5 м.

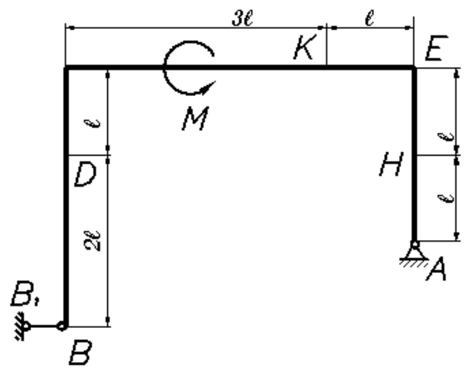
Вказівки. Завдання 1 — на рівновагу тіла під дією плоскої системи сил. Складаючи рівняння рівноваги, врахувати, що рівняння моментів буде простішим (містити менше невідомих), якщо брати моменти щодо точки, де перетинаються лінії дії двох реакцій зв'язків (в даному випадку щодо точки А). При обчисленні моменту сили F часто зручно розкласти її складові $\bar{F}_x$, $\bar{F}_y$, для яких проекції легко обчислюються, зокрема на складові, паралельні координатним осям, і скористатися теоремою Varіньона; тоді $m_A(\overline{F}) = m_A(\overline{F_y}) + m_A(\overline{F_x})$.

Таблиця 7.1

Сила								
Номер умови	$F_1 = 10\ H$		$F_2 = 20\ H$		$F_3 = 30\ H$		$F_4 = 40\ H$	
	Точка застосув.	α_1^0	**Точка застосув.**	α_2^0	**Точка застосув.**	α_3^0	**Точка застосув.**	α_4^0
0	**-**	**-**	**D**	**60**	**E**	**45**	**-**	**-**
1	**K**	**30**	**-**	**-**	**-**	**-**	**H**	**60**
2	**-**	**-**	**H**	**45**	**K**	**30**	**-**	**-**
3	**D**	**60**	**-**	**-**	**-**	**-**	**E**	**30**
4	**-**	**-**	**K**	**30**	**E**	**60**	**-**	**-**
5	**H**	**60**	**-**	**-**	**D**	**30**	**-**	**-**
6	**-**	**-**	**E**	**30**	**-**	**-**	**K**	**45**
7	**D**	**45**	**-**	**-**	**H**	**60**	**-**	**-**
8	**-**	**-**	**H**	**60**	**-**	**-**	**D**	**30**
9	**E**	**30**	**-**	**-**	**-**	**-**	**K**	**60**

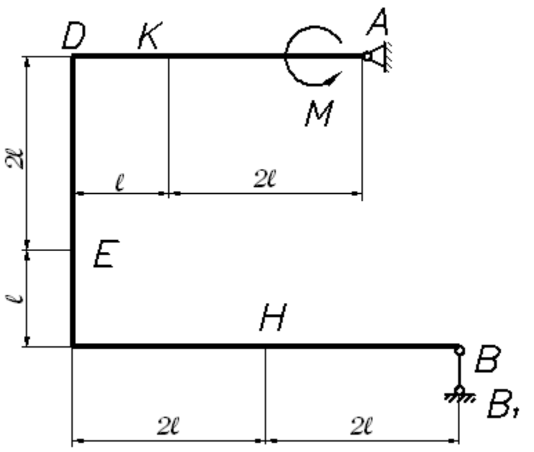


1.0

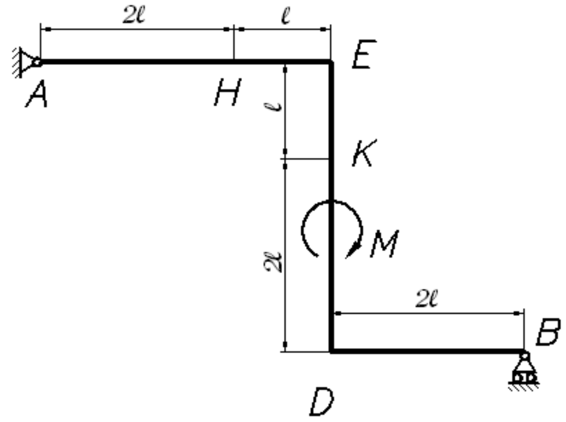


1.1

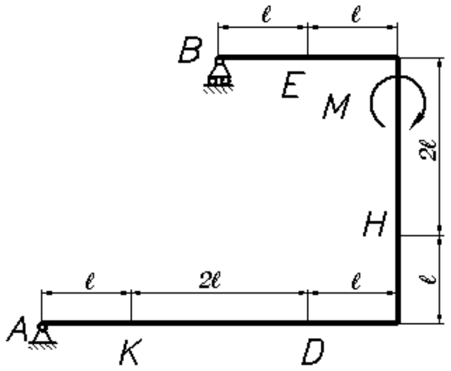
Рис. 7.1.1. Рисунки до завдання № 1



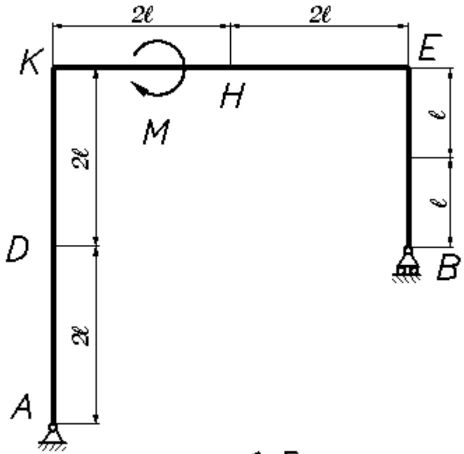
1.2



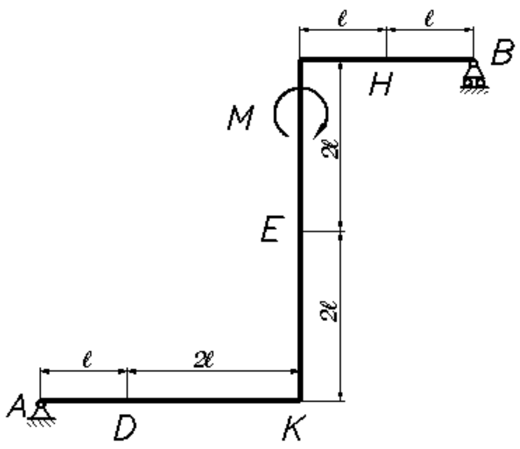
1.3



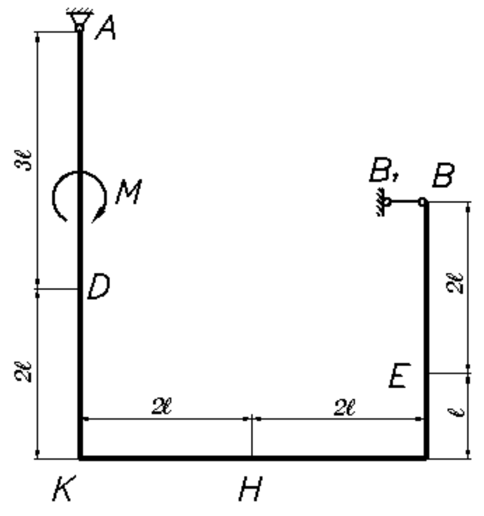
1.4



1.5

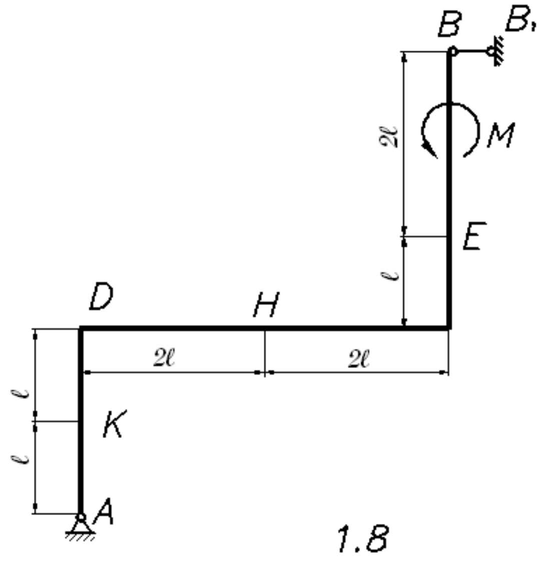


1.6

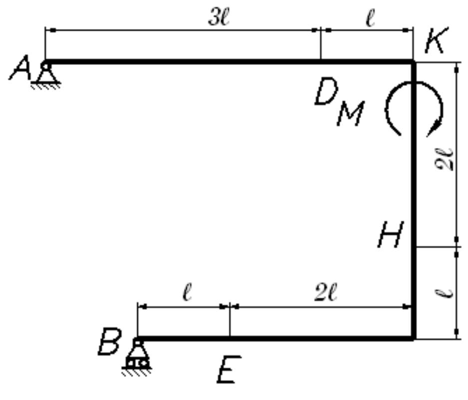


1.7

Рис. 7.1.2. Рисунки до завдання № 1



1.8



1.9

Рис. 7.1.3. Рисунки до завдання № 1

5.2. Приклад виконання завдання № 1

Жорстка пластина АВСД має в точці А нерухому шарнірну опору, а в точці В – рухому шарнірну опору на катках. Всі навантаження, що діють, і розміри показані на рисунку 5.2.1.

Дано: $F_1 = 10H$; $\alpha_1 = 30^0$; $F_4 = 40H$; $\alpha_4 = 60^0$; $M = 60kH \cdot m$; $l = 0{,}5м$.

Визначити: реакції в точках А і В, які викликаються діючими навантаженнями, .

