Міністерство освіти і науки України
Державний заклад
«Луганський національний університет
імені Тараса Шевченка»

Ю. Г. Козуб

Теоретична механіка

Навчальний посібник з варіантами завдань
до розрахунково-графічної роботи
для студентів спеціальності «Професійна освіта»
усіх форм навчання

Старобільськ
ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка»
2018

УДК531(075.8)
ББК22. 21 я73
К59

Рецензенти:

Васильєв Л.М. – доктор технічних наук, професор, завідувач відділу Інституту геотехнічної механіки НАН України.

Дирда В.І. – доктор технічних наук, професор Дніпровського державного аграрно-економічного університету.

Козуб Ю. Г.

К59 Теоретична механіка.: навч. посіб. з варіантами завдань до розрахунково-графічної роботи для студ. спец. «Професійна освіта» усіх форм навчання / Ю. Г. Козуб; Держ. закл. «Луган. нац. ун-т імені Тараса Шевченка». – Старобільськ: Вид-во ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка», 2018. – 274 с.

У навчальному посібнику в повному обсягу викладено лекційний матеріал курсу, наведено методику вирішення задач і розглянуто велику кількість прикладів їх розв'язання до усіх тем, що можуть бути включені у розрахунково-графічну роботу, наведені задання до РГР.

Посібник призначений для студентів денної та заочної форм, які навчаються за технічним та технологічним напрямам.

УДК 531(075.8)
ББК 22. 21 я73

Рекомендовано до друку навчально-методичною радою Луганського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол №9 від 30 березня 2018р.)

ПЕРЕДМОВА

Теоретична механіка – фундаментальна природнича наука, яка вивчає найбільш загальні закони руху і взаємодії тіл, пояснює якісні і кількісні закономірності, що спостерігаються у природі. Теоретична механіка має велике значення при підготовці майбутніх інженерів, оскільки вона є фундаментом для вивчення подальших інженерних дисциплін: опору матеріалів, теорії механізмів і машин, деталей машин, ряду спеціальних дисциплін. Курс теоретичної механіки повинен сформувати у майбутніх інженерів творчу інтуїцію, вміння легко орієнтуватися і приймати правильні рішення в питаннях техніки і технології, що постійно виникають у зв'язку з розвитком нових видів виробництва і нових технічних засобів.

Дане видання **має дві мети**: по-перше – надати студентам лекційний матеріал у повному обсязі, зорієнтувати на найбільш важливі питання курсу, допомогти в підготовці до модульних чи екзаменаційних робіт; по-друге – сприяти опануванню студентами не менш важливої практичної частини курсу, підготувати їх до самостійного виконання розрахунково-графічної роботи (РГР), та надати всю необхідну інформацію в процесі її виконання.

Дане видання є *навчальним посібником* для студентів тих спеціальностей, в яких теоретична механіка вивчається за повною програмою з виконанням двох розрахунково-графічних робіт, проте може бути використане також студентами спеціальностей, що навчаються за скороченою програмою.

Посібник складений у повній відповідності до діючої програми курсу «Теоретична механіка» спеціальностей професійної освіти. В ***статиці*** розглядаються питання перетворення одних сукупностей сил в інші, еквівалентні даним, з'ясовуються умови рівноваги різних сукупностей сил. В ***кінематиці*** вивчається рух матеріальних тіл з геометричної точки зору, без урахування силових взаємодій між ними. При розв'язанні задач ***динаміки*** часто виникають труднощі, пов'язані з підбором відповідних теорем і рівнянь, причому ці труднощі можна здолати лише за наявності достатніх навичок у розв'язанні задач. Але для отримання таких навичок мало практики в розв'язанні задач, необхідно вміти аналізувати і обирати найбільш раціональні з наявних методів. В даному посібнику детально розкриті основні методи та проведене їх порівняння.

Усі задачі динаміки можна умовно розділити на три типи: задачі динаміки матеріальної точки, механічної системи і твердого тіла. При цьому, задачі усіх трьох типів діляться на прямі та зворотні. При відносній простоті прямих задач розв'язання обернених часто пов'язане із значними труднощами.

Найбільш поширеним методом розв'язання задач ***динаміки матеріальної точки*** є використання диференціальних рівнянь руху в проекціях на осі різних систем координат, при цьому ефективність розв'язання залежить саме від вдалого вибору такої системи. Такі рівняння досить легко розв'язуються лише у випадку, коли сила постійна, або залежить від часу координати або швидкості.

Іноді використання загальних теорем динаміки дозволяє отримати перші інтеграли диференціальних рівнянь, спростивши тим самим розв'язання. Теорему про зміну кількості руху точки слід застосовувати у випадку, коли сили постійні, або є відомими функціями часу; теорема про зміну моменту кількості руху точки здебільшого застосовується при русі під дією центральної сили; теорему про зміну кінетичної енергії точки зручно застосовувати у випадку, коли сили постійні, або є функціями її положення.

Досить універсальним методом розв'язання задач ***динаміки механічної системи*** є складання диференціальних рівнянь руху за допомогою загального рівняння динаміки або рівняння Лагранжа ІІ роду. В деяких випадках для розв'язання задач зручно використовувати загальні теореми динаміки. Так, теорема про рух центра мас дозволяє окрім розв'язання оберненої задачі також визначати невідомі реакції в'язей безпосередньо з рівнянь руху; теорему про зміну головного вектору кількостей руху механічної системи слід використовувати у випадку, коли зовнішні сили сталі, або залежать від часу; теорему про зміну головного моменту кількостей руху механічної системи доцільно використовувати у випадку обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі; теорему про зміну кінетичної енергії системи застосовують за умови постійних сил, або сил, що залежать від положення системи; якщо механічна система є суцільним середовищем, то слід скористатись теоремою Ейлера.

При розв'язанні задач ***динаміки твердого тіла*** застосовують ті ж самі методи, що й у випадку механічної системи, хоча вони й мають певні особливості. Так, при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі зручно використовувати диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла. При плоскопаралельному русі твердого тіла найбільш загальним методом є складання диференціальних рівнянь плоского руху, якщо ж треба визначити лише закон плоского руху тіла – слід використовувати загальне рівняння динаміки або рівняння Лагранжа ІІ роду, причому в даному випадку загальне рівняння є менш зручним і притому, формальним методом розв'язання задач з використанням сил інерції. В той же час, вдалий вибір узагальнених координат при використанні рівняння Лагранжа забезпечує простоту розв'язання даної задачі.

Посібник орієнтовано насамперед на студентів денної та заочної форм навчання напряму підготовки «Транспорт», тому місцями свідомо опущений глибокий аналіз теорії та виводи формул, а також деякі питання, що не мають відношення до транспортної сфери або дуже рідко постають перед інженером широкого профілю. Це тим більш оправдано наявністю великої кількості підручників з широким висвітленням теорії і детальним виводом формул, на які автори посилаються в кінці посібника.

В даному виданні приділено значну увагу базовим поняттям і законам теоретичної механіки, без скорочень викладено лекційний матеріал, детально розглянуто ті теоретичні питання, які традиційно важко засвоюються студентами. Наряду з цим, викладення лекційного матеріалу супроводжується детальним описанням методів розв'язання задач, прикладами вирішення великої кількості задач за усіма без виключення темами курсу. Контрольні запитання в кінці кожної глави мають зорієнтувати студентів на найбільш важливі моменти теоретичної частини в процесі підготовки до модульних та екзаменаційних робіт.

Особливістю даного навчального посібника є саме поєднання в рамках одного видання класичного підручника і посібника до розв'язання задач з варіантами завдань до РГР. Як відомо, основні труднощі при виконанні розрахунково-графічної роботи становлять великий об'єм обчислень при розв'язанні задач і слабка підготовка студентів з суміжних дисциплін – фізики і математики, причому ці труднощі багатократно збільшуються при роботі із студентами заочної форми навчання. Тому для більш оптимального використання часу в розрахункові роботи авторами введена певна кількість спрощених задач, а також задач, в яких зменшення об'єму розрахунків не впливає на їх технічну інформативність.

Перед виконанням РГР студенти мають засвоїти матеріал курсу через прослуховування лекцій, роботу на практичних заняттях і подальше самостійне опрацювання проблемних питань при роботі з даним посібником. По мірі вивчення матеріалу викладач видає студентам завдання до РГР. Наявність завдань до РГР з усіх без виключення глав статики і кінематики дозволить викладачу варіювати їх кількістю і тематикою в залежності від професійного спрямування студентів та часу, відведеного на вивчення курсу.

Для найбільш ефективного використання навчального посібника при виконанні РГР автори рекомендують наступний *алгоритм роботи* студента: після отримання завдання студент повторює лекційний матеріал, після чого знайомиться з методичними рекомендаціями щодо розв'язання задач з даної теми, наведеними в кожній главі. Далі студент має детально розібрати приклади вирішення типових задач, наведені у посібнику, після цього спробувати розв'язати дані задачі самостійно і порівняти отримані результати з авторськими. Лише після успішного опанування типових задач можна приступати до розв'язання власної задачі з даної теми. У разі виникнення труднощів при вирішенні власної задачі студент звертається по консультацію до викладачів даної дисципліни на найближчому практичному занятті.

Автор буде вдячний читачам, які пришлють відгуки і побажання за адресою: м. Старобільськ, пл. Гоголя, 1, ДЗ «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка».

РОЗДІЛ І. СТАТИКА

Глава 1. Вступ до статики

1.1. Основні поняття статики

Статика – розділ механіки, який вивчає способи зведення складних систем до еквівалентних їм простіших, а також умови рівноваги тіл під дією різних систем сил.

У теоретичній механіці розглядаються не конкретні тіла, а їх наступні ідеалізовані моделі:

а) *матеріальна точка* – тіло, розмірами якого в даних умовах можна знехтувати (Земля в її русі навколо Сонця). Матеріальна точка має масу і здатність взаємодіяти з іншими тілами;

б) *механічна система* – сукупність матеріальних точок, положення і рухи яких взаємно пов'язані;

в) *абсолютно тверде тіло* – система матеріальних точок, відстань між якими завжди залишається незмінною;

г) *суцільне середовище* – система матеріальних точок, відстань між якими може змінюватися.

Найважливішим поняттям теоретичної механіки є поняття сили. **Сила** – міра механічної дії одного тіла на інше, яка визначає напрям та інтенсивність цієї дії. Взаємодія тіл може відбуватися як при їх безпосередньому контакті, так і за допомогою силових полів різної природи (наприклад електричного чи магнітного).

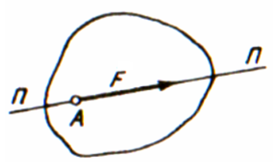
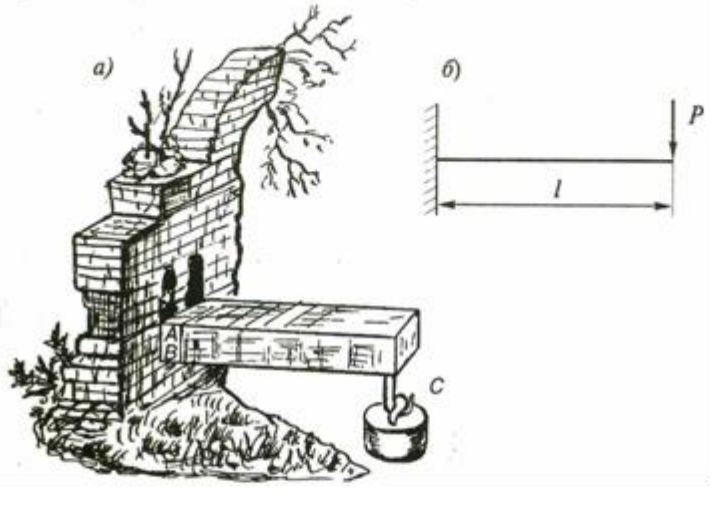


Рис. 1.1. Основні характеристики сили.

Усі фізичні величини поділяються на скалярні і векторні. Сила – векторна величина, її основні характеристики: *n*-*n* – лінія дії і *A* – точка прикладення (рис. 1.1). В системі СІ одиницею виміру сили є **ньютон** (Н) – сила, що надає масі 1 кг прискорення 1 м/с^2. Рідше використовують технічну систему одиниць МКГСС и систему СГС. В них одиницею виміру сили є кілограм-сила (1 кгс = 9,81 Н) та дина (1 дин = 10^{-5} Н) відповідно.



В теоретичній механіці обчислення часто проводяться за допомогою розрахункових схем. **Розрахункова схема** – реальний об’єкт, який звільнено від несуттєвих особливостей. На рисунку, зробленому Галілеєм, показано реальний об’єкт (рис.

1.2, а) і його розрахункову схему (рис. 1.2, б).

Рис. 1.2. Реальний об'єкт та його розрахункова схема.

Усі сили за характером дії на тіло поділяються на два типи:

1. **Зосереджені** – сили, які можна вважати прикладеними в одній точці (рис. 1.2, б). Реально через тіло, що не має розмірів, неможливо передати силову дію, тому така сила є схематизацією дійсності. Такі сили характеризуються абсолютним значенням.

2. **Розподілені** – сили, які не можна вважати прикладеними в одній точці. Вони характеризуються інтенсивністю і бувають трьох видів:

а) *розподілені по поверхні р* (рис. 1.3, б) – сили, прикладені в місці контакту тіл, коли площею контакту не можна знехтувати. Інтенсивність вимірюється в Н/м^2, прикладом можуть слугувати сила дії вітру та снігове навантаження, тиск газу на стінки циліндра двигуна та поршень.

б) *лінійно розподілені q* (рис. 1.3, в) – сили, які можуть бути зведені до осі тіла, наприклад сила дії поїзда на залізничні рейки.

в) *розподілені по об'єму γ* (рис. 1,3, а) – сили, які не є результатом контакту тіл. Вони прикладені в кожній точці об'єму, зайнятого тілом. Прикладом є сили інерції, власна вага тіла, архімедова сила.

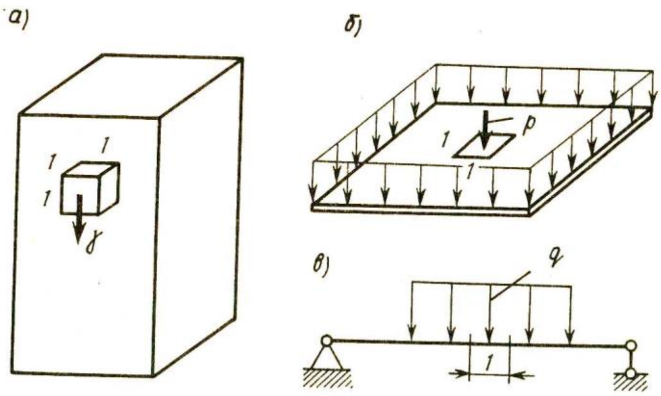


Рис. 1.3. Види розподілених сил.

Система сил - сукупність сил, що діють на тіло. Геометрично системи сил класифікуються наступним чином:

1. *Збіжні* – лінії дії сил перетинаються в одній точці.
2. *Паралельні* – лінії дії сил паралельні.
3. *Довільні* – лінії дії сил не паралельні і не перетинаються.

По розташуванню в просторі системи сил поділяються на

а) *плоскі* – лінії дії сил лежать в одній площині;

б) *просторові* – лінії дії сил не лежать в одній площині.

По напряму дії сили діляться на:

а) *зовнішні* – діють з боку точок або тіл, що не входять в дану систему;

б) *внутрішні* – сили взаємодії між матеріальними точками даної системи.

Належність сили до того чи іншого типу визначається системою, яка розглядається, тому одна сила може бути як зовнішньою, так і внутрішньою.

По характеру дії системи сил бувають:

а) *еквівалентні* – під дією кожної з них тіло знаходиться в одному і тому ж стані;

б) *зрівноважені* - системи, що не змінюють стану тіла, до якого прикладені.

1.2. В'язі та їх реакції

У теоретичній механіці усі точки і системи матеріальних точок діляться на вільні (на їх рух не накладені обмеження) і невільні. Вільна матеріальна точка має три ступені свободи, вільна система матеріальних точок – шість. Якщо система невільна, то говорять, що на її переміщення накладені в'язі.

В'язь - тіло або поле, що обмежує переміщення матеріальної точки або твердого тіла, яке розглядається. Також існують в'язі, які накладаються на швидкість та прискорення точки чи тіла, тобто обмежують рух в цілому.

Реакція в'язі - сила, з якою в'язь діє на дану матеріальну точку або тверде тіло. Реакції в'язей називають пасивними силами, оскільки вони виникають тільки під дією активних (зовнішніх) сил. На рис. 1.4 активна сила $\boldsymbol{G}$ (вага літака) викликає появу трьох пасивних сил $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ і $\boldsymbol{R}_3$ в місцях контакту його колес із в'яззю (злітною смугою).

