

**С. В. Кара-Мурза
Е. Г. Чернобай**

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

**Министерство образования и науки Украины
Государственное учреждение
«Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко»**

С. В. Кара-Мурза, Е. Г. Чернобай

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Учебное пособие
для самостоятельной работы студентов
специальности 6.040203 «Физика»*

**Луганск
ГУ «ЛНУ имени Тараса Шевченко»
2014**

УДК 531/534 (075.8)

ББК 22.2я73

К47

Рецензенты

Арлинский Ю. М. - доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Восточноевропейского национального университета имени Владимира Даля.

Троицкая Е. П. - доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела теории магнетизма и фазовых переходов Донецкого физико-технического института имени А. А. Галкина НАН Украины.

Савченко С. В. - доктор педагогических наук, профессор, первый проректор Луганского национального университета имени Тараса Шевченко.

К47 Классическая механика : учеб. пособие для самостоятельной работы студ. спец. 6.040203 «Физика». / сост. : С. В. Кара-Мурза, Е. Г. Чернобай ; Гос. учрежд. «Луган. нац. ун-т имени Тараса Шевченко». – Луганск : Изд-во ГУ «ЛНУ имени Тараса Шевченко», 2014. – 120 с.

В пособии изложены основные теоретические сведения по основным разделам классической механики. В каждом разделе подробно рассмотрены примеры решения задач и задания для аудиторного и самостоятельного выполнения, снабженными ответами.

Предназначено для студентов специальности 6.040203 «Физика», студентов физических специальностей, а также будет полезно для преподавателей высших учебных заведений, колледжей, лицеев, гимназий, школьных учителей.

УДК 531/534 (075.8)

ББК 22.2я73

*Рекомендовано к печати учебно-методическим советом
Луганского национального университета имени Тараса Шевченко
(протокол № 6 от 05 февраля 2014 года)*

© Кара-Мурза С. В., Чернобай Е. Г., 2014
© ГУ «ЛНУ имени Тараса Шевченко», 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
1. Кинематика.....	7
1.1. Краткие теоретические сведения.....	7
1.1.1. Кинематические характеристики движения.....	7
1.1.2. Координатный способ описания движения точки.....	7
1.1.3. Естественный способ описания движения.....	9
1.1.4. Движение точки в произвольно движущейся системе отсчета.....	9
1.1.5. Кинематика твердого тела.....	10
1.2. Практикум по решению задач.....	11
1.2.1. Примеры решения задач.....	12
1.2.2. Задания для аудиторного и самостоятельного выполнения.....	17
2. Динамика точки и системы точек.....	20
2.1. Динамика точки.....	20
2.1.1. Краткие теоретические сведения.....	20
2.1.2. Практикум по решению задач.....	21
2.1.2.1. Примеры решения задач.....	21
2.1.2.2. Задания для аудиторного и самостоятельного выполнения.....	26
2.2. Теоремы динамики точки и системы точек.....	29
2.2.1. Краткие теоретические сведения.....	29
2.2.2. Практикум по решению задач.....	32
2.2.2.1. Примеры решения задач.....	32
2.2.2.2. Задания для аудиторного и самостоятельного выполнения.....	37
2.3. Задачи динамики системы свободных точек.....	40
2.3.1. Краткие теоретические сведения.....	40
2.3.1.1. Упругие столкновения частиц.....	40
2.3.1.2. Распад частиц.....	41
2.3.1.3. Задача двух тел. Движение в центральном поле.....	42
2.3.1.4. Задача Кеплера.....	43
2.3.1.5. Классическая задача рассеяния.....	44
2.3.2. Практикум по решению задач.....	45
2.3.2.1. Примеры решения задач.....	45
2.3.2.2. Задания для аудиторного и самостоятельного выполнения.....	48
3. Динамика твердого тела.....	52
3.1. Краткие теоретические сведения.....	52
3.1.1. Кинематическое описание.....	52
3.1.2. Импульс твердого тела.....	53
3.1.3. Кинетическая энергия и момент инерции твердого тела.....	53
3.1.4. Момент импульса твердого тела.....	55

3.1.5. Теоремы динамики вращающегося твердого тела.....	55
3.1.6. Плоскопараллельное движение.....	56
3.2. Практикум по решению задач.....	56
3.2.1. Примеры решения задач.....	56
3.2.2. Задания для аудиторного и самостоятельного выполнения.....	60
4. Основы аналитической механики.....	64
4.1. Краткие теоретические сведения.....	64
4.2. Практикум по решению задач.....	67
4.2.1. Использование принципа виртуальных перемещений для исследования равновесия механических систем...	67
4.2.1.1. Примеры решения задач.....	67
4.2.1.2. Задания для аудиторного и самостоятельного выполнения.....	70
4.2.2. Функция Лагранжа. Уравнения Лагранжа.....	72
4.2.2.1. Примеры решения задач.....	72
4.2.2.2. Задания для аудиторного и самостоятельного выполнения.....	78
5. Малые колебания механических систем.....	81
5.1. Краткие теоретические сведения.....	81
5.1.1. Линейный гармонический осциллятор.....	81
5.1.2. Малые колебания систем с произвольным числом степеней свободы.....	83
5.2 Практикум по решению задач.....	84
5.2.1. Примеры решения задач.....	84
5.2.2. Задания для аудиторного и самостоятельного выполнения.....	89
Литература.....	92
Ответы к заданиям.....	93
Приложения.....	101
Приложение 1. Векторы и тензоры. Алгебра векторов и тензоров.....	101
Приложение 2. Криволинейные ортогональные координаты. Аналитические операции в криволинейных ортогональных координатах.....	108
Приложение 3. Элементы вариационного исчисления. Принцип наименьшего действия.....	112
Приложение 4. Уравнение колебаний и его решение	115
Предметный указатель.....	116
Именной указатель.....	118

ВВЕДЕНИЕ

Классическая механика является базовой теорией, лежащей в основе всех современных физических теорий, в том числе и основополагающих, – классической электродинамики, квантовой механики, термодинамики и статистической физики. Поэтому к изучению классической механики должно уделяться повышенное внимание. Учебное пособие для самостоятельной работы студентов физических специальностей «Классическая механика» предназначено для эффективного усвоения студентами соответствующего теоретического курса, приобретения навыков, необходимых для дальнейшего изучения дисциплин теоретической физики и дисциплин профессионально ориентированного цикла.

Пособие состоит из пяти глав, отражающих содержание основных разделов классической механики. Каждая из глав начинается с кратких, но достаточно полных, теоретических сведений, снабжено примерами решения задач и заданиями для аудиторного и самостоятельного выполнения, с ответами к ним. Здесь же представлены рекомендации относительно решений заданий, предназначенных для аудиторного выполнения и в качестве домашних заданий. Кроме того, пособие содержит приложения, список рекомендуемой литературы, предметный и именной указатели.

Первая глава пособия «Кинематика» посвящена способам описания движения материальной точки и твердого тела. Практикум по решению задач кинематики содержит три примера решения задач и 29 заданий для аудиторного и самостоятельного выполнения. Практикум предваряется рекомендациями относительно последовательности действий при решении задач кинематики.

Вторая глава пособия «Динамика точки и системы точек» является центральной частью дисциплины «Классическая механика». Здесь рассматриваются законы и теоремы динамики точки и системы точек, основные классические задачи движения системы свободных точек. Так же, как и в кинематике, практикум по решению задач содержит рекомендации к порядку действий, примеры решения задач (13 примеров) и 63 задания для аудиторного и самостоятельного выполнения. Рекомендованы номера заданий для аудиторного выполнения и в качестве домашних заданий.

В третьей главе пособия «Динамика твердого тела», аналогичной по структуре первым двум главам, рассматриваются способы описания вращательного движения твердого тела, уделяется серьезное внимание понятию тензора момента инерции, теоремам динамики твердого тела, вращению относительно неподвижной оси и плоскопараллельному движению. Эта глава представлена 4-мя примерами решения задач и 35 заданиями для аудиторного и самостоятельного выполнения.

Особое место в дисциплине «Классическая механика» и, соответственно, в пособии занимает четвертая глава «Основы аналитической механики». Эта особенность связана с тем, что аналитическая механика представляет собой ряд математических приемов, широко используемых в физических теориях, но являющихся принципиально новыми для студентов. В связи с этим в тексте

теоретических сведений этой главы выделены все новые понятия, лежащие в основе аналитической механики, по сути, являющейся новой математической дисциплиной. Практикум по решению задач и здесь содержит подробные рекомендации к решению заданий, включает 7 примеров и 30 заданий для аудиторного и самостоятельного выполнения, номера заданий, рекомендованных для решения на занятиях и выдаваемых в качестве домашних заданий.

Последняя пятая глава пособия посвящена исследованию малых колебаний одномерных систем и систем с произвольным числом степеней свободы. Структура главы повторяет структуру каждой из описанных глав. Практикум содержит 3 примера и 15 заданий для аудиторных занятий и самостоятельного выполнения.

Общее число примеров и заданий практикума пособия содержит 200 задач (30 примеров с подробными решениями и 170 – для аудиторного и самостоятельного выполнения).

В приложения вынесены краткие сведения математического характера, необходимые при изучении дисциплины «Классическая механика» - дополнительная информация о векторах и тензорах, криволинейных ортогональных координатах, элементах вариационного исчисления.

Дисциплиной «Классическая механика» изучается в четвертом и пятом семестрах в рамках подготовки бакалавров физики. Содержание пособия для самостоятельной работы студентов «Классическая механика» полностью соответствует программе подготовки бакалавров физики. Структура пособия соответствует трем учебным модулям - двум в 4-ом семестре (главы 1 – 3) и одному в 5-ом семестре (главы 4 – 5).

В заключение составители пособия хотели бы обратить внимание студентов, пользующихся настоящим пособием, на следующее: пособие не подменяет собой серьезную учебную литературу. Лишь вдумчивая работа с рекомендованной литературой позволит правильно использовать материал пособия, обеспечить глубину знаний и овладение навыками, необходимыми специалисту-физику.

1. КИНЕМАТИКА

1.1. Краткие теоретические сведения

1.1.1. Кинематические характеристики движения

Положение материальной точки M в пространстве определяется заданием радиус-вектора относительно точки отсчета O как функции времени $\vec{r}(t)$ - см. рис.1.1. Линия в пространстве, описываемая концом радиус-вектора (годограф радиус-вектора), называется траекторией, а длина участка траектории, проходимого за интервал времени Δt , - путем S .

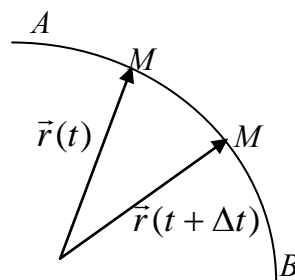


Рис.1.1

Основными кинематическими характеристиками движения точки являются ее скорость и ускорение, определяемые соотношениями:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad \text{и} \quad \vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad \text{или} \quad \vec{w} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}. \quad (1.1)$$

Вектор скорости в каждой точке траектории направлен вдоль касательной к этой точке, а вектор ускорения - по касательной к годографу скорости.

В некоторых случаях бывает полезным понятие секторной скорости

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2}[\vec{r}\vec{v}], \quad (1.2)$$

численно равной площади, описываемой радиус-вектором точки в единицу времени. Вектор секторной скорости $\dot{\sigma}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы \vec{r} и \vec{v} .

Задание функции $\vec{r}(t)$, называемой законом движения, однозначной определяет состояние движения точки в любой момент времени.

1.1.2. Координатный способ описания движения точки

Декартовы координаты. Если с точкой отсчета O совместить начало декартовой системы координат, то закон движения точки имеет вид:

$$\vec{r}(t) = \vec{n}_x x(t) + \vec{n}_y y(t) + \vec{n}_z z(t), \quad (1.3)$$

где \vec{n}_x, \vec{n}_y и \vec{n}_z - единичные векторы декартовой системы координат. При этом модули скорости и ускорения равны

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z},$$

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x \quad \text{или} \quad w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \quad (1.4)$$

$$w_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y \quad \text{или} \quad w_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y},$$

$$w_z = \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z \quad \text{или} \quad w_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z},$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}.$$

Цилиндрические координаты используются при решении задач с осевой симметрией, причем с осью симметрии совмещается ось Z цилиндрической системы координат. Положение точки в пространстве задается тремя числами – проекцией радиус-вектора ρ точки на плоскость XY , углом φ между осью OX и этой проекцией (см. рис.1.2). При этом радиус-вектор точки, ее скорость и ускорение как функции координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{n}_\rho \rho(t) + \vec{n}_z z(t), \\ \vec{v} &= \vec{n}_\rho \dot{\rho} + \vec{n}_\varphi \rho \dot{\varphi} + \vec{n}_z \dot{z}, \\ \vec{w} &= \vec{n}_\rho (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) + \vec{n}_\varphi (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) + \vec{n}_z \ddot{z}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

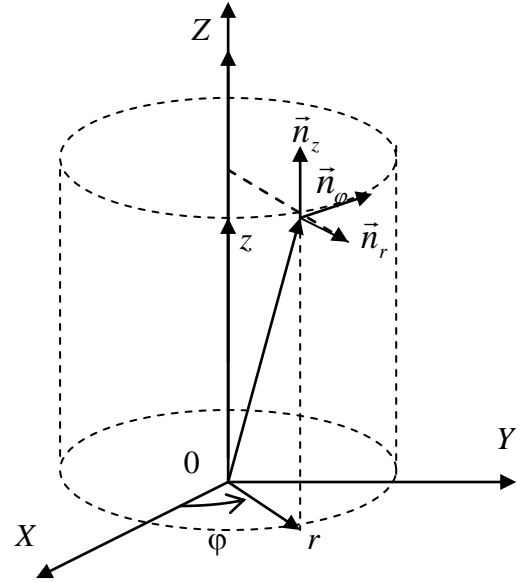


Рис.1.2

Сферические координаты.

Положение точки в пространстве определяется заданием трех величин: расстояния r от начала координат до рассматриваемой точки, угла ϑ между осью OZ и радиус вектором точки, угла φ между осью OX и проекцией радиус-вектора точки на плоскость XOY (см. рис.1.3). На рис.1.3 также показаны подвижные ортогональные единичные векторы \vec{n}_r , \vec{n}_ϑ и \vec{n}_φ . Радиус-вектор точки, ее скорость и ускорение в сферических координатах имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r \vec{n}_r, \\ \vec{v} &= \dot{r} \vec{n}_r + r \dot{\vartheta} \vec{n}_\vartheta + r \dot{\varphi} \sin \vartheta \vec{n}_\varphi, \\ \vec{w} &= (\ddot{r} - r \dot{\vartheta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) \vec{n}_r + (2\dot{r} \dot{\vartheta} + r \ddot{\vartheta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) \vec{n}_\vartheta + (2\dot{r} \dot{\varphi} \sin \vartheta + r \ddot{\varphi} \sin \vartheta + 2r \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta) \vec{n}_\varphi \end{aligned} \quad (1.7)$$

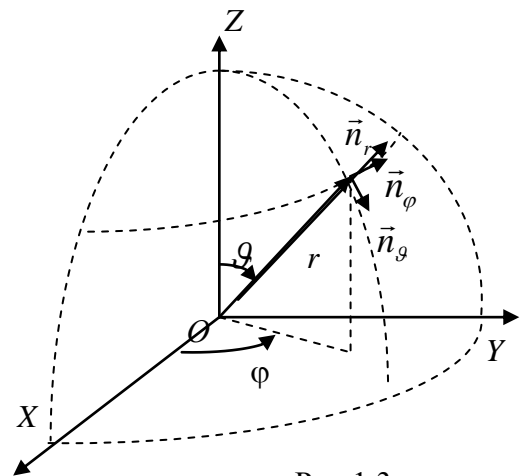


Рис.1.3

1.1.3. Естественный способ описания движения

В некоторых случаях движение удобно описывать заданием траектории и мгновенным положением точки на ней с единичным вектором $\vec{\tau}$, направленным вдоль касательной к рассматриваемой точке траектории в направлении движения. Тогда скорость точки

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau}, \quad (1.8)$$

где ds - элемент длины участка траектории.

Ускорение точки может быть представлено векторной суммой

$$\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n,$$

причем

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} \quad \text{и} \quad w_n = \frac{v^2}{R}, \quad (1.9)$$

где R - радиус кривизны в рассматриваемой точке траектории (см. рис. 1.4).

Если закон движения задан в координатной форме, и требуется определить радиус кривизны траектории в некоторой точке, то вычисляются модуль скорости и модуль ускорения в соответствии с выражением (1.5). Затем вычисляется тангенциальная составляющая ускорения и находится нормальная составляющая ускорения в соответствии с (1.9):

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = \frac{v^2}{R}.$$

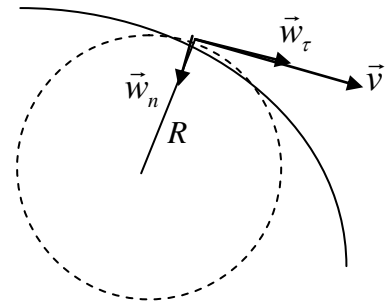


Рис.1.4

1.1.4. Движение точки в произвольно движущейся системе отсчета

Если подвижная система отсчета $X'Y'Z'$ вращается относительно оси $\vec{\omega}$, и точка O' движется со скоростью \vec{V} относительно неподвижной системы XYZ , как показано на рис.1.5, то радиус-вектор точки M относительно неподвижного наблюдателя

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'.$$

Здесь \vec{R} - радиус-вектор начала координат подвижной системы отсчета O' и \vec{r}' - радиус-вектор точки M в подвижной системе. В этом случае скорость точки M относительно неподвижной системы определяется выражением

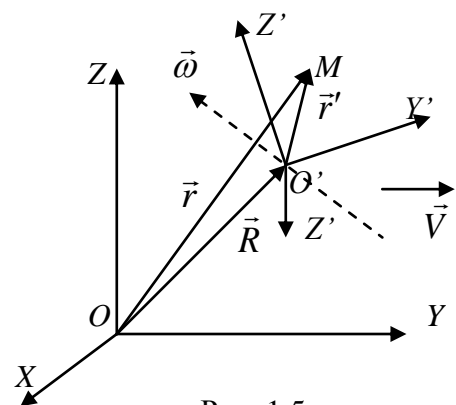


Рис. 1.5

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} + [\vec{\omega}\vec{r}']. \quad (1.10)$$

В (1.10) \vec{v}' - относительная скорость, а величина $\vec{V} + [\vec{\omega}\vec{r}']$ носит название переносной скорости.

Ускорение точки M в системе XYZ

$$\vec{w} = \vec{w}' + \vec{W} + 2[\vec{\omega}\vec{v}'] + [\vec{\varepsilon}\vec{r}'] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']], \quad (1.11)$$

где \vec{w}' - ускорение точки в подвижной системе, \vec{W} - ускорение точки O' , $2[\vec{\omega}\vec{v}']$, - ускорение Кориолиса, $[\vec{\varepsilon}\vec{r}']$ - ускорение точки M , обусловленное неравномерностью вращения подвижной системы ($\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ - угловое ускорение), $[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']]$ - осестремительное ускорение. Величина $\vec{W} + [\vec{\varepsilon}\vec{r}'] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']]$ называется переносным ускорением.

1.1.5. Кинематика твердого тела

Движение абсолютно твердого тела определяется движением трех его точек, например A , B , и C , не лежащих на одной прямой. Каждая из точек описывается тремя своими координатами, общее число которых равно девяти. Т.к. расстояния между этими точками в процессе движения остаются неизменными, то эти 9 координат связаны тремя уравнениями

$$\begin{aligned} (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 &= const, \\ (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 &= const, \\ (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 &= const. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Следовательно, движение твердого тела в общем случае требует для своего описания привлечение шести независимых величин (обладает шестью степенями свободы). В некоторых частных случаях это число может быть и меньшим.

Поступательное движение.

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, в процессе движения остается параллельной самой себе. При этом для любой j -ой точки $\vec{r}_j = \vec{r}_i + \vec{\rho}_{ij}$, где $\vec{\rho}_{ij} = const$

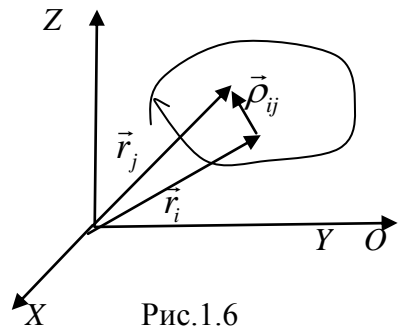


Рис.1.6

(см. рис. 1.6). Отсюда получаем $\vec{v}_i = \vec{v}_j$ и $\vec{w}_i = \vec{w}_j$, т.е. все точки движутся одинаково.

Поэтому для описания поступательного движения твердого тела достаточно описать движение любой одной его точки – поступательно движущееся твердое тело обладает тремя степенями свободы.

Вращательное движение относительно неподвижной оси.

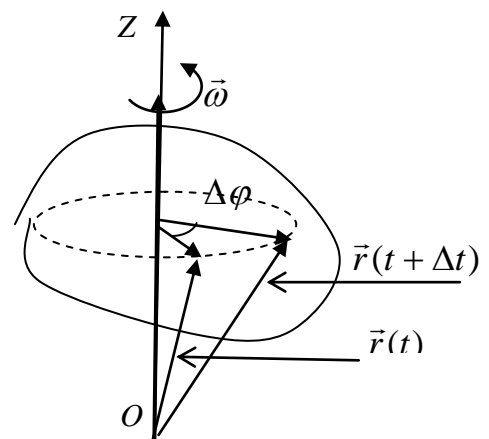


Рис1.7

твердого тела, при котором точки прямой, называемой осью вращения остаются неподвижными, называется вращением относительно неподвижной оси (рис.1.7). В этом случае движение точек тела описывается с помощью одной независимой переменной – угла поворота φ . Скорости и ускорения точек тела определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= [\vec{\omega}\vec{r}], \\ \vec{w} &= [\vec{\varepsilon}\vec{r}] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}]], \end{aligned} \quad (1.13)$$

где $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ - угловая скорость, а $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ - угловое ускорение.

Свободное вращение твердого тела относительно точки. Свободно вращающееся тело обладает тремя вращательными степенями свободы – для описания движения тела необходимо задать три независимые переменные. В качестве таких независимых переменных выбираются углы φ , ϑ и ψ (углы Эйлера), как показано на рис.1.8. Угол φ называется углом прецессии, угол ϑ - углом нутации, а угол ψ - углом собственного вращения. Задание законов движения в виде функций времени $\varphi(t)$, $\vartheta(t)$ и $\psi(t)$

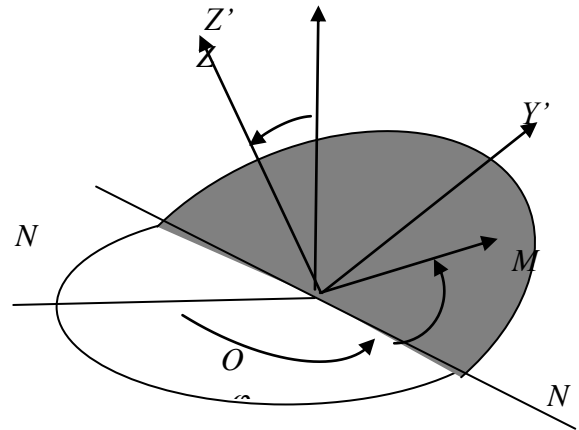


Рис.1.8

однозначно определяет состояние движения точек твердого тела: вращение относительно оси OZ характеризуется угловой скоростью $\vec{\omega}_\varphi = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$, вращение относительно оси NN' – угловой скоростью $\vec{\omega}_\vartheta = \frac{d\vec{\vartheta}}{dt}$ и вращение относительно оси OZ' – угловой скоростью $\vec{\omega}_\psi = \frac{d\vec{\psi}}{dt}$. При этом мгновенная ось вращения $\vec{\omega} = \vec{\omega}_\varphi + \vec{\omega}_\vartheta + \vec{\omega}_\psi$, а скорость точек определяется выражением $\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}]$.

1.2. Практикум по решению задач

Решение задач кинематики предполагает выполнение кинематического анализа движения точки по известному закону движения $\vec{r}(t)$, а именно:

- определение траектории движения исключением параметра t из кинематического уравнения движения, заданного в координатной форме;
- определение проекций векторов скорости и модуля скорости;
- определение проекций вектора ускорения и модуля ускорения;
- выполнение схематического чертежа траектории с указанием направления движения, векторов скорости и ускорения;

- определение, если в этом есть необходимость, секторной скорости;
- если требуется, определение радиуса кривизны в той или иной точке траектории;
- краткое описание характера движения.

Если закон движения задан в произвольно движущейся системе координат, то кинематический анализ предполагает следующее:

- определение траектории, проекций скорости \vec{v}' и ускорения \vec{w}' в подвижной системе S' ;
- нахождение закона преобразования координат при переходе от подвижной системы S' к неподвижной системе S ;
- определение траектории, проекций скорости \vec{v} и ускорения \vec{w} в неподвижной системе S ;
- нахождение переносной скорости, переносного и кориолисова ускорения;
- нахождение проекций относительных и переносных скоростей и ускорений, кориолисова ускорения на оси неподвижной системы координат – проекции скорости и ускорения точки в неподвижной системе должны быть равны алгебраическим суммам соответствующих проекций указанных величин. Эта процедура может служить критерием правильности решения задачи.

1.2.1. Примеры решения задач

Пример 1. Выполнить кинематический анализ движения точки, если кинематический закон ее движения имеет вид:

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t, \quad z = 0, \quad a > b,$$

где a, b и ω - постоянные положительные величины, причем $a > b$.

Определить также радиус кривизны, нормальное и тангенциальное ускорения в точках траектории $x = 0$ и $y = 0$.

Решение

Из условия $Z = 0$ следует, что движение происходит в плоскости XOY .

Для определения траектории движения необходимо исключить время из кинематических уравнений движения

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t.$$

Если первое уравнение разделить на a , а второе – на b , возвести их в квадраты и сложить, то получаем уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это уравнение является уравнением эллипса с большой полуосью a и малой – b , как показано на рис.1.9.

Определим проекции и модули скорости и ускорения:

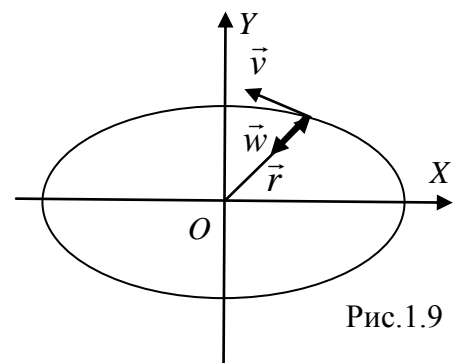


Рис.1.9

$$\dot{x} = -a\omega \sin \omega t, \quad \dot{y} = b\omega \cos \omega t, \quad v = \omega \sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t},$$

$$\ddot{x} = -a\omega^2 \cos \omega t, \quad \ddot{y} = b\omega^2 \sin \omega t, \quad w = \omega^2 \sqrt{a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t}.$$

На рис.1.9 показаны векторы скорости и ускорения. Движение точки по эллиптической траектории происходит против часовой стрелки с переменной скоростью. Ускорение также зависит от положения материальной точки, но $\vec{w} = -\omega^2 \vec{r}$, т.е. ускорение в каждой точке траектории направлено вдоль радиус-вектора, но в противоположную ему сторону.

Определим проекции секторной скорости:

$$\dot{\sigma}_x = (y\dot{z} - z\dot{y}) / 2 = 0, \quad \dot{\sigma}_y = (z\dot{x} - x\dot{z}) / 2 = 0,$$

$$\dot{\sigma}_z = x\dot{y} - y\dot{x} = \omega ab(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) / 2 = \omega \frac{ab}{2}.$$

Из полученных результатов следует, что секторная скорость является постоянной по величине и направлению, причем ее направление перпендикулярно плоскости движения материальной точки.

В точках траектории $x = 0$

$$\dot{x} = -\omega a \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} = \mp \omega a, \quad y = \omega b \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} = \pm \omega b, \quad \dot{y} = 0,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда $v = |\dot{x}| = \omega a$, и $w_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$.

Следовательно, в точках $x = 0$ нормальное ускорение совпадает с полным ускорением. Учитывая, что $\vec{w} = -\omega^2 \vec{r}$, получаем в точках $x = 0$

$$w_n = w = |\ddot{y}| = \omega^2 b, \text{ а радиус кривизны } R(x=0) = \frac{v^2}{w_n} = \frac{\dot{x}^2}{\ddot{y}} = \frac{a^2}{b}.$$

В точках $y = 0$ $\omega t = n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Здесь

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = \omega b \cos n\pi = \pm \omega b, \quad v = |\dot{y}| = \omega b, \quad w_\tau = 0,$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 a, \quad \ddot{y} = 0, \quad w_n = w = |\ddot{x}| = \omega^2 a \text{ и } R(y=0) = \frac{v^2}{w_n} = \frac{\dot{y}^2}{\ddot{x}} = \frac{b^2}{a}.$$

Пример 2. Выполнить кинематический анализ движения точки, если кинематический закон ее движения имеет вид:

$$\rho = const, \quad \varphi(t) = at, \quad z(t) = bt,$$

где a и b – постоянные величины.

Решение

Из условия $\rho = const$ следует, что движение точки происходит по поверхности цилиндра радиуса ρ (рис.1.10). При этом для движения по боковой поверхности цилиндра, исключая из зависимостей $\varphi(t)$ и $z(t)$ время, получаем уравнение траектории

$$\frac{\varphi}{a} = \frac{z}{b} \text{ или } z = \frac{b}{a} \varphi.$$

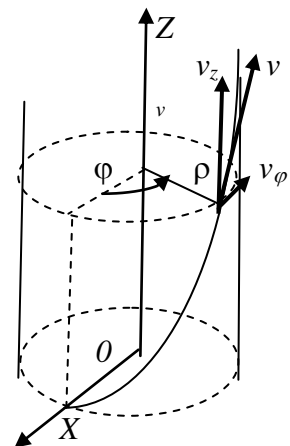


Рис.1.10

Таким образом, зависимость $z(\varphi)$ линейная и может быть представлена в виде семейства прямых на развертке цилиндра, как это показано на рис. 1.11. Траектория движения точки представляет собой винтовую линию с шагом h . Очевидно, что шаг можно найти из соотношения $\frac{2\pi}{a} = \frac{h}{b}$. Отсюда получаем $h = 2\pi \frac{b}{a}$, а

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{\rho a}.$$

Определим проекции скорости и ускорения точки. В цилиндрической системе координат

$$v_\rho = \dot{\rho} = 0, \quad v_\varphi = \rho \dot{\varphi} = \rho a, \quad v_z = \dot{z} = b, \quad v = \sqrt{\rho^2 a^2 + b^2}$$

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 = -\rho a^2, \quad w_\varphi = \rho \ddot{\varphi} = 0, \quad w_z = \dot{z} = 0, \quad w = \rho a^2$$

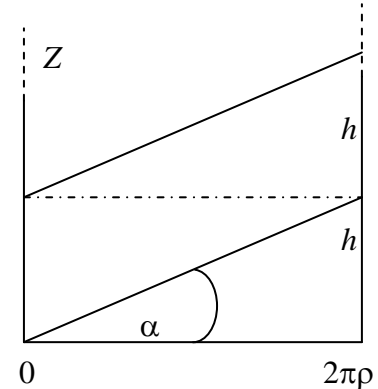


Рис.1.11

Из полученных результатов видно, что движение по винтовой линии происходит с постоянной по модулю скоростью и с постоянным осецилирующим ускорением.

Пример 3. В системе отсчета, вращающейся против часовой стрелки относительно оси неподвижной системы координат OZ с постоянной угловой скоростью ω , закон движения точки имеет вид

$$x' = a \cos \omega t, \quad y' = b \sin \omega t, \quad z' = 0 \quad (a > b).$$

Определить траекторию движения точки в неподвижной системе координат, относительные и переносные скорость и ускорение.

Решение

Закон движения точки во вращающейся системе координат такой же, как и в примере 1. Поэтому не будем отдельно рассматривать относительное движение точки – оно описано выше.

Т.к. подвижная система отсчета поступательно не перемещается, то в каждый момент времени $\vec{r}' = \vec{r}$, причем движение точки плоское. На рис.1.12 показано положение осей подвижной системы координат относительно неподвижной в произвольный момент времени t . Из рисунка видно, что

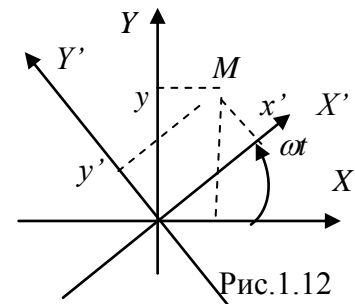


Рис.1.12

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \omega t - y' \sin \omega t, \\ y &= x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \end{aligned} \quad (1)$$

$$z = z'$$

Подставляя известные функции $x'(t)$ и $y'(t)$, получаем закон изменения координат точки в неподвижной системе отсчета:

$$x = a \cos^2 \omega t - b \sin^2 \omega t,$$

$$y = \frac{a+b}{2} \sin 2\omega t.$$

Если к первому из этих соотношений прибавить и вычесть величину $b \cos^2 \omega t$, то это уравнение преобразуется следующим образом:

$$x + b = (a+b) \cos^2 \omega t = \frac{a+b}{2} (1 + \cos 2\omega t).$$

Теперь систему (1) можно переписать так:

$$\begin{aligned} x - \frac{a-b}{2} &= \frac{a+b}{2} \cos 2\omega t \\ y &= \frac{a+b}{2} \sin 2\omega t. \end{aligned} \quad (2)$$

Траекторию получим, возводя эти уравнения в квадраты и складывая их:

$$\left(x - \frac{a-b}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Таким образом, траектория движения точки в неподвижной системе отсчета представляет собой окружность радиуса $R = \frac{a+b}{2}$ с центром в точке

$x = \frac{a-b}{2}$, $y = 0$, как это показано на рис 1.13. Здесь же показаны и

относительная скорость \vec{v}' , переносная скорость $\vec{v}_{i\dot{a}\dot{d}} = [\dot{\omega}\vec{r}'] = [\dot{\omega}\vec{r}]$ и полная скорость точки относительно неподвижной системы отсчета \vec{v} . При этом, как видно из системы (2), угловая скорость вращения точки по окружности в два раза больше угловой скорости относительного движения. Проекции и модули скорости и ускорения точки относительно неподвижной системы отсчета равны:

$$\dot{x} = -\omega(a+b) \sin 2\omega t, \quad \dot{y} = \omega(a+b) \cos 2\omega t,$$

$$v = \omega(a+b) = \text{const.}$$

$$\ddot{x} = -2\omega^2(a+b) \cos 2\omega t,$$

$$\ddot{y} = -2\omega^2(a+b) \sin 2\omega t, \quad (3)$$

$$w = 2\omega^2(a+b) = \text{const.}$$

Проекция и модуль переносной скорости $\vec{v}_{i\dot{a}\dot{d}} = [\dot{\omega}\vec{r}']$ определяются

выражениями:

$$\left(\vec{v}_{i\dot{a}\dot{d}}\right)_{x'} = \omega_{y'} z' - \omega_{z'} y' = -\omega y' = -\omega b \sin \omega t, \quad \left(\vec{v}_{i\dot{a}\dot{d}}\right)_{z'} = \omega_{x'} y' - \omega_{y'} x' = 0,$$

$$\left(\vec{v}_{i\dot{a}\dot{d}}\right)_{y'} = \omega_{z'} x' - \omega_{x'} z' = \omega x' = \omega a \cos \omega t,$$

$$v_{i\dot{a}\dot{d}} = \omega \sqrt{a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t}.$$

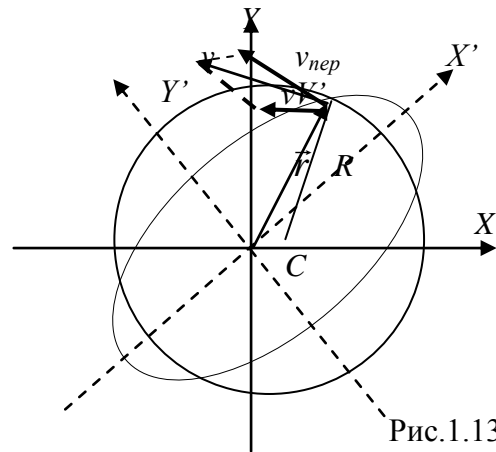


Рис.1.13

Определим проекции переносного ускорения $\vec{w}_{i\dot{\alpha}\dot{\delta}} = [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']]$, учитывая, что $[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']] = \vec{\omega}(\vec{\omega}\vec{r}') - \omega^2\vec{r}'$; при этом $\vec{\omega}(\vec{\omega}\vec{r}') = 0$, т.к. $\omega = \omega_z$, а вектор $\vec{r} = \vec{r}'$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси Z . Тогда $\vec{w}_{i\dot{\alpha}\dot{\delta}} = -\omega^2\vec{r}$, и

$$\begin{aligned} (\vec{w}_{i\dot{\alpha}\dot{\delta}})_{x'} &= -\omega^2 x' = -\omega^2 a \cos \omega t, & (\vec{w}_{i\dot{\alpha}\dot{\delta}})_{y'} &= -\omega^2 y' = \omega^2 b \sin \omega t, \\ w_{i\dot{\alpha}\dot{\delta}} &= \omega^2 \sqrt{a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t}. \end{aligned}$$

Очевидно, что вектор скорости точки относительно неподвижной системы отсчета равен векторной сумме относительной и переносной скоростей. При этом сумма проекций $\vec{v}_{i\dot{\alpha}\dot{\delta}}$ и \vec{v}' на соответствующие координатные оси неподвижной системы координат должна быть равна проекции \vec{v} на эти оси. Проекция переносной скорости определим, используя тот факт, что $\vec{r} = \vec{r}'$. Поэтому

$$\begin{aligned} [\vec{\omega}\vec{r}']_x &= [\vec{\omega}\vec{r}]_x = -\omega y = -\omega \frac{a+b}{2} \sin 2\omega t, & [\vec{\omega}\vec{r}']_z &= 0, \\ [\vec{\omega}\vec{r}']_y &= [\vec{\omega}\vec{r}]_y = \omega x = \omega \frac{a+b}{2} \cos 2\omega t, & & +\omega \frac{a-b}{2}. \end{aligned}$$

Для определения проекций относительной скорости на координатные оси X и Y воспользуемся преобразованием (1), которое в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} (\vec{v}')_x &= (\vec{v}')_{x'} \cos \omega t - (\vec{v}')_{y'} \sin \omega t = -\omega \frac{(a+b)}{2} \sin 2\omega t, \\ (\vec{v}')_y &= (\vec{v}')_{x'} \sin \omega t + (\vec{v}')_{y'} \cos \omega t = -a \sin^2 \omega t + b \cos^2 \omega t = \\ &= \omega \frac{a+b}{2} \cos 2\omega t - \omega \frac{a-b}{2}. \end{aligned}$$

Тогда $(\vec{v}')_x + (\vec{v}_{i\dot{\alpha}\dot{\delta}})_x = -\omega \frac{a+b}{2} \sin 2\omega t - \omega \frac{a+b}{2} \sin 2\omega t = -\omega(a+b) \sin 2\omega t$ и

$$\begin{aligned} (\vec{v}')_y + (\vec{v}_{i\dot{\alpha}\dot{\delta}})_y &= \omega \left(\frac{a+b}{2} \cos 2\omega t - \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2} \cos 2\omega t + \frac{a-b}{2} \right) = \\ &= \omega(a+b) \cos 2\omega t. \end{aligned}$$

Эти результаты совпадают с полученными ранее и представленными формулами (3), что может служить проверкой правильности решения задачи.