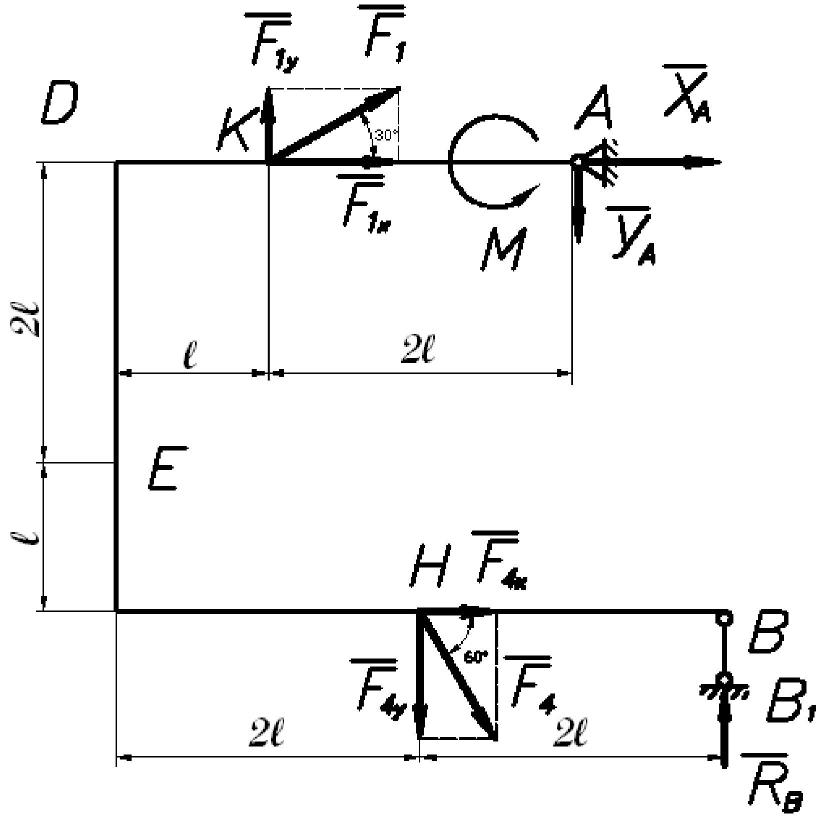


Рис. 7.2.1. Рисунок до прикладу виконання завдання № 2

Розв`язання:

1. Розглянемо рівновагу пластини. Проведемо координатні осі xy і виведемо сили, що діють на пластину: сили $\bar{F}_1$ і $\bar{F}_4$, момент M і реакції зв'язків $\bar{X}_A$, $\bar{У}_A$, $\bar{R}_B$ (реакцію нерухомої шарнірної опори А покуємо двома її складовими, реакція шарнірної опори на катках направлена перпендикулярно опорній площині).

2. Для отримання плоскої системи сил складемо три рівняння рівноваги. При обчисленні моменту сили $\bar{F}$ щодо точки А скористаємося теоремою Варіньона, тобто розкладемо сили $\bar{F}_i$ на складові $\bar{F}_{ix}$, $\bar{F}_{iy}$. Отримаємо:

$$\sum F_{kx}=0, \quad X_A + F_{4x} + F_{1x} = 0, \text{ де}$$

$F_{4x} = F_4 \cdot \cos 60^0$ оскільки $\alpha_4 = 60^0$

$F_{1x} = F_1 \cdot \cos 30^0$ оскільки $\alpha_1 = 30^0$

$\sum$ F$_{ky}$=0, $-Y_A+(-F_{4y})+F_{1y}+R_B=0$ де

$F_{4y}=F_4\cdot\cos30^0$ оскільки $\alpha_4=60^0\Rightarrow 90^0-60^0=30^0$

$F_{1y}=F_1\cdot\cos60^0$ оскільки $\alpha_1=30^0\Rightarrow 90^0-30^0=60^0$

$\sum$ m$_A$ ($\bar{F}_k$)=0, $R_B\cdot 3l+M-F_{1y}\cdot 2l+F_{4y}\cdot 2l+F_{4x}\cdot 3l=0$

Підставивши в складені рівняння числові значення заданих величин і вирішивши ці рівняння, визначимо реакції, які шукали.

$$\begin{cases} X_A+F_{4x}+F_{1x}=0 & (1)\\ -Y_A+(-F_{4y})+F_{1y}+R_B=0 & (2)\\ R_B\cdot 3l+M-F_{1y}\cdot 2l+F_{4y}\cdot 2l+F_{4x}\cdot 3l=0 & (3)\end{cases}$$

$$X_A+40\cdot\frac{1}{2}+10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \qquad (1)$$

$$-Y_A-40\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+10\cdot\frac{1}{2}+R_B=0 \qquad (2)$$

$$R_B\cdot 3\cdot 0{,}5+60-10\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 0{,}5+40\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\cdot 0{,}5+40\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 0{,}5=0 \qquad (3)$$

З рівняння 1: $X_A+28{,}66=0\Rightarrow X_A=-28{,}66\ (H)$

З рівняння 2: $Y_A-29{,}64-R_B=0$

З рівняння 3: $R_B+119{,}64=0 \quad \Rightarrow R_B=-119{,}64(H)$

$$Y_A=R_B+29{,}64$$

$$Y_A=-119{,}64+29{,}64=-90(H)$$

Відповідь: $X_A=-28{,}66\ (H)$ $R_B=-119{,}64(H)$ $Y_A=-90(H)$.

Знаки указують, що сили $\bar{X}_A$, Y_A і R_B направлені протилежно показаним на рисунку.

7.3. Завдання № 2

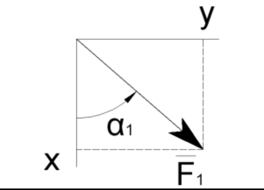
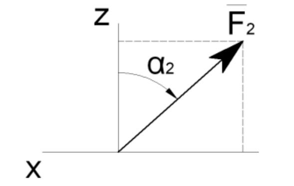
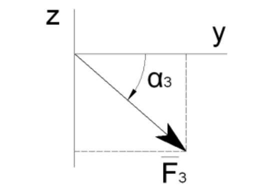
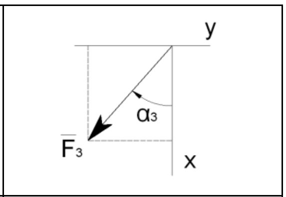
Однорідна прямокутна плита вагою P=3 кН із сторонами AB = $3l$, BC = $2l$ закріплена в точці A сферичним шарніром, а в точці B циліндровим шарніром (підшипником) і утримується в рівновазі невагомим стрижнем CC' (рис. 7.3.1_- . 7.3.2 (2.0— 2.9)).

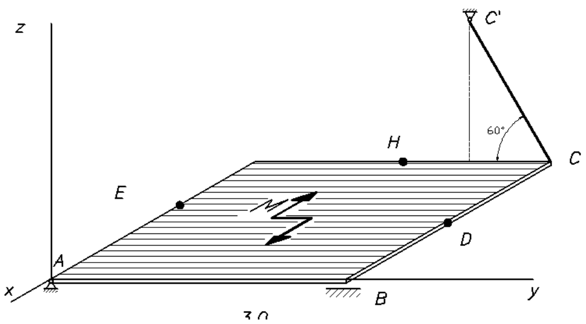
На плиту діють пара сил з моментом M=5 кН·м, яка лежить в площині плити і дві сили. Величини цих сил, їх напрями і точки застосування вказані в табл. 2; при цьому сили $\bar{F}_1$ і $\bar{F}_4$ лежать в площинах, паралельних площині xy, сила $\bar{F}_2$ - в площині, паралельній xz, і сила $\bar{F}_3$ - в площині, паралельній yz. Точки застосування сил (D, E, H) знаходяться в серединах сторін плити.

Визначити реакції зв'язків в точках A, B і C. Прі підрахунках прийняти l= 0,8 м.

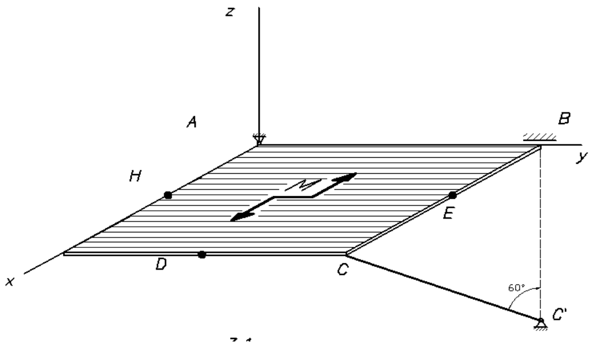
Вказівки. Завдання 2 — на рівновагу тіла під дією просторової системи сил. При її рішенні врахувати, що реакція сферичного шарніра (або підп'ятника) має три складові, а реакції циліндрового шарніра (підшипника) — дві складові, які лежать в площині, перпендикулярній осі шарніра. При обчисленні моментів сили $\bar{F}$ також часто зручно розкласти її складові $\bar{F}'$, $\bar{F}''$ паралельні координатним осям; тоді за теоремою Варіньона $m_x(\bar{F}) = m_x(\bar{F}') + m_x(\bar{F}'')$ і так далі

Таблиця 2

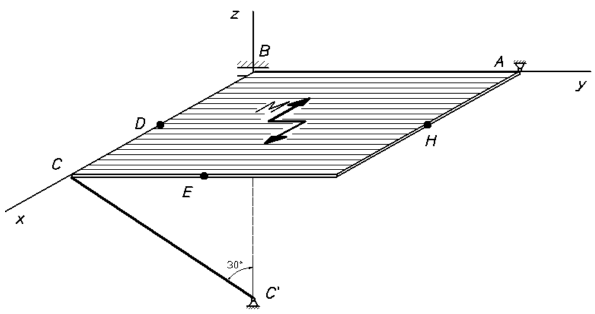
Сила								
Номер умови	$F_1 = 4\ кН$		$F_2 = 6\ кН$		$F_3 = 8\ кН$		$F_4 = 10\ кН$	
	Точка застосів.	α_1^0	**Точка застосув.**	α_2^0	**Точка застосув.**	α_3^0	**Точка застосув.**	α_4^0
0	**D**	**60**	**-**	**-**	**E**	**0**	**-**	**-**
1	**H**	**90**	**D**	**30**	**-**	**-**	**-**	**-**
2	**-**	**-**	**E**	**60**	**-**	**-**	**D**	**90**
3	**-**	**-**	**-**	**-**	**E**	**30**	**H**	**0**
4	**E**	**0**	**-**	**-**	**H**	**60**	**-**	**-**
5	**-**	**-**	**D**	**60**	**H**	**0**	**-**	**-**
6	**-**	**-**	**H**	**30**	**-**	**-**	**D**	**90**
7	**E**	**30**	**H**	**90**	**-**	**-**	**-**	**-**
8	**-**	**-**	**-**	**-**	**D**	**0**	**E**	**60**
9	**-**	**-**	**E**	**90**	**D**	**30**	**-**	**-**



