ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Международная научная конференция

Дискретная математика, алгебра и их приложения

14–18 сентября 2015 г.,
г. Минск, Республика Беларусь

Посвящается столетию со дня рождения академика Д. А. Супруненко

Тезисы докладов

МИНСК 2015

УДК 519.1, 512
ББК 22.174 + 22.14
Д 44

Редакторы:
И. Д. Супруненко, В. В. Лепин, О. И. Дугинов

Дискретная математика, алгебра и их приложения: Тез. докл. Междунар.
Д 44 науч. конф. Минск, 14 – 18 сентября 2015 г. — Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2015. — 172 с.

ISBN 978-986-6499-86-2

Сборник содержит тезисы докладов, представленных на международной научной конференции «Дискретная математика, алгебра и их приложения».

ISBN 978-986-6499-86-2

НАИМЕНЬШАЯ ТРИПРЯМОУГОЛЬНАЯ КОНГРУЭНЦИЯ НА СВОБОДНОМ ТРИОИДЕ

Юл. В. Жучок

Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко
площадь Гоголя, 1, Старобельск, 92703, Украина yulia.mih@mail.ru

Ж.-Л. Лодэ и М.О. Ронко [1] ввели понятие триоида. Непустое множество T, снабженное тремя бинарными ассоциативными операциями $\dashv$, $\vdash$ и $\perp$, удовлетворяющими следующие аксиомы: $(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z)$, $(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z)$, $(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z)$, $(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z)$, $(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z)$, $(x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z)$, $(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z)$, $(x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z)$ для всех $x, y, z \in T$, называется триоидом. Если операции $\vdash$ и $\perp$ совпадают, то триоид превращается в димоноид [2, 3]. Если же операции $\dashv$, $\vdash$ и $\perp$ совпадают, то триоид превращается в полугруппу. Таким образом, каждый димоноид и каждая полугруппа могут рассматриваться как триоиды. Примеры триоидов можно найти в [4, 5].

Триоид $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ будем называть прямоугольным триоидом или прямоугольной трисвязкой, если полугруппы $(T, \dashv)$, $(T, \vdash)$ и $(T, \perp)$ являются прямоугольными связками. Класс всех прямоугольных триоидов является подмногообразием многообразия триоидов. Если ρ — конгруэнция на триоиде $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ такая, что $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$ есть прямоугольный триоид, то будем говорить, что ρ — трипрямоугольная конгруэнция.

Рассмотрим конструкцию свободного триоида.

Пусть Y — произвольное непустое множество, $\overline{Y} = \{\overline{x} \,|\, x \in Y\}$, $X = Y \cup \overline{Y}$ и $F[X]$ — свободная полугруппа на X. Пусть далее $P \subset F[X]$ — подполугруппа, которая содержит слова w, в запись которых элемент $\overline{x}$ $(x \in Y)$ входит как минимум один раз. Для каждого $w \in P$ через $\widetilde{w}$ обозначим слово, полученное из w заменой всех букв $\overline{x}$ $(x \in Y)$ на x.

На множестве P определим операции $\dashv$, $\vdash$ и $\perp$ по правилам:

$$w \dashv u = w\widetilde{u}, \quad w \vdash u = \widetilde{w}u, \quad w \perp u = wu$$

для всех $w, u \in P$. Алгебру $(P, \dashv, \vdash, \perp)$ обозначим через $Frt(Y)$.

Предложение. *$Frt(Y)$ — свободный триоид.*

Доказательство этого предложения совпадает с доказательством предложения 1.9 из [1], полученным для свободного триоида ранга 1.

Пусть далее $\omega \in F[X]$ и $w \in Frt(Y)$. Через $\omega^{(0)}$ (соответственно, $\omega^{(1)}$) обозначим первую (соответственно, последнюю) букву слова ω. Положим u — начальное (соответственно, конечное) подслово слова w минимальной длины такое, что $u^{(1)} \in \overline{Y}$ (соответственно, $u^{(0)} \in \overline{Y}$). В этом случае $\widetilde{u^{(1)}}$ (соответственно, $\widetilde{u^{(0)}}$) будем обозначать через $w^{[0]}$ (соответственно, $w^{[1]}$).

Определим отношение γ на множестве $Frt(Y)$, полагая

$$w_1 \, \gamma w_2 \;\Leftrightarrow (\widetilde{w_1}^{(0)}, w_1^{[0]}, w_1^{[1]}, \widetilde{w_1}^{(1)}) = (\widetilde{w_2}^{(0)}, w_2^{[0]}, w_2^{[1]}, \widetilde{w_2}^{(1)})$$

для всех $w_1, w_2 \in Frt(Y)$.

Следующая теорема характеризует наименьшую трипрямоугольную конгруэнцию на свободном триоиде $Frt(Y)$.

Теорема. *Отношение γ является наименьшей трипрямоугольной конгруэнцией на свободном триоиде $Frt(Y)$.*

Кроме этого, в терминах трисвязок подтриоидов [5] описано строение свободных триоидов.