1.2.2. Задания для аудиторного и самостоятельного выполнения

Координатный способ описания движения точки

1.1 – 1.15. Выполнить кинематический анализ движения точки, если закон ее движения имеет вид, представленный в таблице 1.1.

Таблица 1.1.

<i>N</i> пп	Закон движения в координатной форме	Примечания
1.1	$x = 3 \cos t, \quad z = 3 - 5 \sin t, \quad y = 0$	-
1.2	$x = a(1 - \cos 2t), \quad y = 4t, \quad z = 0$	$a = const$
1.3	$x = at, \quad y = b \cos \omega t, \quad z = 0$	$a, b = const > 0, \quad \omega = const$
1.4	$x = 1 - at^2, \quad y = bt, \quad z = 0$	$a, b = const > 0$
1.5	$x = a \sin t, \quad y = 2a \cos 2t, \quad z = 0$	$a = const > 0$
1.6	$x = 2 + 3t, \quad y = 1 - 2t, \quad z = 2 + t$	-
1.7.	$x = 3t, \quad y = 6t - 3t^2, \quad z = 0$	-
1.8	$x = a - b \cos \omega t, \quad y = -b \sin \omega t, \quad z = 0$	$a, b = const > 0, \quad \omega = const$
1.9	$x = at, \quad y = ce^{-bt}, \quad z = 0$	$a, b, c = const > 0$
1.10	$x = 3 \cos \omega t, \quad z = 3 - 5 \sin \omega t, \quad y = 0$	$\omega = const$
1.11	$\rho = \rho_0 = const, \quad \varphi = \omega t, \quad z = 0$	$\omega = const$
1.12	$r = r_0 = const, \quad \varphi = \varphi_0 = const, \quad \vartheta = \omega t$	$\omega = const$
1.13	$r = r_0 = const, \quad \vartheta = \vartheta_0 = const, \quad \varphi = \omega t$	$\omega = const$
1.14	$r = at, \quad \vartheta = \vartheta_0 = const, \quad \varphi = bt$	$a, b = const > 0$
1.15	$\rho = at, \quad \varphi = \varphi_0 = const, \quad z = z_0 = const$	$a = const > 0$

Естественный способ описания движения точки

1.16 – 1.30. Определить радиус кривизны, нормальное и тангенциальное ускорения точки, если ее плоское движение задано уравнениями, представленными таблицей 1.2:

Таблица 1.2

<i>N</i> пп	Закон движения в координатной форме	Примечания
1.16	$x = 3t, \quad y = 4t - t^2$	В точках $y = 0$
1.17	$x = a\omega t - a \sin \omega t, \quad y = a(1 + \cos \omega t), \quad a > 0$	В точках $y = 0$; $a = const > 0$
1.18	$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = h + v_0 t \sin \alpha - gt^2 / 2$	В верхней точке траектории
1.19	$x = r \cos \omega t + a \sin(\omega t / 2),$ $y = r \sin \omega t - a \cos(\omega t / 2), \quad r, a > 0$	При $\omega t = \pi$; $r, a = const > 0, \quad r > a / 4$
1.20	$x = 2t, \quad y = t^2$	В точке, где радиус кривизны траектории минимален

1.21	$\rho = \rho_0 e^{\alpha t}, \quad \varphi = \alpha t, \quad \alpha = const > 0$	Как функцию времени
1.22	$\rho = 2, \quad \varphi = t^2 / 2$	В момент времени $t = 1$ с
1.23	$r = r_0 \cos^2 \omega t, \quad \varphi = \omega t$	В точках, где полярный радиус максимален
1.24	$x = 2a \cos \omega t - a \cos 2\omega t,$ $y = 2a \sin \omega t - a \sin 2\omega t; \quad a = const > 0$	В момент времени, когда радиус кривизны максимален
1.25	$x = t, \quad y = \sin^2 t$	В точках $y = 0$
1.26	$x = \omega t \cos \omega t, \quad y = \omega t \sin \omega t$	В момент времени, когда $\omega t = 1$
1.27	$x = t^2, \quad y = t^3$	В точке $x = 1, y = 1$
1.28	$r = at, \quad \varphi = bt, \quad \vartheta = \vartheta_0, \quad a, b = const > 0$	Как функцию времени

Движение точки относительно движущейся системы отсчета

1.29-1.33. Закон движения точки относительно вращающейся с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}$ системы координат представлен в таблице 1.3. Определить траекторию, скорость и ускорение точки относительно неподвижного наблюдателя. Найти относительные и переносные скорость и ускорение, а также величину и направление кориолисова ускорения. Начала координат подвижной и неподвижной систем совпадают

Таблица 1.3

N пп	Закон движения точки относительно движущейся системы координат	Ось вращения, угловая скорость и направление вращения системы $X'Y'Z'$
1.29	$x' = a \cos \omega t, \quad y' = a \sin \omega t$ $a, \omega = const > 0$	Вращение с угловой скоростью $\Omega = \Omega_{zz} = \omega$. Оси OZ и OZ' совпадают.
1.30	$x' = a \cos \omega t, \quad y' = 0$ $a, \omega = const > 0$	Вращение с угловой скоростью $\Omega = \Omega_{zz} = -\omega$. Оси OZ и OZ' совпадают.
1.31	$x = v_0 t, \quad y = 0,$ $v_0 = const > 0$	Вращение с $\Omega = \Omega_z$ против часовой стрелки. Оси OZ и OZ' совпадают.
1.32	$y = v_0 t - gt^2 / 2, \quad x = 0$	Вращение с $\Omega = \Omega_z$ против часовой стрелки. Оси OZ и OZ' совпадают.
1.33	$x' = a \cos \omega t, \quad y' = a \sin \omega t$ $a, \omega = const > 0$	Вращение с угловой скоростью $\Omega = \Omega_{zz} = 2\omega$. Оси OZ и OZ' совпадают.

1.34. Найти закон изменения ускорения свободного падения на Земле в зависимости от географической широты местности.

1.35. Продолжительность суток на некоторой планете, масса и радиус которой равны массе и радиусу Земли, составляет 5 часов. Каким будет ускорение свободного падения на экваторе и на полюсе этой планеты?

1.36. Тело равномерно движется со скоростью v по поверхности Земли вдоль экватора с запада на восток. Определить его полное ускорение. Каким будет это ускорение, если тело движется с востока на запад?

1.37. Тело в момент времени $t = 0$ начинает движение в горизонтальном направлении со скоростью v относительно системы отсчета, которая, в свою очередь, в этот же момент времени начинает двигаться без начальной скорости с поверхности Земли с ускорением W , направленным вертикально вверх. Рассмотреть движение тела относительно неподвижного наблюдателя, который находится в начальной точке движения. Вращением Земли пренебречь.

1.38. Период обращения искусственного спутника вокруг Земли в плоскости магнитного меридиана равен 1,5 часа. На сколько процентов относительная угловая скорость спутника больше его абсолютной угловой скорости? Подвижную систему отсчета связать с Землей, абсолютную – с неподвижными звездами.

1.39. Искусственный спутник, вращающийся вокруг Земли по круговой орбите, находится в некоторый момент времени на прямой, соединяющей центры Земли и Луны. Период обращения спутника вокруг Земли T_1 , период обращения Луны вокруг Земли – T_2 . Определить время, через которое спутник снова окажется на линии Земля – Луна, если плоскость его орбиты совпадает с плоскостью лунной орбиты. T_1 и T_2 вычислены по отношению к неподвижным звездам.

1.40. Кран движется с ускорением w_1 по прямолинейным рельсам и одновременно вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω . Длина стрелы крана L , длина свисающей части троса с грузом на конце меняется по закону $l = l_0 - w_2 t^2$. Определить ускорение груза в момент времени, когда стрела параллельна рельсам.

На практических занятиях рекомендуется выполнение примеров 1 - 3 и заданий 1.2, 1.6, 1.12, 1.14, 1.16, 1.18, 1.23, 1.32, 1.40.

2. ДИНАМИКА ТОЧКИ И СИСТЕМЫ ТОЧЕК

2.1. Динамика точки

2.1.1. Краткие теоретические сведения

Основным уравнением динамики является второй закон Ньютона, записанный в форме дифференциального уравнения второго порядка и называемого уравнением движения:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}, \quad (2.1)$$

где \vec{F} - результирующая всех сил, действующих на точку.

Основная задача динамики заключается в нахождении закона движения $\vec{r}(t)$, если известны действующие на материальную точку массы m силы, а также положение и скорость точки в начальный момент времени $t_0 = 0$. Решение основной задачи динамики предполагает интегрирование трех дифференциальных уравнений второго порядка. В декартовых координатах эти уравнения имеют вид:

$$m\ddot{x} = F_x(x, y, z, t), \quad m\ddot{y} = F_y(x, y, z, t), \quad m\ddot{z} = F_z(x, y, z, t). \quad (2.2)$$

Полученные в результате решения уравнений (2.2) 6 постоянных интегрирования находят с помощью начальных условий.

Для произвольной силы $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t)$ не существует общих рецептов решения дифференциальных уравнений (2.2). Однако в случае одномерного движения можно предложить ряд приемов интегрирования.

1) Если в уравнении $m\ddot{x} = F_x$ $F_x = f(t)$, то

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}) = f(t) \quad \text{и} \quad \dot{x}(t) = \int f(t)dt + C_1,$$

а повторное интегрирование дает $x(t) = \int \dot{x}(t)dt + C_1t + C_2$.

2) Если уравнение движения сводится к дифференциальному линейному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами вида

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t),$$

то его общее решение представляется в виде $x = c^{(0)} + x^{(1)}$, где $x^{(0)}$ - общее решение однородного уравнения, а $x^{(1)}$ - частное решение этого уравнения, определяемое его правой частью. При этом общее решение однородного уравнения ищется в виде $x^{(0)} = C_1e^{p_1t} + C_2e^{p_2t}$, где p_1 и p_2 - корни характеристического уравнения $p^2 + ap + b = 0$, а частное решение зачастую совпадает по форме с видом правой части $f(t)$.

3) Если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} = \varphi(\dot{x})f(t)$, то его можно пред-

ставить как $\frac{d\dot{x}}{dt} = \varphi(\dot{x})f(t)$. Разделив переменные, можно получить

$$\frac{d\dot{x}}{\varphi(\dot{x})} = f(t)dt.$$

Интегрирование этого уравнения позволяет определить $\dot{x}(t, C_1)$. Повторное интегрирование дает закон движения

$$x(t) = \int \dot{x}(t, C_1) dt + C_2.$$

4) Если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} = \varphi(\dot{x})f(x)$, то его можно преобразовать следующим образом:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \dot{x} \quad \text{и} \quad \frac{\dot{x}}{\varphi(\dot{x})} d\dot{x} = f(x) dx.$$

Интегрирование последнего уравнения позволяет определить $\dot{x} = \Phi(x, C_1)$, а последующее разделение переменных и интегрирование дает закон движения в виде:

$$t = \int \frac{dx}{\Phi(x, C_1)} + c_2.$$

2.1.2. Практикум по решению задач

При решении основной задачи динамики рекомендуется выполнение следующих операций:

- выделение сил, действующих на материальную точку и запись уравнения движения в векторной форме;
- введение рационально выбранной системы координат и формализация условий задачи в координатной форме;
- запись уравнений движения в проекциях;
- приведение системы дифференциальных уравнений к виду, удобному для интегрирования, формальное решение этих уравнений;
- определение постоянных интегрирования с использованием начальных условий;
- запись полученного закона движения и выполнение кинематического анализа движения точки.

2.1.2.1. Примеры решения задач

Пример 1. Рассмотреть движение тела в поле силы тяжести с учетом сопротивления воздуха. Тело брошено с высоты H над поверхностью земли со скоростью \vec{v}_0 , составляющей угол α с горизонтом. Сила сопротивления пропорциональна скорости с коэффициентом пропорциональности k . Вращением Земли пренебречь.

Решение

Уравнение движения тела в векторной форме имеет вид:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - k\vec{v}. \quad (1)$$

Т.к. движение тела плоское, то систему координат XOY выберем так, что ось OY направлена вертикально вверх, причем начало координат (точка O) находится на поверхности земли, а x -вая координата тела в момент броска

равна нулю, как показано на рис.2.1. Теперь уравнения движения в проекциях можно представить следующим образом:

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}, \quad m\ddot{y} = -mg - k\dot{y}. \quad (2)$$

С введением обозначения $\frac{k}{m} = \beta > 0$ эти уравнения можно переписать в виде, удобном для интегрирования

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \beta\dot{x} &= 0, \\ \ddot{y} + \beta\dot{y} &= -g. \end{aligned} \quad (3)$$

Решениями этих уравнений являются

$$\dot{x} = C_1 e^{-\beta t}, \quad x = -\frac{C_1}{\beta} e^{-\beta t} + C_2 \quad (4)$$

и
$$y = C_3 e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta} t + C_4, \quad \dot{y} = -\beta C_3 e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta}. \quad (5)$$

Постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3 и C_4 определим из начальных условий: при $t = 0$ $x(0) = x_0 = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha$, $y(0) = y_0 = H$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha$.

Тогда
$$\dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha = C_1, \quad 0 = -\frac{v_0 \cos \alpha}{\beta} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{v_0 \cos \alpha}{\beta},$$

$$\dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha = -\beta C_3 - \frac{g}{\beta} \Rightarrow C_3 = -\frac{g}{\beta^2} - \frac{v_0}{\beta} \sin \alpha,$$

$$y_0 = H = -\frac{v_0}{\beta} \sin \alpha - \frac{g}{\beta^2} + C_4 \Rightarrow C_4 = H + \frac{v_0}{\beta} + \frac{g}{\beta^2}.$$

Подставляя в решения (4) и (5) значения постоянных интегрирования, окончательно получаем:

$$x = \frac{v_0}{\beta} \cos \alpha (1 - e^{-\beta t}), \quad \dot{x} = v_0 \cos \alpha \cdot e^{-\beta t}, \quad (6)$$

$$y = H + \left(\frac{v_0}{\beta} \sin \alpha + \frac{g}{\beta^2} \right) (1 - e^{-\beta t}) - \frac{gt}{\beta}, \quad \dot{y} = \left(v_0 \sin \alpha + \frac{g}{\beta} \right) e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta}. \quad (7)$$

Выполним анализ полученных результатов. Из выражений (5) и (6) для проекций скоростей следует, что с течением времени (при $t \rightarrow \infty$) горизонтальная составляющая скорости тела уменьшается до 0 под действием тормозящей силы сопротивления воздуха, а вертикальная составляющая, первоначально направленная вертикально вверх, уменьшается до нуля, меняет направление и затем увеличивается, достигая постоянного значения:

$$|\dot{y}| = \frac{g}{\beta} = \frac{mg}{k}.$$

Это значение скорости устанавливается после того, как сила тяжести уравновесится силой сопротивления (при движении вниз эти силы направлены в противоположные стороны). Проекция ускорения

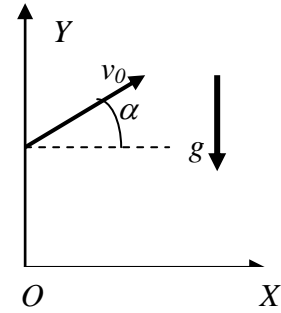


Рис.2.1

$$\ddot{x} = -\beta v_0 \cos \alpha \cdot e^{-\beta t}, \quad \ddot{y} = -(\beta v_0 \sin \alpha + g) e^{-\beta t}$$

также с течением времени уменьшаются по величине до 0, оставаясь все время отрицательными. На рис.2.2 представлены зависимости вертикальных составляющих скорости и ускорения в зависимости от времени, иллюстрирующие полученные результаты.

Рассмотрим частный случай решения задачи в отсутствие сопротивления воздуха, т.е. при $\beta \rightarrow 0$. Отметим, что в слагаемых решений (6) и (7) малый параметр β содержится как в виде множителя, так и в знаменателях дробных выражений. Поэтому для нахождения предельных решений разложим

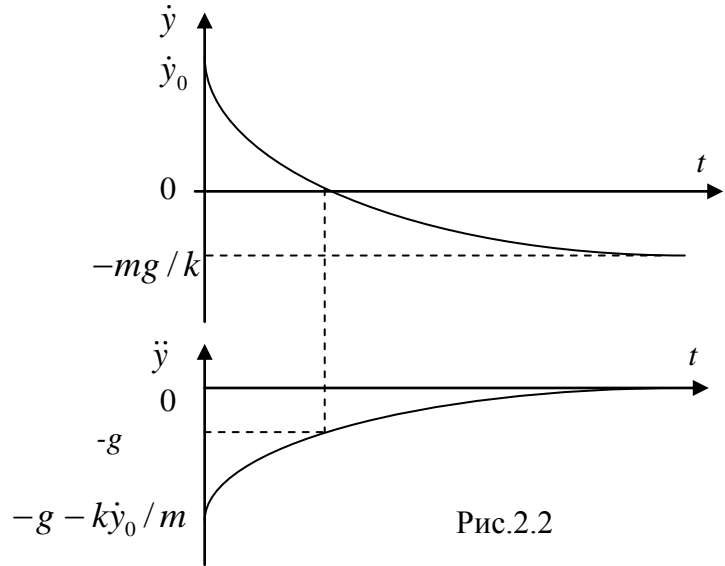


Рис.2.2

экспоненты в ряд в окрестности нуля и сохраним число членов, обеспечивающее существование предела при $\beta \rightarrow 0$. Так,

$$x = \frac{v_0}{\beta} \cos \alpha (1 - e^{-\beta t}) = \frac{v_0}{\beta} \cos \alpha (1 - 1 + \beta t + \dots) = v_0 \cos \alpha \cdot t (1 + O(\beta t)),$$

и при $\beta = 0$ получаем хорошо известный результат $x = v_0 \cos \alpha \cdot t$.

Для нахождения закона движения $y(t)$ в отсутствие сопротивления воздуха в разложении экспоненты необходимо сохранить величины второго порядка малости. При этом выражение (7) приобретает вид:

$$\begin{aligned} y &= H + \left(\frac{v_0}{\beta} \sin \alpha + \frac{g}{\beta^2} \right) \left(1 - 1 + \beta t - \frac{\beta^2 t^2}{2} + \dots \right) - \frac{gt}{\beta} = \\ &= H + v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} - \beta t \frac{v_0 t \sin \alpha}{2} + O(\beta t). \end{aligned}$$

Тогда при $\beta = 0$ получаем известный результат $y = H + v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$.

Пример 2. Электрон, движущийся со скоростью \vec{v}_0 , влетает под углом α в постоянное однородное магнитное поле индукцией \vec{B} . Найти и проанализировать закон движения электрона.

Решение

На электрон в магнитном поле действует сила Лоренца (действием силы тяжести можно пренебречь, т.к. гравитационные силы много меньше сил электромагнитных). Поэтому

$$m\ddot{\vec{r}} = -e[\vec{v}\vec{B}] = -e[\dot{\vec{r}}\vec{B}]. \quad (1)$$

Совместим ось OZ декартовой системы координат с направлением линий магнитной индукции, а оси OX и OY направим так, чтобы проекция скорости на одну из них (например на ось OY) была равной 0 – см. рис.2.3. Тогда $B_x = B_y = 0$, $B_z = B$, в момент $t = 0$ влета электрона в магнитное поле его скорость определялась проекциями $\dot{x}_0 = v_0 \sin \alpha$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = v_0 \cos \alpha$. Кроме того, будем считать, что в начальный момент времени положение электрона определялось координатами x_0 , y_0 и $z_0 = 0$. Тогда уравнение (1) в проекциях будет иметь вид:

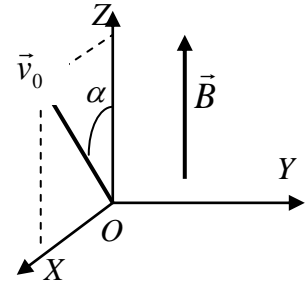


Рис.2.3

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -e\dot{y}B, \\ m\ddot{y} &= e\dot{x}B, \\ m\ddot{z} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega\dot{y}, & (3a) \\ \ddot{y} &= \omega\dot{x}, & (3б) \\ \ddot{z} &= 0, & (3в) \end{aligned}$$

где величина $\omega = \frac{e}{m}B$ называется циклотронной частотой.

Проинтегрировав уравнение (3а), получаем

$$\dot{x} = -\omega y + C_1. \quad (4)$$

Подставляя это значение \dot{x} в уравнение (3б), получаем дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами относительно y :

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \omega C_1.$$

Это уравнение является неоднородным уравнением колебаний, решение которого имеет вид:

$$y = A \cos(\omega t + \varphi) + \frac{C_1}{\omega} \quad \text{и} \quad \dot{y} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi). \quad (5)$$

Тогда

$$\dot{x} = -\omega y + C_1 = -\omega A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{и} \quad x = -A \sin(\omega t + \varphi) + C_2. \quad (6)$$

Постоянные интегрирования A , φ , C_1 и C_2 определим из начальных условий. Так,

$$\dot{x}_0 = v_0 \sin \alpha = \omega A \cos \varphi \quad \text{и} \quad \dot{y}_0 = 0 = -A\omega \sin \varphi. \quad (7)$$

Из второго соотношения следует, что $\varphi = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} y &= A \cos \omega t + \frac{C_1}{\omega} \quad \text{и} \quad \dot{y} = -A\omega \sin \omega t. & (8) \\ x &= -A \sin \omega t + C_2 \quad \text{и} \quad \dot{x} = -\omega A \cos \omega t. \end{aligned}$$

Для нахождения амплитуды A воспользуемся выражением (7) для \dot{x}_0 с учетом того, что $\varphi = 0$: $v_0 \sin \alpha = \omega A \Rightarrow A = -\frac{v_0}{\omega} \sin \alpha$. Чтобы определить

постоянные C_1 и C_2 , воспользуемся выражениями (8) для координат в момент времени $t = 0$:

$$y_0 = A + \frac{C_1}{\omega} = -\frac{v_0 \sin \alpha}{\omega} + \frac{C_1}{\omega} \Rightarrow C_1 = \omega y_0 + v_0 \sin \alpha, \quad x_0 = C_2.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x &= -\frac{v_0 \sin \alpha}{\omega} \sin \omega t + x_0, & \dot{x} &= -v_0 \sin \alpha \cos \omega t; \\ y &= \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega} (1 - \cos \omega t) + y_0, & \dot{y} &= v_0 \sin \alpha \sin \omega t. \end{aligned} \quad (9)$$

Движение вдоль оси Z является равномерным и прямолинейным, т.к. интегрирование уравнения (3в) дает

$$\dot{z} = C_3 \quad \text{и} \quad z = C_3 t + C_4.$$

Используя начальные условия, получаем закон движения электрона вдоль оси Z в окончательном виде:

$$z = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad \dot{z} = v_0 \cos \alpha = \text{const}.$$

Из уравнений (9) следует, что

$$(x - x_0)^2 + \left(y - y_0 - \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega} \right)^2 = \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{\omega} \right)^2,$$

т.е. проекция траектории на плоскость XOY представляет собой окружность радиуса

$$R = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega} = \frac{v_0 m}{eB} \sin \alpha \quad \text{с центром в точке}$$

$$x = x_0, \quad y = y_0 + \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega}.$$

В целом, траекторией движения электрона является винтовая линия с шагом

$$h = zT = \frac{2\pi v_0 \sin \alpha}{\omega}, \quad \text{как показано на рис. 2.4.}$$

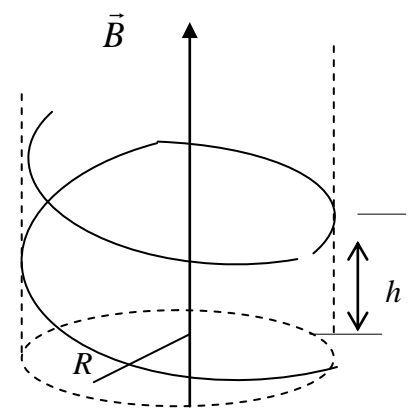


Рис. 2.4

В заключение отметим, что описанный характер движения электрона в магнитном поле лежит в основе принципа магнитной фокусировки электронного пучка в электронно-лучевых трубках.

Пример 3. Точка массой m движется по горизонтальной хорде окружности радиуса R под действием силы, обратно пропорциональной расстоянию от точки до центра окружности (коэффициент пропорциональности - k), направленной к центру окружности. Расстояние от хорды до центра окружности равно h . Найти скорость точки в момент прохождения середины хорды, если в начальный момент времени она занимала крайнее положение и была отпущена без начальной скорости.

Решение

Пусть $2L$ – длина хорды ($L = \sqrt{R^2 - h^2}$), и пусть ось OX направлена вдоль хорды, как показано на рис.2.5. Введем угол α между прямой r , соединяющей точку в произвольный момент времени с центром окружности, и h . Тогда положение точки на хорде определяется выражением

$$x = L - htg\alpha, \quad (1)$$

а проекция силы на направление хорды $F = \frac{k}{r} \sin \alpha = \frac{k}{h} \cos \alpha \sin \alpha$. При этом уравнение движения точки имеет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{k}{h} \sin \alpha \cos \alpha \quad (2)$$

Т.к. скорость точки является функцией x , то уравнение (2) можно переписать:

$$m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{k}{h} \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{или} \quad md \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{k}{h} \sin \alpha \cos \alpha \cdot dx.$$

Из выражения (1) следует, что $dx = -\frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha$. Поэтому

$$md \left(\frac{v^2}{2} \right) = -k \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} d\alpha = k \frac{d(\cos \alpha)}{\cos \alpha}.$$

и $\frac{m}{2} \int_0^v d(v^2) = k \int_{\alpha_0}^0 \frac{d(\cos \alpha)}{\cos \alpha}$, где $\cos \alpha_0 = \frac{h}{R}$. Выполняя интегрирование,

получаем $\frac{mv^2}{2} = -k \ln(h/R) = k \ln(R/h)$. Тогда окончательно получаем

$$v = \sqrt{\frac{2k}{m} \ln \left(\frac{R}{h} \right)}.$$

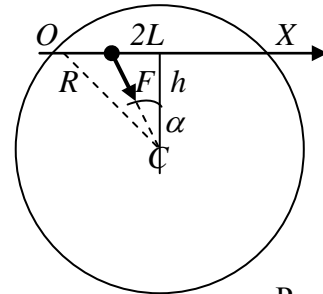


Рис.2.5

2.1.2.2. Задания для аудиторных занятий и самостоятельного выполнения

2.1. С поверхности земли вертикально вверх брошено тело массой m со скоростью v_0 . Определить скорость тела в момент падения на землю, если сила сопротивления воздуха $F_c = mkv^2$, где k – постоянный коэффициент.

2.2. Заряженная зарядом q частица массой m попадает в скрещенные однородные электрическое с напряженностью \vec{E} и магнитное с индукцией \vec{B} поля ($\vec{E} \perp \vec{B}$). В начальный момент времени направление скорости частицы перпендикулярно полям \vec{E} и \vec{B} . Какой должна быть начальная скорость частицы, чтобы ее движение оставалось равномерным и прямолинейным?

2.3. При измерении заряда электрона рассматривают падение масляной капли в воздухе. Найти закон движения капли, если сила сопротивления воздуха $F_c = 6\pi\eta r v$ (η - коэффициент вязкости, r - радиус капли). Со стороны однородного электрического поля на каплю действует сила qE , направленная вертикально вверх (q - заряд капли). Плотность масла - ρ .

2.4. Электрон попадает в скрещенные электрическое и магнитное поля ($\vec{E} \perp \vec{B}$). В начальный момент времени электрон покоился. Рассмотреть движение электрона.

2.5. Тело массой m движется в горизонтальном направлении прямолинейно под действием силы сопротивления $F = kv^{1/3}$ (k - постоянный коэффициент). В начальный момент времени скорость тела v_0 . Определить время движения тела до остановки.

2.6. В магнетроне электрон, вылетая из цилиндрического катода радиусом a с начальной скоростью v_0 , движется в магнитном поле, параллельном оси катода. Начальная скорость электрона перпендикулярна поверхности катода, индукция магнитного поля равна B . Определить максимальное расстояние r , на которое может удалиться электрон от оси катода.

2.7. Частица массы m движется под действием силы $\vec{F} = km\vec{r}$, где \vec{r} - радиус-вектор частицы, $k > 0$ - постоянный коэффициент. Начальное положение частицы \vec{r}_0 , а ее начальная скорость \vec{v}_0 направлена перпендикулярно \vec{r}_0 . Определить траекторию движения частицы.

2.8. Определить траекторию движения электрона в переменном электрическом $E = E_0 \cos \omega t$ и постоянном магнитном B полях (\vec{E} и \vec{B} - однонаправлены). В начальный момент времени скорость электрона \vec{v}_0 перпендикулярна линиям электрического и магнитного полей, частота электрического поля совпадает с циклотронной частотой $\omega = \frac{|e|\hbar}{m} B$.

2.9. Частица массы m движется под действием силы $\vec{F} = km\vec{r}$, где \vec{r} - радиус-вектор частицы, $k < 0$ - постоянный коэффициент. Начальное положение частицы \vec{r}_0 , а ее начальная скорость \vec{v}_0 направлена перпендикулярно \vec{r}_0 . Определить траекторию движения частицы.

2.10. Материальной точке, находящейся на поверхности Земли (радиус Земли R), сообщена вертикальная скорость $v = \sqrt{2gR}$ (вторая космическая скорость). Найти закон движения точки. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.11. Принимая силу сопротивления воздуха в свободном полете планера равной $\vec{F} = -k\vec{v}$ ($k > 0 = \text{const}$), найти закон его движения, если в начальный момент времени скорость планера была равна v_0 . Считать, что движение планера происходит по горизонтальной прямой. Масса планера m .

2.12. Плоский конденсатор, расстояние между пластинами которого равно d , помещен в однородное магнитное поле индукцией B , параллельной пластинам. В пространство между пластинами влетает электрон в направлении, перпендикулярном магнитному полю. Начальное положение электрона соответствует середине расстояния между пластинами. Какой должна быть начальная скорость электрона, чтобы он прошел через конденсатор? Напряжение на конденсаторе U .

2.13. Тело массы m падает в воздухе с высоты H без начальной скорости. Полагая сопротивление воздуха пропорциональным квадрату скорости (k - коэффициент пропорциональности), определить скорость тела и его координату как функции времени.

2.14. Самолет массой M в момент приземления имел скорость v_0 . Определить расстояние, которое он пройдет до остановки с выключенными двигателями под действием полной силы сопротивления $F = kv + \alpha v^2$ ($k, \alpha > 0$ - постоянные коэффициенты).

2.15. Частица массой m и зарядом q , движущаяся со скоростью v_0 , попадает в однородное постоянное магнитное поле индукцией B , причем скорость частицы перпендикулярна линиям поля. Найти траекторию движения частицы, считая, что на нее действует сила сопротивления $\vec{F} = -k\vec{v}$. Силой тяжести пренебречь. Координаты частицы в начальный момент времени считать нулевыми.

2.16. Материальная точка массой m притягивается к точке O с силой $F = \frac{km}{x^4}$. В начальный момент времени точка находится на расстоянии x_0 от центра и ее начальная скорость равна нулю. Определить скорость точки в момент времени, когда она находится на расстоянии $\frac{x_0}{2}$ от точки O .

2.17. Частица массой m , заряженная зарядом q , влетает в однородное электрическое поле напряженностью E со скоростью v_0 , перпендикулярной

линиям поля. Найти траекторию движения частицы с учетом силы вязкого трения $\vec{F} = -k\vec{v}$.

2.18. Материальная точка массой m притягивается к неподвижному центру с силой $F = \frac{\alpha}{x^3}$ (x – расстояние от точки до центра). В начальный момент времени точка покоится и находится на расстоянии x_0 от центра притяжения. Через какое время точка попадет на центр притяжения?

2.19. Рассмотреть одномерное движение частицы массой m под действием упругой силы $F = -kx$ с учетом силы вязкого трения $F_c = -\alpha\dot{x}$. В начальный момент времени пружина не деформирована, скорость частицы равна v_0 .

Примеры 1-3 и задания 2.3, 2.5 2.10, 2.16 рекомендуется рассмотреть на практических аудиторных занятиях и выполнить в качестве домашних заданий.

2.2. Теоремы динамики точки и системы точек

2.2.1. Краткие теоретические сведения

Уравнения движения системы из N материальных точек имеют вид:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)} \quad i=1,2,\dots,N,$$

где $\vec{F}_i^{(i)}$ - результирующая всех внутренних сил, действующих на i -тую точку системы, а $\vec{F}_i^{(e)}$ - результирующая всех внешних сил, действующих на эту точку.

Т.к. внутренние силы зависят только от расстояний между взаимодействующими точками, то вводится функция $U^{(i)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$ такая, что

$$\vec{F}_i^{(i)} = -\frac{\partial U^{(i)}}{\partial \vec{r}_i}, \quad \text{причем} \quad U^{(i)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum_j u_{ij}.$$

Здесь $u_{ij} = u(r_{ij})$ - потенциальная энергия взаимодействия i -той и j -точек, а $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$. Функция $U^{(i)}$ представляет собой потенциальную энергию взаимодействий всех точек системы.

Если внешние силы потенциальны, то

$$\vec{F}_i^{(e)} = -\frac{\partial U^{(e)}}{\partial \vec{r}_i}, \quad \text{причем} \quad U^{(e)} = \sum_i u_i, \quad \text{где} \quad u_i = u(\vec{r}_i) - \text{потенциальная}$$

энергия i -той точки во внешнем потенциальном поле.