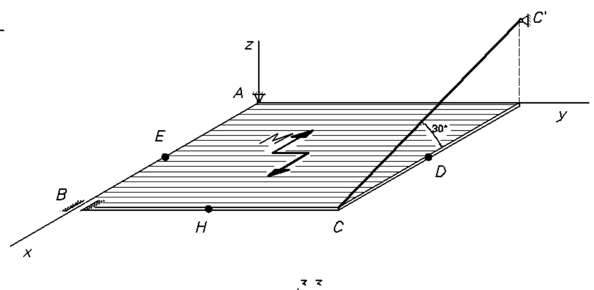
2.0



2.1

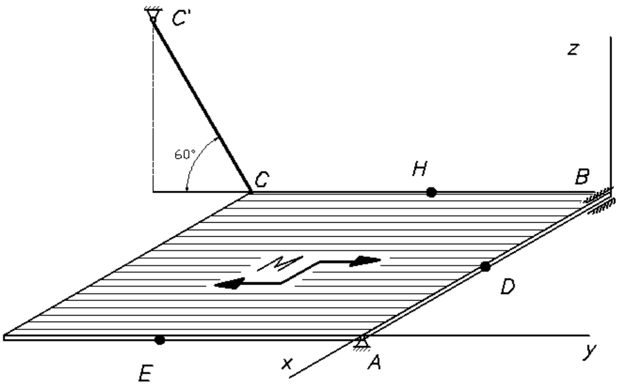


2.2

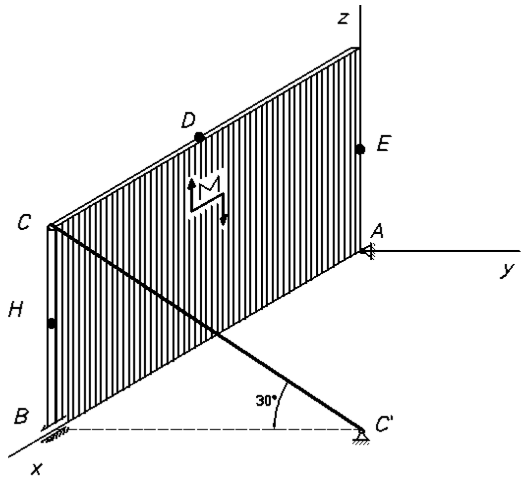


2.3

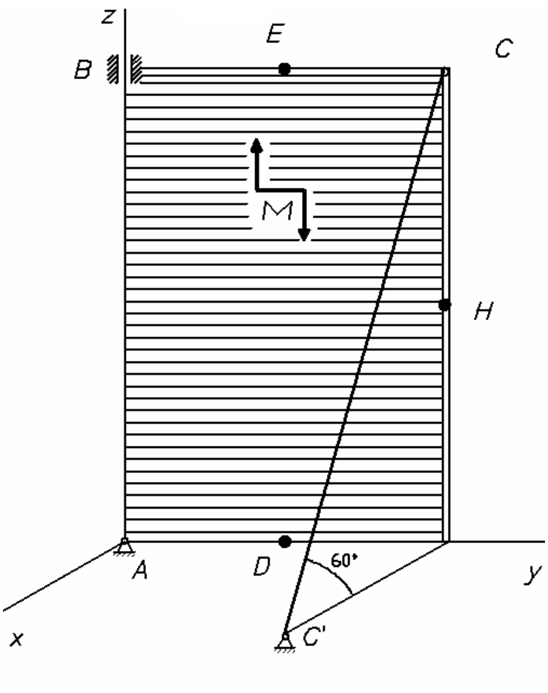
Рис. 7.3.1. Рисунки до завдання № 2



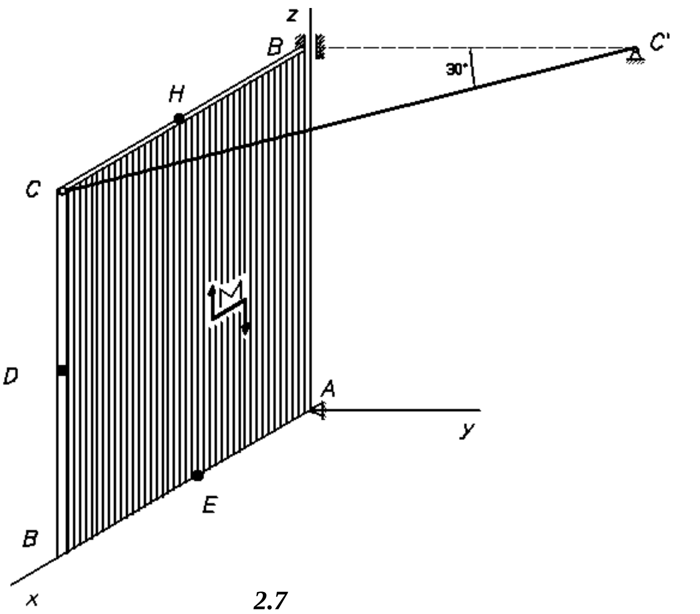
2.4



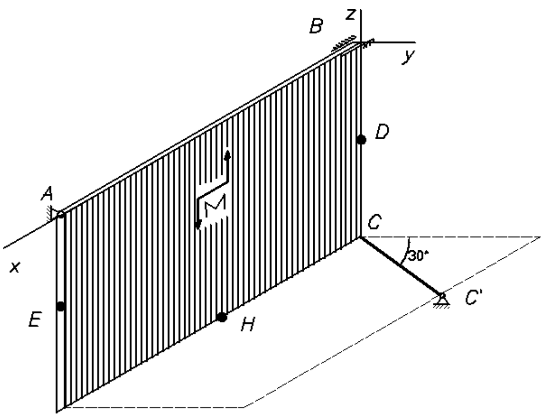
2.5



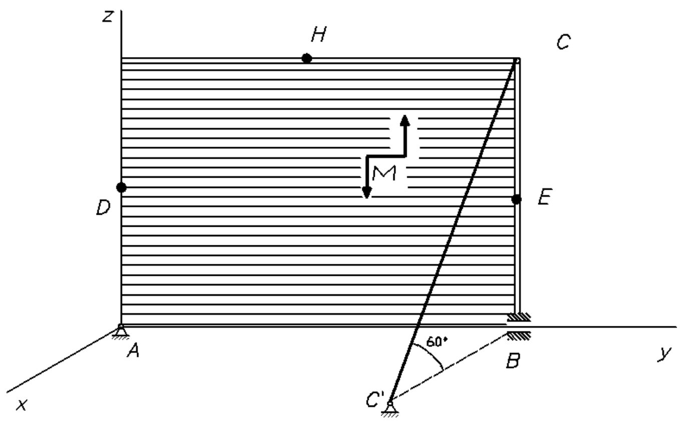
2.6



2.7



2.8



2.9

Рис. 7.3.2. Рисунки до завдання № 2

7.4. Приклад виконання завдання № 2

Вертикальна прямокутна плита вагою Р закріплена сферичним шарніром в точці А, циліндровим (підшипником) в точці В і невагомим стрижнем CC', який лежить в площині, паралельній площині yz. На плиту діють сила $\overline{F}_1$ (у площині xz), сила $\overline{F}_2$ (паралельна осі y) і пара сил з моментом М (у площині плити).

Дано: $P = 3kH$; $M = 5kH \cdot m$; $F_1 = 4kH$; $F_2 = 6kH$; $\alpha_1 = 90^0$; $\alpha_2 = 30^0$; $AB = 3l$; $BC = 2l$; $l = 0{,}8м$.

Визначити: реакції опор А, В і стрижня CC'.

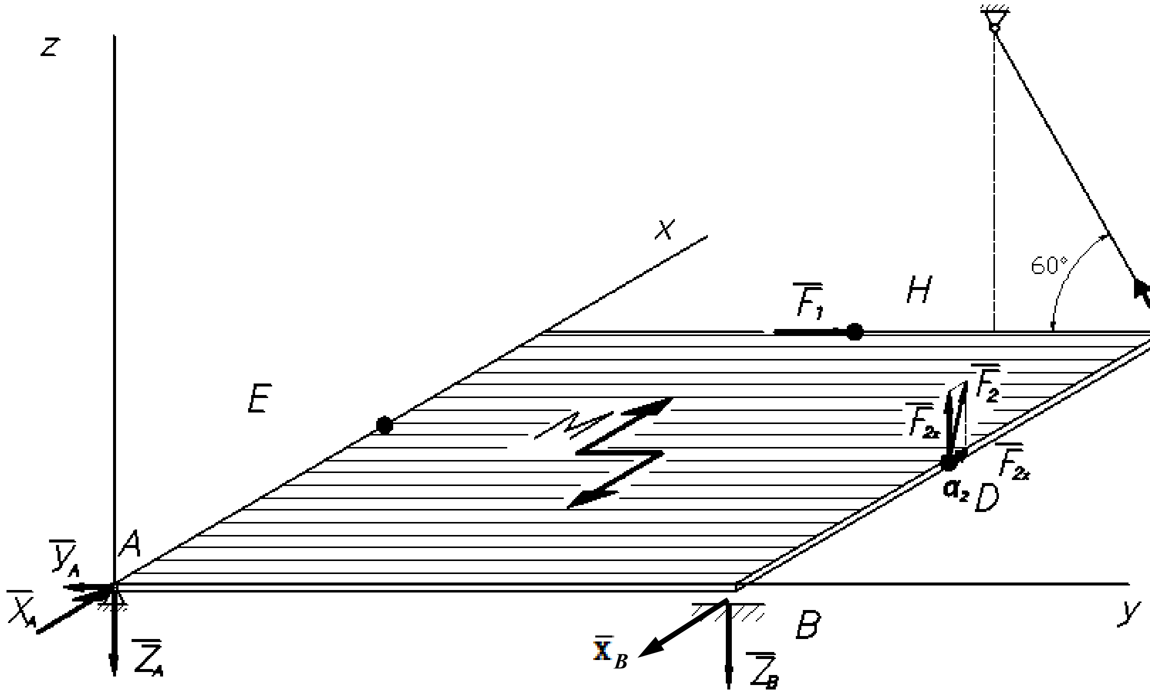


Рис. 7.4.1. Рисунок до прикладу виконання завдання № 2

Розв`язання:

1. Розглянемо рівновагу плити. На неї діють задані сили $\overline{P}, \overline{F}_1, \overline{F}_2$ і пара сил з моментом М, а також реакції зв'язків. Реакцію сферичного шарніра розкладемо на три складові $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{Z}_A$ циліндрового (підшипника) – на дві

складові $\overline{X}_B, \overline{Z}_B$ (у площині, перпендикулярній осі підшипника) реакцію $\overline{N}$ стрижня направимо, припускаючи, що він стислий.