Литература

1. Loday J.-L., Ronco M. O. *Trialgebras and families of polytopes* // Contemp. Math. 2004. V. 346. P. 369–398.
2. Loday J.-L. *Dialgebras* // In: Dialgebras and related operads. Lect. Notes Math. Springer-Verlag, Berlin. 2001. V. 1763. P. 7–66.
3. Zhuchok A. V. *Dimonoids* // Algebra and Logic. 2011. V. 50, № 4. P. 323–340.
4. Zhuchok A. V. *Semiretractions of trioids* // Ukr. Math. J. 2014. V. 66, № 2. P. 218–231.
5. Zhuchok A. V. *Tribands of subtrioids* // Proc. Inst. Applied Math. and Mech. 2010. V. 21. P. 98–106.

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ АБЕЛЕВОЙ И НИЛЬПОТЕНТНОЙ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

В.И. Зенков

Институт математики и механики УрО РАН
С.Ковалевской 16, 620990 Екатеринбург, Россия
v1i9z52@mail.ru

Пусть G — конечная группа, A — абелева подгруппа и B — нильпотентная подгруппа из G. Ранее автором [1, теорема 1] было доказано, что для любых абелевых подгрупп A и B из G минимальные по включению пересечения вида $A\bigcap B^g$, где $g \in G$, лежат в $F(G)$, где $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G. Но уже пример симметрической группы $G = S_4$, где A — абелева подгруппа порядка 4, не лежащая в $F(G)$, а $B \in \mathrm{Syl}_2(G)$, показывает, что минимальные по включению пересечения вида $A\bigcap B^g$ лежат в $F(G)$, а если рассмотреть минимальные по включению пересечения вида $B\bigcap A^g$, то не все они лежат в $F(G)$. Этот пример показывает, что для рассмотрения минимальных по включению пересечений абелевой и нильпотентной подгрупп важен порядок, в котором записаны подгруппы. Но существует более сложный пример (см. пример 5) группы G, в котором даже в случае записи минимальных по включению пересечений в виде $A\bigcap B^g$ не все они лежат в $F(G)$. Однако во всех указанных примерах существует некоторое минимальное по включению пересечение вида $A\bigcap B^g$, которое лежит в $F(G)$. Как показывает следующая теорема, это явление имеет место в любой разрешимой конечной группе.

Теорема. *Пусть G — разрешимая конечная группа, A — абелева и B — нильпотентная подгруппы из G. Тогда в группе G существует элемент g такой, что $A\bigcap B^g \le F(G)$.*

Пример 1. $G = E_9 \leftthreetimes D_8$ с точным действием D_8 на E_9. Пример показывает, что ослабить условие абелевости группы A в теореме до нильпотентности невозможно с сохранением заключения, так как при $A = B \simeq D_8$ имеем $A\bigcap B^g \ne 1$ для любого элемента g из G.

Пример 2. $G = \mathrm{Aut}(L_3(2))$. В этой группе при $A = B \in \mathrm{Syl}_2(G)$ имеем $A\bigcap B^g \ne 1$ для любого элемента g из G. Таким образом, и в неразрешимых группах условие абелевости A нельзя ослабить до нильпотентности с сохранением заключения теоремы.

Покажем, что условие нильпотентности подгруппы B также невозможно ослабить до сверхразрешимости с сохранением заключения теоремы.

Пример 3. Группа $G = S_3$ сверхразрешима. Пусть $A \simeq S_2 \in \mathrm{Syl}_2(G)$, $B = G$. Тогда $A\bigcap B^g = A \not\le F(G)$ для любого элемента g из G.

Пример 4. $G = A_5$, $A \in \mathrm{Syl}_2(G)$, $B \simeq Z_5 \leftthreetimes Z_2$. Тогда $A\bigcap B^g \ne 1$ для любого элемента g из G.

Эти примеры показывают, что условия, наложенные в теореме на подгруппы A и B невозможно существенно ослабить как в разрешимом, так и в неразрешимом случае с сохранением заключения теоремы.

Следующий пример показывает, что в некоторых случаях, рассматриваемых в условиях теоремы, для абелевой подгруппы A существует подгруппа B^g такая, что $A\bigcap B^g \ne 1$ — минимальное по включению пересечение и $A\bigcap B^g \not\le F(G)$.

СОДЕРЖАНИЕ

Алгебра и алгебраическая геометрия

Научное издание

Дискретная математика, алгебра и их приложения

Тезисы докладов

Редакторы *И. Д. Супруненко, В. В. Лепин, О. И. Дугинов*
Компьютерная верстка *О. И. Дугинов*

Подписано в печать 26.8.2015 г.
Формат $60 \times 84\,{}^{1}/_{8}$. Усл. печ. л. 20,46. Уч.-изд. л. 18,32. Тираж 110 экз. Заказ № 3.

Отпечатано на ризографе Института математики НАН Беларуси.
Издатель и полиграфическое исполнение:
Институт математики НАН Беларуси.
Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/257 от 2 апреля 2014 г.
200072, Минск, ул. Сурганова, 11.