Динамическими характеристиками материальной точки являются ее импульс $\vec{p} = m\vec{v}$, момент импульса $\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]$ и кинетическая энергия $T = \frac{mv^2}{2}$.

Для системы точек

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i, \quad \vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum [\vec{r}_i \vec{p}_i], \quad T = \sum T_i = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Т.к. внутренние силы потенциальны и подчиняются третьему закону Ньютона, то их сумма, а также сумма моментов всех внутренних сил равны нулю. Следствием этого положения являются основные теоремы динамики, определяющие изменения импульса, момента импульса и кинетической энергии системы точек. В соответствии с теоремами динамики

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{K}, \quad \text{где } \vec{K} = \sum \vec{F}_i^{(e)} \text{ - главный вектор внешних сил;} \quad (2.3)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_0, \quad \text{где } \vec{M}_0 = \sum \vec{M}_i^{(e)} = \sum [\vec{r}_i \vec{F}_i^{(e)}] \text{ - главный момент внешних сил;} \quad (2.4)$$

$$\frac{dT}{dy} = N^{(i)} + N^{(e)}, \quad \text{где } N^{(i)} = \sum \vec{F}_i^{(i)} \vec{v}_i \text{ - мощность всех внутренних сил,}$$

$$\text{а } N^{(e)} = \sum \vec{F}_i^{(e)} \vec{v}_i \text{ - мощность всех внешних сил.} \quad (2.5)$$

Теорема об изменении кинетической энергии (2.5) может быть представлена так:

$$dT = \delta A^{(i)} + \delta A^{(e)},$$

т.е. работа всех внутренних и внешних сил приводит к изменению кинетической энергии системы точек.

Т.к. внутренние силы потенциальны, то $\delta A^{(i)} = -dU^{(i)}$ и

$$d(T + U^{(i)}) = \delta A^{(e)}. \quad (2.6)$$

Величина $E = T + U^{(i)}$ называется полной механической энергией системы. Таким образом, изменение полной энергии системы происходит за счет работы внешних сил: $dE = \delta A^{(e)}$.

В замкнутой системе

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = cconst, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \Rightarrow \vec{L} = const. \quad (2.7)$$

Полная энергия системы сохраняется и в том случае, если внешние силы потенциальны, т.к. $\delta A^{(e)} = -dU^{(e)}$ и, следовательно,

$$d(T + U^{(i)} + U^{(e)}) = d(T + U) = 0. \quad (2.8)$$

Важнейшим приложением теоремы об изменении кинетической энергии и сохранения энергии замкнутой системы является решение задачи об одномерном движении в потенциальном поле $U(x)$, для которого

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = const. \quad (2.9)$$

Из (2.9) следует, что движение возможно лишь в области, где $E \geq U(x)$. В точках, где $E = U(x)$ скорость обращается в нуль и меняет направление;

такие точки называются поворотными. Если движение системы ограничено двумя поворотными точками, то оно называется финитным – такое движение происходит в ограниченной области значений $x_2 \geq x \geq x_1$ (x_2 и x_1 – корни уравнения $E = U(x)$). Если движение неограниченно поворотными точками, или ограничено одной поворотной точкой, то оно неограниченно в пространстве и называется инфинитным. Из (2.9) также следует, что уравнение одномерного движения определяется общим интегралом

$$t = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} + const. \quad (2.10)$$

В случае финитного движения период движения можно определить по формуле

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}. \quad (2.11)$$

Можно показать, что законы сохранения энергии, импульса и момента импульса замкнутой системы связаны с фундаментальными свойствами симметрии пространства и времени. Закон сохранения энергии является следствием однородности времени, закон сохранения импульса связан с однородностью пространства, закон сохранения момента импульса – с изотропностью пространства.

С симметрией внешних потенциальных силовых полей связаны две теоремы о сохранении отдельных составляющих импульса и момента импульса:

1. Если при переносе системы как целого во внешнем потенциальном силовом поле вдоль некоторого направления l ее потенциальная энергия не изменяется, то сохраняется проекция импульса на это направление, т.е.

$$\text{если } \frac{\partial U}{\partial l} = 0, \text{ то } \frac{dP_l}{dt} = 0 \Rightarrow P_l = const. \quad (2.12)$$

2. Если при повороте системы как целого во внешнем потенциальном поле на угол φ относительно некоторой оси l ее потенциальная энергия не меняется, то сохраняется проекция момента импульса на эту ось, т.е.

$$\text{если } \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \varphi_l} = 0, \text{ то } \frac{dL_l}{dt} = 0 \Rightarrow L_l = const. \quad (2.13)$$

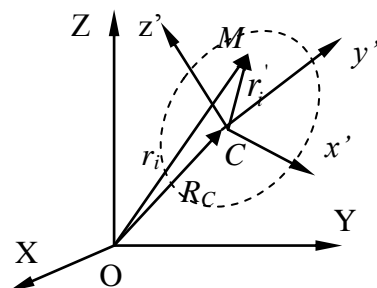


Рис.2.6

Одним из основных понятий динамики системы точек является понятие центра масс. Центром масс называется точка C , относительно которой полный импульс материальных точек системы равен нулю. Система координат, связанная с неподвижным наблюдателем (XYZ на рис. 2.6) называется лабораторной системой отсчета или л-системой. Система координат с началом в центре масс C (система $x'y'z'$ на

рис.2.6) называется *C*-системой. Т.к.

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i \quad \text{и} \quad \vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{V}_C,$$

где \vec{r}_i и \vec{v}_i - радиус-вектор и скорость *i*-той точки в л-системе,

\vec{r}'_i и \vec{v}'_i - радиус-вектор и скорость *i*-той точки в *C*-системе,

\vec{R} и \vec{V} - радиус-вектор и скорость центра масс.

Из определения центра масс следует, что импульс системы относительно неподвижного наблюдателя

$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum m_i \vec{v}'_i + \sum m_i \vec{V} = M \vec{V}, \quad (2.14)$$

где $M = \sum m_i$ - масса системы как целого. Таким образом, в лабораторной системе отсчета полный импульс механической системы определяется как импульс точки, масса которой равна массе всей системы.

Из (2.11) следует, что положение центра масс определяется выражением:

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}. \quad (2.15)$$

При этом центр масс движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы, под действием главного вектора внешних сил:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{K}. \quad (2.16)$$

Центр масс замкнутой системы движется равномерно и прямолинейно или покоится.

С движением центра масс и движением относительно центра масс связана теорема Кенига - кинетическая энергия системы может быть представлена как кинетическая энергия движения центра масс и кинетическая энергия движения материальных точек относительно центра масс:

$$T = \frac{MV^2}{2} + \sum \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (2.17)$$

2.2.2. Практикум по решению задач

2.2.2.1. Примеры решения задач

Пример 1. Определить зависимость скорости движения ракеты под действием одной только реактивной силы, если известен закон изменения массы ракеты со временем, а относительная скорость выброса массы равна *u*.

Решение

Пусть масса ракеты в момент времени *t* равна *m*, а ее скорость – *v*. Т.к. ракета движется только под действием внутренней реактивной силы, то полный импульс ракеты и отбрасываемой массы есть величина постоянная. При этом скорость отбрасываемой массы в системе отсчета, связанной с неподвижным наблюдателем, равна (*u – v*). Тогда в соответствии с законом сохранения импульса

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) + (v-u)\left(-\frac{dm}{dt}\right) = 0. \quad (1)$$

Выражение (1) записано в проекции на направление движения ракеты. Величина $-\frac{dm}{dt} > 0$ представляет собой массу, отбрасываемую в единицу времени (величина $dm < 0$ – массы ракеты уменьшается за счет выброса ее части за время dt). Раскрывая скобки в (1), получаем

$$m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} = -(u-v) \frac{dm}{dt} \quad \text{или} \quad m dv = -u dm.$$

Разделяя переменные, получаем $\frac{dm}{m} = -\frac{dv}{u}$. Интегрирование этого уравнения приводит к зависимости скорости ракеты от ее массы:

$$v = -u \ln m + C,$$

где C – постоянная интегрирования, которая может быть определена из начальных условий. Если в начальный момент времени масса ракеты была равной m_0 , а ее скорость равной нулю, то $C = u \ln m_0$. Окончательно получаем

$$v(t) = u \ln \left(\frac{m_0}{m(t)} \right).$$

Пример 2. Тело брошено вертикально вверх с поверхности земли с начальной скоростью v_0 . Определить высоту подъема тела, принимая силу сопротивления воздуха пропорциональной скорости тела (коэффициент пропорциональности равен k).

Решение

Введем систему координат с началом на поверхности земли так, что ось Ox совпадает с направлением начальной скорости тела. Движение тела можно рассматривать как движение материальной точки в потенциальном поле $U(x) = mgx$ при наличии диссипативной силы $F = -kv$. В соответствии с теоремой об изменении кинетической энергии, а также учитывая, что для потенциальных сил $\delta A = -dU$, можно записать уравнение

$$mvdv = -mgdx - kvdx. \quad (1)$$

Учтем, что скорость можно рассматривать как функцию координаты. Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$v \frac{dv}{dx} dx = -gdx - \frac{k}{m} v dx \quad \text{или} \quad v \frac{dv}{dx} = -g - \frac{k}{m} v.$$

Разделяя в последнем уравнении переменные и введя $\alpha = \frac{mg}{k}$, получаем:

$$dx = -\frac{m}{k} \frac{v dv}{\alpha + v}.$$

Выполним интегрирование этого уравнения в пределах

$$\int_0^h dx = -\frac{m}{k} \int_{v_0}^0 \frac{v dv}{\alpha + v}.$$

Отсюда
$$h = -\frac{m}{k} \left(\int_{v_0}^0 \frac{\alpha + v}{\alpha + v} dv - \alpha \int_{v_0}^0 \frac{dv}{\alpha + v} \right) = \frac{mv_0}{k} + \frac{\alpha m}{k} \ln \frac{\alpha}{\alpha + v_0}. \quad (2)$$

Подставляя значение α и преобразуя выражение (2), окончательно получаем:

$$h = \frac{mv_0}{k} \left(1 - \frac{mg}{kv_0} \ln \left(1 + \frac{kv_0}{mg} \right) \right).$$

Пример 3. Определить период колебаний частицы массы m , движущейся в поле $U(x) = k|x|$ (k – постоянный коэффициент), если ее полная энергия есть величина постоянная и равна E .

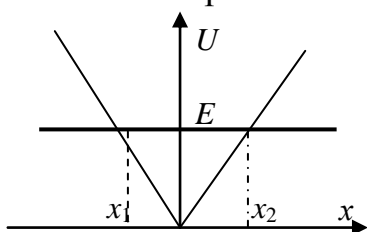


Рис.2.7

Решение

На рис. 2.7 представлена зависимость $U(x)$, из которого видно, что точки $x_{1,2} = \pm \frac{E}{k}$ являются

поворотными, т.е. движение носит финитный характер. Рассмотрим движение частицы в области

$0 \leq x \leq x_2 = \frac{E}{k}$. Очевидно, что движению частицы в

этой области в направлении $x > 0$ соответствует скорость $v = \dot{x} \geq 0$, причем в точке $x_2 = \frac{E}{k}$ скорость обращается в нуль с последующим изменением

направления. Для этой области $\frac{m\dot{x}^2}{2} = E - kx$ и $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - kx)}$.

Движение в рассматриваемой области происходит в течение четверти периода,

поэтому $T = 4 \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{E/k} \frac{dx}{\sqrt{(E - kx)}}$.

Выполняя интегрирование, получаем $T = 4 \frac{\sqrt{2mE}}{k}$.

Пример 4. Два тела массами m_1 и m_2 связаны нитью длины l и движутся по гладкой горизонтальной поверхности так, что нить остается все время натянутой. В некоторый момент времени оказалось, что скорость первого тела перпендикулярна нити и равна v , а скорость второго тела равна нулю. Определить силу натяжения нити.

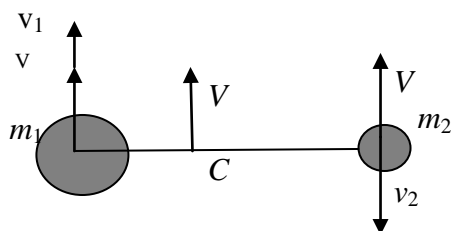


Рис. 2.8

Решение

Единственной силой, действующей на каждую из масс системы, является сила натяжения нити, которую можно

рассматривать как внутреннюю силу. Поэтому центр масс системы либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно. Центр масс системы, описанной в условии задачи, не может покоиться, т.к. в этом случае невозможна была бы ситуация, когда в некоторый момент времени одно из тел имеет скорость, отличную от нуля, а другое - равную нулю. Такая ситуация может быть реализована лишь в том случае, если центр масс движется с постоянной скоростью V , совпадающей по направлению со скоростью v_1 первого тела относительно центра масс, и равной по величине, но направленной противоположно скорости v_2 второй массы в указанный момент времени (рис. 2.8). Таким образом, тела m_1 и m_2 , связанные натянутой нитью, вращаются относительно центра масс, и, кроме того, система как целое движется со скоростью V . Тогда в рассматриваемый момент времени

$$v = v_1 + V, \text{ а } v_2 = V.$$

Из определения центра масс следует, что

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 \text{ или } m_1 v_1 = m_2 V,$$

Откуда $v_1 = \frac{m_2}{m_1} V$ и $v_2 = V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v$.

С другой стороны, положение центра масс можно определить из соотношения $m_2 r_2 = m_1 (l - r_2)$, откуда $r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l$ - расстояние от центра

масс до второго тела. Т.к. тела движутся под действием силы натяжения нити, то

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{r r_1} = \frac{m_2 v_2^2}{r_2} = \frac{m_2 V^2}{r_2} = \frac{m_1 m_2}{m + m_2} \frac{v^2}{l}.$$

Пример 5. Два тела массами M_1 и M_2 имеют внутренние энергии E_1 и E_2 и скорости центров масс \vec{v}_1 и \vec{v}_2 соответственно. Какова внутренняя энергия системы этих двух тел, если потенциальной энергией их взаимодействия можно пренебречь?

Решение

В соответствии с теоремой Кенига полная энергия рассматриваемой системы

$$E = T_C + T_{i\delta i} + U,$$

где T_C – кинетическая энергия центра масс системы, $T_{\text{отн}}$ – кинетическая энергия движения тел системы относительно центра масс, $U = E_1 + E_2$ – внутренняя энергия тел системы (взаимодействие между телами отсутствует). При этом внутренняя энергия системы представляет собой полную энергию системы за исключением энергии ее движения как целого, т.е

$$E_{\text{отн}} = T_{i\delta i} + E_1 + E_2.$$

Кинетическая энергия относительного движения

$$T_{i\delta i} = \frac{M_1 v_{10}^2}{2} + \frac{M_2 v_{20}^2}{2},$$

где $\vec{v}_{10} = \vec{v}_1 - \vec{V}$ и $\vec{v}_{20} = \vec{v}_2 - \vec{V}$ - скорости первого и второго тел относительно центра масс, а \vec{V} - скорость центра масс системы, причем по определению

$$\vec{V} = \frac{M_1 \vec{v}_1 + M_2 \vec{v}_2}{M_1 + M_2}.$$

Тогда $\vec{v}_{10} = \frac{M_2}{M_1 + M_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$, $\vec{v}_{20} = -\frac{M_1}{M_1 + M_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$, и

$$T_{i \partial i} = \frac{M_1 M_2}{2(M_1 + M_2)} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2.$$

Таким образом, внутренняя энергия системы двух тел равна:

$$E_{\text{вн}} = E_1 + E_2 + \frac{M_1 M_2}{2(M_1 + M_2)} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2.$$

Пример 6. Какие проекции импульса и момента импульса сохраняются при движении частицы: а) в однородном поле; б) в поле цилиндра; в) в поле конуса?

Решение

а) однородное поле. Силовые линии однородного поля – система параллельных линий. Поэтому целесообразно ввести декартовы координаты, совместив с направлением силовых линий одну из координатных осей, например ось Z (рис. 2.9).

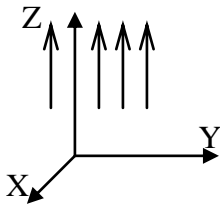


Рис.2.9

Т.к. плотность силовых линий однородного поля постоянная, то потенциальная энергия частицы при ее движении в таком поле в направлениях OX и OY не меняется, т.е.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

(1)

В соответствии с теоремой о симметрии внешнего потенциального поля и сохранении отдельных составляющих импульса из (1) следует, что

$$p_x = \text{const} \quad \text{и} \quad p_y = \text{const}.$$

Кроме того, потенциальная энергия частицы не меняется и при повороте на произвольный угол φ относительно оси Z , т.е.

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_z} = 0. \quad (2)$$

В соответствии с теоремой о симметрии внешних потенциальных полей и сохранения отдельных составляющих момента импульса из (2) следует, что

$$L_z = \text{const}.$$

б) поле цилиндра. Поле цилиндра является осесимметричным, в котором $u = u(r)$, где r – расстояние от оси симметрии Z (рис.2.10). Поэтому

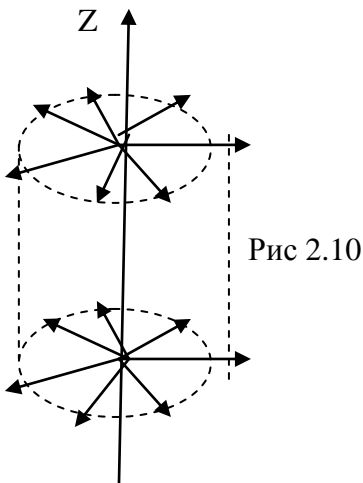


Рис 2.10

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0 \Rightarrow p_z = const.$$

Т. к. потенциальная энергия точки в таком поле также не зависит от угла поворота относительно оси Z , то

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_z} = 0.$$

Поэтому в поле цилиндра сохраняющейся величиной является и проекция момента импульса:

$$L_z = const.$$

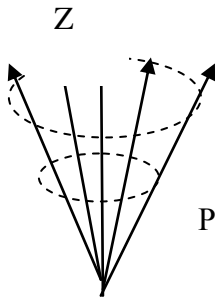


Рис.2.11

в) поле конуса. В этом случае силовые линии поля представляют собой пучок лучей с осью симметрии Z (рис.2.11). Потенциальная энергия частицы в таком поле $U = U(r, z)$, где r – расстояние от оси Z . Поэтому потенциальная энергия частицы не зависит только от угла поворота относительно оси симметрии т.е.

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_z} = 0.$$

Таким образом, в поле конуса сохраняется лишь одна проекция момента импульса $L_z = const$.

2.2.2.2. Задания для аудиторного и самостоятельного выполнения

Теорема об изменении кинетической энергии. Одномерное движение

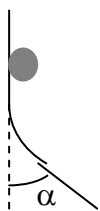


рис.2.12

2.20. Тело скользит по плоской поверхности, плавно переходящей в другую поверхность, расположенную под углом α к первой, как показано на рис.2.12. Коэффициент трения равен μ . Определить кинетическую энергию тела в конце участка сопряжения, если в начале этого участка она была равна T_0 . Обе поверхности горизонтальные.

2.21. Частица массы M влетает в область, где на нее действует тормозящая сила, пропорциональная ее скорости (коэффициент пропорциональности – k). Доказать, что глубина проникновения частицы в область торможения пропорциональна начальной скорости.

2.22. Тело брошено с поверхности Земли вертикально вверх с начальной скоростью v_0 . Определить высоту подъема тела, пренебрегая сопротивлением воздуха, но с учетом зависимости ускорения свободного падения от высоты. Радиус Земли равен R .

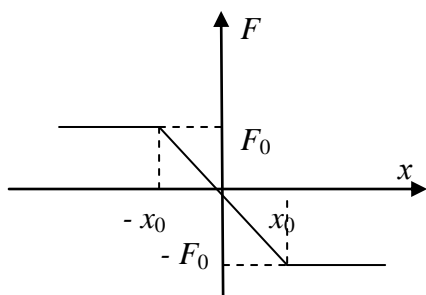


Рис.2.13

2.23. Зависимость силы, действующей на движущуюся прямолинейно вдоль x частицу, представлена на рис. 2.13. Какова область движения частицы, если ее максимальная кинетическая энергия равна T_0 ?

2.24. Три шарика массы M каждый соединены одинаковыми пружинами жесткости k и образуют равносторонний треугольник.

Одновременно всем шарикам сообщают скорость v в направлениях от центра системы. На какое наибольшее расстояние сместятся шарики в этом направлении?

2.25. Две частицы, одна из которых закреплена, заряжены одноименными зарядами q_1 и q_2 и находятся на расстоянии L . Определить максимальную скорость свободной частицы массой m , если в начальный момент времени ее скорость была равна v_0 .

2.26. Решить задачу 2.14 с использованием теоремы об изменении кинетической энергии.

2.27. Тело массы m , брошенное вертикально вниз с некоторой высоты с начальной скоростью v_0 , упало на поверхность земли со скоростью v . С какой высоты падало тело, если сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости (коэффициент пропорциональности – k)?

2.28. Между двумя закрепленными зарядами в точке A отпускают частицу зарядом q . Расстояние AB (рис.2.14) эта частица проходит за время t_0 . За какое время пройдет это расстояние та же частица, заряженная до $3q$, если ее также отпустить в точке A ?

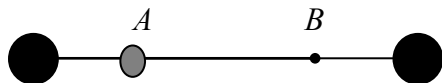


Рис.2.14

2.29. Тело падает с высоты H без начальной скорости на вертикально расположенную пружину. Под действием упавшего груза пружина сжимается на величину h . Определить время сжатия пружины, пренебрегая ее массой и силами трения в системе.

2.30. Используя интеграл энергии для квазиупругой силы $E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$, получить закон движения материальной точки, если в начальный момент времени ее скорость максимальна и равна v_0 .

2.31. Два заряда поместили на расстоянии L друг от друга и отпустили без начальной скорости. Через время t_0 расстояние между зарядами

удвоилось. За какое время расстояние удвоится, если первоначальное расстояние между зарядами было бы равным $3L$?

2.32. Определить период одномерного движения частицы массой m с энергией E в потенциальном поле $U = U_0 \operatorname{tg} x$.

Рассмотрение примеров 2 и 3, а также выполнение заданий 2.30, 2.23 и 2.30 рекомендуется на практических аудиторных занятиях.

Теорема об изменении импульса. Центр масс и движение центра масс

2.33. Ионный ракетный двигатель испускает ионы, ускоренные разностью потенциалов U . Определить реактивную силу тяги ракетного двигателя, если ионный ток равен I . Масса иона M .

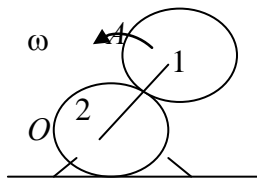


Рис.2.15

2.34 Однородная шестерня 1 радиусом r катится по неподвижной шестерне 2 того же радиуса при помощи кривошипа OA , вращающегося с угловой скоростью ω , как показано на рис. 2.15. Определить импульс системы, если масса шестерни 1 M_1 , а кривошип представляет собой однородный стержень массой M_2 .

2.35. Две точечные массы m_1 и m_2 , соединенные невесомым стержнем длины L , покоятся на гладкой горизонтальной поверхности. Первой массе сообщается в направлении, перпендикулярном стержню, скорость v . Определить силу, которой растягивается стержень.

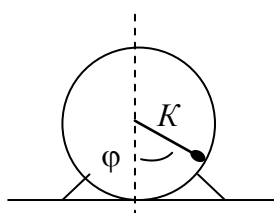


Рис.2.16

2.36. В полном цилиндре радиусом R и массой M находится маленький шарик массой m . Цилиндр может поступательно перемещаться по гладкой горизонтальной поверхности (рис.2.16). Найти закон движения центра масс цилиндра. Размерами шарика пренебречь. В начальный момент времени $\varphi = 0$, скорость шарика v_0 , цилиндр покоится.

2.37. Космическая станция состоит из двух отсеков массами M_1 и M_2 , соединенных между собой длинным однородным тросом длины L . Станция вращается относительно оси, перпендикулярной тросу и проходящей через центр масс системы. Какова угловая скорость вращения станции, если сила натяжения троса вблизи первого отсека равна T_1 , а вблизи второго - T_2 ? Какова масса троса?

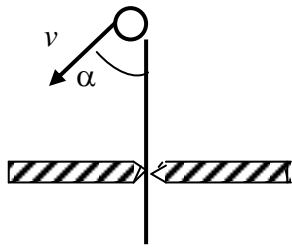


Рис.2.17

2.38. Веревку, перекинутую через гладкий гвоздь, протягивают со скоростью v сквозь щель (рис.2.17). Сила трения в щели F , масса единицы длины веревки ρ . Определить силу, действующую на гвоздь, если участки веревки со стороны гвоздя образуют угол α .

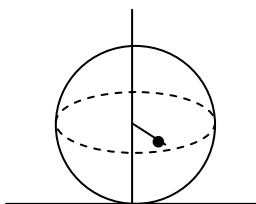


Рис.2.18

2.39. Тело налетает на неподвижную стенку под углом α к нормали. Коэффициент трения между стенкой и телом равен μ . Под каким углом это тело отразится от стенки?

2.40. Внутри сферы радиуса R и массой M в экваториальной плоскости вращается шарик массой m и радиусом r (рис.2.18). Сфера находится на гладкой горизонтальной поверхности. Определить силу давления шарика на поверхность сферы, если известно, что период обращения шарика равен T . Трением в системе пренебречь.

2.41. Две звезды массами M_1 и M_2 образуют двойную систему с известным расстоянием R между звездами. Каков период обращения звезд вокруг центра масс системы?

2.42. Три звезды массами M каждая сохраняют в своем движении конфигурацию равностороннего треугольника со стороной l . С какой угловой скоростью вращается этот треугольник?

На аудиторных занятиях рекомендуется рассмотреть примеры 1, 4 – 6 и выполнить задания 2.36, 2.37, 2.42.

2.3. Задачи динамики системы свободных точек

2.3.1. Краткие теоретические сведения

2.3.1.1. Упругие столкновения частиц

При упругом соударении налетающей частицы массы m_1 , движущейся со скоростью v , с неподвижной мишенью массы m_2 (соударения принято рассматривать в системе отсчета, относительно которой мишень до удара покоится) выполняются законы сохранения энергии и импульса

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}, \quad m_1 \vec{v} = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2',$$

или

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}, \quad \vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2',$$

причем центр масс системы движется равномерно и прямолинейно со скоростью

$$\vec{V} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}. \quad (2.18)$$

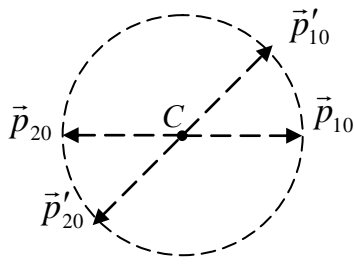


Рис.2.19

В системе центра масс

$$\vec{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}$$

и
$$\vec{v}_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v} = -\vec{V}. \quad (2.19)$$

Кроме того, $|\vec{p}_{10}| = |\vec{p}_{20}| = p$, $|\vec{p}'_{10}| = |\vec{p}'_{20}| = p'$ и $p = p'$. Таким образом, единственным

результатом упругого соударения в системе центра масс является изменение направления импульса частиц, как это показано на рис. 2.19. Угол между векторами \vec{p}_{10} и \vec{p}'_{10} (\vec{p}_{20} и \vec{p}'_{20}) называется углом рассеяния в С-системе.

Упругие соударения удобно рассматривать с помощью диаграммы столкновений, представленной на рис.2.20 для случая $m_2 > m_1$. Здесь \vec{v}_{10} и $\vec{v}_{20} = -\vec{V}$ определяются формулами (2.19), κ - угол рассеяния,

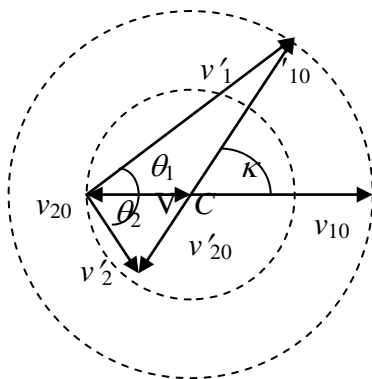


Рис.2.20

$\vec{v} = \vec{v}_{10} + \vec{V}$ - скорость налетающей частицы до столкновения, в лабораторной системе отсчета,

$\vec{v}'_1 = \vec{v}'_{10} + \vec{V}$ - скорость налетающей частицы после столкновения в лабораторной системе отсчета, $\vec{v}'_2 = \vec{v}'_{20} + \vec{V}$ - скорость мишени после столкновения в лабораторной системе отсчета.

Угол θ_1 Между направлением скорости налетающей частицы до и после столкновения называется углом рассеяния налетающей частицы. Угол θ_2 между направлением скорости налетающей частицы и скоростью мишени после столкновения называется углом отдачи, а $(\theta_1 + \theta_2)$ носит название угла разлета частиц.

Угол θ_1 Между направлением скорости налетающей частицы до и после столкновения называется углом рассеяния налетающей частицы. Угол θ_2 между направлением скорости налетающей частицы и скоростью мишени после столкновения называется углом отдачи, а $(\theta_1 + \theta_2)$ носит название угла разлета частиц.

2.3.1.2. Распад частиц

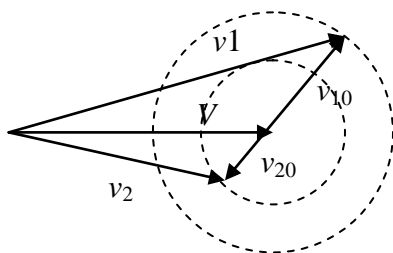


Рис.2.21

При распаде частицы массы M движущейся равномерно и прямолинейно, происходит превращение ее внутренней энергии в кинетическую энергию продуктов распада. Т.к. внешние силы отсутствуют, то центр масс системы продуктов распада движется со скоростью частицы V до ее распада. Относительно же центра масс полный импульс продуктов распада равен нулю. На рис. 2.21 представлена

диаграмма распада частицы M на два осколка массами m_1 и m_2 , движущихся со скоростями v_1 и v_2 . В этом случае

$$m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20} = 0, \text{ т.е. } m_1 v_{10} = -m_2 v_{20}, \text{ причем } m_1 + m_2 = M.$$

Закон сохранения энергии имеет вид:

$$\frac{MV^2}{2} + E_{\text{аі}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \quad (2.20)$$

где $E_{\text{аі}} = \frac{m_1 v_{10}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2}$ – энергия, выделяющаяся при распаде. (2.21)

2.3.1.3. Задача двух тел. Движение в центральном поле.

Задача двух тел в классической механике сводится к задаче о движении фиктивной μ -частицы ($\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$) в центрально-симметричном поле $U(r)$, центр которого находится в центре масс системы. При этом $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, где \vec{r}_1 и \vec{r}_2 – радиус-векторы первой и второй масс соответственно относительно центра масс системы, и $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$. Тогда, зная закон движения μ -частицы $\vec{r}(t)$, можно определить $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$:

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{и} \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (2.22)$$

При движении μ -частицы в поле $U(r)$ сохраняются ее полная энергия E и момент импульса \vec{L} . Т.к. момент импульса сохраняется как по величине, так и по направлению, то движение μ -частицы является плоским. Если ось Z совместить с направлением \vec{L} , то $L = L_z = \text{const}$, и движение происходит в плоскости XY , причем за равные промежутки времени конец радиус-вектора $\vec{r}(t)$ описывает равные площади.

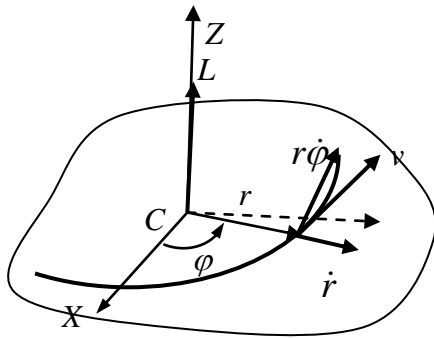


Рис.2.22

Плоское движение μ -частицы удобно описывать в полярных координатах с началом в точке C (рис.2.22). Тогда

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2, \quad (2.23 \text{ а})$$

$$L = \mu r^2 \dot{\phi} \quad (2.23 \text{ б})$$

и
$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r). \quad (2.24)$$

Таким образом, радиальное движение μ -частицы в центрально-симметричном поле можно рассматривать как одномерное в поле эффективного потенциала

$$U_{\text{эф}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r). \quad (2.25)$$

Из выражений (2.23 б) и (2.24) следуют уравнения:

$$dt = \frac{\mu r^2}{L} d\varphi \quad (2.26 \text{ а})$$

$$dt = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{y\delta}(r)}} \quad (2.26 \text{ б})$$

Интегрирование (2.26 б) дает в общем виде закон радиального движения μ -частицы как

$$t = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U_{y\delta}(r)}} + const, \quad (2.27)$$

а из сравнения (2.26а) и (2.26б) следует уравнение траектории в виде

$$\varphi = \pm \int \frac{(L/r^2)dr}{\sqrt{2\mu(E - U_{y\delta}(r))}} + const. \quad (2.28)$$

Траектория движения μ -частицы в центрально-симметричном поле симметрична относительно линии, проходящей через центр поля, называемой апсидой. При этом точка апсиды, находящаяся на минимальном расстоянии от силового центра, называется перигеием орбиты, а на максимальном (в случае замкнутых орбит) – апоцентром. Симметрия траекторий относительно апсид позволяет представлять уравнение траектории в виде:

$$\varphi = \int_{r_{\min}}^r \frac{(L/r^2)dr}{\sqrt{2\mu(E - U_{y\delta}(r))}}, \quad (2.29)$$

где r_{\min} - корень уравнения $E = U_{y\delta}(r)$.

2.3.1.4. Задача Кеплера

Задача о движении μ -частицы в кулоновском поле $U(r) = \pm \frac{\alpha}{r}$ (коэффициент $\alpha > 0$) называется задачей Кеплера. Знак (+) относится к полю сил отталкивания, а (-) – к полю сил притяжения. Подстановка кулоновского потенциала в выражения (2.29) приводит к уравнению траектории в виде уравнения конического сечения

$$r = \frac{p}{1 \pm \varepsilon \cos \varphi}, \quad (2.30)$$

где $p = \frac{L^2}{\mu\alpha}$ - параметр орбиты, а $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}$ - эксцентриситет орбиты; знак (+) относится к полю сил притяжения, а знак (-) – к полю сил отталкивания.

В зависимости от величин E , L и α или, соответственно, p и ε траектории μ -частицы могут быть круговыми (поле сил притяжения, $\varepsilon=0$), эллиптическими (поле сил притяжения, $\varepsilon<1$), параболического типа (поле сил притяжения, $\varepsilon=1$) или гиперболического типа (поле сил отталкивания, $\varepsilon>1$).

Классическая задача рассеяния

Задача об инфинитном движении частицы массой m (μ -частицы) в центральном поле $U(r)$ называется задачей рассеяния. Задача сводится к

нахождению угла рассеяния при известных скорости налетающей частицы вдали от центра v_0 и прицельного параметра ρ (прицельный параметр - расстояние, на котором прошла бы частица мимо силового центра в отсутствие силового действия). Законы сохранения энергии и момента импульса в этих условиях имеют вид:

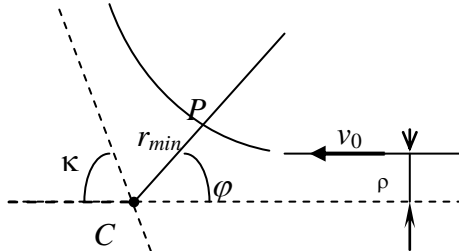


Рис.2.23

$$E = \frac{mv_0^2}{2} = const \text{ и } L = \rho mv_0 = const. \quad (2.29)$$

На рис. 2.22 схематически представлена траектория движения частицы в поле сил отталкивания. Здесь κ - угол рассеяния, а угол φ , как это следует из уравнений (2.21) и (2.22), равен

$$\varphi = \int_{\infty}^{r_{min}} \frac{(\rho / r^2) dr}{\sqrt{1 - (\rho / r)^2 - 2U_{y\hat{o}}(r) / mv_0^2}}. \quad (2.30)$$

Из рис.2.22 видно, что угол рассеяния $\kappa = \pi - 2\varphi$.