2. Для визначення шести невідомих реакцій складаємо шість рівнянь рівноваги просторової системи сил, що діє на плиту:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A - X_B + F_{2x} = 0, \qquad (1)$$

де $F_{2x} = F_2 \cdot \sin 30^0$

$$\sum F_{ky} = 0, \; F_1 - Y_A - N \cdot \cos 60^0 = 0 \qquad (2)$$

$$\sum F_{RZ} = 0, \; F_{2z} - Z_A - Z_B + N \cdot \sin 60^0 - P = 0 \qquad (3)$$

де $F_{2z} = F_2 \cdot \cos 30^0$

$$\sum \mathrm{m_x}\,(F_k) = 0, \quad F_{2z} \cdot 3l - Z_B \cdot 3l - P \cdot 1{,}5l + N \cdot \sin 60^0 \cdot 3l = 0 \qquad (4)$$

$$\sum \mathrm{m_y}\,(F_k) = 0, \quad N \cdot \sin 60^0 \cdot 2l + F_{2z} \cdot l - P \cdot l = 0 \qquad (5)$$

$$\sum \mathrm{m_z}\,(F_k) = 0, \quad M + F_1 \cdot 2l - F_{2x} \cdot 3l - N \cdot \cos 60^0 \cdot 2l - X_B \cdot 3l = 0 \qquad (6)$$

Розпишемо рівняння детальніше:

$$X_A - X_B + F_2 \cdot \sin 30^0 = 0 \qquad (1)$$

$$F_1 - Y_A - N \cdot \cos 60^0 = 0 \qquad (2)$$

$$F_2 \cdot \cos 30^0 - Z_A - Z_B + N \cdot \sin 60^0 - P = 0 \qquad (3)$$

$$F_2 \cdot \cos 30^0 \cdot 3l - Z_B \cdot 3l - P \cdot 1{,}5l + N \cdot \sin 60^0 \cdot 3l = 0 \qquad (4)$$

$$N \cdot \sin 60^0 \cdot 2l + F_2 \cdot \cos 30^0 \cdot l - P \cdot l = 0 \qquad (5)$$

$$M + F_1 \cdot 2l - F_2 \cdot \sin 30^0 \cdot 3l - N \cdot \cos 60^0 \cdot 2l - X_B \cdot 3l = 0 \qquad (6)$$

З рівняння 5 отримаємо:

$$N = \frac{P \cdot l - F_2 \cdot \cos 30^0 \cdot l}{2l \cdot \sin 60^0} = \frac{3 \cdot 0{,}8 - 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}8}{2 \cdot 0{,}8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = -1{,}27 \; кН.$$

З рівняння 4 отримаємо:

$$Z_B = \frac{F_2 \cdot \cos 30^0 \cdot 3l - P \cdot 1{,}5l + N \cdot \sin 60^0 \cdot 3l}{3l} =$$

$$= \frac{l \cdot (3 \cdot F_2 \cdot \cos 30 - P \cdot 1{,}5 + 3 \cdot N \cdot \sin 60^0)}{3l} = \frac{3 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \cdot 1{,}5 + 3 \cdot (-1{,}27) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = 2{,}6 \; кН.$$

Далі, з рівняння 6:

$$X_B = \frac{M + F_1 \cdot 2l - F_2 \cdot \sin 30^0 \cdot 3l - N \cdot \cos 60^0 \cdot 2l}{3l} = \frac{5 + 4 \cdot 2 \cdot 0{,}8 - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 0{,}8 - (-1{,}27) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0{,}8}{3 \cdot 0{,}8} = 2{,}17 кН.$$

Послідовно вирішуємо рівняння, що залишилися, підставляючи набуті значення:

Рівняння 1: $X_A = X_B - F_2 \cdot \sin 30^0 = 2{,}17 - 6 \cdot \frac{1}{2} = -0{,}83 кН.$

Рівняння 2: $Y_A = F_1 - N \cdot \cos 60^0 = 4 - (-1{,}27) \cdot \frac{1}{2} = 4{,}64 кН.$

Рівняння 3:

$$Z_A = F_2 \cdot \cos 30^0 - Z_B + N \cdot \sin 60^0 - P = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2{,}6 + (-1{,}27) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 = -1{,}5 кН.$$

В і д п о в і д ь: $X_A = -0{,}83\, kH,\ Y_A = 4{,}64 кН,$

$X_B = 2{,}17\, kH,\ Z_B = 2{,}6\, kH,\ N = -1{,}27\, kH.$

Знаки «мінус» указують, що сили $X_{A,}$ N_A і Z_A направлені протилежно тим, які ми вибрали спочатку.

8. ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

8.1. До розділу «Предмет статики. основні визначення і поняття»

1. Що вивчає теоретична механіка?
2. У чому полягає різниця між твердим тілом, що вивчається в теоретичній механіці, й звичайним твердим тілом?
3. На які розділи поділяють теоретичну механіку?
4. Сформулюйте принцип інерції.
5. Якими трьома параметрами визначається сила, що діє на тверде тіло?
6. Які дві системи сил називають зрівноваженими?
7. Чому дія і протидія не є зрівноваженою системою сил?
8. Які кваліфікації сил застосовують у механіці?
9. Які системи сил називають еквівалентними?
10. Охарактеризуйте поняття “рівнодійна”.
11. Назвіть найпростішу зрівноважену систему сил.
12. Яку систему сил можна додавати і відкидати, не змінюючи рухів тіл?
13. Як можна переносити силу, щоб рух твердого тіла не змінився?
14. Чому дорівнює рівнодійна двох сил, що прикладені до однієї точки?
15. У чому полягає принцип тверднення?

16.Що називають в’яззю і що є її реакцією?
17.Знайдіть Internet ресурси, в яких є інформація про теоретичну механіку та розділ статики.

8.2. **До розділу «Момент сили відносно центра та осі. Момент пари сил»**

1. Як визначити момент сили відносно центра?
2. Коли момент сили відносно центра дорівнює нулю?
3. В яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
4. Чому проекція моменту сили на вісь не залежить від положення точки на цій осі?
5. Чому пара сил не має рівнодійної?
6. Який вектор у статиці є прикладеним вектором, ковзним вектором або вільним вектором?
7. Які властивості має пара сил?
8. Чому момент сили відносно центра, або момент пари сил не змінюється при переміщенні сили вздовж лінії її дії?
9. При якому напрямі силі її момент відносно даної осі є найбільшим?

8.3. До розділу «Довільна просторова система сил і умова її рівноваги»

1. Що мають спільного і чим відрізняються головний вектор сил і рівнодійна?
2. Що потрібно зробити, щоб при паралельному переносі сили в новий центр рівновага твердого тіла не порушилась?
3. До яких двох параметрів можна звести довільну просторову систему сил?
4. Чим відрізняються умови рівноваги вільного твердого тіла від умов рівноваги твердого тіла з в’язами?
5. Як саме спрощують рівняння рівноваги твердого тіла під дією системи тільки паралельних сил?
6. Чи зміняться умови рівноваги твердого тіла, до якого прикладена як довільна система сил, так і система пар сил?

8.4. До розділу: «Ферми. Способи визначення зусиль у стержнях ферми»

1. Які конструкції називають фермами?
2. Які припущення застосовують при розрахунках ферм у теоретичній механіці?
3. У чому полягає сутність методу вирізання вузлів при розрахунку зусиль у стержнях ферми?
4. Чи потрібно визначати реакції опор при розрахунку зусиль у стержнях ферми?
5. У чому полягає ідея методу Ріттера розрахунку ферм?

8.5. **До розділу**: «**Центр паралельних сил і центр ваги**»

1. Які властивості має центр паралельних сил?
2. За якими формулами визначаються координати центра паралельних сил?
3. За якими формулами визначаються координати центра ваги тіла?
4. Що називають статичним моментом площі плоскої фігури відносно осі?
5. За якими формулами визначаються центри ваги плоскої фігури?
6. Як визначити положення центра ваги плоскої фігури з отворами?

8.6. ДОДАТКОВІ ПИТАННЯ ДО ВСІХ РОЗДІЛІВ

1. Які обчислення покладаються на поняття “простір” , рух і швидкість в теоретичній механіці?
2. У чому складається предмет теоретичної механіки? Що таке статика?
3. Які дві основні задачі розглядаються в статиці?
4. Які системи сил називаються еквівалентними?
5. Дайте визначення проекції сили на вісь і на площину.
6. Сформулюйте аксіоми статики і наслідки з них.
7. Визначите основні поняття статики: тверде тіло, сила і система сил, вільне і невільне тіло, зв'язки, реакції зв'язків.
8. Скільки сил? Як розкласти силу на складові по двох і по трьох напрямках?
9. Як приводиться система сил, що сходиться, до найпростішого виду?
10. Перелічіть види зв'язків. Вкажіть їх реакції.
11. Як представляється вектор сили в аналітичній формі?
12. Виведіть рівняння рівноваги системи сил, що сходяться.
13. Дайте визначення системи сил, що сходиться.
14. Дайте визначення пари сил. Який рух прагне повідомити тілу пари сил?
15. Як складаються дві рівнобіжні сили, направленні в одну й у різні сторони.
16. Дайте визначення плоскої системи сил.
17. Дайте визначення алгебраїчного моменту сил, коли він дорівнює моменту пари сил.
18. Дайте визначення алгебраїчного моменту пари сил.
19. Викладіть загальний план рішення задач на рівновагу.
20. Сформулюйте теорему про суму алгебраїчних моментів сил пари щодо довільної точки
21. Сформулюйте теорему про додавання моментів пари на площині.
22. Сформулюйте та поясніть теорему про рівнобіжне перенесення сили.

23. Сформулюйте теорему про приведення плоскої системи сил до центра.

24. Дайте визначення для головного вектора і головного моменту плоскої системи сил.

25. Перелічить окремі випадки приведення плоскої системи сил до центра.

26. Сформулюйте теорему про еквівалентність пар на площині, а також наслідок з неї.

27. Поясните реакцію твердого закладення.

28. Одержите залежність між головними моментами щодо двох центрів приведення.

29. Наведіть теорему про момент рівнодіючої просторової системи сил (теорему Варіньона).

30. Сформулюйте і поясніть рівняння рівноваги плоскої системи сил.

31. Наведіть найпростіші приклади розподілених сил, що лежать в одній площині.

32. Дайте визначення векторного моменту сили щодо центра.

33. Сформулюйте і поясніть умову еквівалентності пар, що мають різні площини дії.

34. Дайте визначення просторової системи сил.

35. Дайте визначення моментів сили щодо координатних осей і сформулюйте правила їхнього обчислення. У яких випадках момент сили щодо осі дорівнює нулю?

36. Які задачі називаються статично визначними, а які - статистично невизначеними?

37. Сформулюйте і поясніть теорему про перенесення пари сил у рівнобіжну площину.

38. Сформулюйте і поясніть теорему про суму векторних моментів сил пари.