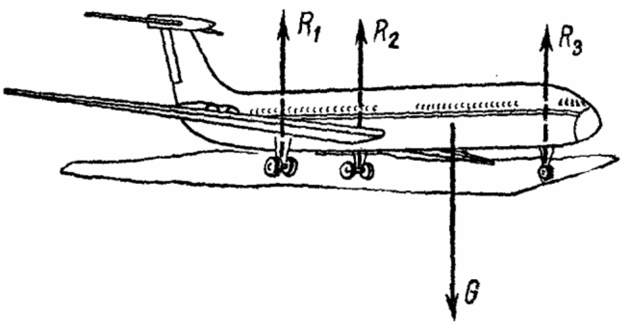
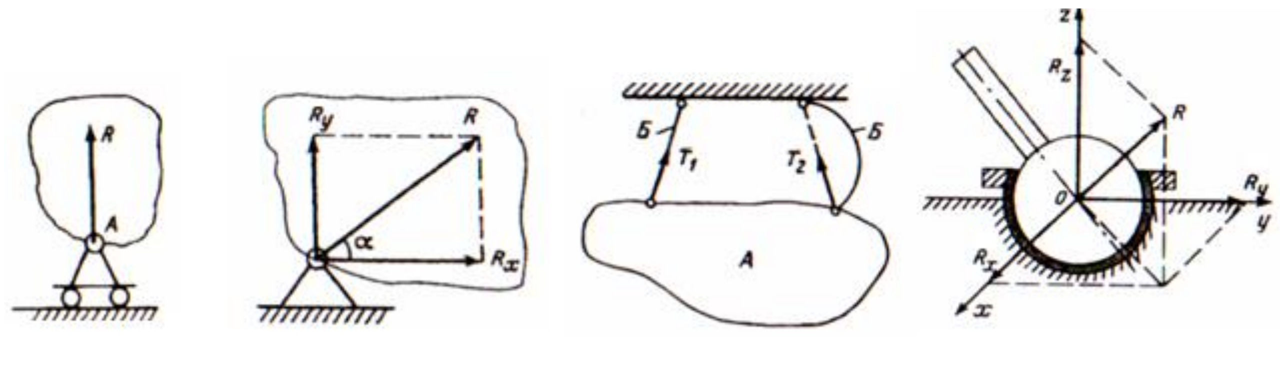


Рис. 1.4. В'язі та їх реакції.

У статиці розглядаються найпростіші в'язі, виконані у формі різних твердих або гнучких тіл.

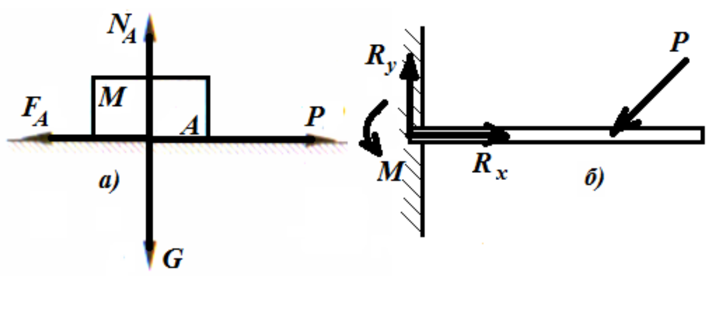
У шарнірно рухомій опорі реакція перпендикулярна до поверхні кочення (рис. 1.5, а), а в шарнірно нерухомій реакцію знаходять через горизонтальну і вертикальну складові (рис. 1.5, б). Реакція невагомої нерозтяжної нитки (троса, шнура або ланцюга) завжди спрямована по нитці до точки закріплення (рис. 1.5, в). Реакцію сферичного шарніра (підп'ятника) визначають через три взаємно перпендикулярні складові за правилом паралелепіпеда (рис. 1.5, г).



а) б) в) г)

Рис. 1.5. Найбільш поширені в'язі та їх реакції.

У випадку *ідеально гладенької* поверхні точка контакту тіла *A* вільно ковзає по ній, тому існує тільки нормальна реакція $\boldsymbol{N}_A$. Якщо поверхня шорстка (рис. 1.6, а), то до нормальної реакції додається горизонтальна реакція в'язі – сила тертя $\boldsymbol{F}_A$. У випадку защемлення виникає три силових фактори (рис. 1.6, б) – вертикальна та горизонтальна



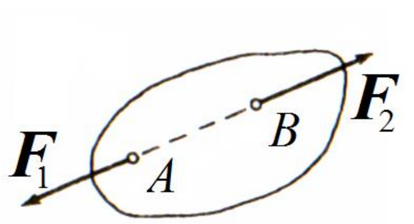
реакції та крутний момент, який буде детально розглянутий в наступному параграфі.

Рис. 1.6. Реакції шорсткої поверхні і защемлення.

1.3. Аксіоми статики

У основі статики лежить 6 аксіом, встановлених дослідним шляхом і тривалими спостереженнями за фізичними явищами реального світу.

Аксіома I (про зрівноважену систему)



Дві сили є зрівноваженою (еквівалентною нулю) системою, якщо вони лежать на одній прямій, рівні за величиною і протилежні за напрямом (рис. 1.7). Ця аксіома справедлива тільки для абсолютно твердого тіла.

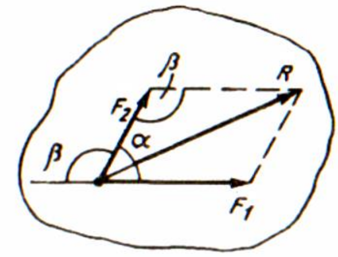
Рис. 1.7. Зрівноважена система сил.

Аксіома II (аксіома інерції)

Під дією зрівноваженої системи сил матеріальна точка (тіло) рухається рівномірно і прямолінійно або знаходиться в стані спокою. Ця аксіома є законом інерції Галілея.

Аксіома III (про паралелограм сил)

Рівнодійна системи сил ***R*** - сила, еквівалентна заданій системі сил. У разі



двох сил, прикладених до тіла в одній точці, рівнодійна дорівнює їх векторній сумі і прикладена в тій же точці (рис. 1.8). Графічно рівнодійна визначається за правилом паралелограма, а її модуль знаходиться по формулі

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}. \tag{1.1}$$

Рис. 1.8. Паралелограм сил.

З цієї аксіоми виходить, що геометрично можна складати будь-яку кількість сил, прикладених в одній точці. Для цього до кінця першого вектора прикладаємо початок другого, до кінця другого - початок третього і т. д. З'єднавши початок першого вектора з кінцем останнього, отримаємо рівнодійну сил (рис. 1.9). Отримана фігура називається силовим багатокутником. Якщо ж початок першого вектора співпаде з кінцем останнього (замкнутий багатокутник), то рівнодійна системи дорівнює нулю.

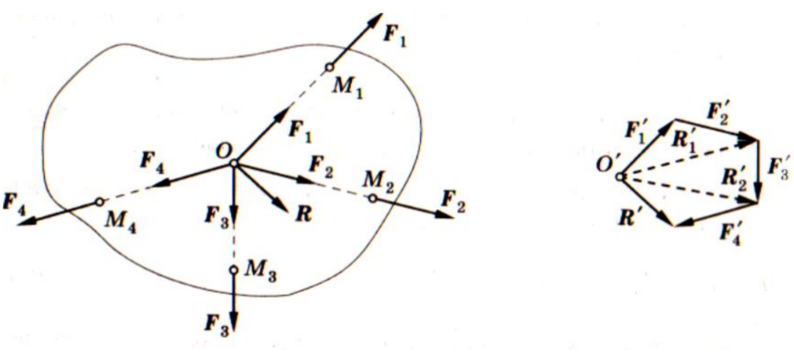


Рис. 1.9. Силовий багатокутник.

Сила, що зрівноважує – сила, рівна за модулем до рівнодійної і спрямована по лінії її дії у протилежний бік.

Аксіома IV (про накладення нових в'язей)

Рівновага твердого тіла не порушиться при накладенні на нього додаткових в'язей.

Аксіома V (про звільнення від в'язей)

Невільне тверде тіло можна представити як вільне, на яке окрім зовнішніх сил діють реакції в'язей.

Нехай куля лежить на гладкій горизонтальній площині, яка є в'яззю (рис. 1.10, а). З цієї аксіоми виходить, що кулю можна представити вільною, такою, що знаходиться під дією зовнішньої сили тяжіння $\boldsymbol{G}$ і рівної за величиною і протилежної за напрямком реакції в'язі $\boldsymbol{N}$ (рис. 1.10, б).

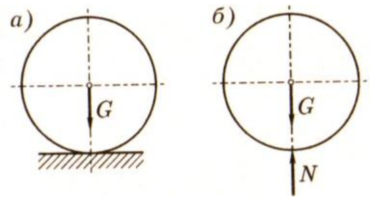


Рис. 1.10. Принцип звільнення від в'язей.

Аксіома VI (про затвердження)

Рівновага деформівного тіла зберігається, якщо не змінюючи його форми, розмірів і положення в просторі представити його абсолютно твердим.

Ця аксіома дозволяє розв'язувати прості задачі статики гнучких тіл (розрахунок ниток, ланцюгових і ремінних передач), застосувавши до них методи статики твердого тіла.

1.4. Найпростіші теореми статики

Теорема про три сили: якщо абсолютно тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох непаралельних сил і лінії дії двох сил перетинаються, то усі сили лежать в одній площині і їх лінії дії перетинаються в одній точці.

Доведення. Переносимо в точку O перетини ліній дії сили $\boldsymbol{F}_1$ і $\boldsymbol{F}_2$ і складаємо їх (рис. 1.11)

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2.$$

На тіло діють дві сили – $\boldsymbol{R}$ і $\boldsymbol{F}_3$. Щоб тіло знаходилося в рівновазі, вони повинні утворювати зрівноважену систему. Це означає, що їх лінія дії теж проходить через точку O.

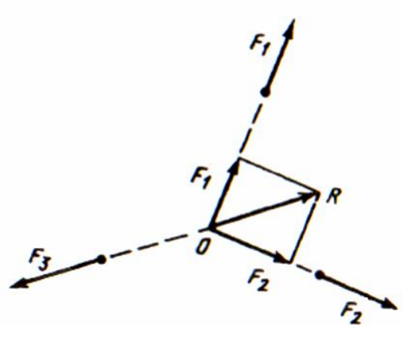
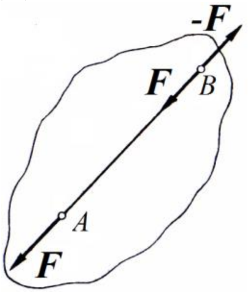


Рис. 1.11. Теорема про три сили.

Зрівноважена система з трьох сил є замкнутим трикутником. Знаючи три елементи цього трикутника (сторону і два прилеглі кути або дві сторони і кут між ними), можна визначити інші невідомі елементи: сили або кути між силами.

Теорема про силу як ковзний вектор: дія сили на тверде тіло не зміниться, якщо перенести її в межах тіла по лінії дії в будь-яку точку.

Доведення. Нехай в точці A до тіла прикладена сила $\boldsymbol{F}$. У довільній точці B на



її лінії дії прикладемо зрівноважену систему сил $\boldsymbol{F}$ і - $\boldsymbol{F}$ (рис. 1.12).

З першої аксіоми сила $\boldsymbol{F}$ в точці A і - $\boldsymbol{F}$ в точці B утворюють зрівноважену систему, еквівалентну нулю. В результаті залишається тільки сила $\boldsymbol{F}$, прикладена в точці B. З цього випливає, що сила є ковзним вектором.

Рис. 1.12. Теореми про силу як ковзний вектор.

1.5. Умови рівноваги системи збіжних сил

Усі збіжні сили можуть бути перенесені в точку перетину їх ліній дії O. Дві сили додаються за правилом паралелограма (рис. 1.6), а для додавання більшого числа сил використовують силовий багатокутник (рис. 1.7). У разі трьох збіжних сил, що утворюють просторову систему, користуються правилом паралелепіпеда.

Рівнодійну системи сил можна визначити й аналітично. Як відомо, будь-яку силу можна розкласти на складові за координатними осями

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}R_x + \boldsymbol{j}R_y + \boldsymbol{k}R_z,$$

де $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ – одиничні вектори (орти). Тоді рівнодійна системи збіжних сил дорівнює векторній (геометричній) сумі доданків

$$\boldsymbol{R} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k = \boldsymbol{i}\sum_{k=1}^{n} F_{kx} + \boldsymbol{j}\sum_{k=1}^{n} F_{ky} + \boldsymbol{k}\sum_{k=1}^{n} F_{kz}, \tag{1.2}$$

де F_{kx}, F_{ky} і F_{kz} – проекції відповідних сил на координатні осі.

Модуль рівнодійної визначається по формулі

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{kz}\right)^2}. \tag{1.3}$$

Кути між напрямом рівнодійної і координатними осями знаходяться за допомогою напрямних косинусів

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R},\ \cos\beta = \frac{R_y}{R},\ \cos\gamma = \frac{R_z}{R}. \tag{1.4}$$

Необхідною і достатньою умовою рівноваги тіла під дією системи збіжних сил є рівність нулю рівнодійної даної системи, тобто

$$\boldsymbol{R} = 0. \tag{1.5}$$

Векторному рівнянню (1.5) відповідають наступні скалярні вирази

$$R_x = R_y = R_z = 0 \text{ або } \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0. \tag{1.6}$$

Формули (1.6) є аналітичною формою **умови рівноваги системи збіжних сил**: для рівноваги довільної системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебричні суми проекцій сил на три взаємно перпендикулярні осі дорівнювали нулю.

У разі плоскої системи збіжних сил умови рівноваги мають вигляд

$$R_x = R_y = 0 \text{ або } \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0. \tag{1.7}$$

Питання для самоконтролю

1. Якими параметрами характеризується сила, що діє на тіло?
2. Які моделі реальних об'єктів застосовуються в теоретичній механіці?
3. Чи утворюють дія і протидія зрівноважену систему сил і чому?
4. Чи може знаходитись тіло у стані рівноваги під дією трьох сил?
5. Скільки умов рівноваги можна записати для плоскої системи збіжних сил, просторової системи збіжних сил?
6. Де використовується аксіома про затвердження?

Завдання № 1. «Системи збіжних сил»

Рекомендації до розв'язання задач

Перед початком розв'язання задачі треба визначити кількість сил у системі. Якщо їх не більше трьох, доречно користуватися геометричними умовами рівноваги, за більшої кількості сил слід використовувати аналітичний метод.

а) При використанні **аналітичних умов** рівноваги (*аналітичний метод*) необхідно:

1. Визначити об'єкт рівноваги і точку, де перетинаються лінії дії сил.
2. Прикласти до виділеного тіла усі задані зовнішні сили.
3. Звільнити тіло від в'язей, замінивши їх реакціями.
4. Обрати систему координат і скласти рівняння рівноваги для кожної осі.
5. Розв'язати отримані рівняння і, за необхідності, зробити перевірку.

б) При використанні **геометричної умови** рівноваги (*графоаналітичний метод*) необхідно:

1. Розпочати побудову силового трикутника з відомої сили, далі через початок і кінець відомої сили провести лінії, паралельні лініям дії двох інших сил.
2. Провести невідомі сили так, щоб отримати замкнений силовий трикутник.
3. За відомими елементами трикутника знайти невідомі величини. Якщо силовий трикутник прямокутний, слід користуватися теоремою Піфагора і співвідношеннями в прямокутному трикутнику; якщо ж силовий трикутник косокутний, слід використовувати теорему синусів.
4. Інколи доцільним є використання умови пропорційності сторін двох подібних трикутників (силового трикутника і трикутника за основним рисунком).

в) Значно рідше використовують *графічний метод*, при якому відома сила відкладається в певному масштабі. Далі будують силовий трикутник як і в попередньому способі, після чого вимірюють невідомі сили на рисунку і за допомогою масштабу визначають їх величину.

Приклад розв'язання задачі (аналітична умова рівноваги)

Задача 1. Балка довжиною 4 м і вагою P = 300 Н має шарнірно нерухому опору на кінці A і шарнірно рухому на кінці B. Визначити реакції опор балки R_A і R_B балки у випадку, коли на неї діє зовнішня сила F = 800 Н (рис. 1.13).

Розв'язання.

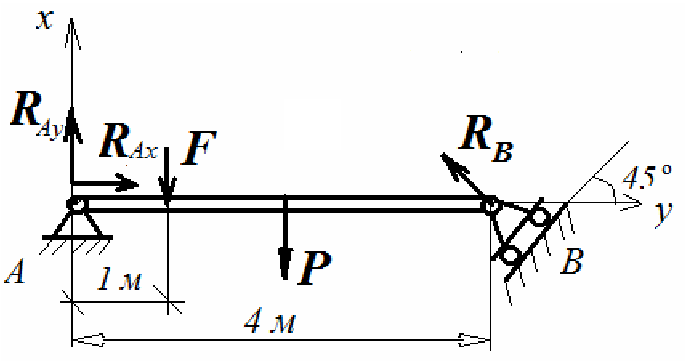


Рис. 1.13. До задачі 1.

1. Визначимо метод для розв’язання задачі. На балку діють дві активні сили – власна вага балки **P** і зовнішня сила **F**. Ці сили викликають реакції в опорах A і B. Оскільки число сил системи перевищує три, то доцільно використати аналітичний спосіб.

2. Наносимо на рисунок усі сили. Так вага балки буде прикладена в її середині, реакція в шарнірній рухомій опорі B завжди спрямована перпендикулярно опорній поверхні. Напрям реакції в нерухомій опорі A невідомий, тому виразимо реакцію через вертикальну R_{Ay} і горизонтальну R_{Ax} складові.

3. Вісі координат проведемо таким чином, щоб початок відліку співпадав з точкою A. Для визначення трьох невідомих реакцій треба скласти три рівняння рівноваги. Умови рівноваги для даної плоскої системи мають вигляд

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_B(F_k) = 0.$$

Слід зазначити, що в рівнянні моментів могла стояти будь-яка точка балки.