К важнейшим приложениям задачи рассеяния относится рассеяние пучка частиц силовым центром. Основной характеристикой таких процессов является дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma$, представляющее собой относительное число частиц с прицельными параметрами, заключенными в интервале от ρ , до $(\rho + d\rho)$, рассеиваемых в углы от κ до $(\kappa + d\kappa)$:

$$d\sigma = \frac{dn}{n} = 2\pi\rho d\rho = 2\pi\rho(\kappa) \left| \frac{d\rho}{d\kappa} \right| d\kappa. \quad (2.31)$$

Относительное число частиц, рассеиваемых в телесный угол $d\Omega$, образованный двумя конусами с вершинами в точке C и углами растворов κ и $(\kappa + d\kappa)$ определяется выражением

$$d\sigma = \rho(\kappa) \left| \frac{d\rho}{d\kappa} \right| \frac{d\Omega}{\sin \kappa} \quad (2.32)$$

Интегральное эффективное сечение рассеяния $\sigma_{y\hat{o}} = \pi\rho_{max}^2$ определяет число частиц, рассеиваемых силовым центром в единицу времени по всем углам $0 \leq \kappa \leq \pi$. При этом частицы, пересекающие площадь кругового сечения пучка с $\rho < \rho_{max}$ рассеиваются силовым центром, а частицы с $\rho > \rho_{max}$ - не рассеиваются.

2.3.2. Практикум по решению задач

2.3.2.1. Примеры решения задач

Пример 1. В результате упругого столкновения налетающей частицы с покоящейся первая полетела под углом α к направлению ее первоначального движения, а вторая – под углом β . Найти отношение масс этих частиц.

Решение

На рис. 2.24 схематически представлена интерпретация диаграммы столкновений рис. 2.20 с учетом данных в условии задачи. Здесь

$$BC = v'_{10} = v_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v; \quad DB = v'_1;$$

$$DC = MC = V = v_{20} = v'_{20} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v.$$

v и v'_1 – скорости налетающей частицы до и после столкновения. Тогда

$$\frac{BC}{DC} = \frac{v'_{10}}{v_{20}} = \frac{m_2}{m_1}.$$

С другой стороны, треугольник DCM – равнобедренный и поэтому $\kappa = \pi - 2\beta$, а угол DBC равен $\pi - \alpha - 2\beta$. С использованием теоремы синусов получаем $\frac{v'_{10}}{v_{20}} = \frac{\sin \alpha}{\sin(2\beta + \alpha)}$ или $\frac{m_1}{m_2} = \sin 2\beta (\operatorname{ctg} 2\beta + \operatorname{ctg} \alpha)$.

Пример 2. Частица массы m с импульсом p распадается на две одинаковые части. Каков минимальный угол разлета вторичных частиц, если при распаде выделяется энергия E ?

Решение

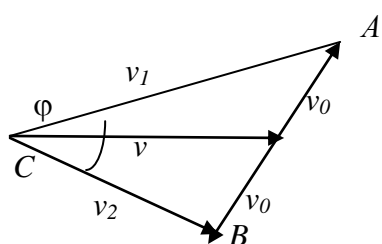


Рис.2.25

На рис.2.25 представлена диаграмма распада, где $v = \frac{p}{m}$ – скорость частицы до распада, v_1 и v_2 – скорости вторичных частиц, v_0 – одинаковые по величине и противоположные по направлению скорости вторичных частиц относительно центра масс, скорость которого

$v = \frac{0}{m}$ совпадает со скоростью первичной

частицы до распада, φ – угол разлета вторичных частиц.

Из закона сохранения энергии получаем

$$\frac{p^2}{2m} + E = \frac{m}{2} \left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} \right) \quad \text{или} \quad v_1^2 + v_2^2 = \frac{2p^2 + 4mE}{m^2}. \quad (1)$$

а в соответствии с теоремой косинусов из треугольника ABC следует, что

$$4v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \varphi.$$

Учитывая, что выделившаяся энергия $E = 2\frac{mv_0^2}{2}$, уравнение (2)

$$\text{преобразуется к виду } \frac{8E}{m} = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \varphi. \quad (2)$$

С учетом (1) уравнение (2) можно решить относительно произведения $2v_1v_2$:

$$2v_1v_2 = \frac{2p^2 - 4mE}{m^2}. \quad (3)$$

Т.к. $v_1^2 + v_2^2 \geq 2v_1v_2$, то из (1) и (3) следует, что

$$p^2 + 2mE \geq \frac{p^2 - 2mE}{\cos \varphi} \quad \text{и} \quad \cos \varphi \geq \frac{p^2 - 2mE}{p^2 + 2mE}.$$

Таким образом, $(\cos \varphi)_{\min} = \frac{p^2 - 2mE}{p^2 + 2mE}$ и $\varphi_{\min} = \arccos \frac{p^2 - 2mE}{p^2 + 2mE}$.

Пример 3. Частица массы m с энергией $E > 0$ и моментом импульса L движется в поле сил отталкивания $U(r) = \frac{\alpha}{r^2}$. Найти уравнение траектории частицы.

Решение

Законы сохранения энергии и момента импульса в поле $U(r) = \frac{\alpha}{r^2}$ можно представить в виде:

$$\frac{mr^2}{2} + \frac{A}{r^2} = E, \quad (1a) \quad mr^2\dot{\varphi} = L, \quad (16)$$

где $\frac{A}{r^2} = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r^2} = U_{\text{эф}}$. (2)

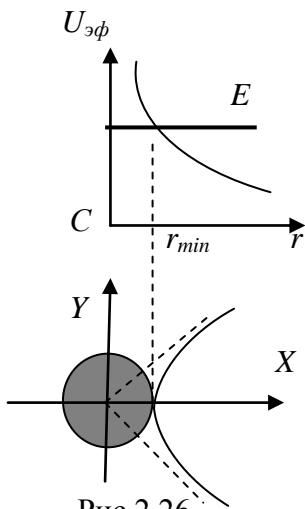


Рис.2.26

По виду эффективного потенциала (2) можно сделать вывод о том, что движение возможно лишь в области $E \geq \frac{A}{r^2}$. При этом минимальное расстояние, на которое частица может приблизиться к силовому центру (см. рис. 2.26), определяется как решение уравнения $E = U_{\text{эф}}$. Корнем этого уравнения является искомое минимальное расстояние

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{A}{E}} = \sqrt{\frac{L^2 + 2m\alpha}{2mE}}.$$

При этом возможные траектории, представляют собой траекториями гиперболического типа, т.к.

движение происходит в поле сил отталкивания (при $r = r_{\min}$ центростремительное ускорение направлено от силового центра).

Перейдем к количественному описанию траектории движения частицы, воспользовавшись общим интегралом для траекторий в центральном поле (2.28) и учитывая, что траектория симметрична относительно апсиды:

$$\varphi = \frac{L}{\sqrt{2mE}} \int_{r_{\min}}^r \frac{(1/r^2) dr}{\sqrt{1 - \frac{A}{E} \frac{1}{r^2}}}. \quad (3)$$

Введем новую переменную $\sqrt{\frac{A}{E}} \frac{1}{r} = \cos x$. Тогда $\sqrt{\frac{A}{E}} \frac{dr}{r^2} = \sin x \cdot dx$, и интеграл (3) принимает вид:

$$\varphi = \frac{L}{\sqrt{2mA}} \int_{x_{\min}}^x \frac{\sin x \cdot dx}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \frac{L}{\sqrt{2mA}} x \Big|_{x_{\min}}^x.$$

Подставляя $x = \arccos\left(\sqrt{\frac{A}{E}} \frac{1}{r}\right)$ и $x_{\min} = \arccos\left(\sqrt{\frac{A}{E}} \frac{1}{r_{\min}}\right) = \arccos(1) = 0$,

получаем

$$\varphi = \frac{L}{\sqrt{2mA}} \arccos\left(\sqrt{\frac{A}{E}} \frac{1}{r}\right) \quad \text{или} \quad r = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{E} \cos\left(\frac{\sqrt{2mA}}{L} \varphi\right)}.$$

Наконец, подставляя значение A , окончательно получаем уравнение траектории в виде:

$$r = \sqrt{\frac{L^2 + 2m\alpha}{2mE}} \frac{1}{\cos\left(\sqrt{1 + (2m\alpha / L^2)} \varphi\right)}.$$

Из полученного результата видно, что $r \rightarrow \infty$, если аргумент косинуса стремится к $\pi/2$, т.е. асимптоты гиперболической траектории (рис.2.26)

составляют углы $\varphi = \pm \frac{\pi}{2\sqrt{1 + (2m\alpha / L^2)}}$ с осью X .

Пример 4. Определить полное эффективное сечение захвата Землей частиц метеоритного потока. Скорость частиц потока вдали от Земли v_0 , радиус Земли R .

Решение

Рассмотрим движение метеорной частицы массой m с прицельным параметром ρ в гравитационном поле земли. Т.к. масса Земли $M \gg m$, то приведенная масса $\mu \approx m$. Тогда

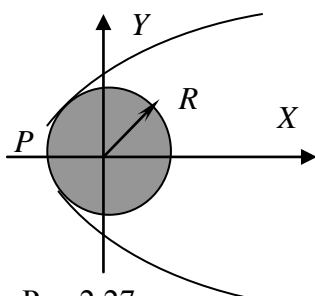


Рис.2.27

момент импульса частицы $L = mv_0\rho = const$; при этом радиус области, запрещенной для движения, зависящий от момента импульса, также определяется величиной прицельного параметра. Кроме того, необходимо учитывать, что в поле сил притяжения траектории налетающих частиц охватывают области, запрещенные для движения.

Очевидно, что Землей будут захватываться частицы, траектории которых характеризуются минимальным расстоянием от центра $r_{\min} \leq R$ (см. рис.2.27) и, соответственно, максимальным прицельным параметром ρ_{\max} . Как видно из рис.2.27, в перицентре орбиты скорость частицы перпендикулярна ее радиус-вектору, величина которого совпадает с радиусом Земли. Поэтому в перицентре

$$L_{\max} = nvR = mv_0\rho_{\max} \quad \text{или} \quad v = v_0 \frac{\rho_{\max}}{R}.$$

В соответствии с законом сохранения энергии в поле $U(r) = -G\frac{Mm}{r}$ (G – гравитационная постоянная) в точке P

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{R} \quad \text{или} \quad v_0^2 = v^2 \left(\frac{\rho_{\max}}{R} \right)^2 - 2G\frac{M}{R}.$$

Решая это уравнение относительно ρ_{\max} и учитывая, что $2G\frac{M}{R} = 2gR = v_2^2$ (g – ускорение свободного падения на поверхности Земли, v_2 – вторая космическая скорость на поверхности Земли), получаем:

$$\rho_{\max} = R\sqrt{1 + \left(\frac{v_0}{v_2} \right)^2}.$$

Эффективное сечение захвата $\sigma_{\text{эф}} = \pi\rho_{\max}^2 = \pi R^2 \left(1 + \frac{v_0^2}{v_2^2} \right)$, т.е. все метеорные частицы потока, пересекающие площадку $\sigma_{\text{эф}}$, захватываются полем Земли.

2.3.2.2. Задания для аудиторного и самостоятельного выполнения

Упругие столкновения и распад частиц

2.43. Построить диаграмму столкновений налетающей частицы массой m_1 с покоящейся мишенью массой m_2 для случаев: а) $m_1 > m_2$; б) $m_1 = m_2$.

2.44. Рассмотреть упругий лобовой удар налетающей частицы массой m_1 с покоящейся мишенью массой m_2 для случаев: а) $m_1 > m_2$; б) $m_1 < m_2$; в) $m_1 = m_2$.

2.45. Неподвижное атомное ядро распадается на два осколка массами m_1 и m_2 . Определить скорости осколков, если при распаде ядра выделяется энергия E .

2.46 В результате распада движущегося ядра появились два осколка массами m_1 и m_2 с импульсами p_1 и p_2 соответственно, разлетающихся под углом φ . Определить выделившуюся при распаде ядра энергию.

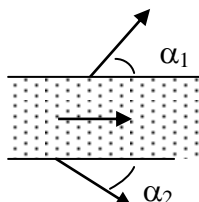


Рис.2.28

2.47 При двухчастичном распаде частиц с кинетической энергией T образуются частицы двух видов. Наибольший угол, под которым продукты распада вылетают из пучка первичных частиц, равен соответственно α_1 и α_2 (рис.2.28). Какая энергия выделяется при распаде первичной частицы?

2.48. На какой максимальный угол может отклониться налетающая на неподвижную мишень частица, если масса налетающей частицы m_1 больше массы мишени m_2 ?

2.49. Две одинаковые частицы движутся навстречу под углом α друг к другу со скоростями v_1 и v_2 . После упругого взаимодействия скорость первой из частиц стала равной u_1 . Найти угол разлета частиц.

2.50. В момент наибольшего сближения тел при упругом столкновении их скорости одинаковы и равны v . Каковы скорости этих тел после разлета, если до столкновения они были соответственно равными v_1 и v_2 . Тела движутся вдоль одной прямой.

2.51. Частица массы m_1 налетает со скоростью v на неподвижную частицу массы m_2 , которая после упругого удара полетела под углом α к направлению первоначального движения налетающей частицы. Определить скорость частицы m_2 после удара.

2.52. При упругом столкновении налетающей частицы с покоящейся первая полетела под углом α к направлению первоначального движения, а вторая – под углом β к этому направлению. Найти отношение масс этих частиц.

На аудиторных занятиях рекомендуется рассмотреть примеры 1-2 и выполнить задания 2.43, 2.44, 2.47, 2.52.

Движение в центральном поле. Задача Кеплера

2.53. Частица движется во внешнем потенциальном поле $U = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$.

Выполнить качественный анализ условий, при которых частица может совершать периодическое движение.

2.54. Частица движется во внешнем потенциальном поле $U = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$.

Выполнить качественный анализ условий, при которых частица может быть захвачена силовым центром.

2.565 Скорость спутника в перигее равна v_0 при расстоянии r от центра Земли. Какова скорость спутника в апогее? Каково расстояние от спутника до центра Земли в апогее?

2.56. Скорости двух электронов равны v , лежат в одной плоскости и при расстоянии d между ними образуют угол α с прямой, соединяющей эти электроны. На какое минимальное расстояние сблизятся электроны?

5.57. Две одинаковые частицы с зарядами q и скоростями u и v , лежащими в одной плоскости и составляющими углы α и β с соединяющей их линией, находятся на расстоянии L друг от друга. Определить массу частиц, если известно, что минимальное расстояние, на которое сблизаются частицы, равно r .

2.58. Космический зонд массы m движется вокруг планеты массы M и радиуса R с максимальным удалением (в апоцентре) r_A и с минимальным (в перигентре) r_p . Какую минимальную энергию нужно сообщить зонду, чтобы он покинул планету?

2.59. Материальная точка m под действием центральной силы описывает окружность радиуса R , причем силовой центр находится в точке C на этой же окружности. В момент времени, когда точка находилась на расстоянии $2R$ от силового центра, ее скорость была равна v_0 . Найти зависимость скорости точки и действующей на нее силы от радиус-вектора этой точки относительно силового центра.

2.60. Комета движется по эллиптической орбите с параметром орбиты p , эксцентриситет которой ϵ . В перигелии скорость кометы равна v_0 . Найти скорость планеты как функцию полярного угла.

2.61. Ядро атома азота можно рассматривать как сферу зарядом Ze и радиусом R . Чтобы протоны или нейтроны вызвали ядерную реакцию, они должны попасть в ядро. Найти отношение сечений реакций для протонов и нейтронов одинаковой энергии E . Считать, что $m_p = m_n$. Сечение реакции – максимальная площадь поперечного сечения пучка частиц, которые попадут в ядро.

2.62. Комета движется по параболической траектории, параметр которой равен p , а фокус совпадает с Солнцем. В перигелии скорость кометы v_0 . Определить модуль скорости кометы как функцию ее расстояния от Солнца.

2.63. Частица массой m попадает в поле центральных сил притяжения. Скорость частицы $\frac{\alpha}{r}$ ($\alpha = const$), где r расстояние от центра до частицы. Определить силу, действующую на частицу, и ее траекторию.

На аудиторных занятиях рекомендуется рассмотреть примеры 3-4 и выполнить задания 2.53, 2.54, 2.59, 2.60, 2.62.

3. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

3.1. Краткие теоретические сведения

Абсолютно твердое тело можно рассматривать как механическую систему, состоящую из материальных точек, расстояние между которыми в процессе движения не меняется.

3.1.1. Кинематическое описание

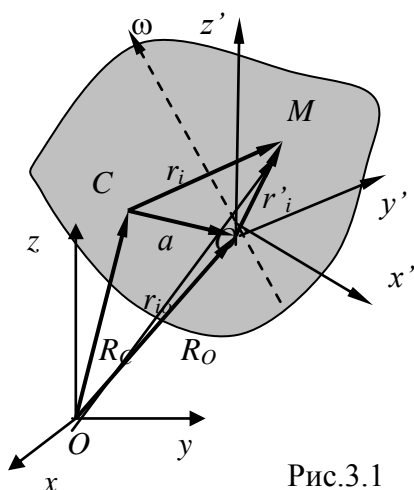


Рис.3.1

Пусть точка C – центр масс твердого тела, вращающегося относительно оси $\vec{\omega}$, а точка O' , лежащая на оси вращения и называемая полюсом, – начало координат системы отсчета, жестко связанной с телом (см. рис.3.1). Тогда положение произвольной точки M твердого тела, как это видно из рис.3.1, в лабораторной системе отсчета может быть представлено в виде:

$$\vec{r}_{io} = \vec{R}_O + \vec{r}'_i. \quad (3.1a)$$

С другой стороны,

$$\vec{r}_{io} = \vec{R}_C + \vec{r}_i. \quad (3.1б)$$

В этих выражениях \vec{r}_{io} – радиус-вектор рассматриваемой точки в л-системе, \vec{R}_C – радиус-вектор центра масс, \vec{R}_O – радиус-вектор полюса, \vec{r}_i – радиус-вектор точки M относительно центра масс, а \vec{r}'_i – радиус-вектор этой точки относительно полюса. В соответствии с определением твердого тела соотношения для скорости рассматриваемой точки будут иметь вид:

$$\vec{v}_{io} = \vec{V}_O + [\vec{\omega}' \vec{r}'_i], \quad (3.2a)$$

$$\vec{v}_{io} = \vec{V}_C + [\vec{\omega} \vec{r}_i], \quad (3.2б)$$

где $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$, но ось вращения $\vec{\omega}'$ проходит через центр масс.

Т.к. $\vec{r}_i = \vec{a} + \vec{r}'_i$ (\vec{a} – радиус-вектор полюса относительно центра масс), то сравнивая (3.2a) и (3.2б), получаем

$$\vec{V}_O = \vec{V}_C + [\vec{\omega}' \vec{a}]. \quad (3.3)$$

Таким образом, вращение тела относительно произвольной оси $\vec{\omega}$, не проходящей через центр масс, можно рассматривать как вращение относительно оси $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$, проходящей через центр масс. При этом

$$\vec{v}_{io} = \vec{V}_C + [\vec{\omega}' \vec{a}] + [\vec{\omega}' \vec{r}'_i]. \quad (3.4)$$

Следует различать следующие частные виды движения твердого тела.

1) Вращение относительно неподвижной оси $\vec{\omega}$, проходящей через центр масс. В этом случае $\vec{V}_C = 0$, $\vec{a} = 0$, $\vec{r}'_i = \vec{r}_i$ и

$$\vec{v}_{io} = \vec{v}_i = [\vec{\omega} \vec{r}_i]. \quad (3.5)$$

2) Вращение относительно неподвижной оси $\vec{\omega}$, не проходящей через центр масс. В этом случае

$$\vec{V}_O = 0, \quad \vec{V}_C = -[\vec{\omega} \vec{a}], \quad \vec{v}_{io} = [\vec{\omega} \vec{r}'_i] = [\vec{\omega}' \vec{r}'_i] - [\vec{\omega}' \vec{a}]. \quad (3.6)$$

3.1.2. Импульс твердого тела

Если M – масса твердого тела, то его импульс $\vec{P} = M\vec{V}_C$, где \vec{V}_C – скорость центра масс. В соответствии с теоремой динамики об изменении импульса механической системы

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{K}, \quad (3.7)$$

где \vec{K} – результирующая всех сил, действующих на тело.

3.1.3. Кинетическая энергия и момент инерции твердого тела

В соответствии с теоремой Кенига кинетическую энергию твердого тела можно представить в виде:

$$T = \frac{MV_c^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_i m_i [\vec{\omega} \vec{r}_i]^2, \quad (3.8)$$

где $\vec{\omega}$ – ось вращения, проходящая через центр масс.

Если ось вращения неподвижна и проходит через центр масс, то

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i [\vec{\omega} \vec{r}_i]^2.$$

Учитывая, что $[\vec{\omega} \vec{r}_i]^2 = \omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega} \vec{r}_i)^2$, кинетическую энергию твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси, проходящей через центр масс, можно записать в виде:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \omega_j \omega_k I_{jk}. \quad (3.9)$$

Здесь индексами $j, k = 1, 2, 3$ обозначены соответственно x, y, z , а

$$\begin{aligned} I_{11} = I_{xx} &= \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2); & I_{22} = I_{yy} &= \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2); & I_{33} = I_{zz} &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2); \\ I_{12} = I_{21} = I_{xy} = I_{yx} &= -\sum_i m_i x_i y_i; \\ I_{13} = I_{31} = I_{xz} = I_{zx} &= -\sum_i m_i x_i z_i; \\ I_{23} = I_{32} = I_{yz} = I_{zy} &= -\sum_i m_i z_i y_i. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Совокупность величин I_{jk} образует симметричный тензор второго ранга (см. Приложение 1), называемый тензором момента инерции.

Существуют такие направления осей x, y, z , для которых тензор момента инерции содержит лишь диагональные элементы. Эти значения

$$I_{11} = I_1, \quad I_{22} = I_2, \quad I_{33} = I_3.$$

Эти значения называются главными значениями тензора момента инерции. При этом, если тело имеет центр симметрии, то все направления являются главными, и $I_1 = I_2 = I_3 = I$. Если же тело обладает осью симметрии, то одно из главных направлений совпадает с направлением этой оси, а два других находятся в плоскости, перпендикулярной этой оси симметрии, произвольно ориентированы, но ортогональны друг другу. При этом главными значениями тензора момента инерции являются

$$I_1, \quad I_2 = I_3 \neq I_1.$$

На практике одну из координатных осей (как правило, ось z) совмещают с осью вращения (рис.3.2). В этом случае $\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega$, и кинетическая энергия твердого тела определяется выражением

$$T = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (3.11)$$

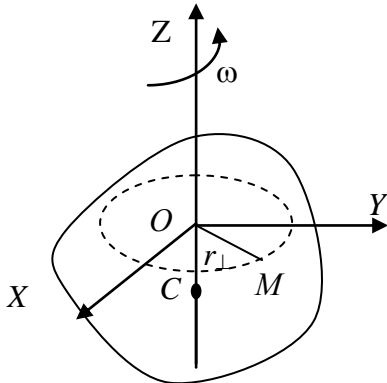


Рис.3.2

$$\text{где } I = I_{33} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i r_{\perp}^2 \quad (3.12)$$

называется моментом инерции твердого тела относительно оси вращения, проходящей через центр масс.

При вращении тела относительно неподвижной оси, не проходящей через центр масс, выражение (3.8) с учетом (3.6) принимает вид:

$$T = \frac{M[\vec{\omega}\vec{a}]^2}{2} + \sum_i \frac{m_i [\vec{\omega}\vec{r}_i]^2}{2}.$$

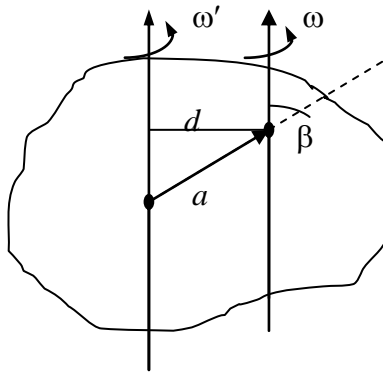


Рис.3.3

Т.к. $[\vec{\omega}\vec{a}]^2 = \omega^2 a^2 \sin^2 \beta$ и, как это видно из рис.3.3, $\omega^2 a^2 \sin^2 \beta = \omega^2 d^2$, то кинетическая энергия тела, вращающегося относительно неподвижной оси, не проходящей через центр масс, равна

$$T = \frac{(I_C + Nd^2)\omega^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

$$(3.13)$$

В этом выражении I - момент инерции твердого тела относительно рассматриваемой оси, а I_C - момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной данной.

Таким образом, момент инерции твердого тела относительно произвольной оси можно представить в виде суммы момента инерции относительно оси, параллельной данной, но проходящей через центр масс и

произведения массы тела на квадрат расстояния между этими осями (теорема Штейнера), т.е.

$$I = I_C + Md^2. \quad (3.14)$$

3.1.4. Момент импульса твердого тела

При вращении твердого тела относительно произвольной оси $\vec{\omega}$, проходящей через центр масс

$$\vec{L} = \sum_i m [\vec{r}_i [\vec{\omega} \vec{r}_i]] = \vec{\omega} \sum_i m_i \vec{r}_i^2 - \sum_i m_i \vec{r}_i (\vec{\omega} \vec{r}_i).$$

При этом проекции момента импульса имеют вид:

$$L_x = \omega_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z,$$

$$L_y = -\omega_x \sum_i m_i y_i x_i + \omega_y \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) - \omega_z \sum_i m_i y_i z_i = I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z,$$

$$L_z = -\omega_x \sum_i m_i z_i x_i - \omega_y \sum_i m_i z_i y_i + \omega_z \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z.$$

Если одна из осей координат совмещена с осью вращения, то имеется лишь одна, не равная нулю, проекция момента импульса, которая совпадает по направлению с осью вращения. В этом случае

$$L = \omega I, \quad (3.15)$$

где, в общем случае, $I = I_C + Md^2$ - момент инерции относительно некоторой неподвижной оси.

3.1.5. Теоремы динамики вращающегося твердого тела

В соответствии с теоремой об изменении момента импульса системы при вращении твердого тела относительно неподвижной оси

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_0, \quad (3.16)$$

где $\vec{L} = \vec{\omega} I$, а \vec{M}_0 - сумма моментов внешних сил относительно рассматриваемой оси вращения. Из уравнения (3.16) следует, что в отсутствие моментов внешних сил момент импульса вращающегося твердого тела сохраняется. Если $I = const$, то основное уравнение динамики для вращающегося тела имеет вид:

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\varepsilon} = \vec{M}_0, \quad (3.17)$$

где $\vec{\varepsilon}$ - угловое ускорение.

Умножая скалярно (3.17) на $\vec{\omega}$ при постоянном моменте инерции, получаем выражение для работы, совершаемой моментом силы, при вращении твердого тела относительно неподвижной оси:

$$I\vec{\omega}\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = \frac{dT}{dt} = \vec{M}_0\vec{\omega},$$

или

$$dT = \delta A = \vec{M}_0 d\vec{\varphi}. \quad (3.18)$$

3.1.6. Плоскопараллельное движение

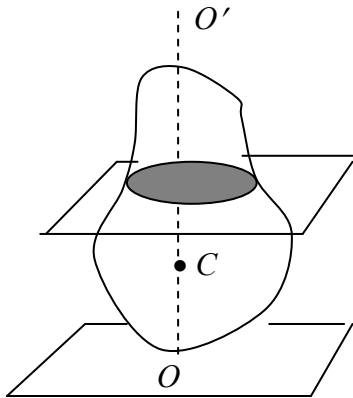


Рис.3.4

Важнейшим видом движения твердого тела является плоскопараллельное движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости – рис.3.4. При плоскопараллельном движении тело обладает тремя степенями свободы – двумя поступательными (плоское движение сечений тела, параллельных неподвижной плоскости) и одной вращательной относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной неподвижной плоскости.

Плоскопараллельное движение описывается системой уравнений

$$M \frac{d\vec{V}_C}{dt} = \vec{K}$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_0 \quad (3.19)$$

При этом кинетическая энергия и ее изменение определяются выражениями

$$T = \frac{MV_0^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \quad dT = \vec{K}d\vec{R}_C + M_0 d\varphi. \quad (3.20)$$

3.2. Практикум по решения задач

Пример 1. Определить момент инерции однородного шара радиуса R и массой M относительно оси, проходящей через его центр.

Решение

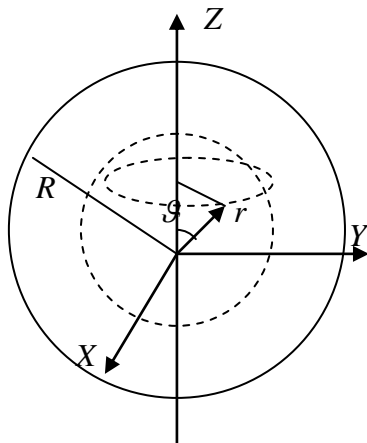


Рис.3.5

Пусть ρ - плотность материала шара. Тогда, как это видно из рис.3.5, элемент массы $dm = \rho dV = \rho r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ (см. Приложение 2) находится на расстоянии $r \sin \vartheta$ от оси OZ (направление любой оси, проходящей через центр масс, является в шаре главным). Момент инерции элемента массы dm в соответствии с (3.12) равен

$$dI = \rho r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \cdot r^2 \sin^2 \vartheta.$$

Момент инерции шара получаем интегрированием по всему объему шара:

$$I = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta \int_0^R r^4 dr = \rho \frac{8}{3} \pi \frac{R^5}{5}.$$

Учитывая, что $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$, окончательно получаем $I = \frac{2}{5} MR^2$.

Пример 2. Найти тензор момента инерции молекулы воды H_2O , относительно ее центра масс. Расположение атомов в молекуле показано на рис. 3.6, где m_o – масса атома кислорода, а m_h – масса атома водорода.

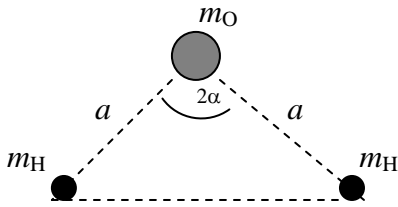


Рис.3.6

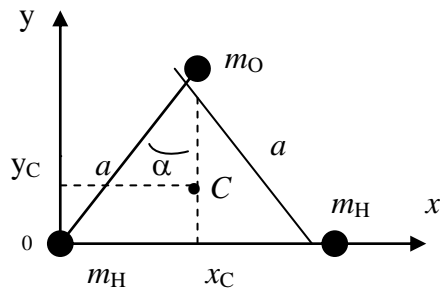


Рис.3.7

Решение

Определим положение центра масс молекулы относительно одного из атомов водорода (см. схематический рис 3.7). В соответствии с определением положения центра масс

$$x_C = \frac{m_H \cdot 0 + m_H \cdot 2a \sin \alpha + m_o \cdot a \sin \alpha}{M} = a \sin \alpha,$$

$$y_C = \frac{2m_H \cdot 0 + m_o \cdot a \cos \alpha}{M} = \frac{m_o}{M} a \cos \alpha,$$

$$z_C = 0,$$

где $M = 2m_H + m_o$.

Для нахождения компонентов тензора момента инерции введем систему координат с началом в точке C , как это показано на рис.3.8.

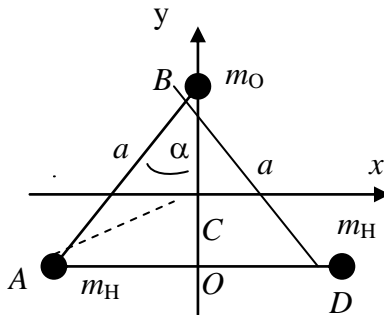


Рис.3.8

Момент инерции относительно оси x

$$\begin{aligned} I_{xx} &= 2m_H \cdot OC^2 + m_o \cdot BC^2 = \\ &= \frac{2m_H m_o^2}{M^2} a^2 \cos^2 \alpha + m_o \left(1 - \frac{m_o}{M}\right)^2 a^2 \cos^2 \alpha = \\ &= \frac{2m_H m_o}{M} a^2 \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

Момент инерции относительно оси y

$$I_{yy} = 2m_H \cdot AO^2 = 2m_H a^2 \sin^2 \alpha.$$

Момент инерции относительно оси z

$$\begin{aligned} I_{zz} &= 2m_H \cdot AC^2 + m_o \cdot BC^2 = 2m_H \left(a^2 \sin^2 \alpha + \frac{m_o^2}{M^2} a^2 \cos^2 \alpha \right) + \frac{4m_o m_H^2}{M} a^2 \cos^2 \alpha = \\ &= \frac{2m_H m_o}{M} a^2 \cos^2 \alpha + 2m_H a^2 \sin^2 \alpha = I_{xx} + I_{yy} \end{aligned}$$

Все недиагональные элементы тензора момента инерции равны 0. Действительно, т.к. $I_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i$ и $I_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i$, а молекула плоская (все проекции на ось z равны нулю), то $I_{xz} = I_{yz} = 0$. При вычислении составляющей $I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i$ учтем, что проекции положений атомов водорода на ось x одинаковы по величине и противоположны по знаку, а атом кислорода находится в точке $x=0$. Поэтому и $I_{xy} = 0$. Таким образом выбранная система координат является главной, а вычисленные значения I_{xx} , I_{yy} и I_{zz} являются главными значениями тензора момента инерции.

Пример 3. Однородное твердое тело, находящееся в покое, приводится во вращение относительно вертикальной неподвижной оси постоянным моментом M . При этом возникает момент сил сопротивления $M_c = \alpha \omega^2$ (α - постоянный коэффициент). Найти закон изменения угловой скорости. Момент инерции тела относительно оси вращения равен I . Какова установившаяся угловая скорость вращения тела?

Решение

Основное уравнение динамики тела имеет вид

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_0 - \alpha \omega^2.$$

Разделяя переменные в этом уравнении, получаем

$$\frac{d\omega}{1 - \frac{\alpha}{M_0} \omega^2} = \frac{M_0}{I} dt.$$

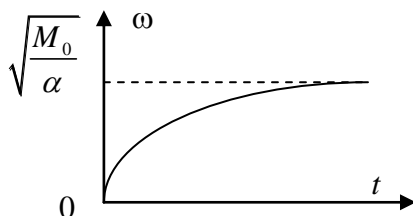
Интегрируем полученное выражение:

$$\int \frac{d\omega}{1 - \frac{\alpha}{M_0} \omega^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{1 + \sqrt{\frac{\alpha}{M_0}} \omega} + \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{1 - \sqrt{\frac{\alpha}{M_0}} \omega} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M_0}{\alpha}} \ln \frac{1 + \sqrt{\alpha / M_0} \omega}{1 - \sqrt{\alpha / M_0} \omega},$$

а $\frac{M_0}{I} \int dt = \frac{M_0}{I} t + \ln C$, где $\ln C$ - постоянная интегрирования.

Поэтому $\ln \frac{1 + \sqrt{\alpha / M_0} \omega}{1 - \sqrt{\alpha / M_0} \omega} = 2 \frac{\sqrt{M_0 \alpha}}{I} t + \ln C'$.

Отсюда получаем $\frac{1 + \sqrt{\alpha / M_0} \omega}{1 - \sqrt{\alpha / M_0} \omega} = C' e^{2 \frac{\sqrt{M_0 \alpha}}{I} t}$.



Т.к. в начальный момент времени при $t=0$ тело покоилось, т.е. $\omega(0) = 0$, то

Рис.3.9

$C'=1$. Тогда, выражая в явном виде зависимость угловой скорости от времени, получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{M_0}{\alpha}} \frac{e^{\frac{2\sqrt{M_0\alpha}t}{I}} - 1}{e^{\frac{2\sqrt{M_0\alpha}t}{I}} + 1}.$$

Проанализируем полученный результат. При $t \ll \frac{I}{M_0\alpha}$ экспоненту в числителе можно разложить в ряд и ограничиться величинами первого порядка малости; в знаменателе экспоненту можно принять равной 1. Тогда в начале движения угловая скорость тела возрастает линейно с течением времени по закону $\omega = \frac{M_0}{I}t$. При $t \rightarrow \infty$ устанавливается вращение с постоянной угловой скоростью $\omega = \sqrt{\frac{M_0}{\alpha}}$ (см. рис.3.9).

Пример 4. По горизонтальной плоскости катится цилиндр массой m и радиусом R со скоростью V_0 без проскальзывания. Какой будет установившаяся скорость цилиндра после упругого удара о гладкую вертикальную стенку, если коэффициент трения скольжения цилиндра о поверхность равен μ ? Через какое время после удара о стенку установится качение без проскальзывания? Описать движение цилиндра.