39. Дайте визначення векторного моменту пари сил і його властивостей.

40. Наведіть формули для головного вектора і головного моменту просторової системи сил. Як вони зображуються геометрично?

41. Сформулюйте і поясніть теорему про приведення просторової системи сил до центра.

42. Сформулюйте теорему про момент рівнодіючої просторової системи сил (теорему Варіньона).

43. Сформулюйте умови рівноваги і виведіть рівняння рівноваги просторової системи сил.

44. Одержить залежність між головними моментами просторової системи сил щодо двох центрів приведення.

45. Розгляньте окремі випадки приведення просторової системи сил: до двох перехресних сил, до рівнодіючої, до пари.

46. Одержите рівняння рівноваги системи рівнобіжних сил.

47. Дайте визначення центра рівнобіжних сил і центра ваги.

9. ЗАВДАННЯ ДЛЯ СТУДЕНТІВ РОЗДІЛ «КІНЕМАТИКА»

9.1. ЗАВДАННЯ № 3

Плоский механізм складається із стрижнів 1-4 і повзуна B, які сполучаються один з одним і з нерухомими опорами O_1 і O_2 шарнірами (рис. 9.1.1 9.1.3 (3.0-3.9)). Довжини стрижнів: l_1=0,4 м, l_2 =0,2 м, l_3 =1,4 м, l_4 =0,8 м. Положення механізму визначається кутами α, β, γ, ψ, θ, які разом з іншими величинами задані в таблиці в стовпці «Знайти». Дугові стрілки на рисунках показують, як при побудові креслення повинні відкладатися відповідні кути, тобто по ходу або проти ходу годинникової стрілки (наприклад, кут γ на рис. 3.0 слід відкласти від стрижня OE проти ходу годинникової стрілки, а на рис. 3.1 — от стрижня AE по ходу годинникової стрілки). Побудову креслення починати із стрижня, напрям якого визначається кутом α; повзун B і його направляють для більшої наочності показати, як в прикладі 3 (див. рис. 3.10). Задану кутову швидкість рахувати направленою проти ходу годинникової стрілки, а задану швидкість υ_B — від точки B до b.

Вказівки. Завдання 3 — на дослідження плоскопаралельного руху твердого тіла. При її розв`язані для визначення швидкостей точок механізму і кутових швидкостей його ланок слід скористатися теоремою про проекції швидкостей двох точок тіла і поняттям про миттєвий центр швидкостей. Застосовувати цю теорему (або це поняття) до кожної ланки механізму окремо.

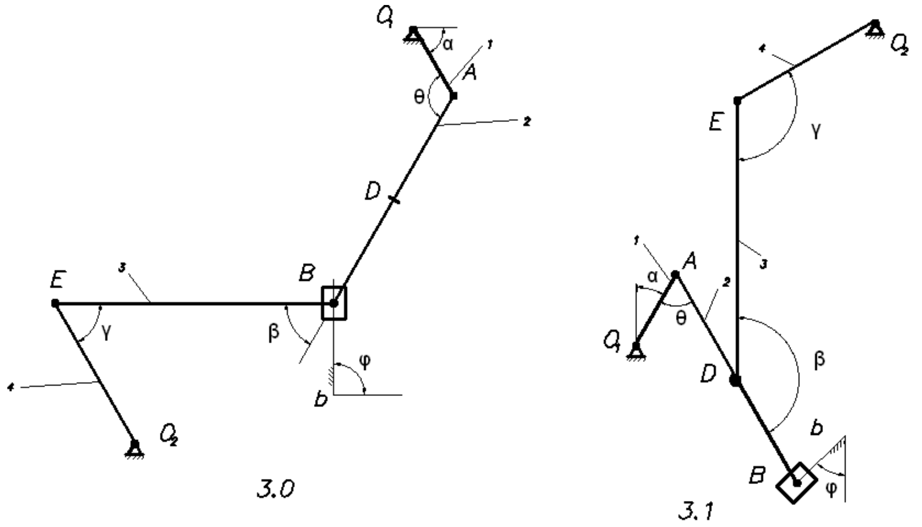


Рис. 9.1.1. Схеми плоского механізму до задачі № 3

Таблиця 3

Номер умови	Кути					Дано			Знайти
	α °	β°	γ°	ϕ °	θ °	ω_1, 1/c	ω_4, 1/c	$\upsilon_в$, м/с	
0	30	150	120	0	60	6	-	-	$\upsilon_в$, υ_e, ω_2
1	60	60	60	90	120	-	3	-	υ_A, υ_D, ω_3
2	0	120	120	0	60	-	-	10	υ_A, υ_E, ω_2
3	90	120	90	90	60	10	-	-	υ_B, υ_E, ω_2
4	0	150	30	0	60	-	4	-	υ_B, υ_A, ω_2
5	60	150	120	90	30	-	-	8	υ_B, υ_E, ω_3
6	30	120	30	0	60	8	-	-	υ_B, υ_E, ω_3
7	90	150	120	90	30	-	5	-	υ_A, υ_D, ω_3
8	0	60	30	0	120	-	-	6	υ_A, υ_E, ω_2
9	30	120	120	90	60	4	-	-	υ_B, υ_E, ω_3

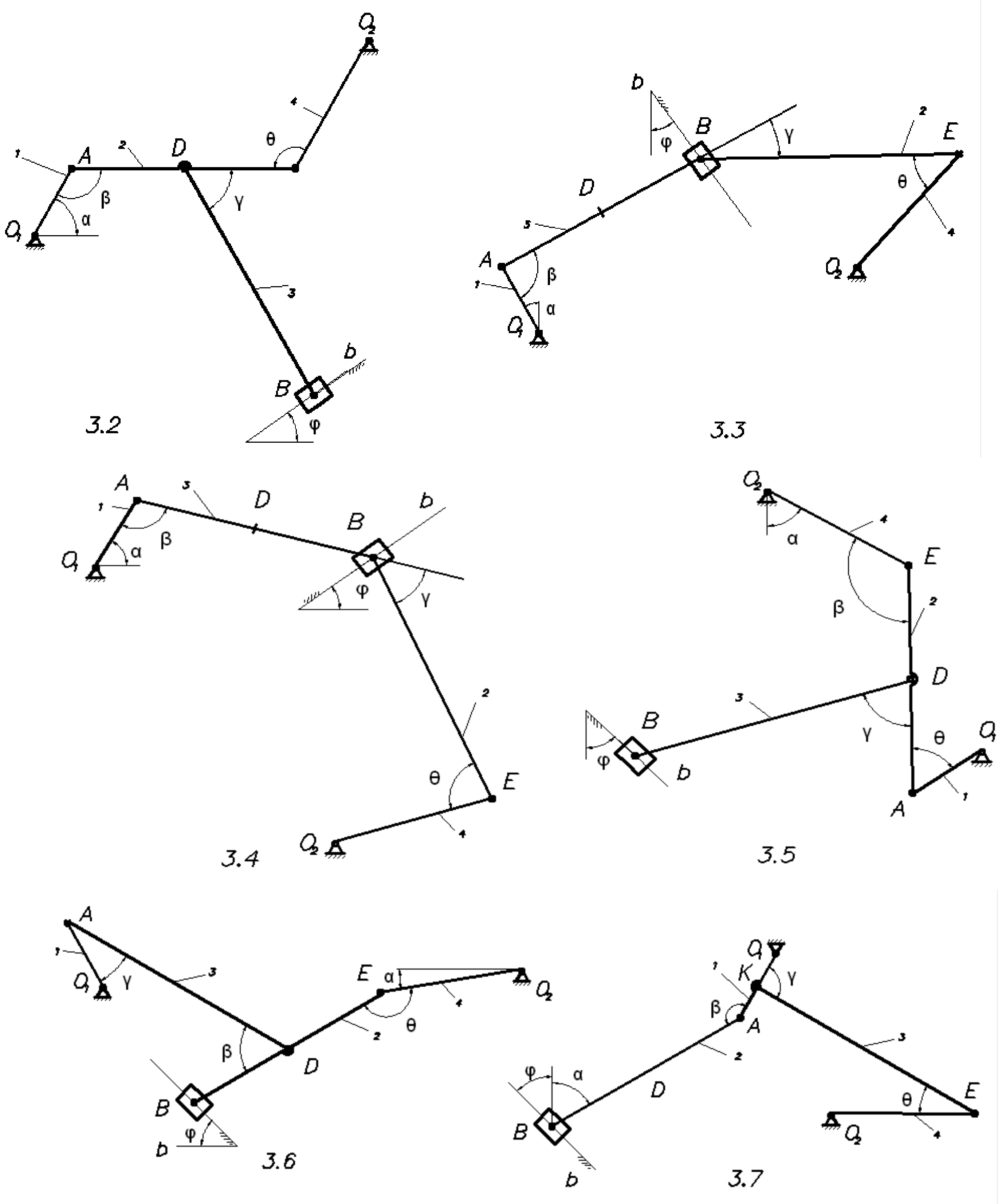


Рис. 9.1.2. Схеми плоского механізму до задачі № 3

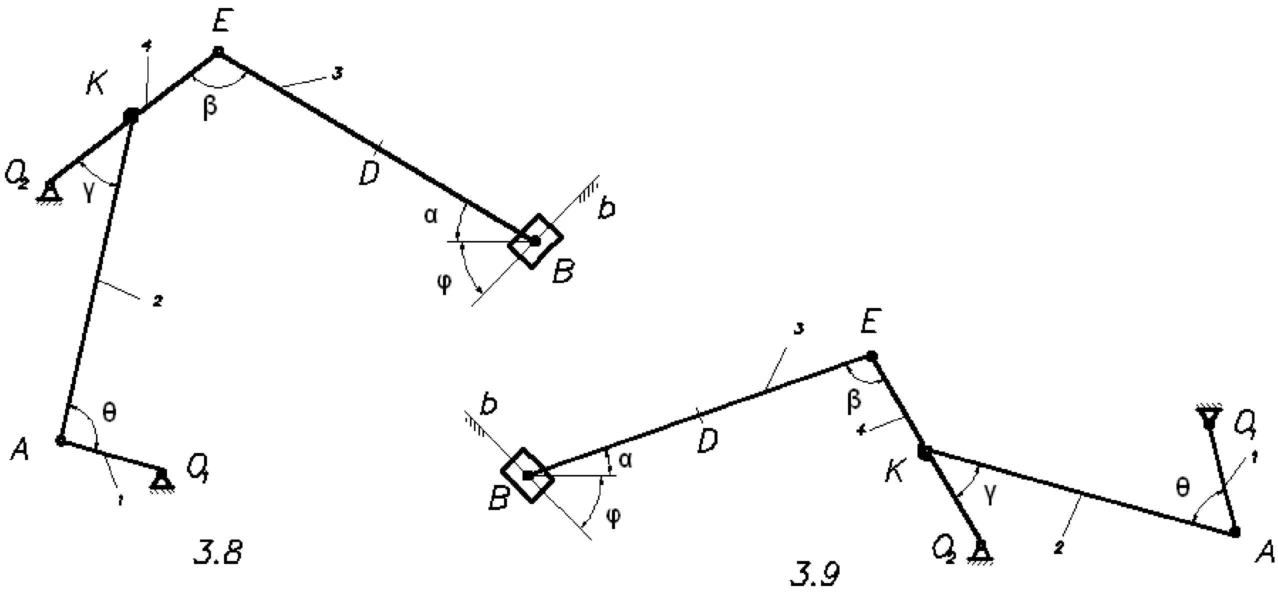


Рис. 9.1.3. Схеми плоского механізму до задачі № 3

9.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ № 3

Механізм складається із стрижнів 1, 2, 3, 4 і повзуна В, які сполучаються один з одним і нерухомими опорами O_1 і O_2 шарнірами.