4. Для зменшення об’єму розрахунків почнемо складання рівнянь з рівняння моментів. При цьому моменти, направлені проти годинникової стрілки, вважатимемо додатними, а за годинниковою стрілкою – від’ємними.

$$\sum_{k=1}^{n} M_B(F_k) = P \cdot 2 + F \cdot 3 - R_{Ay} \cdot 4 = 0.$$

$$4R_{Ay} = 2 \cdot 300 + 3 \cdot 800 = 3000. \rightarrow R_{Ay} = \frac{3000}{4} = 750(H).$$

5. Оскільки знайдено вертикальну складову реакції лівої опори, то доцільно перейти до другого рівняння. При складанні рівняння сили, що співпадають з напрямом осі y вважаються додатними, усі інші – від’ємними.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ky} = R_{Ay} - F - P + R_B \cdot \sin 45° = 0.$$

$$0{,}707 R_B = P + F - R_{Ay} = 300 + 800 - 750 = 350; \quad R_B = \frac{350}{0{,}707} = 495(H).$$

6. Записуємо перше рівняння і находимо з нього останнє невідоме

$$\sum_{i=1}^{n} F_{kx} = R_{Ax} - R_B \cos 45° = 0; \; R_{Ax} = R_B \cos 45° = 495 \cdot 0{,}707 = 350(H).$$

7. За теоремою Піфагора можна знайти повну реакцію в опорі А

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{350^2 + 750^2} = 827{,}6(H).$$

Задачу розв’язано.

<u>Приклад розв’язання задачі (графічна умова рівноваги)</u>

Задача 2. Тіло M_1 вагою P = 30 Н підвішене за допомогою двох гнучких нерозтяжних тросів OM_1 і M_1M_2 і утримується в стані рівноваги за допомогою тіла M_2 ваги Q (рис. 1.14, а). При цьому ділянка тросу M_1A горизонтальна, а трос OM_1 утворює кут α = 30° із вертикальною стіною.
Знайти вагу Q тіла M_2 і натяг тросу OM_1, вважаючи блок ідеальним і нехтуючи розмірами вантажів.

Розв'язання.

1. В задачі розглядається рівновага матеріальної точки M_1, оскільки відома сила ваги тіла $\boldsymbol{P}$ прикладена до неї. Також до неї прикладені ще дві сили: $\boldsymbol{T}_1$ – сила натягу троса OM_1 і $\boldsymbol{T}_2$ – сила натягу ділянки троса M_1A. Оскільки кількість сил не перевищує трьох, то можна використати геометричну умову рівноваги.

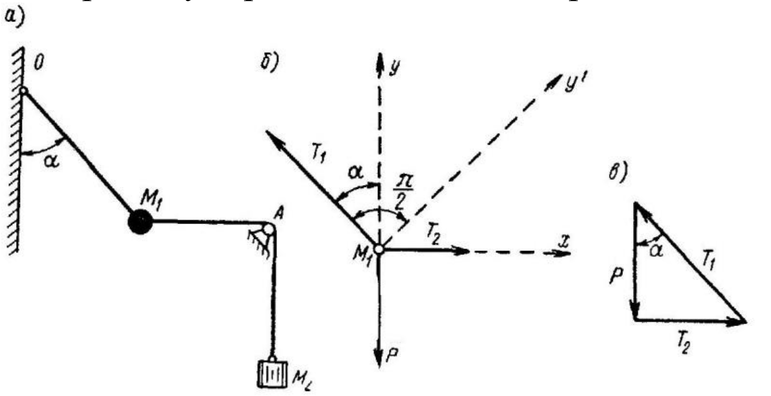


Рис. 1.14. До задачі 2.

Використаємо принцип звільнення від в'язей, замінивши їх на відповідні реакції (рис. 1.14, б), причому реакція $\boldsymbol{T}_2$ дорівнює вазі точки M_2

$$T_2 = Q.$$

Оскільки тіло M_1 знаходиться в стані рівноваги під дією трьох сил, то силовий трикутник, утворений цими силами, має бути замкнений. Побудову трикутника починаємо з відомої сили $\boldsymbol{P}$, яка направлена вертикально вниз. Далі через початок і кінець вектора $\boldsymbol{P}$ проводимо прямі, паралельні силам натягу $\boldsymbol{T}_1$ і $\boldsymbol{T}_2$. Точка їх перетину дає третю вершину силового трикутника (рис. 1.12, в), причому орієнтація сил натягу має утворювати замкнений трикутник. Це дасть можливість перевірити правильність проставлених напрямів невідомих реакцій.

Із співвідношень в прямокутному трикутнику маємо

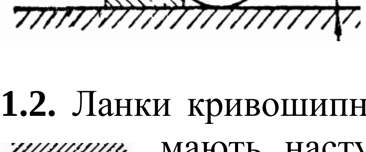
$$P = T_1 \cos\alpha \Rightarrow T_1 = \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{30}{\cos 30°} = \frac{30}{0{,}866} = 34{,}5\,(H);$$

$$T_2 = Q = Ptg\alpha = 30 \cdot tg30° = 30 \cdot 0{,}577 = 17{,}3\,(H).$$

Задачу розв'язано.

Завдання №1 до РГР

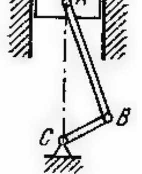
1.1. Каток трамбівки має вагу G = 40 кН і радіус R = 50 см. Визначити горизонтальне зусилля P, необхідне для підйому котка на кам'яну плиту заввишки h = 10 см.



Відповідь: P = 30 кН.

До задачі 1.1.

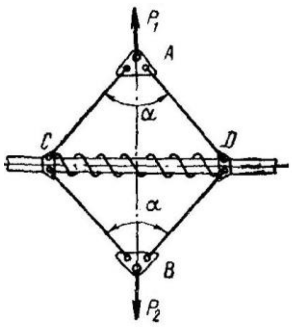
1.2. Ланки кривошипно-шатунного механізму двигуна внутрішнього згоряння мають наступні розміри: довжина шатуна AB = 30 см, довжина кривошипа BC = 6 см, площа поршня S = 200 см^2. В даний момент



тиск газу над поршнем P_1 = 1,0 МПа, під поршнем – P_2 = 0,2 МПа. Знайти силу *T*, яка діє на кривошип *BC* збоку шатуна *AB* при їх перпендикулярному розташуванні. Тертям між поршнем і стінками циліндра знехтувати.
Відповідь: *T* = 16 кН.
До задачі 1.2.

1.3. Аби витягти автомобіль, який застряг на поганій дорозі, водій натяг канат *AB* між автомобілем і деревом, прив'язавши до дерева кінець *B* на *2* м вище, ніж кінець *A* до машини. Потім водій встав на канат біля автомобіля, відтягши його донизу власною вагою *G* = 770 Н, після чого вирушив по канату в напрямку дерева. Визначити силу, що діє на автомобіль (силу натягу канату), коли водій стояв на канаті в точці *C* на відстані від дерева: C_1D = 2 м, C_2D = 10 м.
Відповідь: T_1= 770 Н, T_2 = 3 850 Н.

1.4. На ланки *A* і *B* пружинного амортизатора, який використовується для послаблення поштовхів, діють протилежно спрямовані сили P_1 = P_2 = 800 Н. Визначити жорсткість пружини *c* (силу, необхідну для її деформації на 1 м), аби рівновага мала місце при α = 60°, якщо при α = 180° пружина знаходиться в ненапруженому стані. Прийняти *AC* = *AD* = *CB* = *BD* = 0,4 м. Тертям і вагою ланок знехтувати.
Відповідь: $c = \frac{P}{\sqrt{3}l} = 1155\left(\frac{H}{м}\right)$.

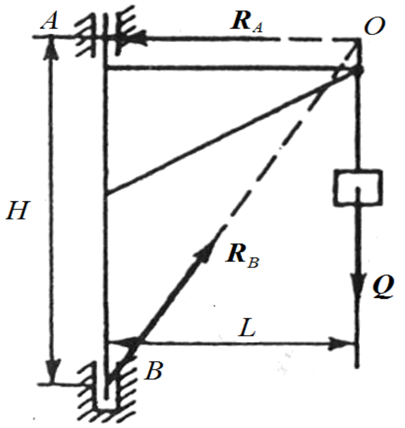


До задачі 1.4.

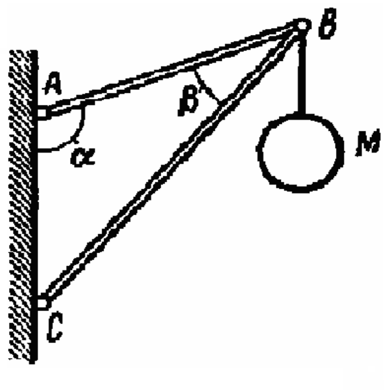
1.5. Поворотний кран знаходиться в стані рівноваги під дією сили тяжіння вантажу *Q* = 15 кН. Визначити реакції в опорах *A* і *B*, якщо розміри крана *H* = 4 м, *L* = 3 м.
Відповідь: R_A = 11,25 кН; R_B = 18,75 кН.

1.6. В точці *B* кронштейну підвішений тягар ваги *G* = 25 Н. Визначити реакції стержнів кронштейна, якщо його кути *α* = 100°, *β* = 35°, а кріплення в точках *A* і *C* є шарнірними.
Відповідь: N_A = 21,7 Н; N_C = 30,1 Н.

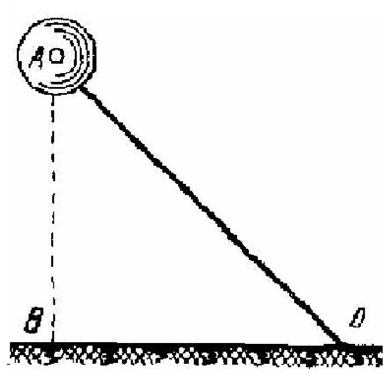
1.7. Повітряна куля *A* з підйомною силою *Q* = 2 Н утримується невагомим тросом *OA* довжиною *l* = 1 м і відноситься вітром на відстань *OB* = 0,5 м. Визначити силу вітру *F*, вважаючи його постійним і горизонтальним, а також силу натягу тросу *T*. Розмірами кульки і її вагою знехтувати.
Відповідь: $T = \frac{lQ}{\sqrt{l^2 - OB^2}} = 2{,}31(H)$, $F = \frac{OB \cdot Q}{\sqrt{l^2 - OB^2}} = 1{,}15(H)$.



До задачі 1.5.



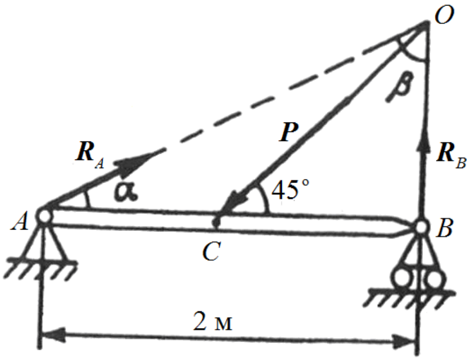
До задачі 1.6.



До задачі 1.7.

1.8. Балка *AB* довжиною 2 м, яка має шарнірно нерухому опору *A* і шарнірно рухому опору *B*, завантажена силою P = 1,4 кН. Визначити реакції в опорах балки, якщо сила *P* прикладена посередині під кутом 45° до її осі.

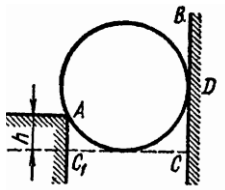
Відповідь: R_A = 1,11 кН, R_B = 0,50 кН.



До задачі 1.8.

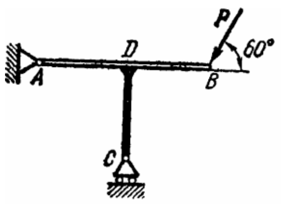
1.9. Циліндр радіуса R = 0,8 м і ваги P = 7 кН розташований між виступом *A* і горизонтальною стіною. Визначити силу тиску циліндра на виступ *A* і стіну, якщо відстань від точки *A* до горизонтальної дотичної площини CC_1 дорівнює h = 10 см.

Відповідь: R_A = 8 кН, R_D = 3,87 кН.



До задачі 1.9.

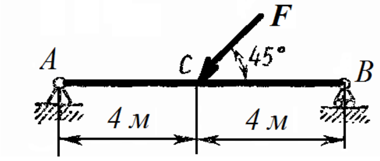
1.10. Невагомі стержні *AB* і *CD* жорстко скріплені під прямим кутом в точці *D*, причому *AD* = *BD*. До кінця *B* стержня під кутом α = 60° прикладена сила P = 300 Н. Визначити реакції в шарнірно рухомій опорі *C* і шарнірно нерухомій опорі *A*.



Відповідь: R_A = 300 Н, R_C = 520 Н.

До задачі 1.10.

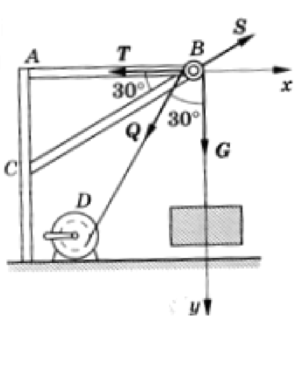
1.11. Визначити кут нахилу α повної реакції R_A в шарнірно нерухомій опорі *A* до осі горизонтальної балки *AB*, яка навантажена посередині силою F = 6 кН під кутом 45° до горизонту.



Відповідь: α = 26,6°

До задачі 1.11.

1.12. Вантаж G = 20 кН підіймається лебідкою за допомогою тросу, перекинутого через нерухомий блок в точці *B*. Нехтуючи тертям в блоці, визначити натяг *T* бруса *AB* і зусилля *S* в брусі *BC*.

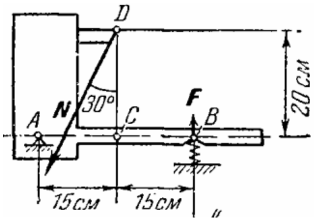


Відповідь: T = 54,6 кН, S = 74,6 кН.

До задачі 1.12.

1.13. До різця, закріпленого в супорті металорізального верстата, в точці D з боку деталі, яка обробляється, прикладена сила $N = 300$ Н, яка утворює кут $\alpha = 30°$ з вертикаллю. Знайти реакцію в шарнірній опорі A і силу пружності F пружини, яка підтримує супорт в точці B. Власною вагою супорта знехтувати.

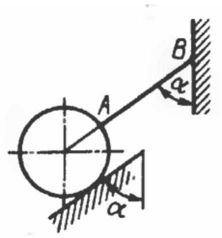
Відповідь: $R_A = 275$ Н, $F = 30$ Н.



До задачі 1.13.

1.14. Однорідна куля вагою 12 Н утримується в стані рівноваги на похилій площині за допомогою мотузки AB. Визначити силу тиску N кулі на площину, якщо вона утворює з вертикаллю кут $\alpha = 60°$. Тертям між кулею та площиною знехтувати.

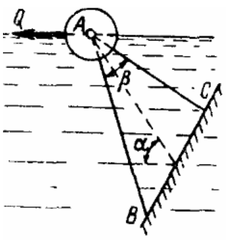
Відповідь: $N = 10{,}4$ Н.



До задачі 1.14.

1.15. Бочка A вагою $P = 3$ кН утримується від зносу течією за допомогою двох якорів B і C, які знаходяться на однаковій глибині. Об'єм підводної частини бочки $V = 0{,}33$ м^3, питома вага води $\gamma = 9{,}81$ Н/м^3. Якірні троси утворюють між собою кут $\beta = 90°$ і лежать в площині, нахиленій до горизонту під кутом $\alpha = 60°$. Визначити натяги тросів і величину горизонтальної сили Q, обумовленої течією, якщо ця сила лежить в вертикальній площині, поділяючій кут β навпіл.

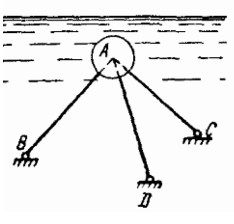
Відповідь: $T_1 = T_2 = 0{,}19$ кН, $Q = 0{,}14$ кН.



До задачі 1.15.

1.16. Куля A вагою 5 кН і об'ємом 0,7 м^3 утримується в підводному положенні за допомогою трьох якорів B, C і D, розташованих на одній глибині та на однаковій відстані один від одного. Визначити натяг кожного тросу, якщо вони утворюють з вертикаллю кути 45°. Питому вагу води прийняти рівною $\gamma = 10$ кН/м^3.

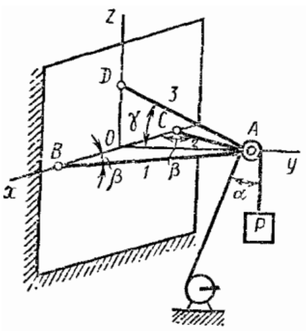
Відповідь: $T_1 = T_2 = T_3 = 0{,}943$ кН.



До задачі 1.16.

1.17. Вантаж P рівномірно піднімається лебідкою за допомогою тросу, перекинутого через нерухомий блок A, закріплений в вершині кронштейна $ABCD$. Нехтуючи вагою стержнів, тросу і блоків та тертям в них, визначити вагу вантажу P і зусилля в стержні 1, якщо зусилля в стержні 3 $S_3 = 3$ кН, а кути відповідно $\alpha = \beta = 30°$, $\gamma = 60°$.

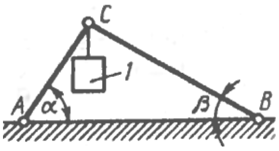
Відповідь: $P = 1$ кН, $S_1 = -2$ кН.



До задачі 1.17.

1.18. Два невагомі стержні AC і BC з'єднані в точці C і шарнірно прикріплені до підлоги. До шарніра C підвішений вантаж 1. Визначити реакцію стержня BC, якщо зусилля в стержні AC дорівнює S_{AC} = 43 Н. Кути, утворені стержнями з горизонтальною площиною: $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.

Відповідь: S_{BC} = - 24,8 Н.



До задачі 1.18.

1.19. Вантаж вагою P = 80 Н висить на трьох однакових мотузках, прикріплених до вершин рівнобічного трикутника ABC, розташованого в горизонтальній площині. Мотузки утворюють однакові кути $\alpha = 60°$. Визначити натяги T_A, T_B і T_C мотузок AO, BO і CO.