Решение

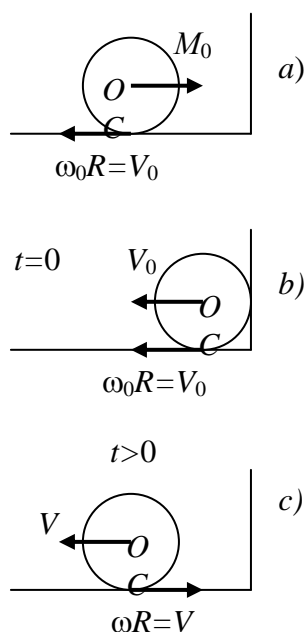


Рис.3.10

На рис.3.10а) показано качение цилиндра до удара о стенку. Т.к. проскальзывание отсутствует, то точка C неподвижна относительно неподвижного наблюдателя, и $\omega_0 R = V_0$. После упругого удара скорость центра масс цилиндра изменяется по направлению, как это показано на рис.3.10б), а угловая скорость в момент удара ($t=0$) остается прежней – цилиндр вращается по часовой стрелке. Движение цилиндра является плоскопараллельным, поэтому после удара при $t > 0$ описывается системой уравнений:

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu N \quad \text{и} \quad I \frac{d\omega}{dt} = \mu NR.$$

В этих уравнениях μN - сила трения покоя, направленная противоположно скорости v цилиндра после упругого удара, μNR - момент силы трения, раскручивающий цилиндр против часовой стрелки,

$I = \frac{mR^2}{2}$ - момент инерции цилиндра относительно оси вращения.

Интегрирование уравнений движения дает

$$v = -\frac{\mu N}{m}t + C_1 \quad \text{и} \quad \omega = \frac{\mu NR}{I}t + C_2 = \frac{2\mu N}{mR}t + C_2.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим из начальных условий:

при $t = 0$ $v = V_0$ и $\omega = -\omega_0 = -\frac{V_0}{R}$ (начальная угловая скорость направлена противоположно вращающему моменту силы трения). Тогда

$$v = -\frac{\mu N}{m}t + V_0 \quad \text{и} \quad \omega = \frac{2\mu N}{mR}t - \omega_0.$$

Непосредственно после удара поступательное движение цилиндра является замедленным под действием силы трения, а под действием момента силы трения угловая скорость уменьшается до нуля и затем возрастает в противоположном направлении – цилиндр начинает вращаться против часовой стрелки. Наконец, через промежуток времени τ устанавливается качение цилиндра без проскальзывания, т.е. выполняется условие $\omega R = V$. В этом случае

$$V = V_0 - \frac{\mu N}{m}\tau \quad \text{и} \quad \frac{V}{R} = \frac{2\mu N}{mR}\tau - \frac{V_0}{R}.$$

Умножая второе из равенств на R и сравнивая их правые части, получаем

$$V_0 - \frac{\mu N}{m}\tau = \frac{2\mu N}{m}\tau - V_0.$$

Отсюда находим время установления качения без проскальзывания после удара

$$\tau = \frac{2mV_0}{3\mu N} = \frac{2}{3} \frac{V_0}{\mu g}.$$

Подставляя значение τ в любое из выражений для V , получаем скорость установившегося без проскальзывания качения цилиндра

$$V = V_0 - \mu g \frac{2}{3} \frac{V_0}{\mu g} = \frac{1}{3} V_0.$$

3.2.2. Задания для аудиторного и самостоятельного выполнения

Момент инерции

3.1-5. Найти главные системы координат, связанные с центром масс, и главные моменты инерции:

3.1 полого шара, внутренний диаметр которого d , а внешний – D . Масса шара M .

3.2. Круглого цилиндра с радиусом основания R и высотой H . Масса цилиндра M .

3.3. Полого круглого цилиндра массы M высотой H . Внутренний радиус основания цилиндра равен r , а внешний – R .

3.4. Стержня массы M в форме прямого параллелепипеда со сторонами a , b и c .

3.5 Прямого цилиндра массы M , в основании которого находится эллипс с полуосями a и b .

3.6. Вычислить момент инерции тонкой полусферической оболочки радиуса R и массой M относительно оси, проходящей через ее центр перпендикулярно ограничивающей плоскости.

3.7. Определить момент инерции однородного стержня длины L относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов. Масса единицы длины стержня ρ .

3.8. Доказать, что для двухатомных молекул тензор момента инерции относительно системы координат, начало которой находится в центре масс молекулы, определяется соотношением $I = \mu r^2$, где μ – приведенная масса, а r – расстояние между атомами.

3.9. Момент инерции молекулы фтористого водорода HF $I = 1,37 \cdot 10^{-40}$ г·см². Определить расстояние между атомами водорода и фтора, если масса атома водорода $M_H = 1,67 \cdot 10^{-24}$ г, а масса атома фтора $M_F = 31,78 \cdot 10^{-24}$ г.

3.10. Вычислить момент инерции однородного полушара массой M и радиуса R относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно ограничивающей поверхности.

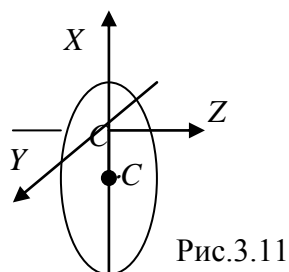


Рис.3.11

3.11. Вычислить компоненты тензора момента инерции однородного круглого диска массой M , эксцентрично насаженного на ось O перпендикулярную его плоскости. Радиус диска R , эксцентриситет $OC = a$ (C – центр масс диска). Система координат показана на рис.3.11.

Вращательное и плоскопараллельное движение твердого тела

3.12. Тонкий обруч радиусом R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω и поставили плашмя на горизонтальную поверхность. Через какое время обруч остановится, если коэффициент трения между ним и поверхностью равен μ ? Сколько оборотов сделает обруч до остановки?

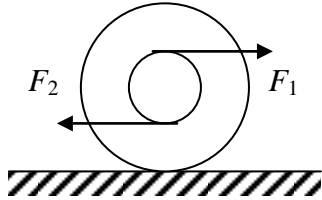


Рис.3.12

3.13. Однородная круглая катушка радиусом R и массой m обвита нитью в средней части барабана радиуса r так, что концы нити расходятся в разные стороны и натянуты постоянными горизонтальными силами F_1 и F_2 (рис.3.12). С каким ускорением движется ось катушки, если известно, что катушка катится без проскальзывания. Момент инерции катушки I .

I.

3.14. По горизонтальной поверхности катится без проскальзывания тонкое кольцо радиусом R со скоростью v . Описать движение кольца после упругого удара о вертикальную гладкую стенку, если коэффициент трения кольца о поверхность равен μ .

3.15. Однородная спица длиной L , стоящая на гладкой горизонтальной поверхности, начинает падать из вертикального положения. Определить скорость верхнего конца спицы при ударе о поверхность.

3.16. Вращающийся обруч радиуса R падает вертикально на горизонтальную поверхность и отскакивает от нее со скоростью v под углом 30° к вертикали уже не вращаясь. Какова угловая скорость обода до удара?

3.17. Однородное твердое тело, находящееся в покое, приводят во вращение относительно неподвижной вертикальной оси постоянным моментом, равным M_0 . При этом возникает момент сил сопротивления $M_c = k\omega$ (k - постоянный коэффициент). Найти закон изменения угловой скорости, если момент инерции твердого тела относительно оси вращения равен I .

3.18. Центру однородного цилиндра массой M и радиусом R , находящемуся на горизонтальной шероховатой поверхности, сообщена начальная скорость v_0 параллельно плоскости. Одновременно цилиндр

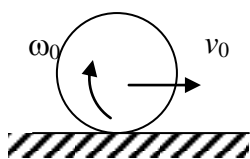


Рис.3.13

приводят во вращение с начальной угловой скоростью ω_0 , как показано на рис.3.13. Принимая $\omega_0 R < v_0$, определить время, начиная с которого центр цилиндра будет двигаться с постоянной скоростью. Определить эту скорость. Коэффициент трения μ .

3.19. Решить задачу **3.18** при условии $\omega_0 R > v_0$.

3.20. Решить задачу **3.18** для случая вращения цилиндра против часовой стрелки.

3.21. Решить задачу **3.18** для случая вращения цилиндра против часовой стрелки и при условии $\omega_0 R > v_0$.

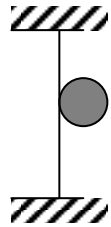


Рис.3.14

3.22. Однородная тяжелая веревка, концы которой закреплены на одной вертикали, охватывает диск массой M и радиусом R . С каким ускорением падает диск, если его отпустить?

3.23. Оси цилиндров соединены без скатывания (рис.3.15). Радиусы одинаковы, масса

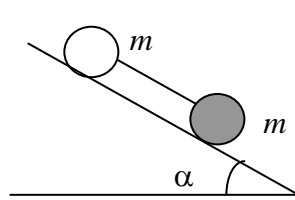


Рис.3.15

тонкостенного и сплошного невесомой штангой. Цилиндры проскальзывают с наклонной составляющей углом α с горизонтом. Радиусы цилиндров каждого из них m . Определить

силу натяжения штанги.

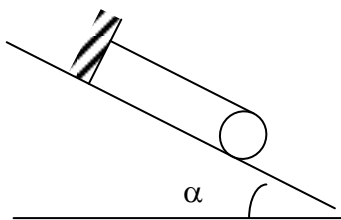


Рис.3.16

3.25. На тонкостенный цилиндр намотана нить, конец которой закреплен на стенке так, что при скатывании цилиндра с наклонной плоскости нить остается параллельной этой плоскости. Какую скорость приобрел цилиндр, если его ось прошла расстояние L ? Угол наклона плоскости α , коэффициент трения μ (рис.3.16).

Для аудиторных занятий и в качестве домашних заданий рекомендуется рассмотрение примеров 1 - 4 и выполнение заданий **3.2, 3.4, 3.6, 3.13, 3.17, 3.18, 3.24.**

4. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

4.1. Краткие теоретические сведения

В основе аналитической механики лежат представления о связях, силах реакций связей, числе степеней свободы системы и обобщенных координатах, с помощью которых описывается движение в общем случае несвободной (с наложенными на нее связями) механической системы.

Связями называются поверхности или линии, ограничивающие движение точек (тел) системы. Связи, уравнения которых можно представить в виде

$$f_\nu(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad \nu = 1, 2, \dots, k,$$

где k - число связей, называются голономными. Если связи не зависят явно от времени, то они являются стационарными.

На точки несвободной механической системы действуют активные и пассивные силы. Активная сила \vec{F}_i – равнодействующая всех внутренних и внешних сил, действующих на i -тую точку системы и не исчезающих при устранении связей. Пассивная сила \vec{R}_i - равнодействующая всех сил, действующих на i -тую точку системы со стороны связей; пассивные силы исчезают при снятии связей. Пассивные силы называют также силами реакции связей. Диссипативные силы (силы вязкого или сухого трения) относятся к активным силам.

Уравнения движения точек несвободной механической системы

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.1)$$

следует дополнить уравнениями связей

$$f_\nu(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad \nu = 1, 2, \dots, k. \quad (4.2)$$

Общее число уравнений (4.1)-(4.2) $3N + k$ содержит $6N$ неизвестных - $3N$ законов движений $\vec{r}_i(t)$ и $3N$ проекций сил реакций связей. Таким образом, можно ввести $3N - k = s$ независимых переменных q_α , называемых обобщенными координатами, каждой из которых ставится в соответствие обобщенная скорость \dot{q}_α ; число s называется числом степеней свободы системы с наложенными на нее связями. При этом $q_\alpha = q_\alpha(t)$, а $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s)$.

При определенных условиях систему уравнений (4.1) и (4.2) можно заменить s эквивалентными уравнениями относительно s величин q_α . Решениями таких уравнений будут $q_\alpha = q_\alpha(t)$ и, следовательно, $\vec{r}_i(t)$. В свою очередь, по известным зависимостям $\vec{r}_i(t)$ можно из уравнений (4.1) определить и все реакции связей \vec{R}_i . Такими дополнительными условиями является требование идеальности связей. Условие идеальности заключается в том, что реакции связей считаются действующими по нормали к поверхностям, реализующим связи. В аналитической форме это условие

может быть сформулировано с привлечением понятия виртуальных перемещений.

Виртуальными перемещениями $\delta\vec{r}_i$ называются воображаемые возможные (допускаемые связями) перемещения точек системы в данный момент времени. Тогда идеальные связи – это связи, для которых виртуальная работа всех пассивных сил на виртуальных перемещениях всех точек системы равна нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i \delta\vec{r}_i = 0. \quad (4.3)$$

Если каждой обобщенной координате поставить в соответствие обобщенную силу

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}, \quad (4.4)$$

то система уравнений движения, эквивалентная системе уравнений (4.1) и (4.2), имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, s, \quad (4.5)$$

где T - кинетическая энергия точек системы, записанная как функция обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени. Система уравнений (4.5) называется системой уравнений движения в форме Лагранжа или уравнениями Лагранжа.

В случае потенциальных активных сил

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}, \quad \text{и в соответствии с (4.4)} \quad Q_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}, \quad (4.6)$$

причем потенциальная энергия системы является функцией лишь обобщенных координат. Тогда в отсутствие диссипативных сил систему уравнений (4.5) можно представить в виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \quad (4.7)$$

Функция $L = T - U$ называется функцией Лагранжа и является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени.

Если в механической системе действуют наряду с потенциальными и диссипативные силы, то система уравнений (4.7) преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha^{(d)}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s., \quad (4.8)$$

где $Q_\alpha^{(d)}$ - обобщенная диссипативная сила, сопряженная обобщенной координате q_α .

Условия равновесия механической системы с наложенными на нее идеальными голономными стационарными связями имеет вид:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = 0, \quad (4.9)$$

т.е. виртуальная работа всех активных сил на виртуальных перемещениях всех точек системы должна быть равна нулю (дифференциальный вариационный принцип виртуальных перемещений Даламбера). Т.к.

$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s)$, то $\delta \vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha$, а из (4.4) и (4.8) следует, что при

равновесии системы

$$\sum_{\alpha=1}^s Q_\alpha \delta q_\alpha = 0 \quad \text{или} \quad Q_\alpha = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, s. \quad (4.10)$$

В аналитической механике вводится понятие обобщенной энергии, которая связана с функцией Лагранжа соотношением:

$$E = \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L. \quad (4.11)$$

При этом обобщенная энергия является интегралом движения, если функция Лагранжа явно от времени не зависит.

Если Функция Лагранжа не зависит от какой-либо обобщенной координаты q_α , то такая координата называется циклической, а из (4.7) следует, что для такой координаты

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = const. \quad (4.12)$$

Величина $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = p_\alpha$ представляет собой обобщенный импульс, сопряженный координате q_α , а соотношения (4.12) выражают закон сохранения соответствующего обобщенного импульса.

Если обобщенные координаты и обобщенные импульсы рассматривать как независимые переменные, то обобщенная энергия, записанная как функция q_α, p_α и, в общем случае, времени, называется функцией Гамильтона H . Уравнения движения в гамильтоновой форме принимают вид:

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha, \quad \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dot{p}_\alpha \quad (4.13)$$

Т. к. состояние движения системы однозначно описывается совокупностью всех обобщенных координат и обобщенных импульсов (обобщенных скоростей), то в $2s$ -мерном пространстве обобщенных координат и обобщенных импульсов (фазовом пространстве) состояние системы в данный момент времени представляется фазовой (изображающей) точкой. Изменение состояния движения приводит к перемещению фазовой точки в фазовом пространстве вдоль фазовой траектории. Очевидно, что фазовая траектория полностью описывается системой уравнений (4.13). Представления о фазовом пространстве, фазовых переменных (обобщенных координатах и обобщенных импульсах) и функции Гамильтона являются базовыми во всех физических теориях - от классической механики до современных теорий микромира.

4.2. Практикум по решению задач

4.2.1. Использование дифференциального принципа виртуальных перемещений для исследования равновесия механических систем

При использовании принципа виртуальных перемещений к исследованию условий равновесия механической системы с наложенными на нее идеальными связями необходимо:

- определить все активные силы \vec{F}_i ;
- определить все возможные перемещения точек (тел) системы $\delta\vec{r}_i$, допускаемые связями в данный момент времени;
- составляется выражение для виртуальной работы всех активных сил на виртуальных перемещениях;
- определяется число связей k , число степеней свободы $s = 3N - k$ (N - число тел) и вводятся обобщенные координаты q_α ;
- все $\delta\vec{r}_i$ выражаются через q_α в соответствии с соотношением

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha;$$

- значения $\delta\vec{r}_i$ подставляются в выражение для виртуальной работы, т.е. составляется уравнение вида $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \left(\sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \right) = \sum_{\alpha=1}^s \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0$;

- т.к. все q_α независимы, то равенство нулю суммы возможно при

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s, \text{ чем и определяются условия равновесия.}$$

4.2.1.1. Примеры решения задач

Пример 1. Два невесомых горизонтальных стержня шарнирно закреплены в точках A и B , а их свободные концы соединены нитью, перекинутой через блок (рис.4.1). Длина стержней L_1 и L_2 . На расстояниях a_1 и a_2 от точек A и B соответственно подвешены груза M_1 и M_2 . При каком соотношении a_1 и a_2 система находится в равновесии?

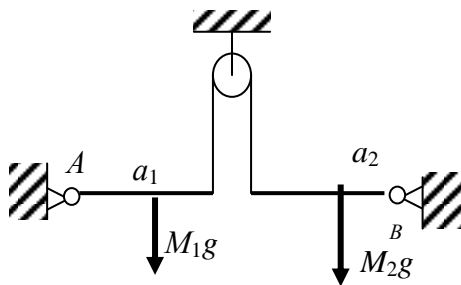


Рис.4.1

Решение

Т.к. задача плоская и количество связей равно 3 (два стержня и нить), то число степеней свободы системы $s = 4 - 3 = 1$. В качестве обобщенной координаты выберем координату y , как

это показано на рис.4.2. Поскольку нить нерастяжима, то виртуальные перемещения концов стержней, соединенных нитью, равны по величине δy

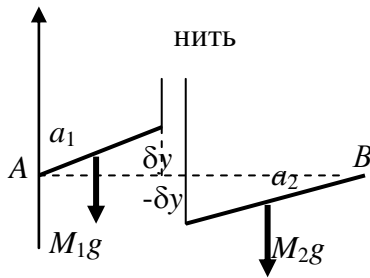


Рис.4.2

и противоположны по знаку. Тогда виртуальные перемещения грузов M_1 и M_2 определяются из геометрии задачи следующим образом:

$$\frac{\delta y_1}{\delta y} = \frac{a_1}{L_1} \Rightarrow \delta y_1 = \delta y \frac{a_1}{L_1},$$

$$\left| \frac{\delta y_2}{\delta y} \right| = \frac{a_2}{L_2} \Rightarrow \delta y_2 = -\delta y \frac{a_2}{L_2}.$$

Виртуальная работа силы тяжести грузов M_1 и M_2

$$(-M_1g)\delta y_1 + (-M_2g)\delta y_2 = 0 \quad \text{или} \quad \left(-M_1g \frac{a_1}{L_1} + M_2g \frac{a_2}{L_2} \right) \delta y = 0.$$

Отсюда получаем $\frac{a_1}{a_2} = \frac{M_2}{M_1} \frac{L_1}{L_2}$.

Пример 2. Два одинаковых однородных стержня AB и BC соединены между собой шарниром. К концу стержня BC приложена горизонтальная

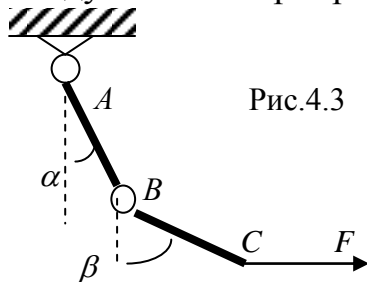


Рис.4.3

сила F , равная $\frac{mg}{2}$, где m - масса каждого из стержней. Определить углы α и β в состоянии равновесия.

Решение

В рассматриваемой плоской системе движение стержней массами m каждый ограничено линиями AB и BC . Поэтому число степеней свободы $s = 4 - 2 = 2$. В качестве обобщенных координат выберем углы α и β . Для геометрии системы, представленной на рис.4.4, в состоянии равновесия виртуальная работа всех активных сил (сил тяжести $m\vec{g}$ и силы \vec{F}) равна нулю, т.е.

$$mg \cdot \delta y_1 + mg \cdot \delta y_2 + F \cdot \delta x_2 = 0. \quad (1)$$

$$\text{Т.к. } y_1 = \frac{L}{2} \cos \alpha, \quad y_2 = L \cos \alpha + \frac{L}{2} \cos \beta$$

$$\text{è } x_2 = L \sin \alpha + \frac{L}{2} \sin \beta, \quad \text{то}$$

$$\delta y_1 = -\frac{L}{2} \sin \alpha \cdot \delta \alpha, \quad \delta y_2 = -L \sin \alpha \cdot \delta \alpha - \frac{L}{2} \sin \beta \cdot \delta \beta,$$

$$\delta x_2 = L \cos \alpha \cdot \delta \alpha + \frac{L}{2} \cos \beta \cdot \delta \beta$$

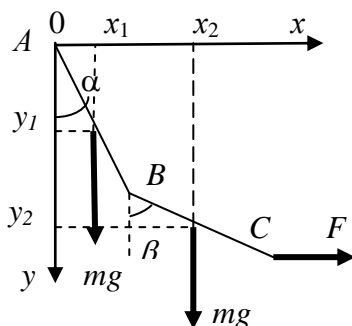


Рис.4.4

Подставляя эти значения виртуальных перемещений в уравнение (1) и группируя слагаемые с $\delta\alpha$ и $\delta\beta$, а также учитывая, что $F = \frac{mg}{2}$, получаем

$$mgL\left(-\frac{3}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha\right)\delta\alpha + mgL\left(-\frac{1}{2}\sin\beta + \frac{1}{2}\cos\beta\right)\delta\beta = 0. \quad (2)$$

Вариации углов независимы, поэтому равенство (2) возможно, если

$$mgL\left(-\frac{3}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha\right)\delta\alpha = 0. \quad \text{И} \quad mgL\left(-\frac{1}{2}\sin\beta + \frac{1}{2}\cos\beta\right)\delta\beta = 0.$$

Т.к. $\delta\alpha \neq 0$ и $\delta\beta \neq 0$, то
$$-\frac{3}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}.$$

И
$$-\frac{1}{2}\sin\beta + \frac{1}{2}\cos\beta = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = 1.$$

Пример 3. В системе, изображенной на рис.4.5, массы грузов 1 и 2 одинаковы, а масса груза 3, подвешенного к подвижному блоку, равна M . Определить массы грузов 1 и 2, а также коэффициент трения скольжения груза 1 по горизонтальной поверхности, если известно, что все грузы покоятся. Массой блоков и трением в их осях пренебречь.

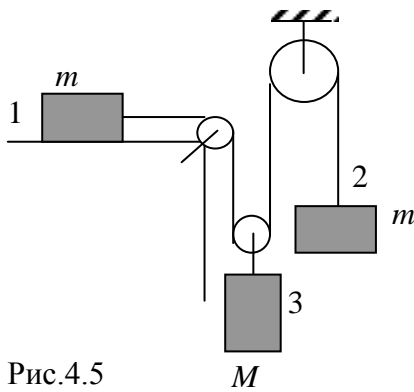


Рис.4.5

Решение

Представленная плоская система состоит из трех тел, движение которых ограничено четырьмя связями: движение тела 1 ограничено плоскостью и горизонтальным участком нити, тела 2 – вертикальным участком нити, перекинутой через неподвижный блок, тела 3 – вертикальным участком нити, перекинутой через подвижный блок. Таким образом, система характеризуется двумя степенями свободы $s = 6 - 4 = 2$). В системе координат, ось Ox которой горизонтальна, а ось Oy направлена вниз возможными перемещениями будут перемещение δx_1 груза 1, перемещение δy_2 груза 2 и перемещение δy_3 груза 3. Т.к. силу трения F , направленную в сторону, противоположную перемещению δx_1 , можно рассматривать как активную внешнюю силу, то условие равновесия системы имеет вид:

$$-F \cdot \delta x_1 + mg \cdot \delta y_2 + Mg \cdot \delta y_3 = 0. \quad (1)$$

В качестве обобщенных координат удобно выбрать координату x_1 груза 1 и координату y_2 груза 2. Тогда, учитывая, что общая длина нити остается неизменной, виртуальное перемещение груза 3 можно выразить через δx_1 и δy_2 :

$$\delta x_1 = \delta y_2 + 2\delta y_3 \Rightarrow \delta y_3 = \frac{\delta x_1 - \delta y_2}{2}.$$

Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$\left(-F + \frac{Mg}{2}\right)\delta x_1 + \left(mg - \frac{Mg}{2}\right)\delta y_2 = 0.$$

Т.к. δx_1 и δy_2 независимы, то $m = \frac{M}{2}$ и $F = \frac{Mg}{2}$. Следовательно, $F = \mu mg = mg$, и коэффициент трения $\mu = 1$.

4.2.1.2. Задания для аудиторного и самостоятельного выполнения

4.1. Две тяжелые точки массами m и $2m$, соединенные невесомым стержнем длины L , находятся внутри гладкой полусферы радиусом $R = L$ (см. рис.4.6). Определить угол α между стержнем и горизонтом при равновесии системы.

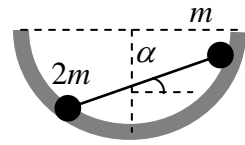


Рис.4.6

4.2. Решить задачу **4.1.** при условии, что масса стержня равна M .

4.3. Лебедка состоит из барабана, зубчатой шестерни 1, жестко скрепленной с барабаном, зубчатой шестерни 2, находящейся в зацеплении с шестерней 1, и рукоятки OA , жестко связанной с шестерней 2 (рис.4.7). Определить минимальную силу F , которую необходимо приложить перпендикулярно к концу рукоятки, чтобы удержать груз массой M , если числа зубцов шестерен 1 и 2 равны n_1 и n_2 . Радиус барабана R .

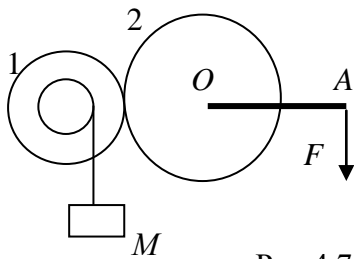


Рис.4.7

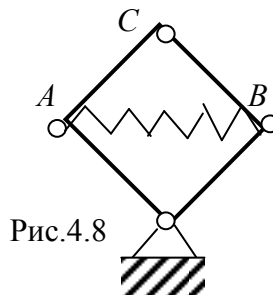


Рис.4.8

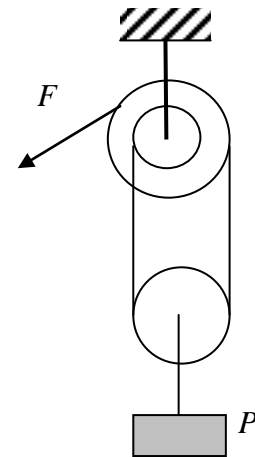


Рис.4.9

4.4. Четыре одинаковых однородных стержня длиной L каждый соединены шарнирно, расположены в вертикальной плоскости и представляют собой ромб, вершины A и B которого соединены пружиной (рис.4.8). Длина недеформированной пружины такая же, как и длина стержней. Нижняя вершина ромба закреплена при помощи неподвижного шарнира. Определить жесткость пружины, если в состоянии равновесия угол при вершине C равен 2α .

4.5. В дифференциальном полиспасте (рис.4.9) определить зависимость между силой F и весом груза P при равновесии, если радиус большого блока R , а радиус верхнего малого - r . Массами блоков и трением в их осях пренебречь.

4.6-4.7. В системах, схематически показанных на рис.4.10а) – б), одинаковые невесомые стержни соединены между собой шарнирно. Определить натяжение нити AB , если угол при вершине ромба, образованного стержнями, равен 2α .

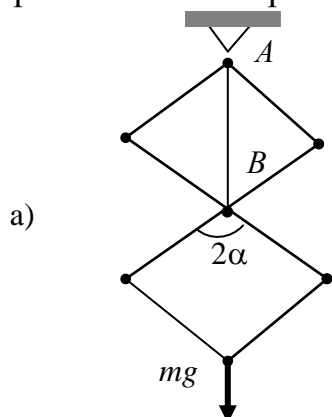
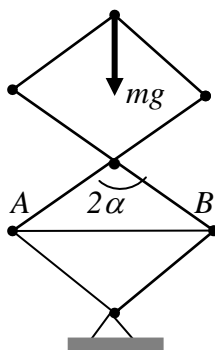


Рис.4.10



б)

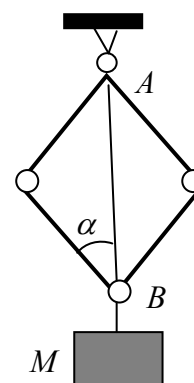


Рис.4.11

4.8. Четыре одинаковых однородных стержня массой m каждый соединены шарнирно (рис.4.11). Вершины ромба A и B связаны нитью. Определить натяжение нити, если к вершине B ромба с углом 2α при ней подвешен груз массой M .

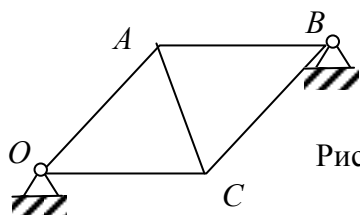


Рис.4.12

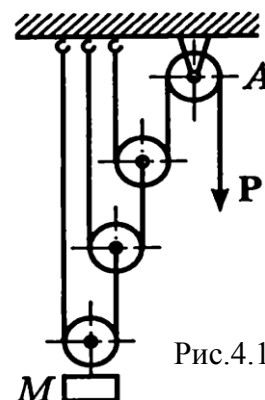


Рис.4.13

4.9. Найти усилие в стержне AC фермы, изображенной на рис.4.12, если $OA = AB = BC = CO$, а масса каждого из стержней равна m .

4.10. Полиспаст состоит из неподвижного блока A и трех подвижных блоков (рис.4.13). Определить при равновесии отношение груза весом M к силе P , приложенной к концу каната, сходящего с неподвижного блока A . Массами блоков и трением в их осях пренебречь. Рассмотреть случай, когда число подвижных блоков равно n .

На практических занятиях и в качестве домашних заданий рекомендуется рассмотреть примеры 1-3 и выполнить задания 4.3, 4.4, 4.6, 4.10.

4.2.2. Функция Лагранжа. Уравнения Лагранжа

4.2.2.1. Примеры решения задач

При решении задач динамики методом Лагранжа предполагается выполнение следующих действий:

- определение числа степеней свободы механической системы;
- введение рационально выбранной системы координат и обобщенных координат;
- выражение координат и скоростей системы точек через обобщенные координаты и обобщенные скорости;
- построение кинетической энергии системы точек как функции обобщенных координат и обобщенных скоростей;
- для нахождения пассивных сил реакций связей составляются уравнения движения в ньютоновой форме, в которых используется уже найденные законы движения;
- решается система алгебраических уравнений относительно неизвестных сил реакций связей;
- нахождение всех активных сил и построение обобщенных сил Q_α , сопряженных обобщенным координатам q_α ;
- в случае потенциальных силовых полей построение потенциальной энергии системы как функции обобщенных координат и введение функции Лагранжа $L = T - U$;
- запись и решение уравнений Лагранжа $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha$ (или $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$) относительно $q_\alpha = q_\alpha(t)$ с учетом начальных условий;
- переход от обобщенных координат к закону движения точек системы $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$.

Пример 1. Построить функцию Лагранжа электрического диполя, образованного одинаковыми по величине и противоположными по знаку зарядами q , расстояние между которыми $d = const$. Диполь находится во внешнем однородном постоянном электрическом поле напряженностью \vec{E} . Массы зарядов одинаковы и равны m каждая. Силы тяжести не учитывать.

Решение

Заряды системы жестко связаны, и поэтому система обладает пятью степенями свободы. В качестве обобщенных координат целесообразно выбрать декартовы координаты центра масс диполя X , Y и Z , а относительное движение описывать двумя угловыми координатами ϑ и ϕ сферической системы координат, начало которой совместив с центром масс (точкой C), как показано на рис.4.14. С центром масс связана подвижная система координат xuz (s -система), причем ось z s -системы выбирается сонаправленной с вектором \vec{E} . Угловые координаты характеризуют

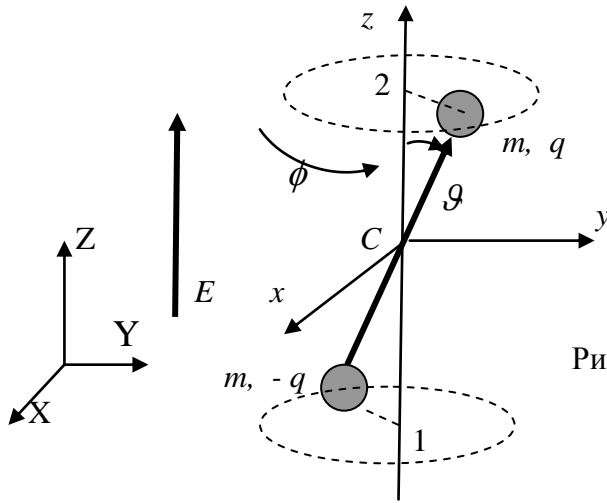


Рис.4.14

повороты диполя: угол ϑ - относительно оси, перпендикулярной плоскости, в которой находятся ось z и вектор \vec{d} , а угол ϕ - относительно оси z .

В соответствии с теоремой Кенига Кинетическая энергия диполя

$$T = T_1 + T_2,$$

где

$$T_1 = \frac{M}{2} V_C^2 = m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2)$$

кинетическая энергия движения центра масс диполя, а T_2 - кинетическая энергия относительного движения.

В свою очередь, $T_2 = \frac{\mu v_{\text{отн}}^2}{2}$, где μ - приведенная масса, а $v_{\text{отн}}$ - относительная скорость зарядов диполя. Т.к. массы зарядов v одинаковы, то их скорости относительно центра масс также одинаковы и направлены в противоположные стороны. Следовательно,

$$\mu = \frac{m}{2}, \quad v_{\text{отн}} = 2v \quad \text{и} \quad T_2 = mv^2.$$

Но $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$. С другой стороны, координаты положительного заряда

в с-системе $x = \frac{d}{2} \sin \vartheta \cos \phi, \quad y = \frac{d}{2} \sin \vartheta \sin \phi, \quad z = \frac{d}{2} \cos \vartheta$. Тогда

$$\dot{x} = \frac{d}{2} (\dot{\vartheta} \cos \vartheta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \vartheta \sin \phi)$$

$$\dot{y} = \frac{d}{2} (\dot{\vartheta} \cos \vartheta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \vartheta \cos \phi)$$

$$\dot{z} = -\frac{d}{2} \dot{\vartheta} \sin \vartheta$$

Возведя в квадраты эти выражения и выполняя суммирование, получаем

$$v^2 = \frac{d^2}{4} (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta).$$

Таким образом, кинетическая энергия диполя может быть представлена как

$$T = m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{d^2}{4} (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta).$$

Потенциальная энергия диполя также состоит из двух слагаемых - энергии взаимодействия зарядов диполя U_1 и энергии диполя во внешнем

поле U_2 . Энергия взаимодействия зарядов $U_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d^2}$ есть величина

постоянная, и ее в дальнейшем можно опустить, т.к. функция Лагранжа определена лишь с точностью до аддитивной постоянной.

Для нахождения U_2 введем потенциалы φ_1 и φ_2 точек 1 и 2 системы. Потенциальная энергия зарядов во внешнем поле

$$U_2 = -q\varphi_1 + q\varphi_2 = q(\varphi_2 - \varphi_1),$$

а т.к. поле однородно, то (см. рис.4.14) $\varphi_2 - \varphi_1 = -Ed \cos \vartheta$.

Следовательно, потенциальная энергия диполя как функция обобщенных координат имеет вид: $U = U_2 = -qEd \cos \vartheta$. Окончательно для функции Лагранжа получаем выражение

$$L = m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{d^2}{4}(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta) + qEd \cos \vartheta.$$

Заметим, что на диполь во внешнем электрическом поле действует единственная обобщенная сила $Q_\vartheta = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = qEd \sin \vartheta$, представляющая собой момент, ориентирующий диполь в направлении поля.

Пример 2. Построить функцию Лагранжа математического маятника, (масса груза m , длина нити l), точка подвеса которого вращается равномерно с угловой скоростью ω в вертикальной плоскости по окружности радиуса R .