Дано: $\alpha = 60^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 60^0$, $\varphi = 90^0$, $\Theta = 120^0$, АД=ДВ, $l_1 = 0{,}4\,м$, $l_2 = 1{,}2\,м$, $l_3 = 1{,}4\,м$, $l_4 = 0{,}8\,м$, $\omega_1 = 3c^{-1}$.

Визначити: υ_A, υ_D, ω_2.

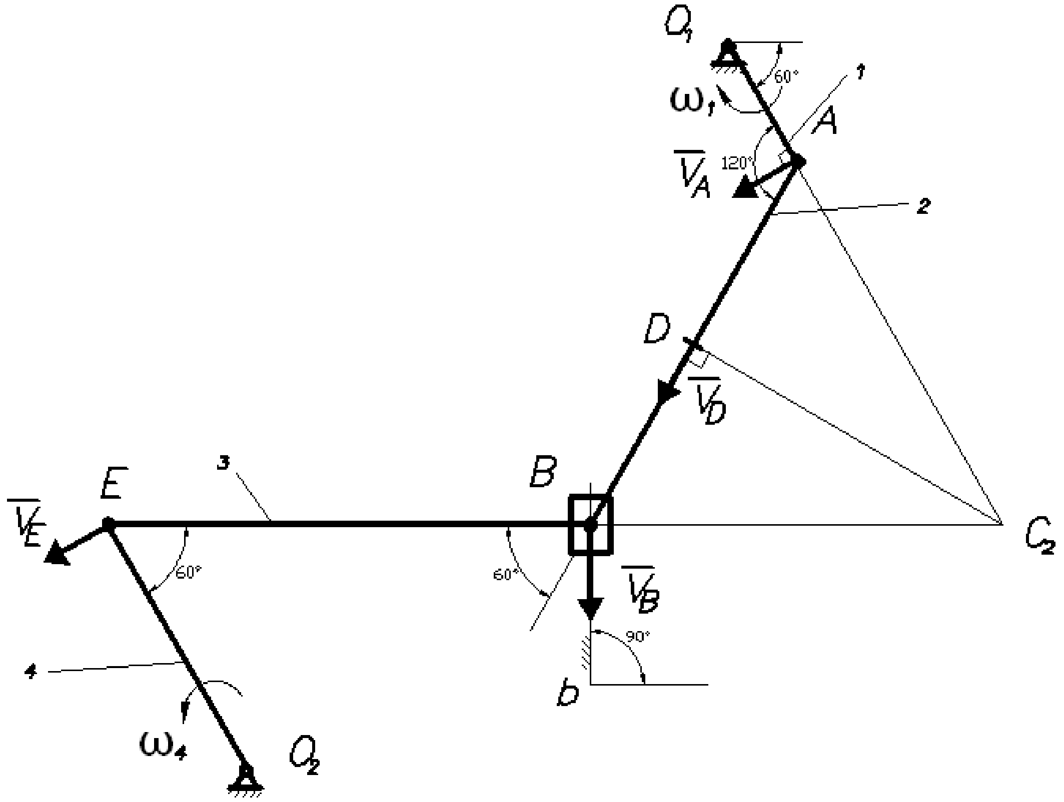


Рис. 9.2.1. Схеми плоского механізму до задачі № 3

1. Відповідно до умови завдання будуємо положення механізму.

2. Визначаємо $V_A = \omega_1 \cdot l_1 = 3 \cdot 0{,}4 = 1{,}2$ м/с. Знаючи напрями швидкостей точок А і В, що належать стрижню АВ, побудуємо миттєвий центр швидкостей (МЦС) стрижня l_2. Це точка C_2, яка лежить на перетині перпендикулярів до $\overline{V}_A$ і $\overline{V}_B$, відновлених з точок А і В. Тоді $\overline{V}_D$ буде направлена перпендикулярно C_2Д убік, вказаний на рисунку, оскільки з теореми про проекцію швидкостей двох точок (стрижня АВ) тіла на пряму, що їх сполучає (пряма АВ) витікає, що проекції швидкостей $\overline{V}_A$ і $\overline{V}_B$ на АВ однакові за величиною і напрямком.

Швидкість $\overline{V}_D$ направлена уздовж стрижня № 2 і дорівнює

$$V_D = V_A \cdot \cos(\Theta - 90^0)$$

$$V_D = V_A \cdot \cos 30^0 = 1{,}2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}04 \text{ м/с.}$$

3. Проекції швидкостей точок А і В на пряму, що їх сполучає, також рівні. З рисунка бачимо:

$$V_A \cdot \cos 30^0 = V_B \cdot \cos(90^0 - 60^0)$$

$$V_B = 1{,}2 \text{ м/с.}$$

4. Визначаємо ω_2. Оскільки МЦС стрижня № 2 відомий (точка C_2), то:

$$\omega_2 = \frac{V_D}{C_2 D} = \frac{V_A}{C_2 A} \text{де } C_2 A = \frac{AD}{\cos 60^0} == \frac{l_2}{2 \cdot \cos 60^0} = \frac{1{,}2}{2 \cdot \cos 60^0} = 1{,}2 \text{ м.}$$

$$\omega_2 = \frac{1{,}2}{1{,}2} = 1\ c^{-1}$$

Відповідь: $V_A = 1{,}2$ м/с $V_D = 1{,}04$ м/с; $W_3 = 1\ c^{-1}$.

9.3. Завдання № 4

Прямокутна пластина (рис. 6.3.1. – 6.3.2. (4.0 — 4.5)) або кругла пластина радіусу R = 60 см (рис. 6.3.2. – 6.3.3. (4.6 — 4.9)) обертається навколо нерухомої осі з постійною кутовою швидкістю ω, заданою в табл. 4 (при знакові мінус напрям ω протилежний вказаному на рисунку). Вісь обертання на рис. 4.0 — 4.3 і 4.8, 4.9 перпендикулярна площині пластини і проходить через точку О (пластина обертається в своїй площині), на рис. 4.4 — 4.7 вісь обертання OO_1 лежить в площині пластини (пластина обертається в просторі).

По пластині уподовж прямої BD (рис. 4.0 — 4.5) або по колу радіусу R, тобто по ободу пластини (рис. 4.6 — 4.9), рухається точка M. Закон її відносного руху, який виражений рівнянням s =AM=f(t) (s — в сантиметрах, t — в секундах), заданий в табл. 4 окремо для рис. 4.0 – 4.5 і для рис. 4.6 – 4.9, при цьому на рис. 4.6 — 4.9 s = AM і відлічується по дузі кола; там же дані розміри *b* і *l*. На всіх рисунках точка M показана в положенні, при якому s=AM > 0 (при s < 0 точка M знаходиться по іншу сторону від точки A).

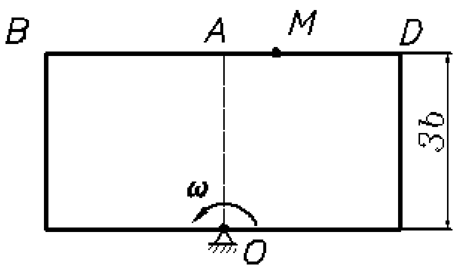
Визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M у момент часу $t_1 = 1$ с.

Вказівки. Завдання 4 — на складний рух точки. При її рішенні рух точки пластиною вважати відносним, а обертальний рух самої пластини — переносним і скористатися теоремами про складання швидкостей і про складання прискорень. Перш ніж проводити розрахунки, слід зобразити точку M на пластині в тому положенні, в якому потрібно визначити її абсолютну швидкість (або прискорення), а не в довільному положенні, показаному на рисунках до завдання.

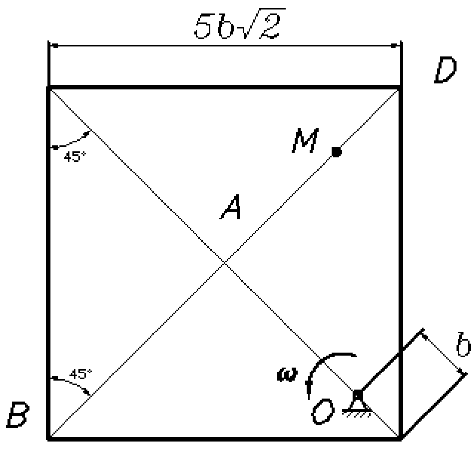
У випадках, що відносяться до рис.4.6, — 4.9, при розв`язані задачі не підставляти числового значення R, поки не будуть визначені положення точки M у момент часу $t_1 = 1$ с і кут між радіусами CM і CA у цей момент.

Таблиця 6.3.1.