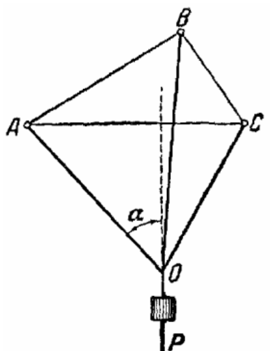
Відповідь: $T_A = T_B = T_C$ = 53,3 Н.

1.20. Вагонетка вагою G = 20 кН знаходиться на похилій ділянці підвісної дороги. Знайти натяг T тягового канату і силу тиску вагонетки N на канат AB, який натягнутий так, що не провисає. Найти повну силу тиску R на опору B та її горизонтальну і вертикальну складові, якщо канат AB натягнутий з силою P = 30 кН під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту.

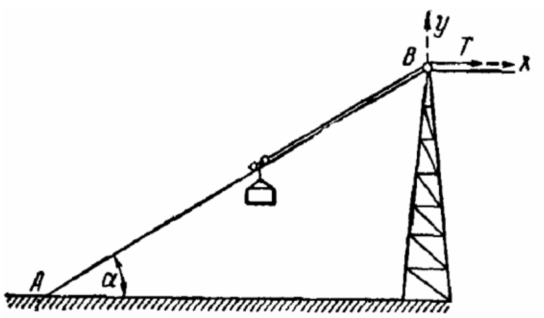
Відповідь: T = 1 кН, N = 1,73 кН, X_B = 4,18 кН, Y_B = - 15,5 кН , R = 16 кН.

1.21. Два електровозних контакти підвішені до поперечних канатів, кожен з яких прикріплений до двох стовпів. Стовпи розставлені вздовж дороги на відстані 40 м один від одного. Для кожного поперечного канату $AE = KB$ = 3,3 м, $EC = KD$ = 0,8 м. Нехтуючи вагою дротяного канату, знайти натяги T_1, T_2 і T_3 в його частинах AC, CD і DB, якщо вага 1 м дроту 8,9 Н.

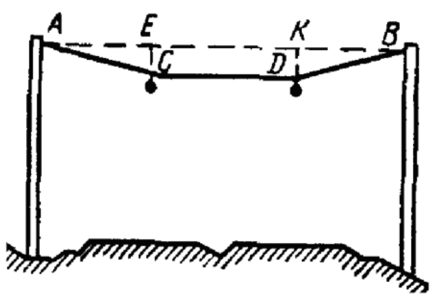
Відповідь: $T_1 = T_2$ = 1 510 Н, T_3 = 1 470 Н.



До задачі 1.19.



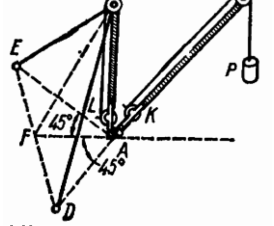
До задачі 1.20.



До задачі 1.21.

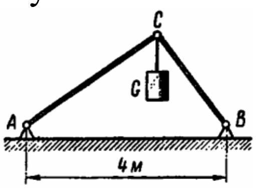
1.22. На тросі крана, перекинутому через блок C, висить вантаж ваги P = 100 кН. Інший кінець тросу прикріплено до лебідки K. Нехтуючи тертям в блоці і вагою стержнів, знайти зусилля в стержнях і натяг T троса CBL, якщо $AB = BC = AD = AE$, кріплення стержнів шарнірні, а BC паралельно AF.

Відповідь: $S_{CA} = S_{BA}$ = 241,4 кН, $S_{BD} = S_{BE} = T$ = 100 кН.



До задачі 1.22.

1.23. За допомогою двох стержнів *AC* і *BC*, кінці яких *A* і *B* закріплені в горизонтальній площині на відстані *AB* = 4 м, необхідно утримати вантаж вагою *G* = 40 кН. Визначити, якої довжини *l* необхідно взяти стержні, аби в кожному з них виникли однакові зусилля стиску *S* = 30 кН.



Відповідь: *l* = 2,74 м.

До задачі 1.23.

Глава 2. Момент сили і пари сил

2.1. Момент сили відносно точки

Для приведення довільної системи незбіжних сил до більш простого виду потрібно ввести ще дві основні величини статики: момент сили відносно точки (центру) і момент сили відносно осі.

Момент сили ***F*** відносно точки *O* – вектор, який дорівнює векторному добутку радіус-вектора ***r***, проведеного з центра *O* в точку *A* прикладення сили, на вектор сили ***F*** (рис. 2.1)

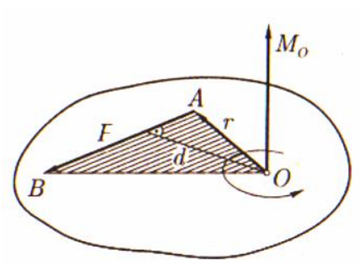


Рис. 2.1. Момент сили відносно точки.

$$\boldsymbol{M_0} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \tag{2.1}$$

Вектор моменту сили $\boldsymbol{M_o}$ прикладений в точці *O* і перпендикулярний площині, в якій лежать вектори ***r*** і ***F***. Спрямований він убік, звідки силу ***F*** видно такою, що прагне повернути тіло навколо центру *O* проти годинникової стрілки.

Модуль векторного добутку дорівнює двом площам трикутника з силою в основі і вершиною в точці *O*

$$M_0 = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{P}| = rP \cdot \sin(\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{P}) = Pd, \tag{2.2}$$

де *d* - плече сили, найкоротша відстань від центру *O* до лінії дії сили *AB*.

Якщо відомі проекції на осі прямокутних координати радіус-вектора ***r*** (*x*, *y*, *z*) і сили ***F*** (F_x, F_y, F_z), то момент сили можна визначити, розклавши цей визначник за елементами першого рядка

$$\boldsymbol{M}_0 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(yF_z - zF_y) - \boldsymbol{j}(xF_z - zF_x) + \boldsymbol{k}(xF_y + yF_x). \tag{2.3}$$

З іншого боку, момент сили відносно центру можна розкласти по проекціях на координатні осі

$$\boldsymbol{M_0} = \boldsymbol{i}M_{0x} + \boldsymbol{j}M_{0y} + \boldsymbol{k}M_{0z}, \tag{2.4}$$

Прирівнюючи між собою вирази (2.2) і (2.3), можна визначити проекції моменту сили відносно центру О на координатні осі

$$M_{0x} = yF_z - zF_y;$$
$$M_{0y} = zF_x - xF_z; \qquad (2.5)$$
$$M_{0z} = xF_y - yF_x.$$

Якщо проекції моменту сили відносно точки на координатні осі відомі, то його модуль можна визначити із співвідношення

$$M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2}, \qquad (2.6)$$

а напрям за напрямними косинусами

$$\cos\alpha = \frac{M_{0x}}{M_0}, \cos\beta = \frac{M_{0y}}{M_0}, \cos\gamma = \frac{M_{0z}}{M_0}.$$

З (2.2) витікають наступні властивості моменту сили відносно центра:
а) Момент сил перетворюється на нуль у тому випадку, коли лінія дії сили проходить через точку O, тобто плече $d = 0$.
б) При перенесенні сили по лінії її дії величина моменту відносно точки O не змінюється (рис. 2.2).

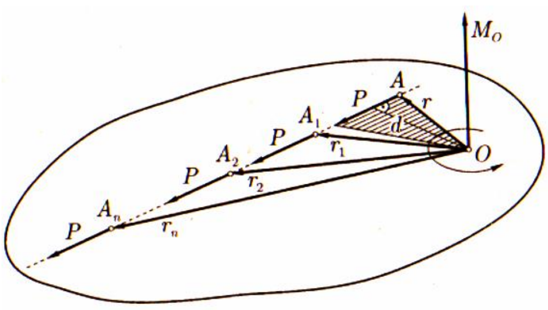


Рис. 2.2. Властивості моменту сила відносно точки O.

в) При переході від правої системи координат до лівої і навпаки вектор моменту сили, зберігаючи величину, міняє напрям на протилежний, тому він є *псевдовектором*. Існують також і істинні вектора, такі як швидкість, прискорення, які ні по величині, ні по напряму від виду системи координат не залежать.

Теорема Варіньона: момент рівнодійної системи збіжних сил відносно будь-якого центру O дорівнює векторній сумі моментів усіх сил системи відносно того ж центру:

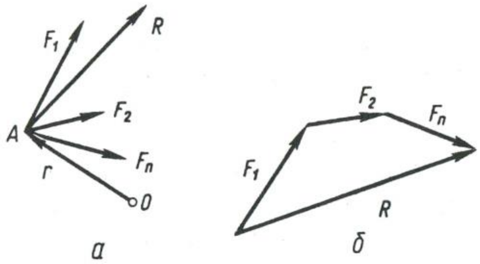
$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{R}) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_k). \qquad (2.7)$$

Доведення. Нехай в точці A перетинаються лінії дії усіх n сил системи (рис. 2.3, а). Проведемо радіус-вектор $\boldsymbol{r}$ з довільного центру O до точки A. За правилом силового багатокутника знайдемо рівнодійну системи $\boldsymbol{R}$ (рис. 2.3, б). Її аналітичне вираження

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n$$

підставляємо у формулу (2.1) і знаходимо момент рівнодійною відносно центру O

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_n =$$
$$= \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F_1}) + \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F_2}) + \ldots + \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F_n}) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_k),$$



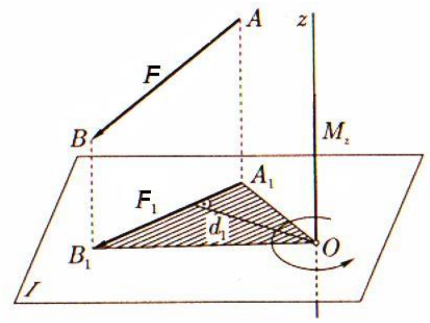
що повністю співпадає з (2.7).

Якщо усі сили і центр O лежать в одній площині, їх моменти будуть лежати на одній

прямій, яка проходить через точку O перпендикулярно до цієї площини. Тоді момент рівнодійної дорівнює алгебричній сумі моментів усіх сил системи відносно цієї точки.
Рис. 2.3. Теорема Варіньона.

2.2. Момент сили відносно осі

Моментом сили $\boldsymbol{F}$ відносно довільної осі називається проекція на цю вісь моменту сили відносно будь-якої точки цієї осі. Обчислення моментів сили відносно осей виконується по формулах (2.5). Для обчислення моменту сили $\boldsymbol{F}$ відносно довільної осі z можна також користуватися наступним алгоритмом:
1. Проводимо довільну площину I, перпендикулярну в осі z. Знаходимо їх точку перетину O.
2. Проектуємо силу $\boldsymbol{F}$ на цю площину і знаходимо величину проекції F_1.



3. Моментом сили $\boldsymbol{F}$ відносно осі z називається добуток модуля проекції сили F_1 на площину, перпендикулярну осі, на її плече d_1 відносно точки O на перетини осі з площиною (рис. 2.4) :

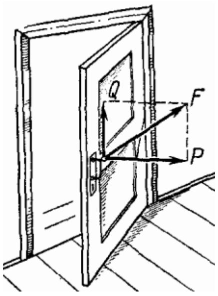
$$M_z = \pm F_1 d_1. \tag{2.8}$$

4. Якщо при спостереженні назустріч осі z проекція F_1 прагне повернути площину проти годинникової стрілки, момент вважається додатним.

Рис. 2.4. До визначення моменту сили відносно осі.

Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо:
а) лінія дії сили паралельна осі, тобто $F_1 = 0$;
б) лінія дії сили перетинає вісь, тобто плече $d_1 = 0$.
З (а) і (б) витікає, що коли сила і вісь лежать в одній площині, то момент сили відносно цієї осі дорівнює нулю.

Властивості моменту сил відносно осі можна пояснити простим прикладом. Двері можуть вільно обертатися навколо осі. На ручку з боку руки людини діє сила F. Цю силу можна розкласти на перпендикулярну P і паралельну Q складові. Паралельна осі складова Q не може повертати двері, оскільки знаходиться з віссю в одній площині. Дія ж на двері складової P залежить не тільки від її величини, а й від відстані до осі обертання (плеча).

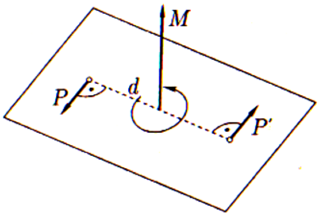


Механічний сенс моменту відносно осі z в тому, що він характеризує обертальний ефект сили $\boldsymbol{F}$ відносно цієї осі. Він є скалярною величиною, оскільки не має власного напряму, а залежить від напряму осі.

Рис. 2.5. Властивості моменту сили відносно осі.

2.3. Пара сил і її момент

Пара сил – система двох паралельних, рівних по модулю і протилежно спрямованих сил $\boldsymbol{P}$ і $\boldsymbol{P'}$ (рис. 2.6).



Пара сил прагне привести в обертання тверде тіло, до якого вона прикладена. Вона не має рівнодійної, а сили, що утворюють пару, не урівноважуються, оскільки вони не лежать на одній прямій.

Рис. 2.6. Пара сил.

Основні поняття, що характеризують пару сил :

а) *площина дії* – площина, що проходить через лінії дії сил, які утворюють пару;
б) *плече пари d* – найкоротша відстань між лініями дії сил, які утворюють пару;
в) *момент пари сил* – добуток модуля однієї з сил пари на її плече:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P}d. \tag{2.9}$$

Основною характеристикою пари сил (мірою її механічної дії на тверде тіло) являється її момент. Він має ту ж розмірність, що і моменти відносно точки і осі, тобто ньютон на метр (Н·м) і є векторною величиною. Вектор моменту пари сил $\boldsymbol{M}$ спрямований перпендикулярно площини дії пари убік, звідки можна бачити пару сил такою, що прагне повернути тіло проти годинникової стрілки.

Момент пари сил вважається додатним, якщо пара прагне обертати площину рисунка проти годинникової стрілки (рис. 2.7, а), і від'ємним – якщо пара прагне обертати площину рисунка за годинниковою стрілкою (рис. 2.7, б).

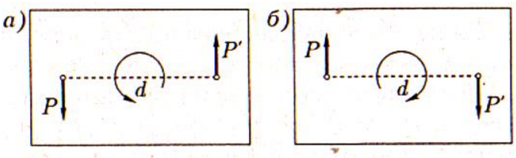
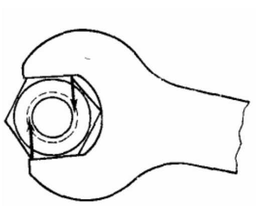


Рис. 2.7. До визначення знаку моменту пари сил.

2.4. Теореми про еквівалентність

Теорема про еквівалентність пар сил, які лежать в одній площині: пари сил, які лежать в одній площині, еквівалентні, якщо їх моменти рівні за величиною і однакові за знаком.

Наслідок: не змінюючи дії пари сил на тверде тіло, її можна переносити в будь-яке місце і повертати на будь-який кут в площині дії. Також можна змінювати плече і величину сил, залишаючи незмінним числове значення і знак моменту пари.

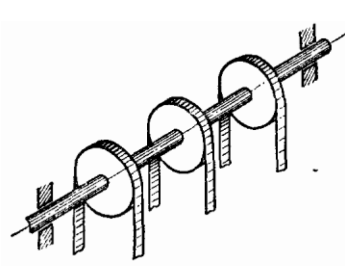


Для більшого розуміння наслідку з теореми слід розглянути гайковий ключ (рис. 2.8). Він однаково діє на гайку, до яких граней він би не був прикладений, адже момент пари залишається незмінним.

Рис. 2.8. Поворот пари в площині дії.

Теорема про еквівалентність пар сил в просторі: пари сил в просторі еквівалентні, якщо їх моменти геометрично рівні.

Наслідок: не змінюючи дії пари сил на тверде тіло, її можна переносити в



будь-яку площину, паралельну площині дії пари, змінювати величину плеча і модуль сили, не змінюючи при цьому числового значення і напряму її моменту.

Трансмісійний вал (рис. 2.9) надає шківу обертальний момент незалежно від його розташування на валу – тобто момент пари не змінюється при перенесені в паралельну площину.

Рис. 2.9. Поворот пари в площині дії.

Оскільки пари сил можна переносити в будь-яку точку і повертати на будь-який кут в площині дії, змінювати величину сили і плеча, замінювати систему пар сил еквівалентною парою, то з усього цього виходить, що пара є ***вільним вектором*** (не має точки прикладення). Цим момент пари відрізняється від моменту сили.

2.5. Умова рівноваги пар сил

Умова рівноваги пар сил, розташованих на площині: пари сил, розташовані на площині (рис. 2.10), взаємно зрівноважуються лише у тому випадку, коли алгебрична сума їх моментів дорівнює нулю:

$$M = \sum_{k=1}^{n} M_k = \sum_{k=1}^{n} P_k d_k = 0. \qquad (2.10)$$

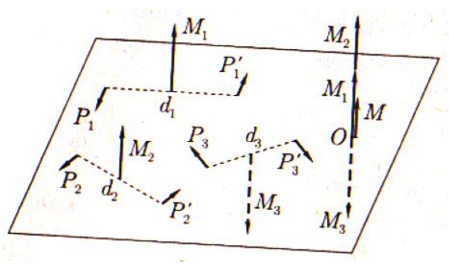


Рис. 2.10. Рівновага пар сил на площині.

Умова рівноваги пар сил, довільно розташованих в просторі: пари сил, довільно розташовані в просторі, взаємно зрівноважуються лише у тому випадку, коли геометрична сума їх моментів дорівнює нулю:

$$\boldsymbol{M} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_k = 0. \qquad (2.11)$$

У цих випадках момент еквівалентної пари сил дорівнює нулю.