Решение

Т.к. задача плоская, а движение груза m ограничено нитью, то число степеней свободы $s = 1$. В качестве обобщенной координаты удобно выбрать

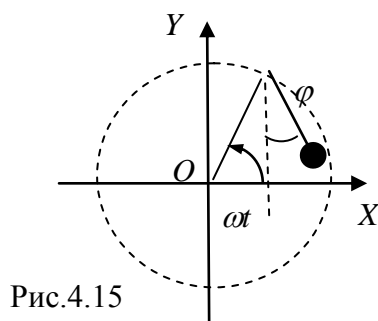


Рис.4.15

угол φ между вертикалью и нитью маятника, а ось Y декартовой системы координат с началом в центре окружности направить вдоль вертикали, как показано на рис.4.15.

Выразим координаты груза m через обобщенную координату с учетом положения точки подвеса. Очевидно, что

$$x = l \sin \varphi + R \cos \omega t \quad \text{и} \quad y = R \sin \omega t - l \cos \varphi,$$

$$\dot{x} = l \dot{\varphi} \cos \varphi - \omega R \sin \omega t \quad \text{и} \quad \dot{y} = \omega R \cos \omega t + l \dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Тогда $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (l \dot{\varphi})^2 + (\omega R)^2 + 2\omega R \dot{\varphi} l \sin(\omega t - \varphi)$,

И кинетическая энергия маятника

$$T = \frac{m}{2} \left((l \dot{\varphi})^2 + (\omega R)^2 + 2\omega R \dot{\varphi} l \sin(\omega t - \varphi) \right).$$

Примем потенциальную энергию груза равной нулю в точке O . Тогда потенциальная функция системы

$$U = mg(R \sin \omega t - l \cos \varphi).$$

Окончательно получаем

$$L = T - U = \frac{m}{2} \left((l \dot{\varphi})^2 + (\omega R)^2 + 2\omega R \dot{\varphi} l \sin(\omega t - \varphi) \right) - mg(R \sin \omega t - l \cos \varphi).$$

Пример 3. Точка массой m свободно движется по горизонтальной колеблющейся поверхности. Найти положение точки и реакцию связи как функции времени, если колебания совершаются в направлении нормали к поверхности с амплитудой a и частотой ω .

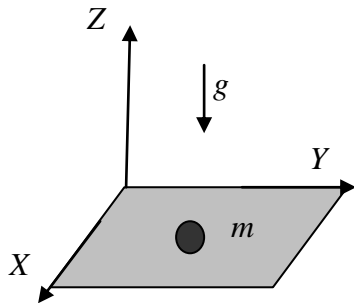


Рис.4.16

Решение

Движение материальной точки m ограничено плоскостью, уравнение которой можно представить в виде (см. рис.4.16):

$$z = a \sin \omega t .$$

В обобщенных координатах $q_1 = x$ и $q_2 = y$ квадрат скорости точки записывается как

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2 \omega^2 \cos^2 \omega t ,$$

а кинетическая энергия

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2 \omega^2 \cos^2 \omega t) .$$

Принимая во внимание, что единственной активной силой является сила тяжести (по определению – потенциальная) и полагая потенциальную энергию точки равной нулю при $z = 0$, получаем $U = mga \sin \omega t$. Тогда

$$L = T - U = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2 \omega^2 \cos^2 \omega t) - mga \sin \omega t ,$$

а уравнения Лагранжа записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 &\Rightarrow m\ddot{x} = 0 \Rightarrow m\dot{x} = const , \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 &\Rightarrow m\ddot{y} = 0 \Rightarrow m\dot{y} = const . \end{aligned}$$

Действительно, т.к. потенциальная энергия не зависит от обобщенных координат x и y , то они являются циклическими, т.е. сопряженные им

обобщенные импульсы $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ и $p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$ сохраняются.

Следовательно, движение материальной точки вдоль осей x и y является равномерным и прямолинейным, а движение вдоль оси z определяется уравнением связи $z = a \sin \omega t$.

Для определения силы реакции связи запишем уравнение движения вдоль оси z в форме Ньютона:

$$m\ddot{z} = -mg + R .$$

Т.к. $\dot{z} = -a\omega^2 \sin \omega t$, то $R = m(g - a\omega^2 \sin \omega t)$

Пример 4. В системе, показанной на рис.4.17, определить ускорение грузов и силы реакций связей. Блок массы M рассматривать как сплошной диск радиуса R , трением в оси блока пренебречь. Коэффициент трения груза m_1 о поверхность наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, равен μ .

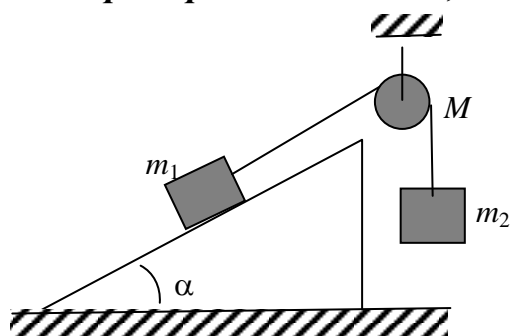


Рис.4.17

Решение

Представленная на рис.4.17 система характеризуется одной степенью свободы. Т.к. нить нерастяжима, то в качестве обобщенной координаты можно выбрать смещение каждого из грузов s (для определенности будем считать, что груз m_2 опускается), системы координат выбираем так, как показано на рис. 4.18а). Здесь же указаны действующие активные силы m_1g , m_2g и сила трения F , а на рис.4.18 б) указаны кроме активных сил и пассивные – сила реакции со стороны наклонной плоскости N , действующая на груз m_1 , силы натяжения нити по обе стороны блока T_1 и T_2 , а также момент M_0 силы $(T_2 - T_1)$, вращающей блок. При этом в указанных координатах

$$x_1 = x_{10} + s, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = x_{20}, \quad y_2 = y_{20} - s, \quad \varphi = \frac{s}{R},$$

где R – радиус диска блока.

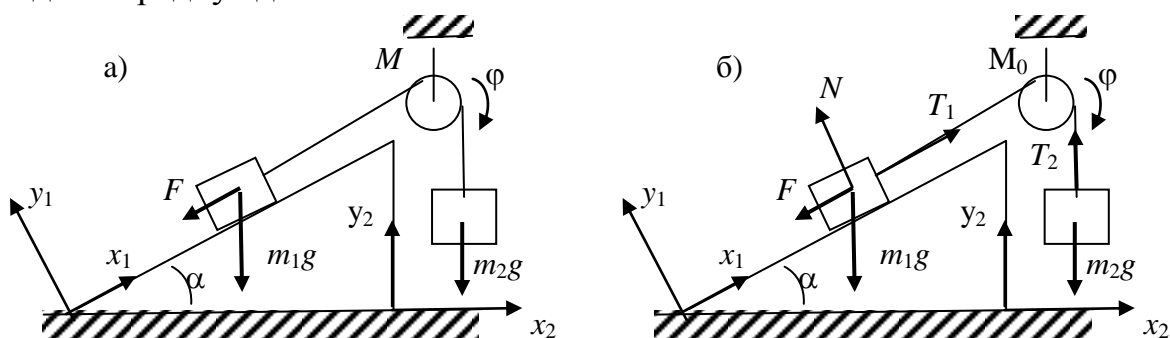


Рис.4.18

Кинетическая энергия системы может быть записана в виде:

$$T = \frac{m_1 \dot{s}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{s}^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2}.$$

Учитывая, что момент инерции блока $I = \frac{MR^2}{2}$, и что $\omega = \dot{\varphi} = \frac{\dot{s}}{R}$, выражение для кинетической энергии преобразуется к виду:

$$T = \frac{(m_1 + m_2 + M / 2) \dot{s}^2}{2}.$$

При построении выражения для функции Лагранжа учтем, что потенциальными являются лишь силы тяжести грузов и диска блока, т.е.

$U = U_1 + U_2 + U_{\dot{a}}$. Полагая, что потенциальная энергия системы в указанных системах координат равна нулю при $y_1 = y_2 = 0$, получаем

$$U_1 = m_1 g (y_{10} + s \sin \alpha), \quad U_2 = m_2 g (y_{20} - s), \quad U_{\dot{a}} = M g y_{\dot{a}}.$$

Тогда

$$U = m_1 g s \sin \alpha - m_2 g s + m_1 g y_{10} + m_2 g y_{20} + M g y_{\dot{a}} = g s (m_1 \sin \alpha - m_2) + const,$$

а функция Лагранжа

$$L = \frac{(m_1 + m_2 + M / 2) \dot{s}^2}{2} - g s (m_1 \sin \alpha - m_2),$$

где учтено, что функция Лагранжа определена с точностью до аддитивной постоянной.

Т.к. кроме потенциальных сил в системе действует диссипативная сила трения F , то уравнение Лагранжа следует записать в форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = Q^{(d)}.$$

В этом уравнении $Q^{(d)}$ - обобщенная диссипативная сила, значение которой

в рассматриваемом случае равно силе трения - $Q^{(d)} = -F \frac{\partial x_1}{\partial s} = -F$.

Окончательно уравнение движения в форме Лагранжа приобретает вид:

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2} \right) \ddot{s} = (m_2 - m_1 \sin \alpha) g - F.$$

Отсюда ускорение системы

$$\ddot{s} = w = \frac{(m_2 - m_1 \sin \alpha) g - F}{m_1 + m_2 + M / 2}.$$

Для определения сил реакций связей запишем уравнения движения в форме Ньютона, воспользовавшись системами координат, представленными на рис.4.18:

$$m_1 \ddot{s} = T_1 - m_1 g \sin \alpha - \mu N, \quad N - m_1 g \cos \alpha = 0;$$

$$m_2 \ddot{s} = m_2 g - T_2;$$

$$I \ddot{\varphi} = (T_2 - T_1) R \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{2} \ddot{s} = T_2 - T_1.$$

Подставляя значение \ddot{s} и учитывая, что $F = \mu N$, находим N , T_1 и T_2 :

$$N = m_1 g \cos \alpha, \quad w = g \frac{m_2 - m_1 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2 + M / 2},$$

$$T_1 = m_1 g \frac{m_2 + (m_2 + M / 2) (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2 + M / 2},$$

$$T_2 = m_2 g \frac{M / 2 + m_1 (1 + \sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2 + M / 2}.$$

$$\dot{\Gamma}_0 = (T_2 - T_1)R = \frac{M}{2} \omega R = \frac{M}{2} gR \frac{m_2 - m_1(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2 + M/2}.$$

Очевидно, что полученные результаты справедливы при $m_2 > m_1(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$.

4.2.2.2. Задания для аудиторного и самостоятельного выполнения

4.11. Построить функцию Лагранжа математического маятника (груз массы m подвешен на нити длиной l). Рассмотреть случай малых отклонений маятника от положения равновесия.

4.12. Построить функцию Лагранжа для малых колебаний математического маятника массы m и длины l , точка повеса которого с массой M в ней может перемещаться вдоль горизонтальной линии в плоскости качания.

4.13. Построить функцию Лагранжа материальной точки в центрально-симметричном поле.

4.14. Построить функцию Лагранжа материальной точки в осесимметричном поле.

4.15. Построить функцию Лагранжа двухатомной молекулы, представляющей собой две материальные точки массами m_1 и m_2 , жестко связанные между собой (модель жесткого ротатора). Длина связи между атомами l .

4.16. Построить функцию Лагранжа тяжелого шарика массой m , находящегося внутри неподвижной сферы с гладкими внутренними стенками. Радиус сферы R , радиус шарика $r < R$.

4.17. Построить функцию Лагранжа метронома длиной l с грузиками m и $M > m$, точка подвеса которого находится на расстоянии $\frac{2}{3}l$ от большего грузика. Рассматривать малые отклонения системы от положения равновесия.

4.18. Построить функцию Лагранжа системы из двух шариков массами m_1 и m_2 , соединенных пружиной жесткостью k и надетых на горизонтальную спицу. Система может скользить без трения вдоль спицы, длина недеформированной пружины l_0 .

4.19. Построить функцию Лагранжа двух точечных масс m_1 и m_2 , соединенных невесомым стержнем длины d которые могут вращаться в

вертикальной плоскости относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс системы.

4.20. Построить функцию Лагранжа математического маятника массой m длины l , точка подвеса которого совершает колебательное движение вдоль горизонтальной прямой в плоскости качания маятника по закону $x = a \cos \omega t$. Рассматривать малые колебания маятника.

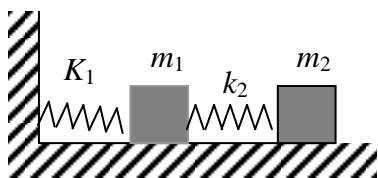


Рис.4.19

4.21. Построить функцию Лагранжа двойного пружинного маятника, изображенного на рис.4.19. Массы грузов m_1 и m_2 , жесткости пружин k_1 и k_2 соответственно. Трением пренебречь.

4.22. Построить функцию Лагранжа математического маятника, точка подвеса которого колеблется в вертикальной плоскости по закону $y = a \cos \omega t$. Рассматривать малые отклонения маятника от положения равновесия. Масса маятника m , длина нити l .

4.23. Тележка скатывается без скольжения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Масса тележки без колес M , масса всех четырех колес m . Считая колеса однородными дисками, определить ускорение тележки.

4.24. Какую горизонтальную силу нужно приложить к телу 2 системы, изображенной на рис.4.19, чтобы это тело двигалось равномерно. Трение в системе отсутствует, в начальный момент времени пружины не деформированы, тело 1 покоится.

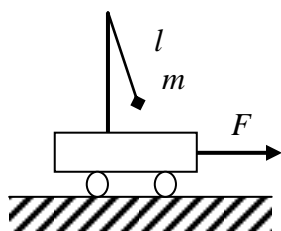


Рис.4.20

4.25. Тележка, на которой установлен математический маятник массой m и длиной l , может двигаться по горизонтальной поверхности (рис. 4.20). Полагая, что в начальный момент времени маятник был отклонен из положения равновесия на малый угол α и отпущен без начальной скорости, найти закон изменения горизонтальной силы, приложенной к тележке, под действием которой тележка катится равномерно. Величинами второго порядка малости пренебречь.

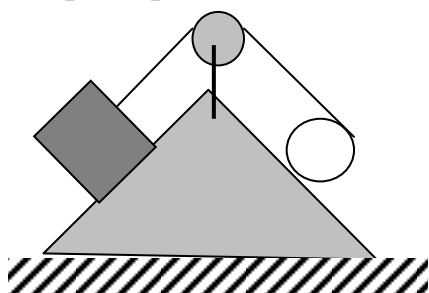


Рис.4.21

4.26. На гранях прямоугольной равнобедренной призмы, которая может перемещаться без трения по горизонтальной поверхности, находятся груз и тонкостенный цилиндр, соединенные нитью, намотанной на

цилиндр и перекинутой через идеальный блок, как показано на рис.4.21. Определить ускорение призмы и относительные ускорения груза и оси цилиндра, если массы груза, цилиндра и призмы относятся как 2 : 1 : 3 соответственно.

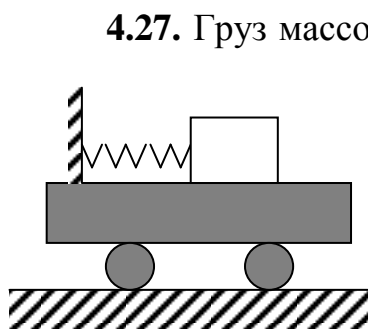


Рис.4.22

4.27. Груз массой m прикреплен пружиной жесткостью k к платформе, по которой он может двигаться без трения (рис.4.22). Платформа имеет четыре колеса массой $m/2$ каждое в виде однородных дисков. Масса платформы без колес M . Определить закон движения платформы, если в начальный момент времени груз был смещен из положения равновесия на расстояние x_0 и отпущен без начальной скорости. Платформа в начальный момент времени покоилась.

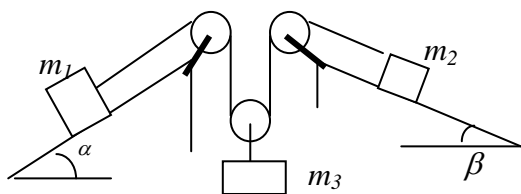


Рис.4.23

4.28. В системе, изображенной на рис.4.23, определить ускорение опускающегося груза m_3 . Коэффициенты трения грузов m_1 и m_2 о поверхности наклонных плоскостей соответственно равны μ_1 и μ_2 .

4.29. На однородную прямую призму A , стоящую на гладкой горизонтальной поверхности, поставлена однородная прямая призма B , как показано на рис.4.24. Поперечные сечения призм представляют собой прямоугольные треугольники с углом α в основании. Масса призмы A в n раз больше массы призмы B . Определить, на какое расстояние переместится призма A , когда призма B опустится с высоты h до горизонтальной поверхности. Трение между призмами отсутствует.

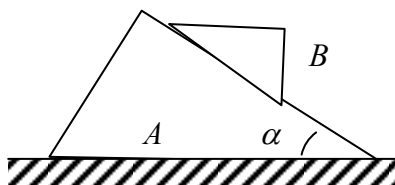


Рис.4.24

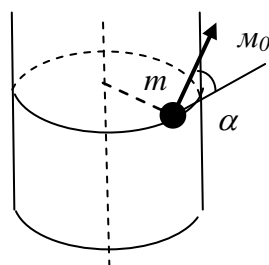


Рис.4.25

4.30. Частица массой m движется по гладкой внутренней поверхности вертикального цилиндра радиуса R . Определить силу давления частицы на цилиндр. Начальная скорость частицы v_0 составляет угол α с горизонтом (рис.4.25).

Для аудиторных занятий и в качестве домашних заданий рекомендуется рассмотрение примеров 1–4 и выполнение заданий 4.11, 4.15, 4.18, 4.21, 4.25, 4.26, 4.28.

5. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

5.1. Краткие теоретические сведения

5.1.1. Линейный гармонический осциллятор

Малые колебания возникают вблизи положения устойчивого равновесия, т.е. вблизи точки, где потенциальная энергия системы U минимальна.

При рассмотрении малых колебаний одномерной системы в качестве обобщенной координаты выбирается величина смещения из положения устойчивого равновесия x . Разложение в ряд потенциальной энергии одномерной механической системы $U(x)$ по степеням x с сохранением лишь первого не равного нулю члена ряда приводит к выражению:

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}, \quad (5.1)$$

где величина $k = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=0}$ называется динамическим коэффициентом.

В этом же приближении кинетическая энергия системы может быть представлена в виде

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}, \quad (5.2)$$

где m – кинематический коэффициент.

Заметим, что k – не обязательно коэффициент упругости, а m – не обязательно масса системы. При этом обобщенная сила $Q = -\frac{dU}{dx} = -kx$ называется квазиупругой силой.

Функция Лагранжа

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \quad (5.3)$$

одномерной механической системы характеризуется симметричной формой по переменным x и \dot{x} . Система с функцией Лагранжа вида (5.3) называется гармоническим осциллятором, уравнение движения которого имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{где} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ - частота собственных колебаний} \quad (5.4)$$

Решениями уравнения (5.3) являются гармонические функции, например,

$$x = a \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (5.5)$$

где a и φ – постоянные интегрирования, представляющие собой амплитуду и начальную фазу, которые могут быть определены из начальных условий.

При наличии внутренних диссипативных сил в виде сил вязкого трения $F_{\delta\delta} = -k\dot{x}$ решением уравнения движения

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \left(2\lambda = \frac{\alpha}{m} \right)$$

являются затухающие колебания

$$x = ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (5.6)$$

причем $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$. В случае малых потерь можно считать, что $\omega^2 \approx \omega_0^2$.

Основной характеристикой затухающих колебательных процессов является логарифмический декремент затухания δ , определяемый как логарифм отношения амплитуд в моменты времени, отличающиеся на период колебаний T , т.е. в моменты t и $(t + T)$:

$$\delta = \ln \frac{ae^{-\lambda t}}{ae^{-\lambda(t+T)}} = \lambda T. \text{ Нетрудно}$$

показать, что $\delta = \frac{1}{N}$, где N – число полных колебаний за время, в течение которого амплитуда уменьшается в e раз.

Если на осциллятор действует периодическая сила $F = F_0 \cos \omega t$, то в отсутствие затухания уравнение движения имеет вид неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t, \text{ где } f = \frac{F_0}{m}. \quad (5.7)$$

Под действием вынуждающей силы в колебательной системе наряду с собственными колебаниями возникают вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы. При этом решением уравнения (5.7) с нулевыми начальными условиями является

$$x = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t), \text{ где } f = \frac{F_0}{m} \quad (5.8)$$

Если частота вынуждающей силы приближается к значению частоты собственных колебаний осциллятора, то наступает явление резонанса – резкого возрастания амплитуды колебаний. В пределе при $\omega \rightarrow \omega_0$ (5.7) переходит в выражение

$$x = \frac{ft}{2\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad (5.9)$$

т.е. амплитуда колебаний при резонансе линейно нарастает со временем. Такой рост амплитуды продолжается до тех пор, пока колебания можно считать малыми (гармоническими). Также из (5.8) и (5.9) видно, что при резонансе фазы вынуждающей силы и колебаний осциллятора сдвинуты на $\pi/2$.

Учет затухания приводит к тому, что решение уравнения движения включает затухающие собственные и вынужденные колебания. С течением времени собственные колебания исчезают, а в системе остаются только вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы ω :

$$x(t) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}} \cos(\omega t + \varphi), \quad \varphi = -\arctg \frac{2\omega\lambda}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Если $\omega_0 \gg \lambda$, то при резонансе $\omega \approx \omega_0$, амплитуда установившихся колебаний максимальна и определяется выражением $A_{\max} = \frac{f}{2\lambda\omega_0}$, а фаза колебаний осциллятора сдвинута по отношению к фазе вынуждающей силы на величину $\varphi = -\arctg \frac{\omega_0}{2\lambda}$.

5.1.2. Малые колебания систем с произвольным числом степеней свободы

Малые колебания систем с произвольным числом степеней свободы s возникают в том случае, если функция Лагранжа представима в виде квадратичных форм по обобщенным координатам и обобщенным скоростям:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j). \quad (5.10)$$

При этом уравнение движения для i -ой степени свободы имеет вид:

$$\sum_{j=1}^s (m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} x_j) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (5.11)$$

Подстановка решения вида $x_j = A_j e^{i(\omega t + \varphi_j)}$ позволяет перейти от системы дифференциальных уравнений (5.11) к системе алгебраических линейных однородных уравнений относительно неизвестных амплитуд A_j :

$$\sum_j A_j (k_{ij} - \omega^2 m_{ij}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (5.12)$$

Система (5.12) имеет нетривиальное решение, если детерминант, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} (k_{11} - \omega^2 m_{11}) & (k_{12} - \omega^2 m_{12}) & \dots & (k_{1s} - \omega^2 m_{1s}) \\ (k_{21} - \omega^2 m_{21}) & (k_{22} - \omega^2 m_{22}) & \dots & (k_{2s} - \omega^2 m_{2s}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (k_{s1} - \omega^2 m_{s1}) & (k_{s2} - \omega^2 m_{s2}) & \dots & (k_{ss} - \omega^2 m_{ss}) \end{vmatrix} = 0 \quad (5.13)$$

Это уравнение является уравнением s -ой степени относительно ω^2 и называется характеристическим (или дисперсионным). Его решения дают спектр собственных частот

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s,$$

каждой из которых соответствуют амплитуды $A_j^{(1)}, A_j^{(2)}, \dots, A_j^{(s)}$ ($j = 1, 2, \dots, s$).

В свою очередь, $A_j^{(\alpha)}$ представляют собой соответствующие алгебраические дополнения определителя (5.13). Таким образом, общими решениями системы уравнений (5.9) являются суперпозиции частных решений

$$x_j^{(\alpha)}(t) = A_j^{(\alpha)} \operatorname{Re} \left\{ e^{i(\omega_\alpha t + \varphi_j)} \right\} = A_j^{(\alpha)} \cos(\omega_\alpha t + \varphi_j),$$

$$x_j(t) = \sum_{\alpha=1}^s \beta_{\alpha} A_j^{(\alpha)} \cos(\omega_{\alpha} t + \varphi_j), \quad (5.14)$$

где весовые множители β_{α} и фазы φ_j определяются начальными условиями.

В качестве обобщенных координат колебательной системы с s степенями свободы можно выбрать $g_{\alpha} = b_{\alpha} \cos \omega_{\alpha} t$. Такие координаты называются нормальными, а соответствующие колебания - нормальными колебаниями. Следовательно, в колебательной системе с s степенями свободы возможно возбуждение s независимых нормальных колебаний.

Функция Лагранжа, записанная с использованием нормальных координат, имеет вид:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s (M_{\alpha} \dot{g}_{\alpha}^2 - K_{\alpha} g_{\alpha}^2), \quad (5.15)$$

а уравнения движения распадаются на s независимых уравнений

$$\ddot{g}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 g_{\alpha} = 0 \quad \text{где} \quad \omega_{\alpha}^2 = \frac{K_{\alpha}}{M_{\alpha}}. \quad (5.16)$$

При этом коэффициенты M_{α} и K_{α} могут быть определены диагонализацией матрицы (5.13).

Использование нормальных координат дает возможность привести задачу о колебаниях s -мерной системы к задаче о колебаниях s одномерных осцилляторов.

5.2. Практикум по решению задач

5.2.1. Примеры решения задач

Пример 1. Определить частоту собственных колебаний математического маятника (масса груза m , длина нити l), точка подвеса которого с массой M в ней может перемещаться без трения в горизонтальном направлении в плоскости качания маятника.

Решение

В качестве обобщенных координат выберем координату x массы M и угол φ отклонения маятника от оси y (рис.5.1). Тогда кинетическая энергия системы

$$\begin{aligned} T &= \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2} \left((\dot{x} + l\dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + (-l\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 \right) = \\ &= \frac{(M+m)\dot{x}^2}{2} + \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mxl\dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Сохраняя лишь величины второго порядка малости, получаем выражение для кинетической энергии в виде

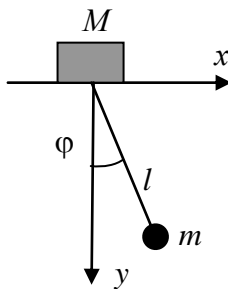


Рис.5.1

$$T = \frac{(M + m)\dot{x}^2}{2} + \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + m\dot{x}l\dot{\varphi}.$$

В этом же приближении потенциальная энергия системы (без учета постоянных слагаемых) имеет вид:

$$U = mgl(1 - \cos \varphi) \approx \frac{mgl\varphi^2}{2}.$$

Тогда функция Лагранжа $L = \frac{(M + m)\dot{x}^2}{2} + \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + m\dot{\varphi}\dot{x} - \frac{mgl\varphi^2}{2}$ представляет собой квадратичные формы обобщенных скоростей и обобщенных координат, т.е. описывает малые колебания в системе. Заметим, что потенциальная энергия системы не зависит от координаты x , т.е. последняя является циклической и поэтому сохраняется обобщенный импульс

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} + ml\dot{\varphi} = const, \quad (1)$$

причем значение $const$ определяется начальными условиями.

Второе из уравнений Лагранжа имеет вид:

$$ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{x} + mgl\varphi = 0. \quad (2)$$

Т.к. из (1) следует, что $\ddot{x} = -\frac{m}{M + m}l\ddot{\varphi}$, то уравнение (2) приобретает вид уравнения линейного гармонического осциллятора:

$$\ddot{\varphi} + \frac{M + m}{M} \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Из этого уравнения следует, что рассматриваемая система обладает одной колебательной степенью свободы, частота собственных колебаний которой равна $\omega^2 = \frac{(M + m)g}{Ml}$. При $M \rightarrow \infty$ точка подвеса неподвижна, и частота колебаний становится равной частоте колебаний простого математического маятника $\omega^2 = \frac{g}{l}$.

Пример 2. Определить конечную амплитуду колебаний одномерной системы, частота собственных колебаний которой ω_0 , под действием постоянной силы F_0 , приходящейся на единицу массы и действующей в течение конечное время T :

$$F = \begin{cases} F_0 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t \geq T \end{cases}.$$

В начальный момент система покоилась в положении равновесия

Решение

Уравнение колебаний системы в интервале времени $0 \leq t \leq T$ имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F_0. \quad (1)$$

Общее решение этого уравнения состоит из двух слагаемых – решения однородного уравнения колебаний $x^{(0)}$ и частного решения $x^{(1)}$, конкретный вид которого определяется видом правой части: $x = x^{(0)} + x^{(1)}$. Решение однородного уравнения имеет стандартный вид гармонической функции

$$x^{(0)} = a \cos(\omega t + \varphi).$$

Частное решение неоднородного уравнения может быть только постоянной величиной - $x^{(1)} = A$. Подстановка этого решения в уравнение (1) дает

значение $A = \frac{F_0}{\omega_0^2}$. Таким образом

$$x = a \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0}{\omega_0^2} \quad \text{и} \quad \dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Учитывая, что в начальный момент времени $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$, получаем

$$x = \frac{F_0}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t) \quad \text{и} \quad \dot{x} = \frac{F_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

К моменту времени $t = T$ $x(T) = \frac{F_0}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 T)$ и $\dot{x}(T) = \frac{F_0}{\omega_0} \sin \omega_0 T$, и эти

значения координаты и скорости можно рассматривать как новые начальные условия для колебаний при $t > T$. Теперь уравнение колебаний имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

а его решение $x = b \cos(\omega_0 t + \delta)$ и $\dot{x} = -b\omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$.

Для нахождения амплитуды установившихся при $t > T$ колебаний воспользуемся новыми начальными условиями:

$$\frac{F_0}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 T) = b \cos(\omega_0 T + \delta),$$

$$\frac{F_0}{\omega_0} \sin \omega_0 T = -b\omega_0 \sin(\omega_0 T + \delta).$$

Разделим второе из уравнений на ω_0 , затем возведем оба уравнения в квадраты и сложим их. В результате получаем

$$b^2 = \frac{F_0^2}{\omega_0^4} (\sin^2 \omega_0 T + (1 - \cos \omega_0 T)^2) = \frac{4F_0^2}{\omega_0^4} \sin^2 \frac{\omega_0 T}{2}.$$

Окончательно получаем следующее значение амплитуды установившихся колебаний:

$$b = \frac{2F_0}{\omega_0^2} \sin \frac{\omega_0 T}{2}.$$

Пример 3. В системе, описанной в задаче 4.21, $m_1 = m_2 = m$ и $k_1 = k_2 = k$. Определить частоты собственных колебаний такого двойного пружинного маятника. Найти закон движения каждого из грузов, если в начальный момент они были смещены из положения равновесия на расстояния x_{10} и x_{20} соответственно и отпущены без начальной скорости.

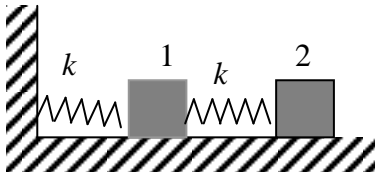


Рис..5.2

Решение

Система характеризуется двумя степенями свободы – смещением первого груза из положения равновесия x_1 и смещением второго x_2 . Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2},$$

а потенциальная $U = \frac{kx_1^2}{2} + \frac{k(x_2 - x_1)^2}{2}$. Следовательно, функция Лагранжа такого двойного пружинного маятника имеет вид:

$$L = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} - \frac{k(x_2 - x_1)^2}{2}.$$

Построим уравнения Лагранжа:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ищем решения этих уравнений в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= Ae^{i(\omega t + \varphi_1)} \quad (\text{или } x_1 = A \cos(\omega t + \varphi_1)), \\ x_2 &= Be^{i(\omega t + \varphi_2)} \quad (\text{или } x_2 = B \cos(\omega t + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Подстановка этих решений в систему уравнений (1) приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд A и B :

$$\begin{cases} A(2k - m\omega^2) - Bk = 0 \\ -Ak + B(k - m\omega^2) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Система имеет нетривиальное решение, если детерминант, составленный из коэффициентов при неизвестных амплитудах A и B , равен нулю, т.е.:

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \omega^4 - \omega^2 \frac{3k}{m} + \frac{k^2}{m^2} = 0.$$

Корнями полученного биквадратного уравнения являются частоты собственных колебаний рассматриваемого двойного пружинного маятника:

$$\omega_1^2 = \frac{k(3 + \sqrt{5})}{2m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k(3 - \sqrt{5})}{2m}.$$

Таким образом, решениями уравнений (1) являются

$A^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ и $A^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_1)$; $A^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ и $A^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_1)$, причем из (2) видно, что

$$B^{(1)} = \frac{2k - m\omega_1^2}{k} A^{(1)} \quad \text{или} \quad B^{(1)} = \frac{k}{k - m\omega_1^2} A^{(1)},$$

а
$$B^{(2)} - \frac{2k - m\omega_2^2}{k} A^{(2)} \text{ или } B^{(2)} = \frac{k}{k - m\omega_2^2} A^{(2)}.$$

Следовательно, общее решение системы уравнений (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 A^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 A^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_1), \\ x_2 &= C_3 A^{(1)} \frac{2k - m\omega_1^2}{k} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_4 A^{(2)} \frac{2k - m\omega_2^2}{k} \cos(\omega_2 t + \varphi_1), \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 – постоянные интегрирования.

Введем обозначения: $C_1 A^{(1)} = a_1$, $C_2 A^{(2)} = b_1$, $C_3 A^{(1)} = a_2$, и $C_4 A^{(2)} = b_2$, где a_1, b_1, a_2 и b_2 весовые коэффициенты, определяющие вклады парциальных колебаний в движение каждого из грузов. Тогда

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + b_1 \cos(\omega_2 t + \varphi_1), \\ x_2 &= a_2 \frac{2k - m\omega_1^2}{k} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + b_2 \frac{2k - m\omega_2^2}{k} \cos(\omega_2 t + \varphi_1). \end{aligned}$$

Соответственно, скорости грузов 1 и 2 равны:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - b_1 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_1), \\ \dot{x}_2 &= -a_2 \omega_1 \frac{2k - m\omega_1^2}{k} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - b_2 \omega_2 \frac{2k - m\omega_2^2}{k} \sin(\omega_2 t + \varphi_1). \end{aligned}$$

Коэффициенты a_1, b_1, a_2 и b_2 , а также фазы парциальных колебаний φ_1 и φ_2 определим из начальных условий:

$$\begin{aligned} x_{10} &= (a_1 + b_1) \cos \varphi_1, & 0 &= -(a_1 \omega_1 + b_1 \omega_2) \sin \varphi_1, \\ x_{20} &= \left(a_2 \frac{2k - m\omega_1^2}{k} + b_2 \frac{2k - m\omega_2^2}{k} \right) \cos \varphi_2, & & (3) \\ 0 &= - \left(a_2 \omega_1 \frac{2k - m\omega_1^2}{k} + b_2 \omega_2 \frac{2k - m\omega_2^2}{k} \right) \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

Из равенства нулю скоростей грузов в начальный момент времени следует, что $\sin \varphi_1 = 0$ и $\sin \varphi_2 = 0$, т.е. $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 0$. Тогда из соотношений (3)

$$\begin{aligned} b_1 &= -a_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad \text{и} \quad x_{10} = a_1 \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \Rightarrow a_1 = \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} x_{10}, \quad b_1 = -\frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} x_{10}, \\ b_2 &= -\frac{k - m\omega_1^2}{k - m\omega_2^2} \frac{\omega_1}{\omega_2} a_2 \quad \text{и} \quad x_{20} = a_2 \frac{2k - m\omega_1^2}{k} \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \\ a_2 &= \frac{k}{2k - m\omega_1^2} \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} x_{20}, \quad b_2 = -\frac{k}{2k - m\omega_2^2} \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} x_{20}. \end{aligned}$$

Окончательно закон движения грузов 1 и 2 можно представить так:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10} \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t \right), \\ x_2 &= x_{20} \frac{k}{2k - m\omega_1^2} \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t \right). \end{aligned}$$

5.2.2. Задания для аудиторного и самостоятельного выполнения

5.1. Материальная точка массы m движется по окружности радиуса r_0 вокруг притягивающего центра, сила притяжения которого подчиняется закону $F = \frac{\alpha}{r}$. В некоторый момент времени точке сообщается малая скорость v в радиальном направлении. Найти уравнение малых радиальных колебаний точки относительно положения динамического равновесия.

5.2. Искусственный спутник обращается по круговой орбите в экваториальной плоскости на высоте H над поверхностью Земли. Вследствие удара небольшого метеора он приобретает радиальную скорость v . Определить период малых колебаний спутника около положения относительного равновесия.

5.3. Найти уравнение вынужденных колебаний одномерной системы массой m , частота собственных колебаний которого ω_0 , под действием постоянной силы $F = const$. В начальный момент времени система покоится в положении равновесия.