Номер умови	ω, 1/с	Рис. 4.0-4.5		Рис. 4.6-4.9	
		b, див.	S=AM=f (t)	*t*	S=AM=f (t)
0	-2	16	60 (t4-3t2)+56	R	$\frac{\pi}{3}R$ (t4—3t2)
1	4	20	60 (t3-2t2)	R	$\frac{\pi}{3}R$ (t3—2t)
2	3	8	80 (2t2-t3)-48	R	$\frac{\pi}{6}R$ (3t—t2)
3	-4	12	40 (t2-3t)+32	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R$ (t3—2t2)
4	-3	10	50 (t3-t)-30	R	$\frac{\pi}{3}R$ (3t2—t)
5	2	12	50 (3t-t2)-64	R	$\frac{\pi}{3}R$ (4t2—2t3)
6	4	20	40 (t-2t3)-40	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R$ (t—2t2)
7	-5	10	80 (t2-t) +40	R	$\frac{\pi}{3}R$ (2t2—1)
8	2	8	60 (t-t3)+24	R	$\frac{\pi}{6}R$ (t—5t2)
9	-5	16	40 (3t2-t4)-32	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R$ (2t2—t3)

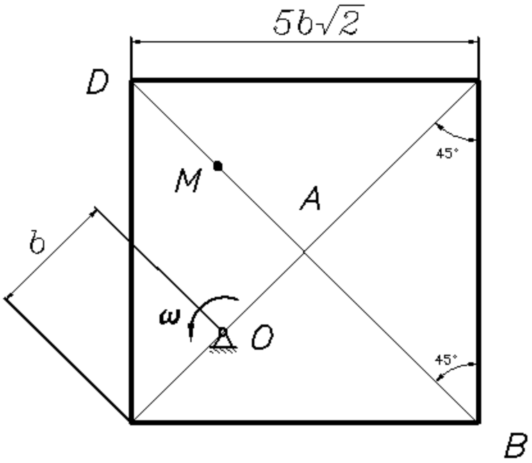


4.0

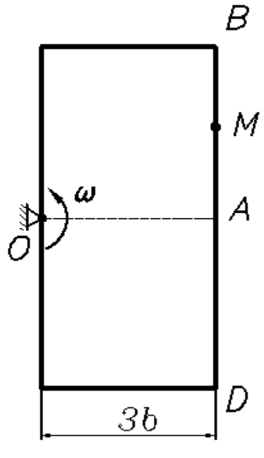


4.1

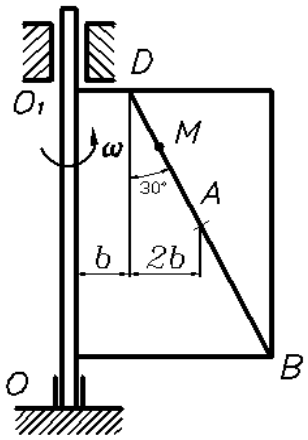
Рис. 9.3.1. Схеми прямокутної пластини до задачі № 3



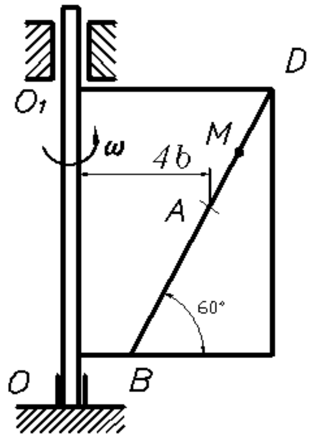
4.2



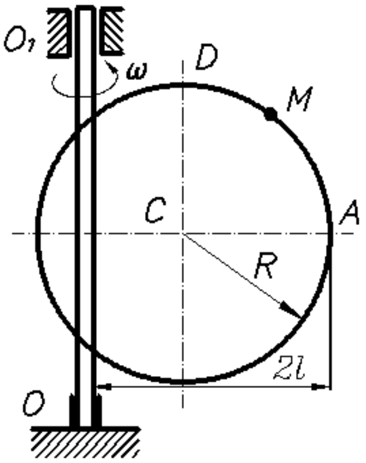
4.3



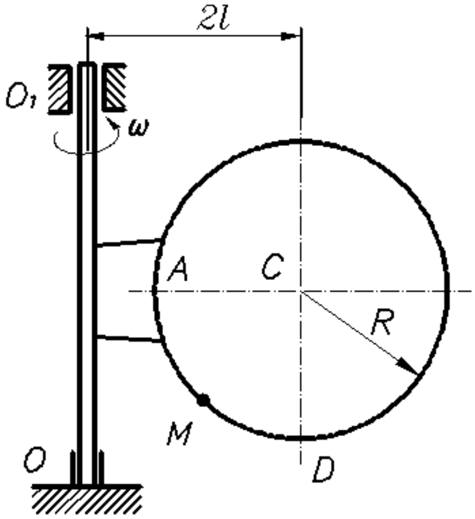
4.4



4.5



4.6



4.7

Рис. 9.3.2. Схеми прямокутної пластини до задачі № 3

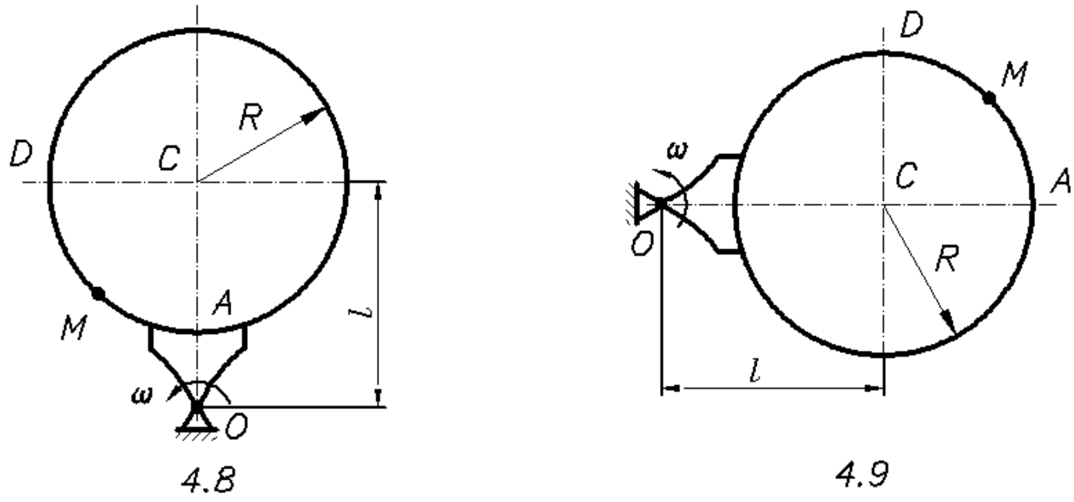


Рис. 6.3.3. Схеми прямокутної пластини до задачі № 3

9.4. Приклад виконання завдання № 4

Куля радіусу R обертається навкруги свого діаметру AB згідно із законом $\varphi = f_1(t)$ (позитивний напрям відліку кута φ показано на рис. 9.4.1а дуговою стрілкою). По дузі великого круга («меридіані») $\widetilde{ADB}$ рухається точка M згідно із законом, позитивний напрям відліку відстані s від A до D.

Дано: R =0,5 м $\varphi = -2t, s = (\frac{\pi R}{6})(7t - 2t^2)$ (φ - у радіанах, s – у метрах, t – у секундах).

Визначити: $v_{аб}$ і $a_{аб}$, у момент часу $t_1 = 1\ c$.

Розв`язання. Розглянемо рух точки M як складне, вважаючи її рух по дузі $\widetilde{ADB}$ відносним ($\widetilde{AB}$ - відносна траєкторія точки), а обертання кулі – переносним рухом. Тоді абсолютна швидкість і абсолютне прискорення точки знайдуться за формулами:

$$\overline{v}_{аб} = \overline{v}_{от} + \overline{v}_{пер}, \qquad \overline{a}_{аб} = \overline{a}_{от} + \overline{a}_{пер} + \overline{a}_{кор},$$

де, в свою чергу

$$\overline{a}_{от} = \overline{a}_{от}^{\tau} + \overline{a}_{от}^{n}, \qquad \overline{a}_{пер} = \overline{a}_{пер}^{\tau} + \overline{a}_{пер}^{n}.$$

Визначимо всі характеристики відносного і переносного рухів.

1. Відносний рух. Цей рух відбувається згідно із законом:

$$S = \breve{AM} = \frac{\pi R}{6(7t - 2t^2)}.$$

Спочатку визначимо, де буде точка М на дузі $\widetilde{ADB}$ в момент часу t_1. Вважаючи в рівнянні (2) $t_1 = 1\ c$, отримуємо $S_1 = \frac{5}{6}\pi R$. Тоді $\angle ACM = \frac{S_1}{6}\pi = 150^0$ або $\angle BCM = 30^0$. Відображуємо на рис. 6.4.1 точку в положенні, визначеному цим кутом.

Тепер знаходимо числові значення $\overline{v}_{от}$, $\overline{a}_{от}^{\tau}$, $\overline{a}_{от}^{n}$:

$$v_{от} = \dot{s} = \frac{\pi R}{6}(7 - 4t), \quad a_{от}^{\tau} = \dot{v}_{от} = -\frac{2}{3}\pi R,$$

$$a_{от}^{n} = \frac{v_{от}^2}{с_{от}} = \frac{v_{от}^2}{R},$$

де $\rho_{от}$- радіус кривизни відносної траєкторії, тобто дуги $\widetilde{ADB}$. Для моменту часу $t_1 = 1\ c$. враховуючи що $R = 0{,}5$ м. отримаємо:

$$v_{от} = \frac{\pi R}{6}3 = \frac{\pi}{4}\ м/с,\ \ a_{от}^{\tau} = -\frac{\pi}{3}м/с, a_{от}^{n} = \frac{\pi^2}{8}м/с^2 \tag{9.3}$$

Знаки показують, що вектор $\overline{v}_{от}$ направлений у бік позитивного відліку відстані s, а вектор $\overline{a}_{от}^{\tau}$ - в протилежну сторону; вектор $\overline{a}_{от}^{n}$ направлений до центру С дуги $\widetilde{ADB}$. Зображаємо всі ці вектори на рис. 6.4.1 а. Для наочності приведемо рис. 6.4.1 б, де дуга $\widetilde{ADB}$ поєднується з площиною креслення.