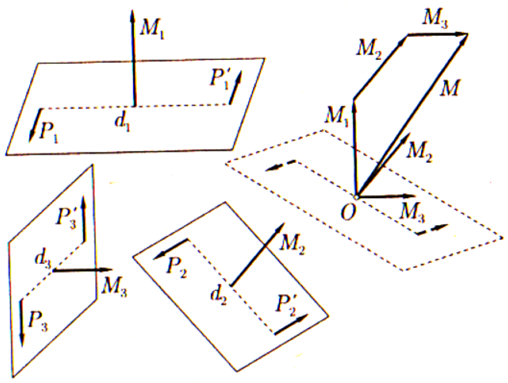
2.6. Складання пар сил

Система пар сил, які діють на тверде тіло, еквівалентна одній парі з моментом, рівним геометричній сумі моментів складових пар.

Нехай необхідно скласти декілька пар сил, довільно розташованих в просторі (рис. 2.11). Визначивши їх моменти по формулі (2.9), перенесемо їх в будь-яку точку *O* простору. Далі по правилу трикутника або паралелограма складаємо отримані вектори моментів пар сил :

$$\boldsymbol{M} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_k = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \ldots \boldsymbol{M}_n.$$

Теорема про складання пар сил, довільно розташованих в просторі: момент пари сил, яка еквівалентна системі пар сил в просторі, дорівнює геометричній сумі моментів складових пар сил.



Якщо пари сил розташовані в паралельних площинах, то теорема набирає наступного вигляду.

Теорема про складання пар сил, розташованих в паралельних площинах: момент пари сил, яка еквівалентна системі пар сил в паралельних площинах, дорівнює алгебричній сумі моментів складових пар.

Рис. 2.11. Складання пар сил у просторі.

ВИСНОВОК. В статиці усі механічні взаємодії описуються трьома типами векторів: ковзним вектором (силою), прикладеним вектором (моментом відносно центру) і вільним вектором (парою сил).

Питання для самоконтролю

1. Як визначити напрям моменту сили відносно центра?
2. В яких випадках момент сили відносно центра дорівнює нулю?
3. Чим характеризується дія пари сил на тверде тіло?
4. Чим можна зрівноважити пару сил, що діє на тверде тіло?
5. Який вектор у статиці є прикладеним, а який ковзним?
6. Сформулюйте умову рівноваги системи пар сил на площині, у просторі.

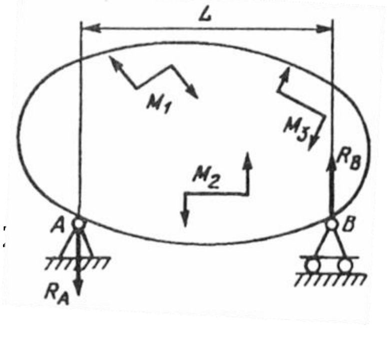
Завдання № 2. «Момент сили і пари сил»

<u>Рекомендації до розв'язання задач</u>

1. Виявити силу, момент якої знаходиться, і знайти центр моментів – точку, відносно якої знаходиться момент даної сили.
2. Провести лінію дії сили, після чого опустити перпендикуляр на неї з центра моменту. Довжина перпендикуляра і є плечем h.
3. Визначити знак моменту сили: якщо сила намагається повернути плече навколо центра моменту проти годинникової стрілки, то момент є додатним, якщо за годинниковою стрілкою – від'ємним.
4. Знайти числове значення моменту сили відносно даної точки по формулі (2.2), тобто помноживши силу на плече.
5. Якщо центр моментів лежить на лінії дії сили, то момент сили буде дорівнювати нулю.

<u>Приклад розв'язання задачі (пари сил)</u>

Задача 1. Балка, яка спирається на шарнірно нерухому опору A і шарнірно рухому опору B, навантажена трьома парами сил з моментами $M_1 = 2$ кН·м, $M_2 = 3$ кН·м і $M_3 = 4$ кН·м, які лежать в площині рисунка (рис. 2.12). Визначити реакції в опорах A і B, якщо відстань між ними $L = 2$ м.



<u>Розв'язання</u>

Система трьох заданих пар приводиться до результуючої пари з моментом

$$M_{\Sigma} = -M_1 + M_2 - M_3 = -2 + 3 - 4 = -3\,(кН \cdot м).$$

Рис. 2.12. До задачі 1.

При розрахунку сумарної пари додатними вважались моменти, спрямовані проти годинникової стрілки. Знак «мінус» вказує на те, що момент результуючої пари спрямований за годинниковою стрілкою.

Результуюча пара може бути врівноважена лише реактивною парою з таким же моментом, спрямованою проти годинникової стрілки. Реакція R_B в рухомій шарнірній опорі перпендикулярна до площини кочення, тому вона буде спрямована по вертикалі. В такому випадку реакція R_A в нерухомій опорі А буде теж вертикальна, така сама за величиною і спрямована в інший бік. Оскільки в парі величини сил однакові

$$R_A = R_B,$$

то залишається лише визначити їх напрямки. Аби момент пари був спрямований за годинниковою стрілкою, реакція R_B має бути спрямована догори, R_A – вниз.

Записуємо умови рівноваги системи

$$\sum M = 0. \qquad R_A L - 3 = 0 \Rightarrow R_A = \frac{3}{2} = 1{,}5\,(кН),\ R_B = R_A = 1{,}5\,(кН).$$

Задачу розв’язано.

Приклад розв’язання задачі (момент сили відносно центра)

Задача 2. Тонкий однорідний стержень *AB* вагою *P* = 50 Н може вільно обертатись навколо шарніра *B*, прикріпленого до підлоги (рис. 2.13). Визначити величину сили *F*, яку треба прикласти в горизонтальному напрямку, аби стержень знаходився в стані рівноваги, утворивши при цьому кут $\alpha = 45°$ з вертикаллю.

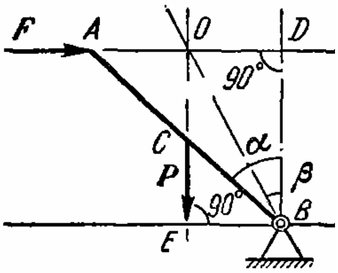


Рис. 2.13. До задачі 2.

Розв’язання

В даній задачі розглядається рівновага стержня. Умову рівноваги запишемо відносно точки *B*, оскільки в такому випадку нема потреби знаходити реакцію в шарнірній опорі

$$\sum_{i=1}^{n} M_B(F_i) = 0. \qquad M_B(F) + M_B(P) = 0. \tag{2.12}$$

Для кожної з сил проводимо лінії дії: *AD* – для сили *F* і *OE* для сили *P*. Далі з точки *B* опускаємо перпендикуляри *BD* і *BE* на кожну лінію дії. Знаходимо моменти від дії кожної сили і підставляємо їх в (2.12)

$$M_B(F) = -F \cdot BD = -F \cdot AB\cos\alpha; \qquad M_B(P) = P \cdot BE = P \cdot BC\sin\alpha = P \cdot \frac{AB}{2}\sin\alpha.$$

$$-F \cdot AB\cos\alpha + P \cdot \frac{AB}{2}\sin\alpha \Rightarrow F \cdot AB\cos\alpha = P \cdot \frac{AB}{2}\sin\alpha \Rightarrow F = \frac{P \cdot AB\sin\alpha}{2AB\cos\alpha} = \frac{Ptg\alpha}{2}.$$

Тепер в розрахункову формулу підставимо числові значення

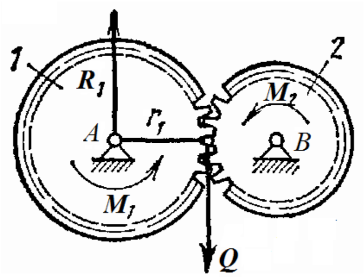
$$F = \frac{50 \cdot tg45^\circ}{2} = 25\,(H).$$

Задачу розв’язано.

<u>Завдання № 2 до РГР</u>

2.1. На шестірню 1 радіуса r_1 = 60 см діє пара сил з моментом M_1 = 42 Н·м. Визначити момент пари M_2, який необхідно прикласти до шестерні 2 радіуса r_2 = 25 см, аби система залишилась в стані рівноваги.

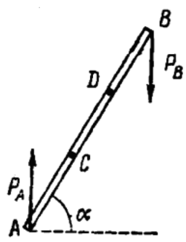
Відповідь: M_2 = 26,25 Н·м.



До задачі 2.1.

2.2. Прямолінійний стержень *AB* має знаходитися в стані рівноваги в положенні, показаному на рисунку. При цьому в точках *A* і *B* на стержень діють вертикальні сили $P_A = P_B$ = 100 Н, які утворюють пару. Які дві рівні сили треба прикласти до стержня в точках *C* і *D* в перпендикулярному до стержня напрямку, аби забезпечити рівновагу. Довжина стержня *AB* = 3 м, довжина ділянки *CD* = 1 м, кут α = 60°.

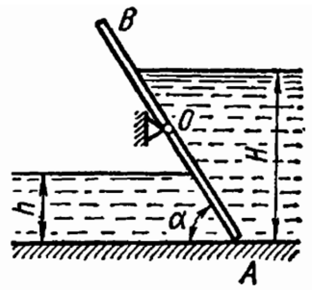
Відповідь: $P_C = P_D$ = 150 Н.



До задачі 2.2.

2.3. Прямокутний щит *AB* іригаційного каналу може вільно обертатися навколо осі *O*. Рівень води зліва від щита дорівнює *h*. Нехтуючи тертям і вагою щита, найти положення осі *O*, за якого при рівні *H* води зліва щит буде знаходитись в стані граничної рівноваги. Кут, який утворює щит із горизонталлю, дорівнює α.

Відповідь: $OA = \dfrac{H^2 + Hh + h^2}{3(H + h)\sin\alpha}$.



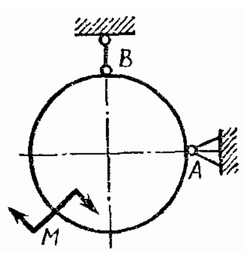
До задачі 2.3.

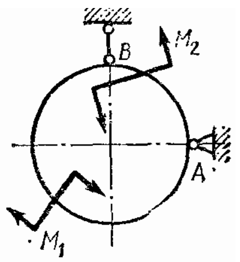
2.4. Невагоме кільце радіуса *r* = 20 см знаходиться під дією пари сил з моментом *M* = 6 Н·м. Визначити реакцію в опорі *A*.

Відповідь: R_A = 30 Н.

2.5. Невагоме кільце радіуса *r* = 20 см знаходиться під дією двох пар сил з моментами M_1 = 6 Н·м і M_2 = 9 Н·м. Визначити реакцію в опорі *A*.

Відповідь: R_A = 15 Н.



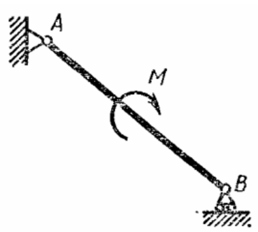


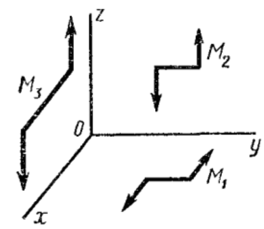
До задачі 2.4. До задачі 2.5.

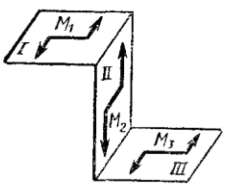
2.6. Невагомий стержень AB довжини l = 20 см знаходиться під дією пари сил з моментом M = 26 Н·м. Визначити реакції в опорах A і B, якщо кут між віссю стержня AB і горизонталлю α = 45°.
Відповідь: R_A = - R_B = 185,7 Н.

2.7. Дана система трьох пар сил з моментами M_1 = 2 Н·м, M_2 = 3 Н·м і M_3 = 6 Н·м, які діють у взаємно перпендикулярних площинах. Визначити момент еквівалентної пари.
Відповідь: $M_{екв}$ = 2 Н·м.

2.8. В площинах *I, II* і *III* діють три пари сил з моментами M_1 = 1 Н·м, M_2 = 2 Н·м і M_3 = 1 Н·м. Визначити модуль моменту M пари, еквівалентної даній системі, якщо площини *I* і *III* паралельні, а площина *II* перпендикулярна до них.
Відповідь: $M_{екв}$ = 2,83 Н·м.

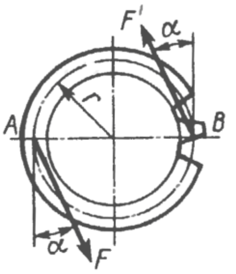


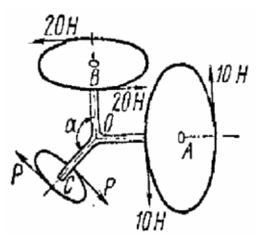




До задачі 2.6. До задачі 2.7. До задачі 2.8.

2.9. Визначити момент пари сил, яка діє на зубчате колесо, якщо сили $F = F'$ = 100 Н діють в точках A і B, розташованих на колі радіуса r = 4 см і утворюють кут α = 20° з дотичними до цього кола.
Відповідь: M = 7,52 Н·м.
2.10. До трьох дисків *A, B* і *C* радіусами r_A = 15 см, r_B = 10 см, r_C = 5 см прикладені пари сил. Величини сил, що утворюють пару, відповідно дорівнюють F_A = 20 Н, F_B = 10 Н і F_C = P Н. Осі *OA, OB* і *OC* лежать в одній площині, причому кут *AOB* – прямий. Визначити величину сили P і кута $BOC = \alpha$, за умови, що система знаходиться в стані рівноваги.
Відповідь: P = 50 Н, α = 143°.

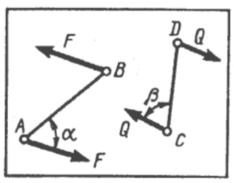




До задачі 2.9. До задачі 2.10.

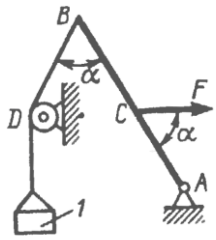
2.11. На плиту в її площині діють дві пари сил. Визначити суму моментів пар, якщо F = 8 Н, Q = 5 Н, відстані AB = 0,25 м, CD = 0,20 м, кути α = 60°, β = 70°.
Відповідь: M = 0,792 Н·м.

2.12. В одній площині розташовані три пари сил. Визначити момент пари M_3, при якому вся система буде знаходитись в стані рівноваги, якщо M_1 = 510 Н·м, M_2 = 120 Н·м.
Відповідь: M_3 = 390 Н·м.



До задачі 2.11.   До задачі 2.12.

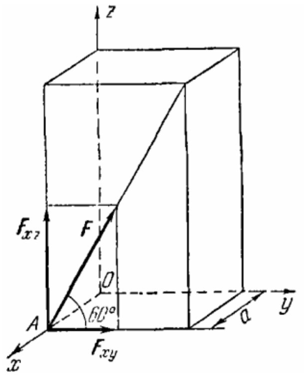
2.13. До стержня *AB*, закріпленого в шарнірі *A*, прив’язана мотузка *BD* з вантажем 1 вагою *G* = 2 Н. Визначити силу *F*, необхідну для утримання стержня в стані рівноваги, якщо кут *α* = 60°, а відстань *AB* = *BC*.

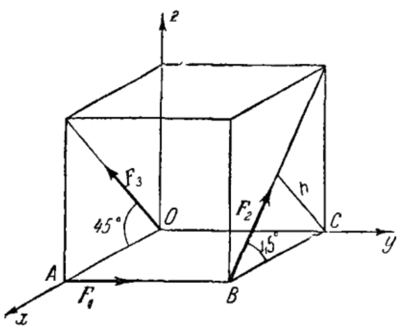


Відповідь: *F* = 4,0 Н.

До задачі 2.13.

2.14. Визначити моменти відносно координатних осей сили *F* = 100 Н, яка прикладена в точці *A* і спрямована по діагоналі бокової грані прямокутного паралелепіпеда. Довжина ребра, паралельного осі *x* дорівнює *a* = 20 см.
Відповідь: M_x = 0 Н·м, M_y = -17,3 Н·м, M_z = 10 Н·м.



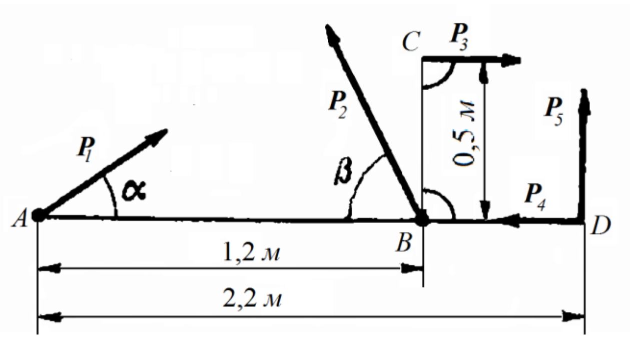


2.15. Визначити моменти відносно координатних осей системи сил F_1 = 10 Н, F_2 = 17 Н і F_3 = 17 Н, якщо сила F_1 лежить на ребрі куба, а сили F_2 і F_3 на діагоналях його бокових граней. Довжина ребра куба дорівнює *a* = 200 см.

До задачі 2.14.   До задачі 2.15.

Відповідь: M_x = 0 Н·м, M_y = -17,3 Н·м, M_z = 10 Н·м.

2.16. До точок *A, B, C* і *D* тіла прикладені п’ять сил: P_1 = 50 Н, P_2 = 80 Н, P_3 = 30 Н, P_4 = 25 Н, P_5 = 40 Н. Визначити моменти кожної з сил відносно точки *A*, якщо відомо, що *α* = 28°, *β* = 63°.



Відповідь: M_A (P_1) = 0 Н·м, M_A (P_2) = 85,5 Н·м, M_A (P_3) = -15 Н·м, M_A (P_4) = 0 Н·м, M_A (P_5) = 88 Н·м.