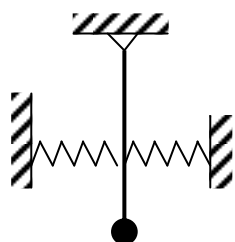


Рис.5.3

5.4. Маятник состоит из жесткого невесомого стержня длины L и массы M на конце. К стержню прикреплены две пружины жесткостями k каждая на расстоянии h от точки подвеса (рис.5.3). Найти частоту малых колебаний маятника.

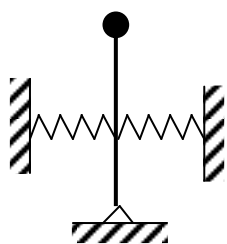


Рис.5.4

5.5. Маятник, описанный в задаче 5.4., установлен так, как показано на рис.5.4. (точка подвеса находится ниже массы M). Найти частоту малых колебаний маятника и исследовать условие равновесия маятника в верхнем положении.

5.6. Диск массы M может катиться без проскальзывания по горизонтальному рельсу. К центру диска шарнирно прикреплен невесомый стержень, на конце которого находится точечный груз массой m . Найти период малых колебаний системы. Длина стержня L .

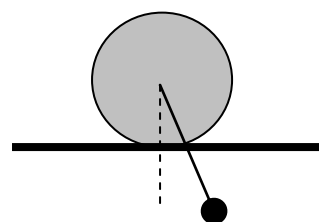


Рис.5.5

5.7. Определить конечную амплитуду колебаний одномерной системы, частота собственных колебаний которой ω_0 , под действием силы, действующей в течение конечного времени T по закону:

$$F = \begin{cases} F_0 \frac{t}{T} & \text{и } \delta \text{д } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{и } \delta \text{д } t \geq T \end{cases} .$$

Масса системы m , в начальный момент времени система покоилась в положении равновесия.

5.8. Найти уравнение вынужденных колебаний одномерной колебательной системы массы m , частота собственных колебаний которой ω , под действием силы $F = F_0 e^{-\alpha t}$. В начальный момент времени система покоилась в положении равновесия.

5.9. Определить амплитуду установившихся колебаний одномерного осциллятора массы m , частота собственных колебаний которого ω_0 , если на него действовала сила $F = F_0 \sin \omega t$ в течение времени $T = \frac{2\pi}{\omega}$. В начальный момент времени система покоилась в положении равновесия. Исследовать решение при резонансе.

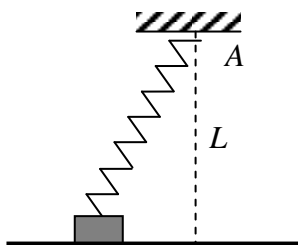


Рис.5.6

5.10. Найти частоту колебаний грузика массой m , способного двигаться по прямой и прикрепленного к пружине, другой конец которой закреплен в точке A на расстоянии L от прямой (рис.5.6). Пружина, имея длину L , натянута с силой F .

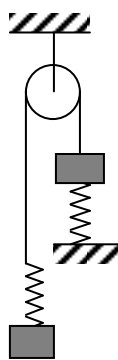


Рис.5.7

5.11. Два грузика одинаковой массы m образуют систему, показанную на рис.5.7. Определить частоты собственных колебаний системы, если пружины имеют одинаковые жесткости k . Система выводится из положения равновесия сообщением начальной скорости грузику, висающему на перекинутой нити.

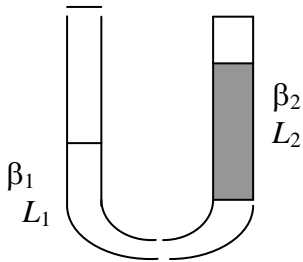


Рис.5.8

5.12. U-образная трубка с одинаковыми сечениями колен открыта с двух сторон. В трубке находятся две несжимаемые несмешивающиеся жидкостями с плотностями β_1 и $\beta_2 < \beta_1$ (рис.5.8.). Определить период собственных колебаний системы около положения устойчивого равновесия после того, как она была выведена из этого положения. Длина столба первой жидкости L_1 , а второй - L_2 соответственно.

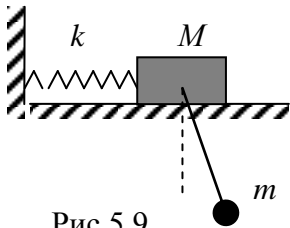


Рис.5.9

5.13. Тело массой M соединено пружиной жесткостью k с неподвижной стенкой и может двигаться без трения по горизонтальной плоскости. К телу прикреплен математический маятник массой m и длиной нити l . Определить частоты малых колебаний системы. В положении равновесия маятника пружина не деформирована.

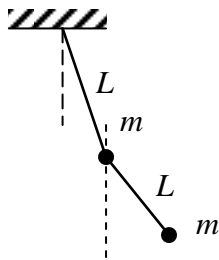


Рис.5.10

5.14. Определить частоты собственных колебаний двойного математического маятника массами $m_1 = m_2 = m$ и длинами нитей $L_1 = L_2 = L$ (рис.5.10).

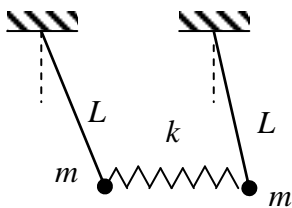


Рис.5.11

5.15. Одинаковые грузики $m_1 = m_2 = m$ двух математических маятников одинаковой длины $L_1 = L_2 = L$ соединены пружиной жесткости k , как показано на рис.5.11. Определить частоты малых колебаний системы. В положении равновесия маятников пружина не деформирована.

Для аудиторных занятий и в качестве домашних заданий рекомендуется рассмотрение примеров 1-3 и выполнение заданий 5.1, 5.4, 5.6, 5.9, 5.12, 5.14, 5.15.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Гречко Л.Г.** Сборник задач по теоретической физике / Л.Г. Гречко, В.И. Сугаков, О.Ф. Томасевич, А.М. Федорченко. – М. : Высшая школа, 1972.
- 2. Жирнов Н.И.** Классическая механика / Н.И. Жирнов. - М.: Просвещение, 1980.
- 3. Задачи по физике.** / И.И. Воробьев, П.И. Зубков, Г.А. Кутузова, [под ред. О.Я. Савченко]. – М.: Наука, 1998.
- 4. Киттель Ч.** Берклевский курс физики. Механика / Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман. – М.: Наука, 1983.
- 5. Ландау Л.Д.** Теоретическая физика. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1965.
- 6. Мещерский И.В.** Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. – М.: Наука, 1975.
- 7. Мултановский В.В.** Курс теоретической физики. Классическая механика. Основы специальной теории относительности. Релятивистская механика / В.В. Мултановский, А.С. Васильев – М.: Просвещение, 1998.
- 8. Ольховский И.И.** Курс теоретической механики для физиков / И.И. Ольховский. – М.: Изд-во МГУ, 1974.
- 9. Сборник задач по теоретической механике.** / Под ред. Н.А. Бражниченко и В.Л. Клана. Бражниченко Н.А., Кан В.Л., Минцберг Б.Л. - 2-ое изд., перераб. и допол. – М.: Высшая школа, 1974.
- 10. Терлецкий Я.П.** Теоретическая механика / Я.П. Терлецкий. – М.: Изд.-во ун-та Дружбы Народов, 1987.

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ

1. КИНЕМАТИКА

Координатный способ описания движения точки

- 1.1. $\frac{(z-3)^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$, $v = \sqrt{9+16\cos^2 t}$, $w = \sqrt{9+16\sin^2 t}$, $\dot{\sigma}_y = \dot{\sigma} = 9\sin t$.
- 1.2. $x = 2a\sin^2 y / 4$, $v = 4\sqrt{1+a^2\sin^2 2t}$, $w = 4a\cos 2t$.
- 1.3. $y = b\cos \frac{x}{a}$, $v = \sqrt{a^2 + b^2\omega^2 \sin^2 \omega t}$, $w = b\omega^2 \cos \omega t$.
- 1.4. $y = b\sqrt{\frac{1-x}{a}}$ ($x < 1$), $v = \sqrt{b^2 + 4a^2 t^2}$, $w = 2a$.
- 1.5. $y = a - 2\frac{x}{a}$, $v = a\omega t\sqrt{1+16\sin^2 t}$, $w = a\sqrt{\sin^2 t + 16\cos^2 2t}$.
- 1.6. $\frac{x-2}{3} = \frac{1-y}{2} = z-2$, $v = \sqrt{14}$, $w = 0$.
- 1.7. $y = 2x - \frac{1}{3}x^2$, $v = \sqrt{61 + \frac{4}{9}t^2 - 8t}$, $w = \frac{2}{3}$.
- 1.8. $(x-a)^2 + y^2 = b^2$, $v = \omega b$, $w = \omega^2 b$, $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_z = \omega b(b-a)$.
- 1.9. $y = ce^{-(b/a)x}$, $v = \sqrt{a^2 + b^2 c^2 e^{-2bt}}$, $w = cb^2 e^{-bt}$.
- 1.10. $\frac{x^2}{9} + \frac{(z-3)^2}{25} = 1$, $v = \omega\sqrt{9+16\cos^2 \omega t}$, $w = \omega^2\sqrt{9+16\sin^2 \omega t}$,
 $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_y = \omega(15 - 9\sin \omega t)$.
- 1.11. Окружность $\rho_0 = const$, $v = v_\varphi = \omega\rho_0$, $w = |w_\rho| = \omega^2\rho_0$.
- 1.12. Окружность в плоскости $\varphi_0 = const$, $v = v_g = \omega r_0$, $w = |w_r| = \omega^2 r_0$.
- 1.13. Окружность радиуса $r_0 \sin \vartheta_0$, $v = \omega r_0 \sin \vartheta_0$, $w = \omega^2 r_0 \sin \vartheta_0$.
- 1.14. $r = \frac{b}{a}\varphi$ (коническая спираль), $v = as9b\vartheta_0\sqrt{1+b^2 t^2}$, $w = abs9b\vartheta_0\sqrt{1+4b^2 t^2}$.
- 1.15. Прямая в плоскости $z = z_0$ с углом наклона к оси OX φ_0 , $v = a$, $w = 0$.

Естественный способ описания движения точки

- 1.16. $R = 125/36$, $w_n = 6/5$, $w_\tau = \pm 8/5$.
- 1.17. $R = 4a$, $w_\tau = 0$, $w_n = \pm a\omega^2$.
- 1.18. $R = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$, $w_\tau = 0$, $w_n = |w_y| = g$.
- 1.19. $R = \frac{(2r-a)^2}{4r-a}$, $w_\tau = 0$, $w_n = \omega^2(r-a/4)$.
- 1.20. $R = 2$, $w_\tau = 0$, $w_n = 2$.
- 1.21. $R = \rho_0\sqrt{2}e^{at}$, $w_\tau = w_n = \rho_0\alpha^2\sqrt{2}e^{at}$.

1.22. $R = 2, \quad w_\tau = w_n = 2.$

1.23. $R = \frac{2}{3\sqrt{3}}r_0, \quad w_\tau = \frac{3}{2}r_0\omega^2, \quad w_n = \frac{3\sqrt{3}}{2}r_0\omega^2.$

1.24. $R = \frac{8}{3}a, \quad w_\tau = 0, \quad w_n = 6\omega^2a.$

1.25. $R = \frac{1}{2}, \quad w_\tau = 0, \quad w_n = 2.$

1.26. $R = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad w_\tau = \frac{\omega^2}{\sqrt{2}}, \quad w_n = \frac{3}{\sqrt{2}}\omega^2.$

1.27. $R = \frac{13\sqrt{13}}{6}, \quad w_\tau = \frac{22}{\sqrt{13}}, \quad w_n = \frac{6}{\sqrt{13}}.$

1.28. $R = \frac{a(1+b^2t^2)^{3/2}}{b(2+b^2t^2)}, \quad w_\tau = \frac{ab^2t}{\sqrt{1+b^2t^2}}, \quad w_n = \frac{ab(2+b^2t^2)}{\sqrt{1+b^2t^2}}.$

**Движение точки относительно произвольно
движущейся системы отсчета**

1.29. $x^2 + y^2 = a^2, \quad v = 2a\omega, \quad w = 4a\omega^2; \quad v' = v_{nep} = a\omega, \quad w' = u_{nep} = a\omega^2;$
 $w_{\hat{e}i\hat{o}} = 2a\omega^2.$

1.30. $v' = |v_x| = a\omega \sin \omega t, \quad w = |w'_x| = a\omega^2 \cos \omega t, \quad w_{\hat{e}i\hat{o}} = |(\vec{w}_{\hat{e}i\hat{o}})_y| = 2\omega^2 a \sin \omega t,$
 $v_{i\hat{a}\hat{o}} = (\vec{v}_{i\hat{a}\hat{o}})_y = a\omega \cos \omega t, \quad w_{i\hat{a}\hat{o}} = |(\vec{w}_{i\hat{a}\hat{o}})_x| = \omega^2 a \cos \omega t,$
 $(x - a/2)^2 + y^2 = a^2/4, \quad v = a\omega, \quad w = 2a\omega^2.$

1.31. В полярных координатах $r = \frac{v_0}{\Omega}\varphi, \quad v = v_0\sqrt{1 + (\Omega t)^2}, \quad w = \Omega v_0\sqrt{4 + (\Omega t)^2};$
 $v' = v_0, \quad w' = 0, \quad v_{i\hat{a}\hat{o}} = (\vec{v}_{i\hat{a}\hat{o}})_y = \Omega v_0 t, \quad w_{i\hat{a}\hat{o}} = (\vec{w}_{i\hat{a}\hat{o}})_x = \Omega^2 v_0 t, \quad w_{\hat{e}i\hat{o}} = (\vec{w}_{\hat{e}i\hat{o}})_y = 2\Omega v_0.$

1.32. В пол. корд. $r = v_0 \frac{\varphi}{\Omega} - \frac{g\varphi^2}{2\Omega^2}, \quad v = \sqrt{(v_0 t - gt^2/2)^2 + \Omega^2(v_0 - gt)^2},$

$w = \sqrt{(g - \Omega^2(v_0 t - gt^2/2))^2 + \Omega^2(v_0 - gt)^2}, \quad v' = v_y' = v_0 - gt, \quad w' = w_y' = -g,$

$v_{i\hat{a}\hat{o}} = -(\vec{w}_{i\hat{a}\hat{o}})_x = -\Omega(v_0 t - gt^2/2), \quad w_{i\hat{a}\hat{o}} = (\vec{w}_{i\hat{a}\hat{o}})_y = \Omega^2(v_0 t - gt^2/2),$

$w_{\hat{e}i\hat{o}} = (\vec{w}_{\hat{e}i\hat{o}})_x = -\Omega(v_0 - gt).$

1.33. $x^2 + y^2 = a^2, \quad v = 3\omega a, \quad w = 9\omega^2 a; \quad v' = \omega a, \quad w' = \omega^2 a, \quad v_{i\hat{a}\hat{o}} = \omega a,$
 $w_{i\hat{a}\hat{o}} = \omega^2 a, \quad w_{\hat{e}i\hat{o}} = 2\omega^2 a.$

1.34. $g = \sqrt{g_0^2 + \omega^2 R(\omega^2 R - 2g_0)\cos^2 \varphi}.$

1.35. $g_y = 9,68 \text{ м/с}^2, \quad g_i = 9,8 \text{ м/с}^2.$

1.36. $g_{\hat{c}-\hat{a}} = g_0 - \omega^2 R - 2\omega v, \quad g_{\hat{a}-\hat{c}} = g_0 - \omega^2 R + 2\omega v.$

1.37. $y = W \frac{x^2}{2v^2}, \quad V_x = v, \quad V_y = Wt, \quad v = w_y = W.$

1.38. 0,2%.

1.39. $T = \frac{T_1 T_2}{T_1 \pm T_2}$.

1.40. $w = \sqrt{w_2^2 + (w_1 - \omega^2 L)^2}$.

2. ДИНАМИКА ТОЧКИ И СИСТЕМЫ ТОЧЕК

2.1. Динамика точки

2.1. $v = \frac{v_0}{\sqrt{1 + kv_0^2 / g}}$.

2.2. $v_0 = \frac{E}{B}$.

2.3. $x = \left(\frac{(3q / 4\pi r^3 \mu)E - g}{k^2} - \frac{v_{0x}}{k} \right) (1 - e^{-kt}) + \frac{(3q / 4\pi r^3 \mu)E - g}{k} t + x_0$,

$\dot{x} = \left(v_{0x} - \frac{(3q / 4\pi r^3 \mu)E - g}{k} \right) e^{-kt} + \frac{(3q / 4\pi r^3 \mu)E - g}{k}$, где $k = \frac{3\eta}{\rho r^2}$.

2.4. $x = \frac{e}{m\omega^2} E (\cos \omega t - 1)$, $\dot{x} = -\frac{e}{m\omega} E \sin \omega t$,

$y = \frac{e}{m\omega^2} E (\sin \omega t - \omega t)$, $\dot{y} = \frac{e}{m\omega} E (\cos \omega t - 1)$, $\omega = \frac{e}{m} B$.

2.5. $t = \frac{3m}{2k} v_0^{2/3}$.

2.6. $r = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + (\omega a)^2}}{\omega}$, $\omega = \frac{e}{m} B$.

2.7. $\left(\frac{x}{r_0} \right)^2 - |k| \left(\frac{y}{v_0} \right)^2 = 1$.

2.8. $(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = (\omega / v_0)^2$, $0 \leq (x_0 - x) \leq E_0 / \omega B$.

2.9. $\left(\frac{x}{r_0} \right)^2 + |k| \left(\frac{y}{v_0} \right)^2 = 1$.

2.10. $x = \left(R^{3/2} + \frac{3}{2} R t \sqrt{2g} \right)^{2/3}$.

2.11. $x = \frac{mv_0}{k} (1 - e^{-kt/m}) + x_0$.

2.12. $v < \frac{eBd}{4m} + \frac{2U}{Bd}$ или $v = \frac{U}{Bd}$.

2.13. $x = \left(\frac{m}{k} \right)^2 (e^{-kt/m} - 1) + \frac{mg}{k} t + H$, $v = \frac{mg}{k} (1 - e^{-kt/m})$.

2.14. $s = \frac{m}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha v_0}{l} \right)$.

2.15. $x^2 + \left(y + \frac{v_0}{\omega + \lambda^2 / \omega} \right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega + \lambda^2 / \omega} \right)^2 e^{-2\lambda t}$, где $\omega = \frac{q}{m} B$ и $\lambda = \frac{k}{m}$.

2.16. $v = \frac{\sqrt{14k}}{\sqrt{3x_0}}$.

2.17. $x = \frac{q}{m\alpha^2} (e^{-\alpha t} - 1) + \frac{qE}{m\alpha} t$, $y = \frac{v_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$, $\alpha = \frac{k}{m}$.

$$2.18. t = \sqrt{\frac{m}{\alpha}} x_0^2.$$

$$2.19. x = \frac{v_0}{\omega} e^{-\lambda t} \sin \omega t, \text{ где } 2\lambda = \frac{\alpha}{m}, \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

2.2. Теоремы динамика точки и системы точек

Теорема об изменении кинетической энергии.

Одномерное движение

$$2.20. T = T_0 \exp(-2\mu\alpha). \quad 2.22. H = \frac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2}.$$

$$2.23. \text{ При } T_0 < \frac{Fx_0}{0} \quad |x| \leq \sqrt{\frac{2T_0x_0}{F_0}}; \text{ при } T_0 > \frac{Fx_0}{0} \quad |x| \leq \frac{T_0}{F_0} + \frac{x_0}{2}.$$

$$2.24. x_{\max} = v_0 \sqrt{\frac{M}{3k}}. \quad 2.25. v_{\max} = \sqrt{v_0^2 + \frac{m}{2\pi\varepsilon_0} \frac{q_1q_2}{L}}.$$

$$2.27. H = \frac{m}{k} \left[(v - v_0) + \frac{mg}{k} \ln \frac{v - mg/k}{v_0 - mg/k} \right].$$

$$2.28. t_0 = t\sqrt{3}. \quad 2.28. t = \sqrt{\frac{h}{2g}} \arcsin \sqrt{\frac{h}{h+H}}.$$

$$2.30. x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right). \quad 2.31. t = t_0\sqrt{3}. \quad 2.32. T = \frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{E+U_0}}.$$

Теорема об изменении импульса. Центр масс и движение центра масс

$$2.33. F = I \sqrt{\frac{2MU}{e}}. \quad 2.34. P = (2M_1 + M_2)\omega r.$$

$$2.35. T = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \frac{v^2}{L}. \quad 2.36. x_c = \frac{m}{M+m} (v_0t - R \sin \varphi).$$

$$2.37. \omega^2 = \frac{(M_1T_2 + M_2T_1)}{M_1M_2L}, \quad m = 2 \frac{M_1M_2(T_1 - T_2)}{M_1T_2 - M_2T_1}.$$

$$2.38. N = 2(F - \rho v^2) \cos \frac{\alpha}{2}. \quad 2.39. \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - 2\mu.$$

$$2.40. N = \frac{4\pi^2}{T^2} (R-r) \frac{Mm}{M+m}. \quad 2.41. T = 2\pi \sqrt{\frac{R(M_1 + M_2)}{G}}.$$

$$2.42. \omega^2 = \frac{3GM}{l^3}.$$

2.3. Задачи динамики системы свободных точек

Упругие столкновения и распад частиц

$$2.45. v_1 = \sqrt{\frac{2Em_2}{m_1(m_1 + m_2)}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2Em_1}{m_2(m_1 + m_2)}}.$$

$$2.46. E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \left(\frac{p_1^5}{m_1^2} + \frac{p_2^5}{m_2^2} - 2 \frac{p_1 p_2}{m_1 m_2} \cos \alpha \right).$$

$$2.47. E = T \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2.$$

$$2.48. \sin \alpha = \frac{m_2}{m_1}.$$

$$2.49. \cos \beta = \frac{v_1 v_2 \cos \alpha}{u_1 \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - u^2}}.$$

$$2.50. u_1 = 2v + v_2, \quad u_2 = v_1 - 2v.$$

$$2.51. u = \frac{2m_1 v \cos \alpha}{m_1 + m_2}.$$

$$2.52. \frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha}.$$

Движение в центральном поле. Задача Кеплера

$$2.55. r = \frac{r_0 v_0^3}{2GM + r_0^2 v_0^2}, \quad v = \frac{2GM}{v_0 r_0} - v_0.$$

$$2.56. r_{\min} = \frac{d}{1 + \frac{4\pi\epsilon_0 d m v^2}{e^2} \cos^2 \alpha}.$$

$$2.57. m = \frac{q(L - r)}{\pi\epsilon_0 L (u^2 + v^2 + 2uv \cos(\alpha + \beta) - L^2 (u \cos \alpha - v \cos \beta)^2 / r^2)}.$$

$$2.58. \Delta E = \frac{GMm}{(r_A + r_p)}.$$

$$2.59. v = 4v_0 \left(\frac{R}{r} \right), \quad \vec{F}(r) = -32mv_0^2 \frac{R^4}{r^6} \vec{r}.$$

$$2.60. v = \frac{v_0 p}{(1 + \epsilon) \sqrt{1 + 2\epsilon \cos \varphi + \epsilon^2}}.$$

$$2.61. \frac{S_p}{S_n} = 1 - \frac{Ze^2 R}{4\pi\epsilon_0 E}.$$

$$2.62. v = v_0 \sqrt{\frac{p}{2r}}.$$

$$2.63. \vec{F}(r) = -\frac{m\alpha^2}{r} \vec{r}.$$

Динамика твердого тела. Момент инерции

$$3.1. I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{M(D^5 - d^5)}{10(D^3 - d^3)}. \quad 3.2. I_{zz} = \frac{MR^2}{2}, \quad I_{xx} = I_{yy} = M \left(\frac{H^2}{12} + \frac{R^2}{4} \right).$$

$$3.3. I_{zz} = \frac{M(R^2 + r^2)}{2}, \quad I_{xx} = I_{yy} = \frac{MH^2}{12} + \frac{M(R^2 + r^2)}{4}.$$

$$3.4. I_{xx} = \frac{M(b^2 + c^2)}{12}, \quad I_{yy} = \frac{M(a^2 + c^2)}{12}, \quad I_{zz} = \frac{M(b^2 + a^2)}{12}.$$

$$3.5. I_{zz} = \frac{M(a^2 + b^2)}{4}, \quad I_{xx} = \frac{Mb^2}{4} + \frac{MH^2}{12}, \quad I_{yy} = \frac{Ma^2}{4} + \frac{MH^2}{12}.$$

$$3.6. I = \frac{2}{3} MR^2. \quad 3.7. I = \frac{NL^2}{3}. \quad 3.9. r = \sqrt{\frac{I(M_H + M_F)}{M_H M_F}} \approx 0,8 \cdot 10^{-8} \text{ (см)}.$$

$$3.10. I = \frac{MR^2}{5}.$$

$$3.11. I_{zz} = \frac{MR^2}{2} + Ma^2, \quad I_{yy} = \frac{MR^2}{4} + Ma^2, \quad I_{xx} = \frac{MR^2}{4}, \quad I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0.$$

**Вращательное и плоскопараллельное
движение твердого тела**

$$3.12. t = \frac{\omega R}{\mu g}, \quad n = \frac{\omega^2 R}{4\pi\mu g}. \quad 3.13. W = \frac{(F_1 - F_2)R^2 + (F_1 + F_2)rR}{I + mR^2}.$$

3.14. Через время $\tau = \frac{v}{\mu g}$ после удара кольца о стенку оно остановится.

$$3.15. v = \sqrt{3gL}. \quad 3.16. \omega = \frac{v}{2R}. \quad 3.17. \omega = \frac{M_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{I}t}\right).$$

$$3.18. \tau = \frac{v_0 - \omega_0 R}{3\mu g}, \quad v = \frac{2v_0 + \omega_0 R}{3}. \quad 3.19. \tau = \frac{\omega_0 R - 2v_0}{3\mu g}, \quad v = \frac{2v_0 + \omega_0 R}{3}.$$

3.20. Центр масс цилиндра движется в первоначальном направлении, вращаясь в противоположном направлении $\tau = \frac{v_0 + 2\omega_0 R}{3\mu g}, \quad v = \frac{2v_0 - \omega_0 R}{3}.$

3.21. При $v_0 < \frac{\omega_0 R}{2}$ устанавливается качение без проскальзывания в направлении, противоположном первоначальному: $\tau = \frac{\omega_0 R + v_0}{3\mu g},$
 $v = \frac{\omega_0 R - 2v_0}{3}.$

При $2v_0 > \omega_0 R > v_0$ устанавливается качение без проскальзывания в первоначальном направлении - $v = \frac{2v_0 - \omega_0 R}{3}, \quad \tau = \frac{v_0 + \omega_0 R}{3\mu g}.$

$$3.22. w = \frac{2}{3}g. \quad 3.23. T = \frac{1}{7}mg \sin \alpha. \quad 3.24. v = \sqrt{Lg(\sin \alpha - 2\mu \cos \alpha)}.$$

4. Основы аналитической механики

Принцип виртуальных перемещений и равновесие несвободных механических систем

$$4.1. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{9}. \quad 4.2. \operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{\sqrt{3}(3m + M)}. \quad 4.3. F = Mg \frac{n_2}{n_1} \frac{L}{R}.$$

$$4.4. k = mg \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{L(2\sin \alpha - 1)}. \quad 4.5. F = P \frac{R - r}{2R}. \quad 4.6. T = 2mg.$$

$$4.7. T = 2mg \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad 4.8. T = (M + 2m)g. \quad 4.9. T = \frac{4}{3\sqrt{3}}mg.$$

$$4.10. P = \frac{M}{8}; \quad P_n = \frac{M}{2^n}.$$

Уравнения Лагранжа. Функция Лагранжа

$$4.11. L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl\frac{\varphi^2}{2}. \quad 4.12. L = \frac{(m+M)\dot{x}^2}{2} + \frac{2l^2\dot{\varphi}^2}{2} + ml\dot{x}\dot{\varphi} - \frac{mgl\varphi^2}{2}.$$

$$4.13. L = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2)}{2} - U(r). \quad 4.14. L = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}{2} - U(r).$$

$$4.15. L = \frac{(m_1 + m_2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} + \frac{m_1 m_2 l^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2)}{2(m_1 + m_2)}.$$

$$4.16. L = \frac{m(R-r)^2\dot{\varphi}^2}{2} - mg(R-r)(1 - \cos \varphi).$$

$$4.17. L = \frac{(4M+m)l^2\dot{\varphi}^2}{18} - \frac{gl}{6}(2M-m)\varphi^2.$$

$$4.18. L = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \dot{X}^2 + \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \dot{x}^2 - \frac{k(x - l_0)^2}{2} \quad (X - \text{координата центра масс, } x - \text{расстояние между шариками}).$$

$$4.19. L = T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \dot{\varphi}^2}{2}.$$

$$4.20. L = \frac{m}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t - 2l\dot{\varphi}a\omega \sin \omega t) - mgl\frac{\varphi^2}{2}.$$

$$4.21. L = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} - \frac{k_1 x_1^2}{2} - \frac{k_2 (x_2 - x_1)^2}{2}.$$

$$4.22. L = \frac{m}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + 2l\dot{\varphi}a\omega \sin \omega t) - mg(l\varphi^2 / 2 + a \cos \omega t).$$

$$4.23. w = \frac{2(M+m)g \sin \alpha}{2M+m}. \quad 4.24. F = \frac{k_1^2}{k_1+k_2} \frac{v}{\omega} \sin \omega t + \frac{k_1 k_2}{k_1+k_2} vt, \quad \omega^2 = \frac{k_1+k_2}{m_1}.$$

$$4.25. F = -mg\alpha \cos \omega t, \quad \omega^2 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad 4.26. w_{i\delta} = \frac{1}{9}g, \quad w_{\omega} = \frac{16\sqrt{2}}{45}g, \quad w_{\delta\delta\delta} = \frac{2\sqrt{2}}{45}g.$$

$$4.27. x = x_0 \frac{m}{4m+M} (1 - \cos \omega t), \quad \omega^2 = \frac{k(4m+M)}{m(3m+M)}.$$

$$4.28. w = g \frac{m_3 - 2\mu(\sin \alpha + \sin \beta + \mu_1 \cos \alpha + \mu_2 \cos \beta)}{\mu + 4m_3}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

$$4.29. s = \frac{h}{m+1} ctg \alpha. \quad 4.30. N = \frac{mv_0^2}{R} \cos^2 \alpha.$$

5. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

$$5.1. \Delta r = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{2}\omega_0, \quad \left(\omega_0^2 = \frac{\alpha}{mr_0^2} \right). \quad 5.2. T = \frac{2\pi(R+H)}{R} \sqrt{\frac{R+H}{g}}.$$

$$5.3. x = \frac{F}{m\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t). \quad 5.4. \omega^2 = \frac{2kh^2}{ML^2} + \frac{g}{L}. \quad 5.5. \omega^2 = \frac{2kh^2}{ML^2} - \frac{g}{L}.$$

$$5.6. T = 2\pi \sqrt{\frac{2ML}{g(M+2m)}}. \quad 5.7. a = \frac{F_0}{m\omega^3 T} \sqrt{(\omega T)^2 + 4\sin^2(\omega T) / 2 - 2(\omega T)\sin(\omega T)}.$$

$$5.8. x = \frac{F_0}{m\omega\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \left(\cos(\omega t + \varphi) + \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} e^{-\alpha t} \right), \quad \varphi = -\arctg \frac{\alpha}{\omega}.$$

$$5.9. a = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \frac{\omega}{\omega_0} \sin \frac{\omega_0}{\omega} \pi, \quad \text{при } \omega \rightarrow \omega_0 \quad a = \frac{\pi F_0}{m\omega_0^2}.$$

$$5.10. \omega^2 = \frac{F}{Lm}. \quad 5.11. \omega_{1,2}^2 = \frac{k}{m} (3 \pm \sqrt{5}). \quad 5.12. T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2}{2\rho_1 g}}.$$

$$5.13. \omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{N} + \frac{M+m}{M} \frac{g}{L} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{N} + \frac{M+m}{M} \frac{g}{L} \right)^2 - 4 \frac{g}{L} \frac{k}{M}}.$$

$$5.14. \omega_{1,2}^5 = \frac{g}{L} (3 \pm \sqrt{5}). \quad 5.15. \omega_1^2 = \frac{g}{L}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{L} + \frac{k}{m}.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Векторы и тензоры. Алгебра векторов и тензоров

Векторы. Алгебра векторов

Вектор представляет собой направленный отрезок \vec{a} , длина которого $a = |\vec{a}|$ называется его модулем. Если ввести вектор единичной длины \vec{n} в направлении вектора \vec{a} , то последний можно представить в виде $\vec{a} = a\vec{n}$. В прямоугольных декартовых координатах вектор \vec{a} задается координатами его начала и конца или своим модулем и углами α , β и γ между направленным отрезком и координатными осями, как показано на рис.П.1.1 на примере плоского вектора. В трехмерном пространстве

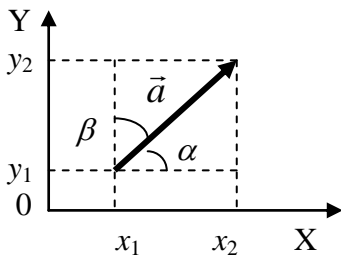


Рис.П.1.1

$$a^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

где $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$ и $(z_2 - z_1)$ - проекции вектора.

При этом

$$x_2 - x_1 = a \cos \alpha, \quad y_2 - y_1 = a \cos \beta, \quad z_2 - z_1 = a \cos \gamma,$$

$$a \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Величины $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ называются направляющими косинусами.

Если с осями OX, OY и OZ прямоугольной системы координат совместить ортогональные единичные векторы (орты) \vec{n}_x , \vec{n}_y и \vec{n}_z , то вектор \vec{a} можно представить в виде

$$\vec{a} = (x_2 - x_1)\vec{n}_x + (y_2 - y_1)\vec{n}_y + (z_2 - z_1)\vec{n}_z.$$

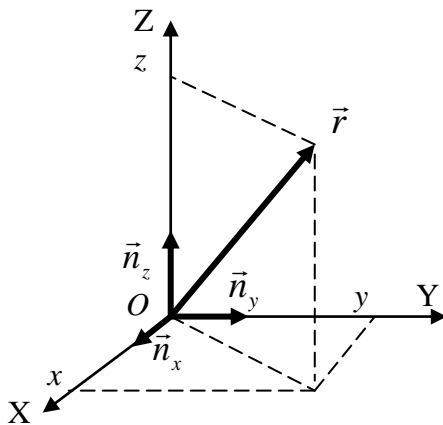


Рис.П.1.2

Вектор, $\vec{r} = r\vec{n}_r$, начало которого совпадает с началом координат O, называется радиус-вектором (рис.П.1.2). Для радиус-вектора справедливы следующие соотношения:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\vec{r} = r\vec{n}_r = x\vec{n}_x + y\vec{n}_y + z\vec{n}_z,$$

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \cos \beta, \quad z = r \cos \gamma.$$

В свою очередь,

$$\vec{n}_r = \vec{n}_x \cos \alpha + \vec{n}_y \cos \beta + \vec{n}_z \cos \gamma.$$

При параллельном переносе (трансляции) вектора \vec{a} на произвольный

вектор \vec{b} ни длина, ни направление вектора \vec{a} не меняются (рис.П.1.3).