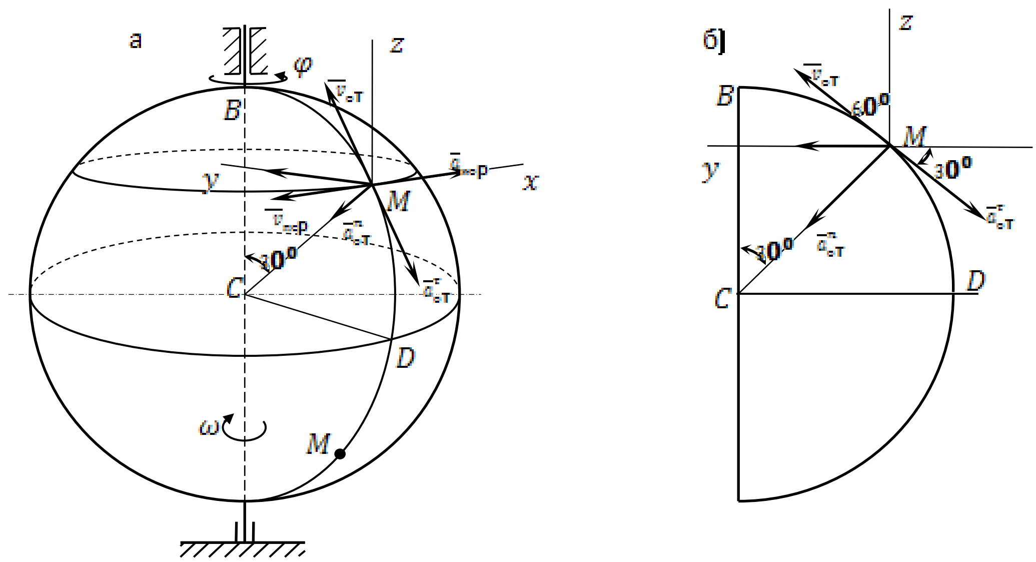


Рис.9.4.1. Рисунок до прикладу задачі № 4

2. Переносний рух. Цей рух (обертання) відбувається згідно із законом $\varphi = -2t$. Знайдемо кутову швидкість ω і кутове прискорення ε переносного обертання $\omega = \varphi = -2, \varepsilon = \omega = 0$ (куля обертається рівномірно). Таким чином:

$$\omega = -2\text{с}^{-1}, \varepsilon = 0. \tag{4}$$

Знак вказує, що напрям ω протилежний позитивному напряму відліку кута φ; відзначимо це на рис. 4.10а відповідною дуговою стрілкою.

Для визначення знайдемо спочатку відстань h точки M від осі обертання $h = R\,sin30^0 = 0{,}25$ м. Тоді у момент часу $t_1 = 1\ c$, враховуючи рівність (4), отримаємо:

$$v_{\text{пер}} = |\omega| h = 0{,}5 \text{ м/с},$$

$$a_{\text{пер}}^{\tau} = \varepsilon \cdot h = 0,\ a_{\text{пер}}^{n} = \omega^2 h = 1 \text{ м/с}^2. \tag{5}$$

Зображуємо на рис. 6.4.1а вектор $\bar{v}_{\text{пер}}$ з урахуванням напряму $\bar{\omega}$ і вектор (направлений до осі обертання).

3. Коріолісове прискорення. Оскільки кут між вектором $\bar{v}_{\text{от}}$ і віссю обертання (вектором $\bar{\omega}$) дорівнює 60^0, то чисельно у момент часу $t_1 = 1\ c$ див. рівняння[(3)і (4)]:

$$a_{\text{кор}} = 2|v_{\text{от}}| \cdot |\omega| \cdot sin60^0 = 2\frac{\pi}{4} \cdot 2\frac{\sqrt{3}}{2} = 2{,}72 \text{м/с}^2. \tag{6}$$

Направлення $\bar{a}_{\text{кор}}$ знайдемо, спроектувавши вектор на плоскість, перпендикулярну осі обертання (проекція направлена також, як вектор $\bar{a}_{\text{пер}}^{n}$) і повернемо потім цю проекцію в сторону $\bar{\omega}$, тобто по ходу часової стрілки, на 90^0. По іншому напрям $\bar{a}_{\text{кор}}$ можна знайти, враховуючи, що $\bar{a}_{\text{кор}} = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_{\text{от}})$. Зображуємо вектор $\bar{a}_{\text{кор}}$ на рис. 4.10а.

Тепер можна обчислити значення, $v_{\text{аб}}$ і $a_{\text{аб}}$.

4. Визначення $v_{аб}$. Оскільки $\overline{v}_{аб} = \overline{v}_{от} + \overline{v}_{пер}$, а вектори $\overline{v}_{от}$ и $\overline{v}_{пер}$ взаємно перпендикулярні (див. рис. 4.10, а), то у момент часу $t_1 = 1\ c$:

$$v_{аб} = \sqrt{v_{от}^2 + v_{пер}^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + (0{,}5)^2} = 0{,}93\ м/с.$$

5. Визначення $a_{аб}$. По теоремі про складання прискорень, оскільки $\overline{a}_{пер}^{\tau} = 0$, буде:

$$\overline{a}_{аб} = \overline{a}_{от}^{\tau} + \overline{a}_{от}^{n} + \overline{a}_{пер}^{n} + \overline{a}_{кор} \tag{7}$$

Для визначення $a_{аб}$ проведемо координатні осі M_{xyz} (рис. 4.10а) та очислимо проекції вектора $\overline{a}_{аб}$ на ці осі. Врахуємо при цьому, що вектор $\overline{a}_{кор}$ лежить на проведеній осі *x*, а вектори $\overline{a}_{от}^{\tau}$, $\overline{a}_{от}^{n}$ і $\overline{a}_{пер}^{n}$ розташовані в площині дуги, $\widetilde{ADB}$, тобто в площині M_{yz} (рис. 4.10а). Тоді, проектуючи обидві частини рівняння (7) на координатні осі та врахувавши одночасно рівняння (3), (5), (6), отримаємо для моменту часу $t_1 = 1\ c$:

$$a_{аб\ x} = a_{кор} = 2{,}72\ м/с^2,$$

$$a_{аб\ x} = a_{пер}^{n} + \overline{a}_{от}^{n} \cdot cos60^0 - |a_{от}^{\tau}| \cdot cos30^0 = 1 + \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = 0{,}71\,м/с^2,$$

$$a_{аб\ z} = -|a_{от}^{\tau}| \cdot cos60^0 - \overline{a}_{от}^{n} \cdot cos30^0 = 1 + \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi^2\sqrt{3}}{16}\right) = -1{,}59\,м/с^2.$$

Звідси знаходимо значення $a_{аб}$ у момент часу $t_1 = 1\ c$:

$$a_{аб} = \sqrt{a_{аб\ x}^2 + a_{аб\ y}^2 + a_{аб\ z}^2} = 3{,}23\,м/с^2.$$

Відповідь: $v_{аб} = 0{,}93\ м/с$, $a_{аб} = 3{,}23\,м/с^2$.

10. ЛІТЕРАТУРА

10.1. Цитована література

1. Теоретична механіка: (Навчально-методичний посібник і завдання для контрольних робіт студентів факультету післядипломної освіти і заочного навчання) Лукіна Е.В., Кузнєцов А.І. – Харків: ХНАМГ, 2005 - 152 с. http://eprints.ksame.kharkov.ua/1674.
2. Автоматизированное проектирование. Статика, динамика, устойчивость. http://www.nipinfor.ru/goods.html?id=128.
3. Нікітин Н.Н. «Курс теоретичної механіки», 5-е вид., М.: Вища шк.,1990. 607с.
4. Тарг. С.М. «Короткий курс теоретичної механіки», 3-е вид., М. Вища шк.,1974. 486с.
5. Тарг. С.М. «Короткий курс теоретичної механіки», 10-е вид., М,: Вища. шк.,1986. 416с.
6. Яблонський А.А., Никифорова В.М. «Курс теоретичної механіки», 6-е вид., М.: Вища. шк.,1984. 343с.
7.

10.2. Основна (яка міститься у бібліотеці факультету)

1. Воронков И.М. Курс теоретической механики. — М., 1954 и последующие издания.
2. Гернет М.М. Курс теоретической механики. — М., 1970 и последующие издания.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. 3-е изд. — М., 1963 и последующие издания.
4. Мещерский Й.В Сборник задач по теоретической механике. — М., 1952 и последующие издания.
5.

10.2. Додаткова (яка міститься у бібліотеці факультету)

1. Айзенберг Т.Б., Воронков И.М, Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике.— М., 1965 и последующие издания.
2. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Ч. I, I I. — М., 1961 и последующие издания.
3. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. 1, 2. — М., 1970, 1971 и последующие издания.
4. Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Курс теоретической механики. — М., 1966 и последующие издания.
5. Яблонский А.А, Никфорова В.М. Курс теоретической механикн. Ч.1. — М., 1962 и последующие издания.
6. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч. I I. — М., 1962 и последующие издания.

7. Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике/Под ред. А.А. Яблонского. — М., 1972 и последующие издания. (Содержит примеры решения задач.)

10.3. Інша література, а також Internet-джерела

1. Бондаренко А.А., Дубінін О.О., Переяславцев О.М. Теоретична механіка Підручник У 2 ч. — Ч. 1: Статика. Кінематика. — К.: Знання, 2004. — 599 с. — (Вища освіта XXI століття). ISBN 966-8148-01-0.
2. Павловський М. А. Теоретична механіка Підручник. К.: Техніка, 2004. 512 с. .ISBN: 966-575-002-X. 2004. http://www.book-e.com/product_2077.html.
3. Теоретична механіка. Динаміка твердого тіла. Принципи механіки . Навчальний посібник / І. В. Кузьо, Т.-Н. М. Ванькович, Я. А. Зінько, М. В. Боженко. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2009. 132 с. ISBN:978-966-553-787-8.
4. Токар А.М. Теоретична механіка. Кінематика: Методи і задачі: Навчальний посібник. — К.: Либідь, 2001. 416 с. ISBN: 966-06-0099-2 EAN: 966-06-0099-2.
5. Цифровой репозиторий Харьковской национальной академии городского хозяйства. http://eprints.ksame.kharkov.ua.
6. Теоретическая и аналитическая механика http://www.khai.edu/page.php?pid=666.
7. Мещерский И. В. Задачи по теоретической механике . Учебник для ВУЗов. — М.: Лань, 2008. 448 с.
8. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: РХД, 2003. 304 с. 1999 ISBN: 5-88711-126-7.
9. EqWorld. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/theoretical.htm.

ЗМІСТ

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання індивідуального завдання
з дисципліни
«**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА**»
Розділи «СТАТИКА», «КИНЕМАТИКА»
(для студентів напряму «Машинобудування»)
ВЕСНЯНИЙ СЕМЕСТР

Укладачи:

Валерій Олександрович Колесніков
Євген Анатолійович Верітельник

Редактор
Техн. редактор
Оригінал-макет

Підписано до друку_________
Формат 60841/16 ×Папір друкар. Гарнітура Times.
Друк офсетний. Усл. печ. л. ____. Уч.-изд. л._________.
Тираж___примірників. Видавництво №____. Замовлення №_____. Ціна договірна.

Видавництво Східноукраїнського національного університету
імені Володимира Даля

Адреса видавництва: 91034, м. Луганськ, кв. Молодіжний, 20а
Телефон: 8 (0642) 41-34-12, факс. 8 (0642) 41-31-60
E-mail: uni@snu.edu.ua http://www.snu.edu.ua