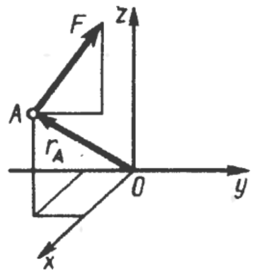
До задачі 2.16.

2.17. До точок *A, B, C* і *D* тіла прикладені п’ять сил: P_1 = 50 Н, P_2 = 80 Н, P_3 = 30 Н, P_4 = 25 Н, P_5 = 40 Н (рис. до задачі 2.16). Визначити моменти кожної з сил відносно точки *B*, якщо відомо, що α = 28°, β = 63°.
Відповідь: M_B (P_1) = -28,2 Н·м, M_B (P_2) = 0 Н·м, M_B (P_3) = -15 Н·м, M_B (P_4) = 0 Н·м, M_B (P_5) = 40 Н·м.

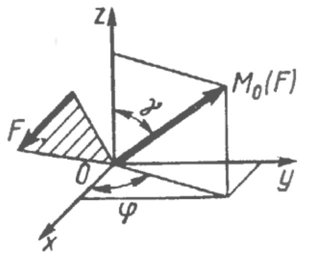
2.18. До точок *A, B, C* і *D* тіла прикладені п’ять сил: P_1 = 50 Н, P_2 = 80 Н, P_3 = 30 Н, P_4 = 25 Н, P_5 = 40 Н (рис. до задачі 2.16). Визначити моменти кожної з сил відносно точки *C*, якщо відомо, що *α* = 28°, *β* = 63°.
Відповідь: M_C (P_1) = - 6,05 Н·м, M_C (P_2) = - 18,2 Н·м, M_C (P_3) = 0 Н·м, M_C (P_4) = -12,5 Н·м, M_C (P_5) = 40 Н·м.

2.19. Сила $\boldsymbol{F} = 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ прикладена в точці A, причому радіус-вектор точки прикладення $\boldsymbol{r}_A = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$. Визначити момент цієї сили відносно осі Oz.

Відповідь: $M_z(\boldsymbol{F}) = 9$ Н·м.



До задачі 2.19.



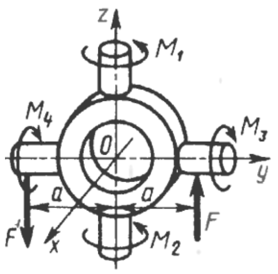
До задачі 2.20.

2.20. Момент сили $\boldsymbol{F}$ відносно точки O дорівнює $M_O(\boldsymbol{F}) = 100$ Н·м і розташований в просторі таким чином, що кути $\gamma = \varphi = 30°$. Визначити момент цієї сили відносно осі Oy.

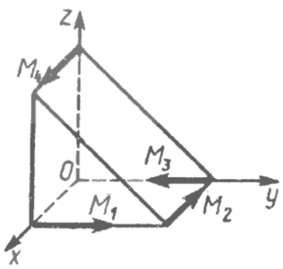
Відповідь: $M_z(\boldsymbol{F}) = 25$ Н·м.

2.21. Визначити модуль моменту $M_O(\boldsymbol{F})$ рівнодійної системи пар сил, якщо відстань $a = 5$ см, моменти пар сил $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 5$ Н·м, сили $F = F' = 100$ Н утворюють пару, яка діє в площині Oyz.

Відповідь: $M_z(\boldsymbol{R}) = 17{,}3$ Н·м.



До задачі 2.21.



До задачі 2.22.

2.22. Визначити модуль моменту $M_{зр}$ зрівноваженої пари для просторової системи чотирьох пар сил, якщо $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 20$ Н·м.

Відповідь: $M_{зр} = 0$ Н·м.

Глава 3. Довільна плоска система сил

3.1. Головний вектор і головний момент плоскої системи сил

Головний вектор плоскої системи сил – геометрична сума усіх сил системи:

$$\boldsymbol{F} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k. \tag{3.1}$$

Проекції головного вектора на осі декартової системи координат

$$F_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}; \qquad F_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}. \tag{3.2}$$

Модуль головного вектора визначається по формулі

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2}. \tag{3.3}$$

Кути між напрямом головного вектора і координатними осями знаходяться за допомогою напрямних косинусів

$$\cos(F, Ox) = \frac{F_x}{F}, \ \cos(F, Oy) = \frac{F_y}{F}. \tag{3.4}$$

Головний момент плоскої системи сил відносно центра *O* – алгебрична сума моментів усіх сил системи відносно того ж центр O:

$$M_o = \sum_{k=1}^{n} M_{ko}. \qquad (3.5)$$

3.2. Приведення плоскої системи сил

Теорема: якщо сили, довільно розташовані на площині, не зрівноважуються, то їх можна звести або до однієї сили (головного вектора), або до однієї пари сил.

Окремі випадки приведення сил, довільно розташованих на площині:

а) Якщо головний вектор і головний момент системи сил дорівнюють нулю, то сили взаємно зрівноважуються:

$$\boldsymbol{F} = 0 \text{ і } \boldsymbol{M_0} = 0.$$

б) Якщо головний вектор системи сил дорівнюють нулю, а головний момент не дорівнює нулю, то система сил приводиться до пари сил з моментом, який дорівнює головному моменту усіх сил системи відносно центра зведення *O*:

$$\boldsymbol{F} = 0 \text{ и } \boldsymbol{M_0} \neq 0.$$

в) Якщо тільки головний момент системи сил дорівнює нулю, то система приводиться до головного вектора $\boldsymbol{F}$, розташованого в точці приведення *O*:

$$\boldsymbol{F} \neq 0 \text{ и } \boldsymbol{M_0} = 0.$$

3.3. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

Теорема: для рівноваги будь-якої плоскої системи сил необхідно і достатньо, аби головний вектор цієї системи та її головний момент відносно будь-якого центру дорівнювали нулю:

$$\boldsymbol{F} = 0, \ \boldsymbol{M_0} = 0. \qquad (3.6)$$

Запишемо скалярні умови рівноваги плоскої системи сил, які витікають з (3.6).

1. Основна форма умов рівноваги.

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, аби суми проекцій усіх сил системи на кожну з координатних осей і сума їх моментів відносно будь-якого центру *O* в площині дії сил дорівнювали нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_0(F_k) = 0. \qquad (3.7)$$

2. Друга форма умов рівноваги.

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів усіх сил системи відносно яких-небудь двох центрів *A* і *B*, а також сума їх проекцій на одну з координатних осей, не перпендикулярну прямій *AB*, дорівнювали нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_A(F_k) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_B(F_k) = 0. \qquad (3.8)$$

3. Третя форма умов рівноваги.

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів усіх сил системи відносно будь-яких трьох центрів *A*, *B* і *C*, які не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(F_k) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_B(F_k) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_C(F_k) = 0. \qquad (3.9)$$

3.4. Плоска система розподілених сил

В інженерних розрахунках часто доводиться стикатися з плоскою системою розподілених сил (загальна класифікація розподілених сил наведена в пункті 1.1). Деякі найпростіші приклади таких сил наведено на рис. 3.4.

Інтенсивність – основна характеристика розподілених сил, характеризує значення сили, що приходиться на одиницю довжини навантаженого відрізка. Одиниця виміру інтенсивності – ньютон на метр (Н/м).

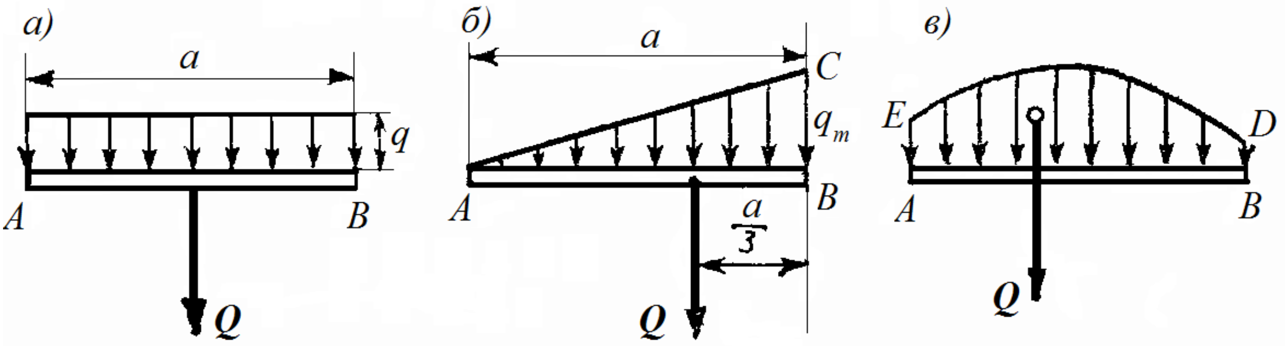


Рис. 3.4. Приклади лінійно розподілених сил.

Рівномірно розподілена – система сил, для якої інтенсивність q має постійне значення. Таку силу можна звести до рівнодійної Q, модуль якої визначається по формулі

$$Q = aq.$$

Рівнодійна Q прикладена в центрі відрізку AB (рис. 3.4, *а*).

Розподілена по лінійному закону – система сил, для якої інтенсивність q змінюється від мінімального до максимального значення. Таку силу також можна звести до рівнодійної Q, модуль якої визначається по формулі

$$Q = \frac{aq}{2}.$$

Рівнодійна Q прикладена в центрі тяжіння трикутника, тобто на відстані від основи, рівній 1/3 висоти трикутника (рис. 3.4, *б*).

Розподілена по довільному закону – система сил, для якої інтенсивність q змінюється якимось довільним чином. Таку систему теж можна звести до рівнодійної, прикладеної в центрі тяжіння фігури (рис. 3.4, *в*). Її модуль дорівнює площі фігури, виміряної в відповідному масштабі.

Питання для самоконтролю

1. До яких силових факторів може бути зведена довільна плоска система сил?
2. Скільки існує типів розподілених сил? Наведіть їх приклади.
3. Як визначити точку прикладення рівнодійної розподіленої системи сил, що змінюється по лінійному закону?

4. Скільки форм умов рівноваги може бути записано для довільної плоскої системи сил?
5. Яка одиниця виміру інтенсивності розподіленої по лінії сили?

Завдання № 3. «Довільна плоска система сил»

Рекомендації до розв'язання задач

1. Вибрати матеріальну систему, рівновага якої розглядається, нанести всі активні сили, звільнити систему від в'язів, замінивши їх реакціями.
2. При розв'язанні задач даної теми можна використовувати будь-яку з форм рівноваги системи (3.7) – (3.9).
3. Вибрати систему координат при використанні форм рівноваги (3.7) і (3.8). Напрям координатних осей *x* і *y* варто обрати таким чином, щоб вони були перпендикулярні максимально можливій кількості сил.
4. Доцільно складати рівняння системи таким чином, щоб кожне з них містило лише одну невідому, оскільки це зменшує обсяг розрахунків. Таку систему можна отримати при вдалому виборі осей координат і центра моментів.
5. В якості центра моментів рекомендується вибирати точку, в якій перетинаються лінії дії двох невідомих сил, тоді це рівняння буде містити лише одну невідому.
6. Якщо в системі діють розподілені сили, то необхідно привести їх до рівнодійної.
7. Визначення невідомих краще починати з рівняння моментів, а потім вже переходити до рівнянь проекцій. Це дасть змогу обійтись без сумісного розв'язання рівнянь і зменшить ймовірність похибки.

Приклад розв'язання задачі

Задача 1. Двоопорна балка *AB* довжиною l = 5 м і вагою P = 300 Н навантажена зосередженою силою F = 1 000 Н, прикладеною під кутом $\alpha = 30°$ і лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 2 кН/м. Визначити реакції в опорах балки, якщо її розміри a = 2 м, b = 3 м.

Розв'язання.

Замінимо в'язі їх реакціями. В шарнірно нерухомій опорі *A* виникає реакція $\boldsymbol{R}_A$, напрям якої наперед невідомий, тому розкладемо її на вертикальну *Y* і горизонтальну *X* складові. В шарнірно рухомій опорі *B* має місце лише вертикальна реакція $\boldsymbol{R}_B$. Напрями горизонтальних і вертикальних реакцій вибираємо довільно.

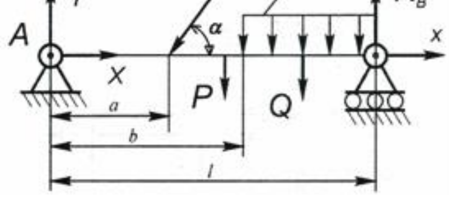


Рис. 3.4 До задачі 1.

На балку діє сила, розподілена по лінії, тому зведемо її до рівнодійної $\boldsymbol{Q}$, модуль якої дорівнює

$$Q = q(l - b) = 2(5 - 3) = 4\ (\hat{e}\acute{I}\ ).$$

Використаємо рівняння рівноваги системи в формі (3.7). Згідно рекомендацій 7 і 5 спершу запишемо рівняння моментів відносно точки *A*.

$$\sum_{i=1}^{4} M_A(F_i)=0;\; R_B l - Q\left(b+\frac{l-b}{2}\right) - P\frac{l}{2} - Fa\sin\alpha = 0.$$

$$5R_B = 4\left(3+\frac{5-3}{2}\right)+0{,}3\cdot\frac{5}{2}+1\cdot 2\cdot\sin 30^\circ = 17{,}75 \Rightarrow R_B = \frac{17{,}75}{5} = 3{,}55\ (кН).$$

При складанні рівнянь застосовувалось правило знаків, згідно якого моменти, дія яких направлена проти годинникової стрілки, вважаються додатними, а за нею – від'ємними.

Тепер записуємо проекції сил на координатні осі і знаходимо невідомі складові реакції в лівій опорі

$$\sum_{i=1}^{2} F_x = 0.\; X - F\cos\alpha = 0 \Rightarrow X = 1\cdot\cos 30^\circ = 0{,}87\ (кН).$$

$$\sum_{i=1}^{5} F_y = 0.\; Y - F\sin\alpha - P - Q + R_B = 0 \Rightarrow Y = 1\cdot\sin 30^\circ + 0{,}3 + 4 - 3{,}55 = 1{,}25\ (кН).$$

При складанні рівнянь додатними вважалися проекції, які співпадають з напрямом відповідної координатної осі. Оскільки всі реакції виявились додатними, то напрями реакцій на рисунку були обрані вірно.

Наостанок знайдемо повну реакцію в опорі A

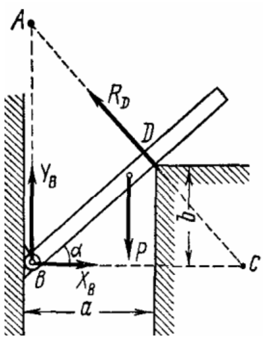
$$R_A = \sqrt{X^2+Y^2} = \sqrt{0{,}87^2+1{,}25^2} = 1{,}52\ (кН).$$

Задачу розв'язано.

Завдання № 3 до РГР

3.1. Однорідний стержень довжиною l = 50 см і вагою P = 40 Н прикріплений до стіни в точці B за допомогою шарніра, а в точці D спирається на кут іншої стіни. Знайти всі реакції в системі, якщо відомо, що точка D відстоїть від першої стіни на відстані a = 35 см і знаходиться на висоті b = 25 см над шарніром B.

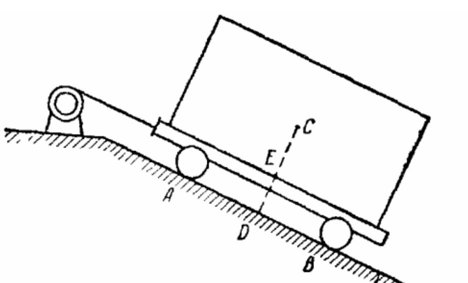
Відповідь: X_B = 13,5 Н; Y_B = 21,2 Н; R_D = 23,2 Н.



До задачі 3.1.

3.2. Вагонетка вагою G = 1 000 Н утримується на похилій площині з кутом нахилу α = 30° за допомогою канату, перекинутого через блок і паралельного даній площині. Визначити силу тиску коліс вагонетки на площину в точках A і B і натяг канату, якщо AD = DB = 0,75 м, CE = 0,3 м. Вага вагонетки прикладена в центрі тяжіння C.

Відповідь: T = 500 Н, N_A = 333 Н, N_B = 533 Н.

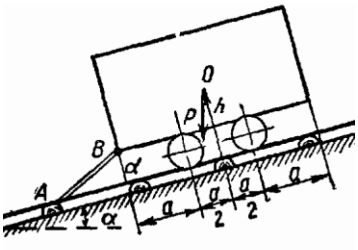


До задачі 3.2.

3.3. Автомобіль вагою P = 10 000 Н рухається рівномірно і прямолінійно угору по дорозі, яка утворює з горизонталлю кут α = 10°. Відстань від центра тяжіння автомобіля до дороги h = 75 см, відстані від осей передніх і задніх коліс до площини, яка

проходить через центр тяжіння перпендикулярно дорозі складають l_1 = 100 см і l_2 = 120 см. Визначити силу нормального тиску коліс автомобілю на дорогу.
Відповідь: N_1 = 4,78 (кН), N_1 = 5,07 (кН).