Поэтому

при параллельном переносе системы координат проекции вектора остаются неизменными:

$$(x_2 - x_1) = (x'_2 - x'_1), \quad (y_2 - y_1) = (y'_2 - y'_1), \quad (z_2 - z_1) = (z'_2 - z'_1)$$

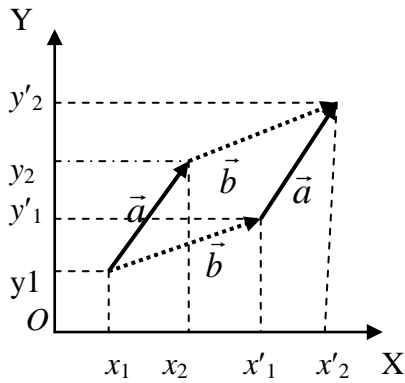


Рис.П1.3

При этом трансляцию вектора \vec{a} можно рассматривать как параллельный перенос системы координат на этот же вектор трансляции \vec{b} . Однако поворот системы координат как целого приводит к изменению проекций вектора при сохранении его длины (рис.П1.4). При таком переходе от системы координат XYZ к X'Y'Z'

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

Закон перехода от координат вектора x, y, z к координатам x', y', z' можно

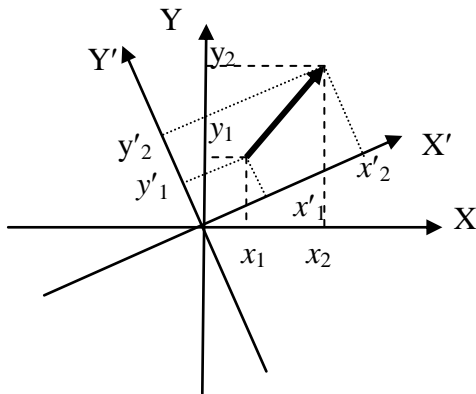


Рис.П1.4

представить в виде линейного преобразования:

$$\begin{aligned} x' &= a_{xx}x + a_{xy}y + a_{xz}z \\ y' &= a_{yx}x + a_{yy}y + a_{yz}z \\ z' &= a_{zx}x + a_{zy}y + a_{zz}z \end{aligned}$$

Эти соотношения можно переписать в более компактной форме, если ввести обозначения $x, y, z \rightarrow 1, 2, 3$:

$$x'_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k \quad i=1, 2, 3.$$

Еще более простой вид закон преобразования

координат принимает с использованием «слепых» индексов суммирования (индексов суммирования Эйнштейна) – знак суммы опускается, но подразумевается суммирование по повторяющимся индексам, т.е.

$$x'_i = a_{ik} x_k \quad k=1, 2, 3.$$

Обратное преобразование координат имеет вид

$$x_i = a_{ki} x'_k \quad k=1, 2, 3. \quad (\text{П1.1})$$

Совокупность коэффициентов a_{ik} может быть представлена матрицей преобразования

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{П1.2})$$

причем элементы матрицы представляют собой систему направляющих косинусов: элементы первой строки – косинусы углов между осью X' и осями X, Y, Z соответственно, элементы второй строки – косинусы углов

между осью Y' и осями X, Y, Z , элементы третьей строки – косинусы углов между осью Z' и осями X, Y, Z .

Алгебра векторов

1. Сумма векторов. Сложение векторов можно осуществить двумя способами:

- при геометрическом суммировании слагаемые векторы необходимо расположить так, чтобы начало каждого последующего вектора совпадало с концом предыдущего; тогда вектор-сумма представляет собой вектор, начало которого совпадает с началом первого из слагаемых векторов, а конец – с концом последнего;

- при алгебраическом сложении алгебраическая сумма проекций слагаемых векторов на соответствующие координатные оси равна проекции вектора-суммы на эти оси.

2. Умножение векторов на число. Умножение вектора \vec{a} на число λ сводится к умножению на это число его длины (умножению на это число всех проекций вектора). При этом

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

3. Скалярное произведение векторов. Скалярное произведение двух векторов \vec{a} и \vec{b} определяется как

$$(\vec{a}\vec{b}) = ab \cos \alpha,$$

где α - угол между векторами. В проекциях скалярное произведение векторов может быть определено так:

$$(\vec{a}\vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

где a_i и b_i - проекции векторов-сомножителей.

Из определения следует, что скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов равно нулю. Кроме того, будучи скалярной величиной, скалярное произведение двух векторов коммутативно, т.е. $(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}\vec{a})$.

4. Векторное произведение. Векторным произведением $\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]$ называется вектор \vec{c} , перпендикулярный плоскости, в которой лежат векторы-сомножители и направленный так,

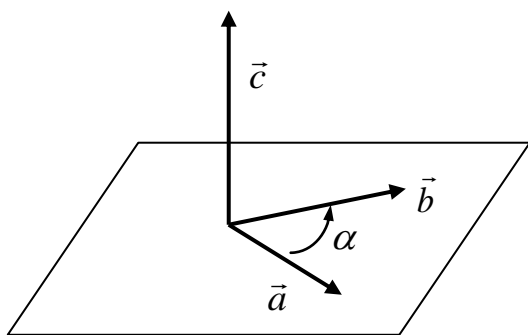


Рис.П1.5

что с его конца вращение от вектора \vec{a} к вектору \vec{b} происходит против часовой стрелки (рис.П1.5). Модуль вектора \vec{c}

$$c = ab \sin \alpha.$$

Проекции вектора \vec{c} определяются соотношениями:

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z,$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

Существует мнемоническое правило для определения проекций вектора, являющегося векторным произведением: вектор \vec{c} представляется определителем

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{n}_x & \vec{n}_y & \vec{n}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{n}_x(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{n}_y(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{n}_z(a_x b_y - a_y b_x).$$

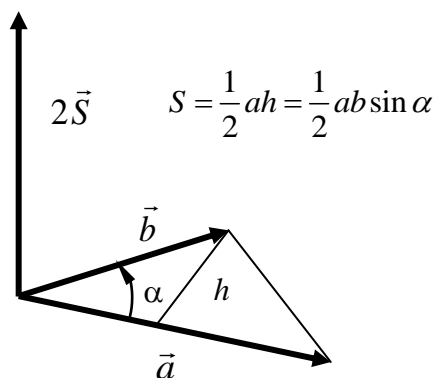


Рис.П1.6

Как следует из определения, векторное произведение двух параллельных векторов равно нулю. Из определения также следует, что векторное произведение не коммутативно: $[\vec{a}\vec{b}] = -[\vec{b}\vec{a}]$.

Модуль векторного произведения имеет простой геометрический смысл – величина $ab \sin \alpha$ представляет собой удвоенную площадь треугольника со сторонами a и b , угол между которыми равен α (рис.П1.6).

5. Двойное векторное произведение. Вектор \vec{a} можно векторно умножить на векторное произведение двух векторов \vec{b} и \vec{c} . Такое двойное векторное произведение определяется следующим образом:

$$\vec{d} = [\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{c}\vec{a}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}).$$

Очевидно, что

$$[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] = -[[\vec{b}\vec{c}]\vec{a}] = [[\vec{c}\vec{b}]\vec{a}] = -[\vec{a}[\vec{c}\vec{b}]].$$

6. Смешанное произведение. Скалярное произведение вектора \vec{a} на векторное произведение $[\vec{b}\vec{c}]$ называется смешанным произведением векторов. Для такого произведения справедливы соотношения:

$$\vec{a}[\vec{b}\vec{c}] = \vec{b}[\vec{c}\vec{a}] = \vec{c}[\vec{a}\vec{b}].$$

Эти соотношения выражают допустимость циклической перестановки сомножителей в смешанном произведении.

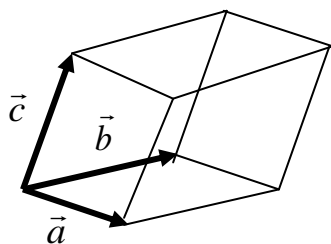


Рис.П1.7

Смешанное произведение трех векторов имеет простой геометрический смысл – оно определяет объем параллелепипеда, ребрами которого являются векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} (рис.П1.7).

В физических приложениях часто возникает необходимость вычисления величины $[\vec{a}\vec{b}]^2$,

которую можно рассматривать как смешанное произведение вектора $[\vec{a}\vec{b}]$ на векторное произведение $[\vec{a}\vec{b}]$. Тогда

$$[\vec{a}\vec{b}]^2 = [\vec{a}\vec{b}][\vec{a}\vec{b}] = \vec{a}[\vec{b}[\vec{a}\vec{b}]] = a^2b^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$$

Тензоры

Трехмерным тензором n -го ранга называется совокупность 3^n величин $T_{\underbrace{ij\dots p}_n}$, которые при переходе из одной системы координат в другую преобразуются по закону

$$T'_{\underbrace{ij\dots p}_n} = a'_{ik} \underbrace{\alpha'_{il}\dots\alpha'_{ps}}_n T_{\underbrace{kl\dots s}_n},$$

где a_{ik} - матрица преобразования координат (П1.2).

Тензор является наиболее универсальным математическим объектом, используемым в физике. Так, скаляр можно рассматривать как тензор нулевого ранга, вектор – как тензор первого ранга (см. выражение (П1.1)), момент инерции – как тензор второго ранга. Т.к. в физике в основном используются величины, описываемые тензорами второго ранга, то ниже будут рассматриваться свойства тензоров именно на примере трехмерных тензоров второго ранга.

Компоненты тензора \hat{T} второго ранга представляются в виде матрицы с элементами T_{ij}

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{П1.3})$$

которые преобразуются по закону $T'_{ik} = a_{ii} a_{kl} T_{jl}$.

Тензор называется симметричным, если его элементы подчиняются условию $T_{ik} = T_{ki}$, и антисимметричным, если $T_{ik} = -T_{ki}$ (диагональные элементы антисимметричного тензора равны нулю).

Алгебра тензоров

1. Транспонирование. Операция транспонирования переводит тензор \hat{T} в тензор $\hat{\tilde{T}}$ так, что компоненты T_{ih} тензора \hat{T} переводятся в компоненты T_{ki} транспонированного тензора.

2. Сумма тензоров. Тензор $\hat{T} = \hat{T}^{(1)} + \hat{T}^{(2)}$, если $T_{ik} = T_{ik}^{(1)} + T_{ik}^{(2)}$. Из определения суммы тензоров и операции транспонирования следует, что любой тензор можно представить в виде суммы симметричного \hat{S} и антисимметричного \hat{A} тензоров:

$$S_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) \quad A_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}).$$

Тогда $\hat{T} = \hat{S} + \hat{A}$ или $T_{ik} = S_{ik} + A_{ik}$.

3. Умножение тензора на число. При умножении тензора \hat{T} на число λ компонентами тензора второго ранга $\lambda\hat{T}$ являются 3^2 величин λT_{ik} .

4. Умножение тензора на вектор и вектора на тензор. Тензор можно рассматривать как линейный оператор, переводящий вектор-столбец \vec{a} в вектор-строку \vec{b} :

$$\hat{T}\vec{a} = \vec{b} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (b_1 \ b_2 \ b_3). \quad (\text{П1.4})$$

Соответственно, произведение вектора на тензор

$$\vec{a}\hat{T} = \vec{b}' \quad \text{или} \quad (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{П1.5})$$

5. Собственные значения и собственные векторы тензора второго ранга. Т.к. тензор можно рассматривать как линейный оператор, переводящий вектор \vec{a} в вектор \vec{b} , то можно найти такой вектор-столбец $\vec{X} \neq 0$, что результат действия на него оператора \hat{T} сводится к умножению этого вектора на число λ , т.е.: $\hat{T}\vec{X} = \lambda\vec{X}$ или $\hat{T}\vec{X} - \lambda\vec{X} = 0$. В расширенном виде

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = 0,$$

$$(T_{11} - \lambda)X_1 + T_{12}X_2 + T_{13}X_3 = 0$$

или

$$T_{21}X_1 + (T_{22} - \lambda)X_2 + T_{23}X_3 = 0,$$

$$T_{31}X_1 + T_{32}X_2 + (T_{33} - \lambda)X_3 = 0$$

Эта система линейных однородных уравнений относительно неизвестных координат X_1, X_2, X_3 имеет нетривиальное решение, если

$$\left\| \begin{pmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{pmatrix} \right\| = 0.$$

Корнями этого уравнения являются три значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, называемые собственными значениями тензора \hat{T} . Каждому собственному значению соответствуют собственные векторы $\vec{X}^{(1)}(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, X_3^{(1)})$, $\vec{X}^{(2)}(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, X_3^{(2)})$, $\vec{X}^{(3)}(X_1^{(3)}, X_2^{(3)}, X_3^{(3)})$. В системе координат, оси которой совпадают по направлению с собственными векторами $\vec{X}^{(1)}, \vec{X}^{(2)}, \vec{X}^{(3)}$, компоненты тензора

образуют матрицу, в которой отличными от нуля являются лишь диагональные элементы:

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Если тензор \hat{T} симметричный, то собственные векторы такого тензора ортогональны и образуют правую тройку векторов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Криволинейные ортогональные координаты. Аналитические операции в криволинейных координатах

При решении физических задач, обладающих той или иной симметрией, приходится пользоваться различными криволинейными ортогональными координатами.

Декартовы координаты

С декартовыми координатами x, y и z связана правая тройка единичных ортогональных векторов $\vec{n}_x = \vec{n}_1, \vec{n}_y = \vec{n}_2$ и $\vec{n}_z = \vec{n}_3$.

В декартовых координатах радиус-вектор

$$\vec{r} = x\vec{n}_x + y\vec{n}_y + z\vec{n}_z, \quad (\text{П2.1})$$

причем координаты радиус-вектора \vec{r} являются функциям времени.

Дифференцирование декартовых координат. Дифференцирование по времени радиус-вектора (определение скорости и ускорения) сводится к дифференцированию в выражении (П2.1) лишь координат, т.к. единичные векторы постоянны по величине и по направлению, т.е.

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{n}_x + \dot{y}\vec{n}_y + \dot{z}\vec{n}_z.$$

Соответственно, вторая производная

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{n}_x + \ddot{y}\vec{n}_y + \ddot{z}\vec{n}_z.$$

Производная по направлению и градиент скалярной функции координат. Аналитические свойства скалярной функции координат $u(x, y, z)$ определяются скоростью ее изменения в том или ином направлении l , задаваемом единичным вектором \vec{e} , т.е. производной $\frac{du}{dl}$. Т.к. $u = u(x, y, z)$, то

$$\frac{du}{dl} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dl} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \quad (\text{П2.2})$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - направляющие косинусы (соответствующая плоская иллюстрация представлена на рис.П2.1). В свою очередь, направляющие косинусы являются проекциями единичного вектора \vec{e} . Тогда выражение (П2.2) можно

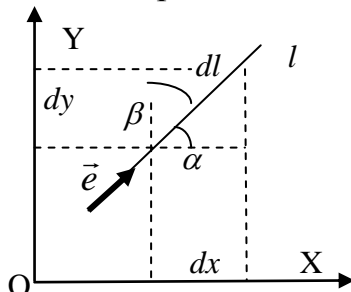


Рис.П2.1

рассматривать как скалярное произведение вектора

$$\vec{n}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{n}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{n}_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{П2.3})$$

на единичный вектор \vec{e} . Вектор (П2.3) называется градиентом скалярной функции $u(x, y, z)$ - $gradu$.

Следовательно, производная по направлению

$$\frac{du}{dl} = \vec{e} \cdot gradu. \quad (\text{П2.4})$$

Очевидно, что производная по направлению максимальна, если направление \vec{e} совпадает с направлением градиента. Таким образом, направление градиента есть направление наибыстрейшего роста

функции $u(x, y, z)$, а модуль градиента – максимальная производная по направлению в данной точке.

В механике принято условное обозначение градиента: $gradu = \frac{\partial u}{\partial \vec{r}}$; при этом под скалярной функцией $u(x, y, z)$ обычно подразумевается потенциальная энергия силового поля.

Элементы длины, площади и объема.

$$dl_1 = dx, \quad dl_2 = dy, \quad dl_3 = dz$$

$$dS_1 = dS_x = dydz, \quad dS_2 = dS_y = dzdx, \quad dS_3 = dS_z = dxdy, \quad ,$$

$$dV = dxdydz .$$

Цилиндрические координаты

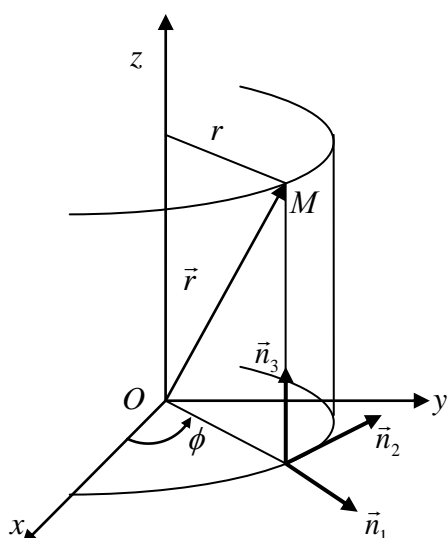


Рис. П2.2. Цилиндрические координаты.

Положение точки M с декартовыми координатами x, y, z в цилиндрических координатах описывается тремя независимыми числами (рис.П2. 2):

- расстоянием r ($r \geq 0$) от оси OZ до точки M (проекцией радиус-вектора точки M на плоскость XOY);

- углом ϕ ($0 \leq \phi < 2\pi$) между осью OX и проекцией \vec{r} на плоскость XOY ;

- проекцией z радиус-вектора точки M на ось OZ ($-\infty < z < +\infty$).

С координатами r, ϕ и z связана тройка ортогональных единичных векторов следующими соотношениями:

$$\vec{n}_r = \vec{n}_1, \quad \vec{n}_\phi = \vec{n}_2 \text{ и } \vec{n}_z = \vec{n}_3 .$$

При этом декартовы координаты x, y, z точки M связаны с ее цилиндрическими координатами соотношениями:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad z = z.$$

Единичные векторы $\vec{n}_r, \vec{n}_\phi, \vec{n}_z$ связаны с тройкой ортов декартовой системы координат соотношениями:

$$\vec{n}_r = \vec{n}_x \cos \phi + \vec{n}_y \sin \phi, \quad \vec{n}_\phi = -\vec{n}_x \sin \phi + \vec{n}_y \cos \phi, \quad \vec{n}_z = \vec{n}_z, \quad (\text{П2.5})$$

Дифференциальные операции. При движении точки M орты \vec{n}_r, \vec{n}_ϕ меняют свою ориентацию. Поэтому с помощью (П2.5) можно ввести скорость изменения направления этих ортов при движении точки M .

$$\dot{\vec{n}}_r = -\vec{n}_x \dot{\phi} \sin \phi + \vec{n}_y \dot{\phi} \cos \phi = \dot{\phi} \vec{n}_\phi, \quad \dot{\vec{n}}_\phi = -\vec{n}_x \dot{\phi} \cos \phi - \vec{n}_y \dot{\phi} \sin \phi = -\dot{\phi} \vec{n}_r . \quad (\text{П2.6})$$

Скорость точки M определяется правилами дифференцирования произведения:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{n}_r + r \dot{\vec{n}}_r + \dot{z} \vec{n}_z . \quad (\text{П2.7})$$

Подставляя в (П2.7) значения производных (П2.6), получаем выражение для скорости точки M :

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = r\dot{\vec{n}}_r + r\dot{\phi}\vec{n}_\phi + z\dot{\vec{n}}_z,$$

Соответственно, вторая производная радиус-вектора (ускорение точки M) имеет вид:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{w}} = \dot{\vec{v}} = (r - r\phi^2)\vec{n}_r + (r\phi + 2r\dot{\phi})\vec{n}_\phi + z\dot{\vec{n}}_z.$$

Элементы длины, площади и объема имеют вид:

$$dl_1 = dr, \quad dl_2 = r d\phi, \quad dl_3 = dz, \\ dS_1 = dS_r = r d\phi dz, \quad dS_2 = dS_\phi = dz dr, \quad dS_3 = dS_z = r dr d\phi, \\ dV = r dr d\phi dz.$$

Градиент скалярной функции. В соответствии с определением производной по направлению и элементов длины в цилиндрических координатах градиент скалярной функции $u(x, y, z)$ записывается следующим образом:

$$\text{gradu} = \vec{n}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \vec{n}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \vec{n}_z \frac{\partial u}{\partial z}.$$

В аксиально-симметричном поле $u = u(r)$ и в таком поле $\text{gradu} = \vec{n}_r \frac{du}{dr}$.

Сферические координаты

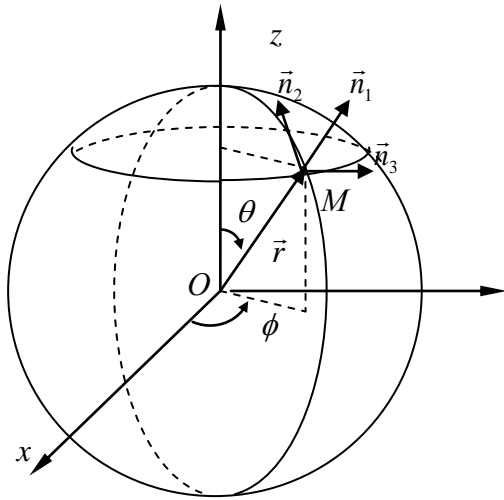


Рис. П2.3. Сферические координаты

В сферических координатах (рис.П2.3) положение точки M в пространстве определяется тремя числами r, ϑ, ϕ , где r - расстояние от начала координат до точки, т.е. $|\vec{r}| = r$ ($r \geq 0$); ϑ - угол между осью OZ и радиус-вектором \vec{r} точки ($0 \leq \vartheta \leq \pi$), ϕ - угол между осью OX и проекцией радиус-вектора точки \vec{r} на плоскость XOY ($0 \leq \phi < 2\pi$). Радиус-вектор точки M в сферических координатах записывается как $\vec{r} = r\vec{n}_r$.

Декартовы и сферические координаты связаны между собой соотношениями:

$$x = r \sin \vartheta \cos \phi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \phi, \quad z = r \cos \vartheta.$$

С координатами r, ϑ и ϕ связана правая тройка единичных ортогональных векторов $\vec{n}_1 = \vec{n}_r, \vec{n}_2 = \vec{n}_\vartheta, \vec{n}_3 = \vec{n}_\phi$, которые выражаются через орты декартовой системы координат соотношениями:

$$\vec{n}_r = \vec{n}_x \sin \vartheta \cos \phi + \vec{n}_y \sin \vartheta \sin \phi + \vec{n}_z \cos \vartheta, \\ \vec{n}_\vartheta = \vec{n}_x \cos \vartheta \cos \phi + \vec{n}_y \cos \vartheta \sin \phi - \vec{n}_z \sin \vartheta, \quad (\text{П2.8})$$

$$\vec{n}_\phi = -\vec{n}_x \sin \phi + \vec{n}_y \cos \phi ..$$

Дифференциальные операции. Т.к. все три орта сферической системы координат подвижны, то скорость изменения их ориентации определяется с помощью соотношений (П2.7) производными

$$\begin{aligned} \frac{\square}{n_r} &= \mathcal{G} \vec{n}_g + \phi \sin \mathcal{G} \vec{n}_\phi, \\ \frac{\square}{n_\theta} &= -\dot{\mathcal{G}} \vec{n}_r + \phi \cos \mathcal{G} \vec{n}_\phi, \\ \frac{\square}{n_\phi} &= -\phi \sin \mathcal{G} \vec{n}_r - \phi \cos \mathcal{G} \vec{n}_g. \end{aligned} \quad (\text{П2.9})$$

При этом $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = \dot{r} \vec{n}_r + r \dot{\vec{n}}_r = \dot{r} \vec{n}_r + r (\dot{\mathcal{G}} \vec{n}_g + \dot{\phi} \sin \mathcal{G} \vec{n}_\phi)$.

Вторая производная (ускорение) может быть представлена в виде

$$\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = w_r \vec{n}_r + w_g \vec{n}_g + w_\phi \vec{n}_\phi,$$

где

$$\begin{aligned} w_r &= (r - r \mathcal{G}^2 - r \phi^2 \sin^2 \mathcal{G}), \\ w_g &= 2r \mathcal{G} + r \dot{\mathcal{G}} - r \phi^2 \sin \mathcal{G} \cos \mathcal{G}, \\ w_\phi &= 2r \phi \sin \theta + 2r \theta \dot{\phi} \cos \theta + r \dot{\phi} \sin \theta. \end{aligned} \quad (\text{П2.10})$$

Элементы длины, площади и объема. В сферических координатах

$$dl_1 = dl_r = dr, \quad dl_2 = dl_g = r d\theta, \quad dl_3 = dl_\phi = r \sin \mathcal{G} d\phi$$

$$dS_1 = dl_2 dl_3 = r^2 \sin \mathcal{G} d\theta d\phi, \quad dS_2 = dl_3 dl_1 = r \sin \mathcal{G} dr d\phi, \quad dS_3 = dl_1 dl_2 = r dr d\theta,$$

$$dV = r^2 \sin \mathcal{G} dr d\theta d\phi ..$$

Градиент в сферических координатах имеет вид

$$\text{gradu} = \vec{n}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \vec{n}_g \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \mathcal{G}} + \vec{n}_\phi \frac{1}{r \sin \mathcal{G}} \frac{\partial u}{\partial \phi}.$$

В центрально-симметричном поле $u = u(r)$ и поэтому $\text{gradu} = \vec{n}_r \frac{\partial u}{\partial r} ..$

**ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Элементы вариационного исчисления.
Принцип наименьшего действия Гамильтона**

Элементы вариационного исчисления

В качестве аналитической характеристики возможных перемещений используется понятие вариации координаты x . Под вариацией δx понимается переход от функции $x(t)$ к некоторой функции $\bar{x}(t)$, мало отличающейся от $x(t)$ в рассматриваемый момент времени. Важно отметить,

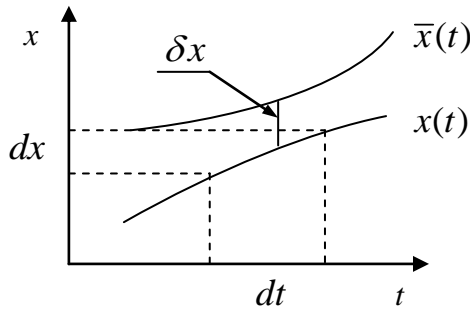


Рис. П3.1

что в отличие от вариации δx дифференциал dx связан с изменением функции, обусловленным приращением аргумента. Рис.П3.1 иллюстрирует различие между вариацией и дифференциалом функции $x(t)$.

Наряду с вариацией δx можно ввести и вариацию любой функции координат и времени $f(v, t)$:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x$$

(в отличие от полного дифференциала $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt$). Понятие вариации можно распространить и на функцию s независимых переменных x_i - в этом

случае
$$\delta f = \sum_{i=1}^s \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i$$

Параметрически заданный криволинейный интеграл от функции, являющейся в общем случае функцией N переменных и их производных, называется функционалом. Простейший функционал имеет вид:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x(t), \dot{x}(t)) dt. \tag{П3.1}$$

где контур интегрирования представляет собой некоторую кривую, начальная и конечная точки которой определяются значениями функции $x(t)$ в моменты времени t_1 и t_2 соответственно.

Функционал (П3.1) представляет собой переменную величину, значение которой определяется выбором функции $x(t)$: $J = J(x(t))$.

Основная задача вариационного исчисления заключается в нахождении функции $x(t)$, обеспечивающей экстремальное значение функционала при выполнении граничных условий $x(t_1) = x_1$ и $x(t_2) = x_2$ (см. рис.3.2). При этом доказывается, что экстремум функционала имеет место при условии обращения в нуль его первой вариации, т.е.

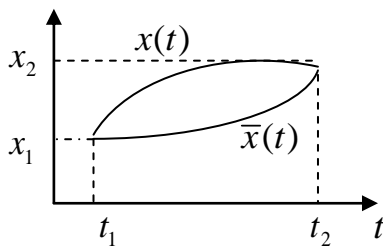


Рис.П3.2

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} F(x, \dot{x}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta F(x, \dot{x}) dt = 0. \quad (\text{ПЗ.2})$$

В выражении (ПЗ.2) $\delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}$. При этом

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \delta x = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x.$$

Тогда интеграл (ПЗ.2) можно представить в виде:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta F(x(t), \dot{x}(t))) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \delta x \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} d \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) = 0.$$

Второй из этих интегралов $\int_{t_1}^{t_2} d \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$, т.к. в силу

граничных условий в точках $x_1 = x(t_1)$ и $x_2 = x(t_2)$ вариации $\delta x_1 = \delta x_2 = 0$. Следовательно,

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \delta x \right) dt = 0,$$

И равна нулю подынтегральная функция, т.е.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \delta x = 0.$$

Поскольку в области $x_1 < x < x_2$ $\delta x \neq 0$, то окончательно получаем условие обращения вариации функционала в нуль (условие Эйлера) в виде:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (\text{ПЗ.3})$$

Таким образом, функционал принимает экстремальное значение, если функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (ПЗ.3).

Принцип наименьшего действия Гамильтона

Основную задачу динамики о движении точек в общем случае несвободной механической системы с наложенными на нее голономными связями под действием потенциальных сил можно сформулировать как задачу о нахождении действительных перемещений точек системы.

Введем $(s + 1)$ -мерное конфигурационное пространство обобщенных координат $q_\alpha(t)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, s$) и времени. В таком пространстве движение точек системы описывается конфигурационной траекторией. Пусть обобщенные координаты системы в моменты времени t_1 и t_2 заданы и равны $q_\alpha(t_1)$ и $q_\alpha(t_2)$ соответственно. Тогда можно поставить вопрос о том, какая из возможных траекторий $\vec{q}_\alpha(t)$ реализуется под действием известных потенциальных сил (одномерная иллюстрация поставленной задачи

представлена на рис.ПЗ.2). Для решения поставленной задачи введем функцию S , называемую действием, следующим образом:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) dt, \quad (\text{ПЗ.4})$$

где $L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$ - функция Лагранжа, причем под q_α и \dot{q}_α понимаются совокупности всех s обобщенных координат и s обобщенных скоростей. Заметим, что введенная функция действия имеет размерность [Дж·с], которая, собственно в физике и называется действием.

Из определения (ПЗ.4) видно, что функция действия представляет собой функционал S независимых функций $q_\alpha(t)$ и s производных по времени этих функций $\dot{q}_\alpha(t)$. Рассмотрим первую вариацию функции действия:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha \right) \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha \right) dt.$$

Но действительные перемещения удовлетворяют уравнениям движения в форме Лагранжа $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$. Следовательно, действительные

перемещения, удовлетворяющие уравнениям движения, обращают первую вариацию функции действия в нуль:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) dt = 0.$$

Справедливо и обратное утверждение – если первая вариация действия равна нулю, то действительные перемещения удовлетворяют уравнениям Лагранжа.

Полученные результаты носят название принципа наименьшего действия Гамильтона.

Принцип наименьшего действия – один из наиболее универсальных физических принципов; его можно сформулировать для любого из разделов физики, выбрав определенным образом функцию действия. Простейшим примером служит принцип Ферма в оптике, где в качестве функции действия выбирается оптическая длина пути луча света (минимизация оптической длины луча приводит к законам геометрической оптики). В механике принцип наименьшего действия представляет собой наиболее общий подход к описанию законов движения, т.к. функция Лагранжа записывается достаточно просто как в инерциальных, так и в неинерциальных системах отсчета.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Уравнение колебаний и его решение

Уравнение вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (\text{П4.1})$$

называется уравнением колебаний. Т.к. это уравнение является однородным линейным с постоянными коэффициентами, то его решение ищется в виде $x = e^{pt}$. При этом характеристическое уравнение $p^2 + \omega^2 = 0$ имеет мнимые корни $p_{1,2} = \pm i\omega$ (i - мнимая единица). Решение уравнения (П4.1) можно записать в следующей форме:

$$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}. \quad (\text{П4.2})$$

Если воспользоваться формулами Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ и $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$, то (4.2) можно переписать в следующем виде:

$$x = (C_1 + C_2) \cos \omega t + i(C_1 - C_2) \sin \omega t \quad \text{или} \\ x = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (\text{П4.3})$$

В последних выражениях введены переобозначения: $C_1 + C_2 = A$ и $i(C_1 - C_2) = B$. Постоянные интегрирования C_1 и C_2 (или A и B) определяются из начальных условий. Решение в виде (П4.3) можно еще раз преобразовать, умножив и разделив его на величину $\sqrt{A^2 + B^2}$:

$$\sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega t \right).$$

Если ввести обозначения

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \varphi \quad \text{è} \quad \sqrt{A^2 + B^2} = a,$$

то решение уравнения колебаний можно записать в виде:

$$x = a \cos(\omega t + \varphi), \quad (\text{П4.4})$$

где постоянные a и φ , по-прежнему, определяются начальными условиями. Очевидно, что решение (П4.4) можно представить не функцией косинуса, а функцией синуса.

Конкретный вид решения уравнения колебаний – (П4.2), (П4.3) или (П4.4) выбирается при решении задач из соображений удобства и простоты представления этого решения.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- А**
Абсолютно твердое тело 10, 52
Апсида 43
Апоцентр 43
- В**
Вариация координаты 112
Вариация функции 112
Вектор 101, 103
Виртуальное перемещение 65
Вращательное движение твердого тела 10, 52
Вынужденные колебания 82
- Г**
Главный вектор внешних сил 30, 32
Главный момент внешних сил 30
Годограф 7
- Д**
Движение точки в произвольно движущейся системе отсчета 9
Декартовы координаты 7, 108
- Е**
Естественный способ описания движения 9
- З**
Задача двух тел 42
Задача Кеплера 43
- И**
Идеальная связь 64
Импульс точки 30
Импульс твердого тела 53
- К**
Кинетическая энергия точки 30
Кориолисово ускорение 10
Кинетическая энергия твердого тела 53, 56
Классическая задача рассеяния 44
- Л**
Логарифмический декремент затухания 82
- М**
Малые колебания механических систем 81
Момент импульса точки 30
Момент импульса твердого тела 55
Момент инерции 53
Мощность 30
- Н**
Нормальные колебания 84
Нормальные координаты 84
Нормальное ускорение 9
- О**
Одномерное движение в потенциальном поле 30
Обобщенная координата 64
Обобщенная сила 65
Обобщенная скорость 64
Осестремительное ускорение 10
Основная задача динамики 20
Основное уравнение динамики 20
Основные теоремы динамики 30
Относительная скорость 10
- П**
Переносная скорость 10
Переносное ускорение 10
Перицентр 43
Плоскопараллельное движение твердого тела 56
Поступательное движение 10
Потенциальная энергия 29, 109

Потенциальные силы 29
Принцип Даламбера 66
Принцип наименьшего действия
Гамильтона 113, 114
Путь 7

Р

Радиус-вектор 7, 8, 9, 32
Радиус кривизны траектории 9
Распад частиц 41
Резонанс 82

С

Связи 64
Секторная скорость 7
Сила активная 64
Сила пассивная 64
Скорость 7, 8, 9, 11, 32, 52
Сферические координаты 8, 110

Т

Тангенциальное ускорение 9
Тензор 53, 105
Теорема Кенига 32
Теорема об изменении кинетической
энергии 30, 53, 56
Теорема Штейнера 54
Траектория 7

У

Углы Эйлера 11
Угловое ускорение 10, 11
Угол разлета 41
Угол рассеяния 41, 44
Упругие столкновения частиц 40
Уравнение Лагранжа 65
Уравнение Эйлера 113
Ускорение 7, 8, 9, 11
Условие Эйлера 112

Ф

Фазовое пространство 66
Функционал 112
Функция Лагранжа 65, 81
Функция Гамильтона 66

Ц

Центр масс 31, 52
Цилиндрические координаты 8, 109

Ч

Число степеней свободы 64

Э

Эффективный потенциал 42
Эффективное сечение рассеяния 44

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Г

Гамильтон, Уильям Роуэн, 66, 67,
115

К

Кениг, Иоганн Самуэль, 32
Кеплер, Иоганн, 43
Кориолис, Гаспар-Гюстав, 10

Л

Лагранж, Жозеф Луи, 65, 66, 72,
74, 75, 77, 78, 79, 82, 83, 85, 87,
115

Н

Ньютон, Исаак, 20

Ш

Штейнер, Якоб, 54

Э

Эйлер, Леонард, 11
Эйнштейн, Альберт, 102

Навчальне видання

**КАРА-МУРЗА Світлана Вітольдівна
ЧОРНОБАЙ Катерина Григоріївна**

КЛАСИЧНА МЕХАНІКА

*Навчальний посібник
для самостійної роботи
студентів спеціальності 6.040203 «Фізика»*

(російською мовою)

У посібнику викладено основні теоретичні відомості за основними розділами класичної механіки. У кожному розділі детально розглянуто приклади розв'язання задач та наведено завдання для аудиторного та самостійного виконання, які забезпечені відповідями.

Призначений для студентів спеціальності 6.040203 «Фізика», студентів фізичних спеціальностей, а також буде корисним для викладачів вищих навчальних закладів, коледжів, ліцеїв, гімназій, шкільних учителів.

Редактор – С.В. Кара-Мурза
Комп'ютерний макет – К.Г. Чернобай
Дизайн обкладинки – К.А. Свиридова

Здано до склад. __. __. 2014 р. Підп. до друку __. __. 2014 р.
Формат 60×84 1/16. Папір офсет. Гарнітура Times New Roman.
Друк ризо графічний. Ум. друк. арк. 7,5. Наклад 200 прим. Зам. № __.

Видавець і виготовлювач
Видавництво Державного закладу
«Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»
вул. Оборонна, 2, м. Луганськ, 91011. Тел./факс: (0642) 58-03-20.
alma-mater@list.ru

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3459 від 09.04.2009 р.