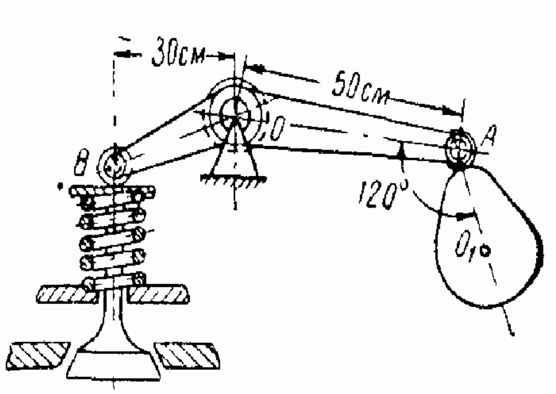
3.4. Упорна вилка *AB* шарнірно з’єднана з вагонеткою вагою *G* = 1 600 Н і волочиться за нею по шпалах, коли та рухається угору. У разі обриву канату вилка впирається у шпалу і зупиняє вагонетку. Знайти зусилля *S* у вилці і силу тиску коліс вагонетки на рейки, якщо канат обірвався. Відомі розміри: *AB* = 1 м, *h* = 40 см, *d* = 30 см, *a* = 56 см, кут нахилу дороги α = 15°, вагу вагонетки вважати прикладеною в точці *O*.
Відповідь: *S* = 435 Н, N_1 = 808 Н, N_2 = 607 Н.



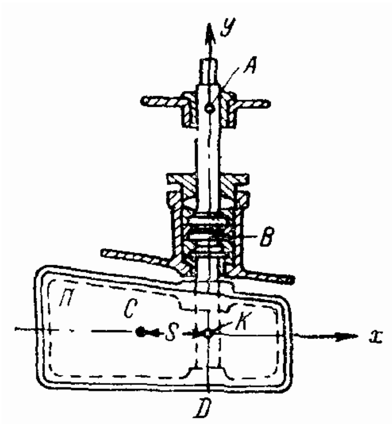
До задачі 3.4.

3.5. Клапан двигуна працює від кулачка за допомогою важеля *OAB*. Визначити силу тиску *Q* кулачка на ролик, якщо відомо, що на клапан діє загальне зусилля *F* = 400 Н. Вагою важеля знехтувати.
Відповідь: *Q* = 277 Н.

3.6. Кермо судна складається з балера *ABD* і пера *П*. Визначити реакції опорного *A* і упорного *B* підшипників в середньому положенні керма, якщо його вага 6 кН прикладена в точці *C* на відстані *s* = 40 см від осі, *AB* = 120 см.
Відповідь: X_A = 2 кН, X_B = - 2 кН, Y_B = 6 кН.



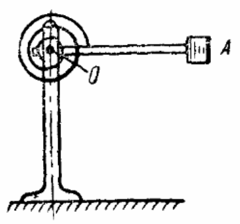
До задачі 3.5.



До задачі 3.6.

3.7. Віброграф (прилад для запису вертикальних коливань) складається із стержня *AB* ваги *P* і довжини *l* і вантажу *A* ваги *Q*, який утримується в горизонтальному положенні пружиною. При закручуванні пружини на 1 радіан в пружині виникає момент *c*. Визначити кут закручування пружини.

Відповідь: $\varphi = \dfrac{(2Q + P)l}{2c}$.

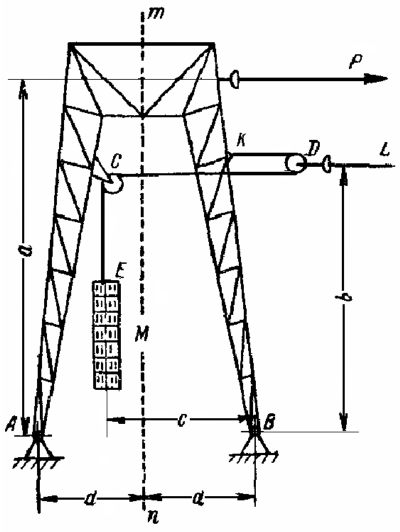


До задачі 3.7.

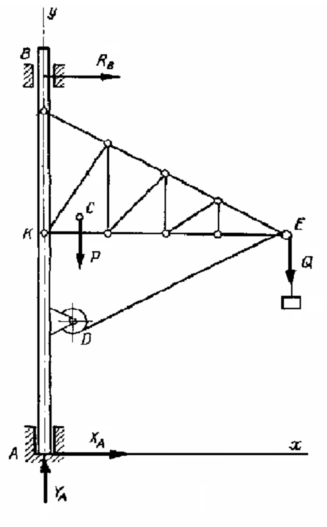
3.8. До твердого тіла в точці A з радіус-вектором $\boldsymbol{r}_A = 10\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$ м прикладена сила $\boldsymbol{F}_1 = -3\boldsymbol{j}$ Н. До цього ж тіла прикладена сила $F_2 = 4$ Н, спрямована по осі x в додатний бік. Привести обидві сили до початку координат і замінити дану систему головним вектором і головним моментом.
Відповідь: $F = 5$ Н і утворює з віссю x кут $\alpha = 36{,}9°$; $M_0 = -30$ Н·м.

3.9. Верхній дріт щогли електричної залізної дороги має натяг P, а нижній натягується за допомогою вантажу M і тросу $ECDK$, перекинутого через нерухомий блок C і рухомий блок D. Вага щогли G, вага вантажу Q, відстань між опорами $2b$, відстані від дротів до рівня опори і від опори B до вантажу CE вказано на рисунку. Визначити силу натягу нижнього дроту і вертикальну складову реакції в опорі A, якщо щогла симетрична відносно прямої m-n. Тертям і розмірами блоків знехтувати.
Відповідь: $T = 2Q,\ Y_A = \dfrac{Q(c-2b) + Gd - Pa}{2d}$.

3.10. Вертикальна вісь AB підйомного крану вагою $P = 12$ кН може вільно обертатися в підп'ятнику A і підшипнику B. Вантаж вагою $Q = 8{,}4$ кН підіймається за допомогою мотузки, яка перекинута через блок E і йде до лебідки D, закріпленої на осі крана. Визначити реакції підп'ятника A і підшипника B, вважаючи вагу крана прикладеною в точці C на відстані 0,9 м від осі обертання. Геометричні розміри $AB = 12$ м, $KE = 4$ м.
Відповідь: $X_A = 3{,}7$ кН, $Y_A = 20{,}4$ кН, $R_B = -3{,}7$ кН.

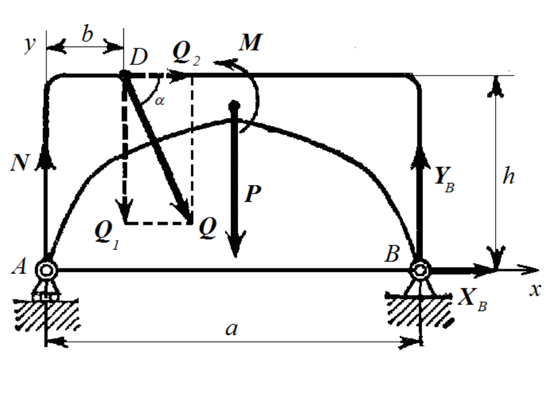


До задачі 3.9.



До задачі 3.10.

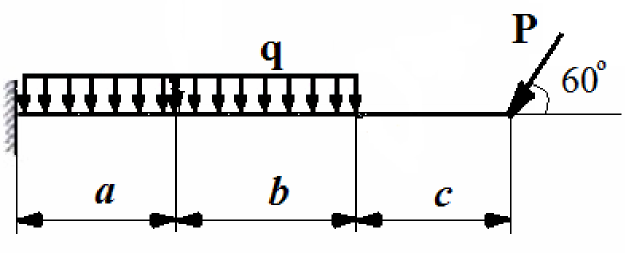
3.11. Симетрична арка вагою $P = 80$ кН (рис. 3.9) завантажена системою сил, яка зводиться до рівнодійної $Q = 40$ кН, прикладеної в точці D, і пари з моментом $M = 120$ кН·м. Визначити реакції в рухомій опорі A і шарнірно нерухомій опорі B, якщо $a = 10$ м, $b = 2$ м, $h = 3$ м, $\alpha = 60°$.
Відповідь: $N = 73{,}7$ кН, $X_B = -20$ кН, $Y_B = 40{,}9$ кН.



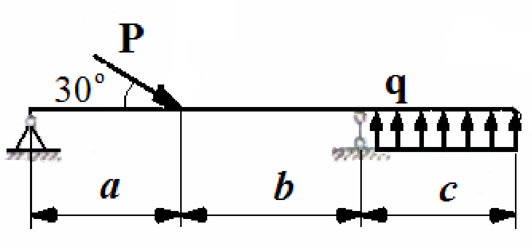
До задачі 3.11.

3.12. Визначити реакції в защемленні невагомої консольної балки, навантаженої зосередженою силою P = 3 кН, спрямованою під кутом α = 60° до горизонту, і лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 2 кН/м. Геометричні розміри балки a = 1 м, b = 1,5 м, с = 1 м.
Відповідь: X = 1,5 кН; Y = 7,6 кН; M = 15,3 кН·м.

3.13. Визначити реакції в опорах невагомої двоопорної балки з консольною частиною, яка навантажена зосередженою силою P = 2 кН, спрямованою під кутом α = 30° до горизонту, і лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 0,5 кН/м. Геометричні розміри балки a = 1 м, b = 1,5 м, с = 1 м.
Відповідь: X_A = -1,7 кН; Y_A = 0,8 кН; Y_B = - 0,3 кН.



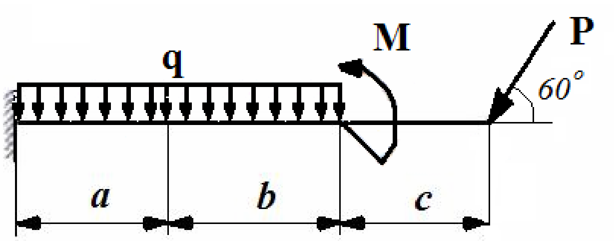
До задачі 3.12.



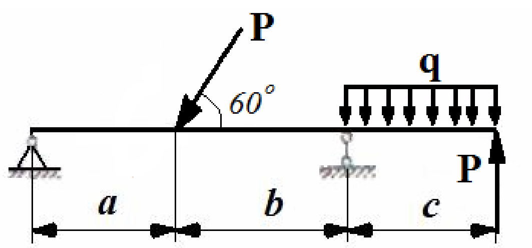
До задачі 3.13.

3.14. Визначити реакції в защемленні невагомої консольної балки, навантаженої зосередженою силою P = 1,2 кН, спрямованою під кутом α = 60° до горизонту, і лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 1,2 кН/м, яка також знаходиться під дією крутного моменту M = 1,2 кН·м. Геометричні розміри балки a = 0,2 м, b = 0,3 м, c = 0,2 м.
Відповідь: X = 0,6 кН; Y = 1,64 кН; M_A = - 0,32 кН·м.

3.15. Визначити реакції в опорах невагомої двоопорної балки з консольною частиною, яка навантажена зосередженою силою P = 2 кН, спрямованою під кутом α = 60° до горизонту, і лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 5 кН/м. Геометричні розміри балки a = 10 м, b = 15 м, с = 10 м.
Відповідь: X_A = 1 кН; Y_A = 6,4 кН; Y_B = 41,3 кН.



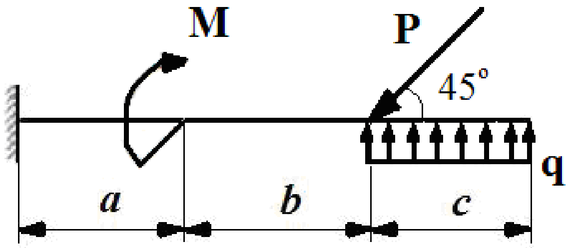
До задачі 3.14.



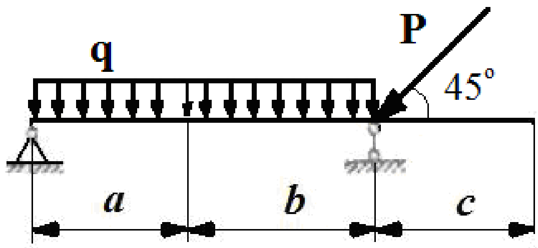
До задачі 3.15.

3.16. Визначити реакції в защемленні невагомої консольної балки, навантаженої зосередженою силою P = 2 кН, спрямованою під кутом 45° до горизонту, лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 0,5 кН/м і крутним моментом M = 1,2 кН·м. Геометричні розміри балки a = 2 м, b = 3 м, c = 2 м.
Відповідь: X = 1,42 кН; Y = 0,42 кН; M_A = -1,1 кН·м.

3.17. Визначити реакції в опорах невагомої двоопорної балки з консольною частиною, яка навантажена зосередженою силою P = 1,3 кН, спрямованою під кутом α = 45° до горизонту, і лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 0,5 кН/м. Геометричні розміри балки a = 1 м, b = 1,5 м, с = 1 м.
Відповідь: X_A = 0,92 кН; Y_A = 0,62 кН; Y_B = 1,55 кН.

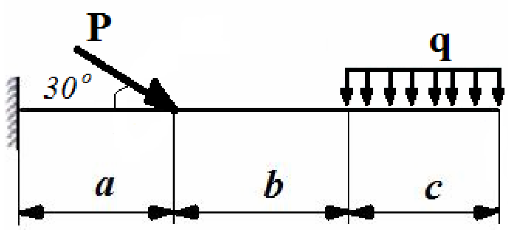


До задачі 3.16.

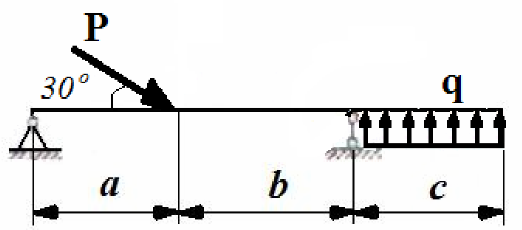


До задачі 3.17.

3.18. Визначити реакції в защемленні невагомої консольної балки, навантаженої зосередженою силою P = 4 кН, спрямованою під кутом α = 30° до горизонту, та лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 3 кН/м. Геометричні розміри балки a = 0,2 м, b = 0,3 м, c = 0,2 м.
Відповідь: X = - 3,46 кН; Y = 2,6 кН; M = 0,76 кН·м.



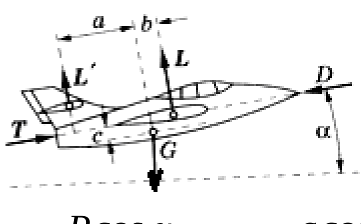
До задачі 3.18.



До задачі 3.19.

3.19. Визначити реакції в опорах невагомої двоопорної балки з консольною частиною, яка навантажена зосередженою силою P = 5 кН, спрямованою під кутом α = 30° до горизонту, і лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 5 кН/м. Геометричні розміри балки a = 5 м, b = 7,5 м, с = 5 м.
Відповідь: X_A = - 4,33 кН; Y_A = 6,5 кН; Y_B = - 29 кН.

3.20. Реактивний літак вагою P летить поступально і прямолінійно під кутом α до горизонту під дією постійної сили тяги T. Визначити відношення k повної підйомної сили літака, яка складається із підйомних сил крила L і стабілізатора L', до повного опору літака D, а також кожну з цих величин окремо, виразивши їх через задану вагу P і тягу T. Необхідні розміри вказано на рисунку.

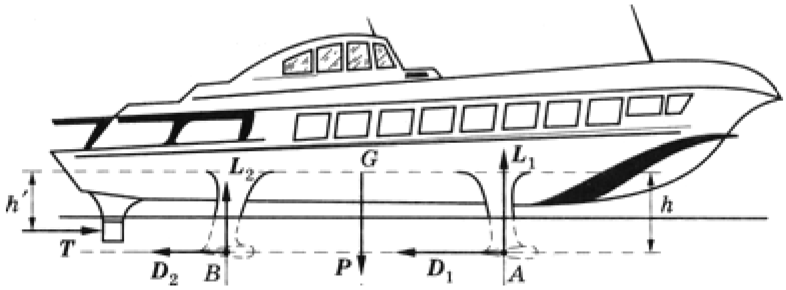


До задачі 3.20.

Відповідь:

$$k = \frac{P\cos\alpha}{T - P\sin\alpha}, \quad L = \frac{a\cos\alpha + c\sin\alpha}{a+b}P, \quad L' = \frac{b\cos\alpha - c\sin\alpha}{a+b}P.$$

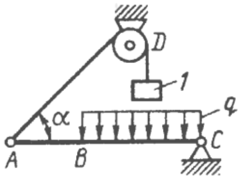
3.21. Катер на підводних крилах ваги P рухається поступально, рівномірно і прямолінійно, спираючись на крила з центрами в точках A і B, розташованих на відстані h від горизонталі. Знаючи, що сила гвинта дорівнює T, визначити підйомні сили передніх L_1 і задніх L_2 крил. Необхідні геометричні розміри вказано на рисунку.



До задачі 3.21.

Відповідь: $L_1 = \dfrac{1}{2}\left(P + T\dfrac{h - h'}{a}\right)$, $L_2 = \dfrac{1}{2}\left(P - T\dfrac{h - h'}{a}\right)$.

3.22. Балка AC закріплена в шарнірі C і утримується в горизонтальному положенні мотузкою AD, перекинутою через блок. Визначити інтенсивність розподіленого навантаження q, якщо BC = 5 м, AC = 8 м, α = 45°, а вага вантажу 1 P = 20 Н.



Відповідь: q = 9,05 Н/м.

До задачі 3.22.

Глава 4. Довільна просторова система сил

4.1. Головний вектор і головний момент просторової системи сил

Теорема про перенесення лінії дії сили: не змінюючи стану твердого тіла, прикладену до нього силу можна перенести в будь-яку точку цього тіла паралельно самій собі, додавши при цьому приєднану пару.

Доведення. Нехай до твердого тіла прикладена сила $\boldsymbol{F}$ у точці A (рис. 4.1). У довільній точці O цього ж тіла прикладемо зрівноважену систему сил ($\boldsymbol{F}'$, $\boldsymbol{F}''$), модулі яких дорівнюють силі $\boldsymbol{F}$, а лінії дії паралельні силі $\boldsymbol{F}$. Отримана система із трьох сил еквівалентна силі $\boldsymbol{F}$, в той же час сили $\boldsymbol{F}$ і $\boldsymbol{F}''$ утворюють пару. Тому сила $\boldsymbol{F}$ еквівалентна силі $\boldsymbol{F}'$, прикладеній в точці O і парі сил ($\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}''$) з моментом, що дорівнює моменту сили $\boldsymbol{F}$ відносно центра зведення O.

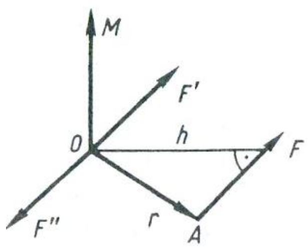


Рис. 4.1. Теорема про перенесення лінії дії сили.

Головний вектор системи сил – геометрична сума усіх сил системи:

$$\boldsymbol{F} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k. \tag{4.1}$$

Проекції головного вектора на осі декартової системи координат мають наступний вигляд

$$F_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}; \qquad F_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}; \quad F_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}; \tag{4.2}$$

Модуль головного вектора визначається по формулі

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}=\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}F_{kx}\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}F_{ky}\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}F_{kz}\right)^2}\,. \tag{4.3}$$

Кути між напрямом головного вектора і координатними осями знаходяться за допомогою напрямних косинусів

$$\cos(F,Ox)=\frac{F_x}{F},\ \cos(F,Oy)=\frac{F_y}{F},\ \cos(F,Oz)=\frac{F_z}{F}. \tag{4.4}$$

Головний момент системи сил відносно центра зведення *O* – геометрична сума моментів усіх сил системи відносно того ж центр *O*:

$$\boldsymbol{M}_o=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{M}_o(\boldsymbol{F}_k). \tag{4.5}$$

Проекції головного моменту на осі декартової системи координат мають наступний вигляд

$$\begin{aligned} M_{ox} &= \sum_{k=1}^{n}M_{ox}(F_k)=\sum_{k=1}^{n}\left(y_kF_{kz}-z_kF_{ky}\right);\\ M_{oy} &= \sum_{k=1}^{n}M_{oy}(F_k)=\sum_{k=1}^{n}\left(z_kF_{kx}-x_kF_{kz}\right);\\ M_{oz} &= \sum_{k=1}^{n}M_{oz}(F_k)=\sum_{k=1}^{n}\left(x_kF_{ky}-y_kF_{kx}\right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Модуль головного моменту визначається по формулі

$$M_o=\sqrt{M_{ox}^2+M_{oy}^2+M_{oz}^2}\,. \tag{4.7}$$

Кути між напрямом головного моменту і координатними осями

$$\cos(M_o,Ox)=\frac{M_{ox}}{M_o},\ \cos(M_o,Oy)=\frac{M_{oy}}{M_o},\ \cos(M_o,Oz)=\frac{M_{oz}}{M_o}. \tag{4.8}$$

4.2. Приведення довільної просторової системи сил

Теорема: якщо сили, довільно розташовані в просторі, не зрівноважуються, то їх можна звести до однієї з еквівалентних систем:

1. Головного вектора системи $\boldsymbol{F}$, прикладеного в довільно обраному центрі *O*, і приєднаної пари сил, момент $\boldsymbol{M}_0$ якої дорівнює головному моменту системи сил відносно центра зведення.
2. Двох мимобіжних сил, одна з яких прикладена в центрі зведення *O*, а інша у деякій довільній точці.

Окремі випадки приведення сил, довільно розташованих у просторі:

а) Якщо головний вектор системи сил дорівнюють нулю, а головний момент не дорівнює нулю,

$$\boldsymbol{F}=0 \text{ і } \boldsymbol{M}_0\neq 0,$$

то система приводиться до пари сил з моментом $\boldsymbol{M}_0$, який визначається за формулами (4.6) і (4.7).

б) Якщо тільки головний момент просторової системи сил дорівнює нулю

$$\boldsymbol{F}\neq 0 \text{ і } \boldsymbol{M}_0=0,$$

то сили приводяться до головного вектора $\boldsymbol{F}$, лінія дії якого проходить через точку зведення O, а величина визначається за формулами (4.2) і (4.3).

в) Якщо головний вектор і головний момент системи сил не дорівнюють нулю

$$\boldsymbol{F} \neq 0 \text{ і } \boldsymbol{M_0} \neq 0, \text{ але } \boldsymbol{F} \perp \boldsymbol{M_0},$$

то система приводиться до рівнодійної $\boldsymbol{F}$, яка не проходить через центр O і визначається за формулами (4.2) і (4.3). Даний випадок завжди має місце в довільній плоскій системі паралельних сил, для яких $\boldsymbol{F} \neq 0$.

г) Якщо головний вектор і головний момент системи сил не дорівнюють нулю

$$\boldsymbol{R} \neq 0 \text{ і } \boldsymbol{M_0} \neq 0, \text{ але } \boldsymbol{R} \parallel \boldsymbol{M_0},$$

то система приводиться до сукупності рівнодійної $\boldsymbol{R}$, і пари (P, P') яка лежить в площині, що перпендикулярна до сили (рис. 4.2). ака сукупність сили і пари зветься динамічним гвинтом, а лінія дії сили $\boldsymbol{R}$ – віссю гвинта.

Якщо одну з сил пари скласти з силою $\boldsymbol{F}$, то дану систему можна замінити двома мимобіжними силами $\boldsymbol{P}$ і $\boldsymbol{Q}$ (рис. 4.3), але звести систему до однієї сили або однієї пари неможливо.

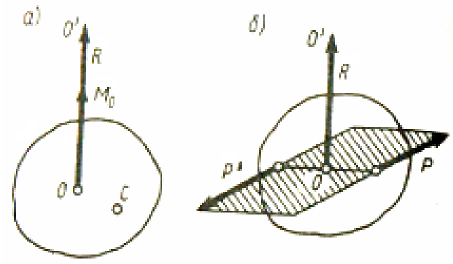


Рис. 4.2. Динамічний гвинт

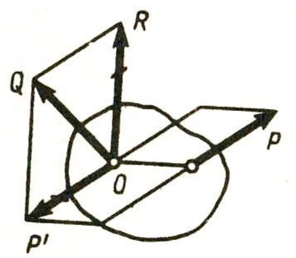


Рис. 4.3. Мимобіжні сили.

д) Якщо головний вектор і головний момент системи сил не дорівнюють нулю

$$\boldsymbol{F} \neq 0 \text{ і } \boldsymbol{M_0} \neq 0,$$

а вектори $\boldsymbol{F}$ і $\boldsymbol{M}_0$ не перпендикулярні і не паралельні, то така система сил теж приводиться к динамічному гвинту, але вісь гвинта вже не буде проходити через центр O.

4.3. Умови рівноваги довільної просторової системи сил

Теорема: для рівноваги будь-якої просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор цієї системи та її головний момент відносно довільного центру зведення дорівнювали нулю:

$$\boldsymbol{F} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k = 0, \qquad \boldsymbol{M}_o = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_o(\boldsymbol{F}_k) = 0. \tag{4.9}$$

Запишемо скалярні умови рівноваги просторової системи сил, що витікають з виразу (4.9):

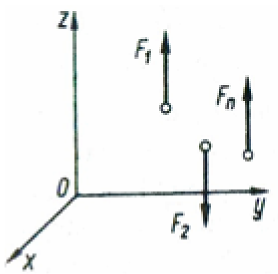
$$F_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad F_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad F_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0;$$
$$M_{ox} = \sum_{k=1}^{n} M_{ox}(F_k) = 0; \quad M_{oy} = \sum_{k=1}^{n} M_{oy}(F_k) = 0; \quad M_{oz} = \sum_{k=1}^{n} M_{oz}(F_k) = 0. \tag{4.10}$$

З (4.10) витікає, що для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, аби суми проекцій усіх сил на координатні осі та суми моментів цих сил відносно координатних осей дорівнювали нулю.

Окремі випадки рівноваги просторової системи сил:

1. *Рівновага просторової системи паралельних сил*.

Оскільки всі сили паралельні між собою, то напрямимо координатну вісь *Oz* паралельно цим силам (рис. 4.4). В такому випадку із шести умов рівноваги залишиться три:



$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{ox}(F_k) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{0y}(F_k) = 0. \quad (4.11)$$

Висновок: для рівноваги просторової системи паралельних сил необхідно і достатньо, аби алгебрична сума проекцій усіх сил на паралельну вісь дорівнювала нулю і алгебричні суми моментів цих сил відносно двох інших осей дорівнювали нулю.

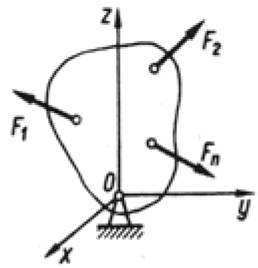
Рис. 4.4. Просторова система паралельних сил.

2. *Рівновага твердого тіла з однією нерухомою точкою*.

Нехай на тіло з нерухомою точкою *O* діє просторова система *n* сил (рис. 4.5). Візьмемо за центр зведення точку *O*, тоді головний вектор і головний момент системи знаходяться за формулами

$$\boldsymbol{F} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k, \quad \boldsymbol{M}_o = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_o(\boldsymbol{F}_k).$$

Але головний вектор системи зрівноважиться реакцією в нерухомій точці *O*, тому для рівноваги нулю має дорівнювати головний момент системи. У скалярному вигляді умови рівноваги системи з нерухомою точкою:



$$\sum_{k=1}^{n} M_{Ox}(F_k) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{Oy}(F_k) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(F_k) = 0. \quad (4.12)$$

Висновок: для рівноваги твердого тіла з однією нерухомою точкою необхідно і достатньо, аби алгебрична сума моментів відносно координатних осей з центром в точці *O* дорівнювала нулю.

Рис.4.5. Рівновага тіла з нерухомою точкою.

3. *Рівновага твердого тіла з двома нерухомими точками (віссю)*.

Нехай на тіло з нерухомими точками O_1 і O_2 діє просторова система *n* сил (рис. 4.6). За принципом звільнення від в’язів прикладемо в точках O_1 і O_2 невідомі реакції R_1 і R_2. Оскільки їх напрями невідомі, то реакції запишемо через їх проекції на координатні вісі. Умови рівноваги твердого тіла

$$\boldsymbol{F} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k = 0, \qquad \boldsymbol{M}_o = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_o(\boldsymbol{F}_k) = 0.$$

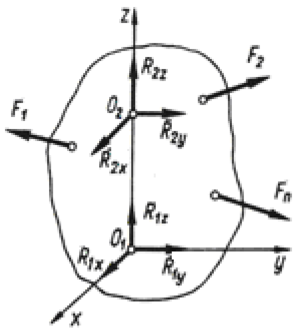
В скалярній формі умови рівноваги мають вигляд:

$$F_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} + R_{1x} + R_{2x} = 0; \quad F_y = \sum_{k=1}^{n} F_{iy} + R_{1y} + R_{2y} = 0;$$

$$F_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} + R_{1z} + R_{2z} = 0; \quad M_{ox} = \sum_{k=1}^{n} M_{ox}(F_k) - aR_{2y} = 0; \qquad (4.13)$$

$$M_{oy} = \sum_{k=1}^{n} M_{oy}(F_k) - aR_{2x} = 0; \; M_{oz} = \sum_{k=1}^{n} M_{oz}(F_k) = 0.$$

Лише в останнє рівняння не входять реакції в'язей, тому воно і є єдиною умовою рівноваги твердого тіла з двома нерухомими точками (нерухомою віссю).



Висновок: для рівноваги твердого тіла з двома нерухомими точками необхідно і достатньо, щоб алгебрична сума моментів активних сил відносно осі закріплення (обертання) дорівнювала нулю.

Рис.4.6. Рівновага тіла з нерухомою віссю.

Питання для самоконтролю

1. Яка різниця між поняттями головного вектора і рівнодійної?
2. Скільки незалежних рівнянь рівноваги можна записати для довільної просторової системи сил?
3. Що називається головним моментом системи сил відносно заданого центра?
4. Скільки незалежних рівнянь рівноваги можна записати для просторової системи паралельних сил?
5. Чи завжди довільну просторову систему сил можна привести до двох мимобіжних сил?
6. Як формулюється основна теорема статики?

Завдання № 4. «Довільна просторова система сил»

Рекомендації до розв'язання задач

1. Виділити об'єкт (матеріальну точку або тіло), рівновага якого буде розглядатися в задачі.
2. Зобразити активні сили, які діють на досліджуване тіло.
3. Звільнити систему від в'язей, замінивши їх дію реакціями.
4. Переконатися в тому, що система є статично визначеною, після чого вибрати систему координат, в якій визначення невідомих величин буде найпростіше.
5. Записати рівняння рівноваги (4.13) для системи, яка розглядається.
6. Розв'язати рівняння рівноваги, перевірити отримані результати.

Приклад розв'язання задачі

Задача 1. На горизонтальний вал в підшипниках *A* і *B* насаджений шків радіуса r_1 = 20 см і барабан радіуса r_2 = 20 см (рис. 4.7). Вал приводиться до руху за допомогою пасу, який накинуто на шків, при цьому рівномірно підіймається вантаж вагою P = 540 Н. Нехтуючи вагою барабану, вала і шківа, визначити реакції в підшипниках *A* і *B*, якщо відомо, що натяг ведучої вітки пасу T_1 у два рази більший від натягу T_2 веденої вітки. Розміри вала: a = 40 см, b = 60 см, α = 30°.

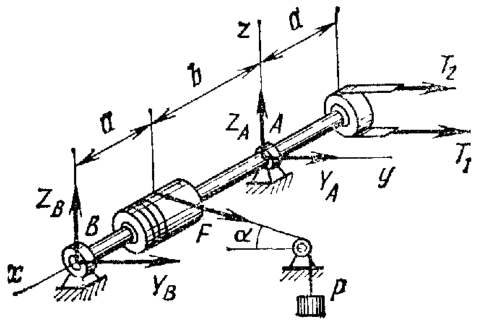


Рис. 4.7. До задачі 1.

Розв'язання.

Якщо вантаж рухається рівномірно, то вся система задовольняє умовам рівноваги (4.13). Ось x спрямуємо вздовж вала, оскільки більшість сил є перпендикулярними до нього. Далі визначимо реакції в підшипниках A і B. Оскільки вони не фіксують осьового зміщення вала, то в кожному з підшипників виникає по дві реакції, перпендикулярних до осі x.

Складаємо умови рівноваги системи, знаючи, що сила натягу нитки F дорівнює вазі вантажу P

$$\sum Y = 0.\ P\cos\alpha + T_1 + T_2 + Y_A + Y_B = 0,$$
$$\sum Z = 0.\ -P\sin\alpha + Z_A + Z_B = 0,$$
$$\sum M_x = 0.\ -r_2P + r_1T_1 - r_1T_2 = 0,$$
$$\sum M_y = 0.\ bP\sin\alpha - (a+b)Z_B = 0,$$
$$\sum M_z = 0.\ bP\cos\alpha - aT_1 - aT_2 + (a+b)Y_B = 0.$$

Знаючи, що $T_1 = 2T_2$, з третього рівняння знайдемо натяги пасів ременя

$$-r_2P + 2T_2r_1 - T_2r_1 = 0 \Rightarrow T_2r_1 = r_2P \Rightarrow T_2 = \frac{r_2P}{r_1} = \frac{15\cdot 540}{20} = 405\ (H).$$

$$T_1 = 2T_2 = 2\cdot 405 = 810\ (H).$$

Підставимо отримані результати в останнє рівняння і визначимо реакцію Y_B

$$Y_B = \frac{a(T_1+T_2) - bP\cos\alpha}{a+b} = \frac{40\cdot(405+810) - 60\cdot 540\cdot\cos 30^\circ}{40+60} = 205\ (H).$$

Горизонтальну реакцію Y_A знайдемо з першого рівняння, підставивши в нього щойно отримані значення

$$Y_A = -P\cos\alpha - T_1 - T_2 - Y_B = -540\cdot\cos 30^\circ - 810 - 405 - 205 = -1890\ (H).$$

Вертикальні реакції находимо послідовно розв'язавши четверте та друге рівняння

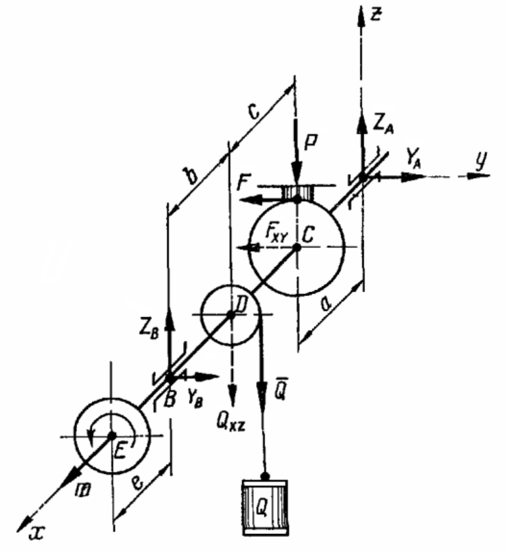
$$Z_B = \frac{bP\sin\alpha}{a+b} = \frac{60\cdot 540\cdot\sin 30^\circ}{40+60} = 108\ (H);$$

$$Z_A = P\sin\alpha - Z_B = 540\cdot\sin 30^\circ - 108 = 162\ (H).$$

Задачу розв'язано.

Завдання № 4 до РГР

4.1. Вантаж Q = 800 Н опускається з постійною швидкістю на канаті, який навернутий на барабан радіуса r_D = 10 см. На цьому ж валу знаходиться колесо E і гальмівний шків C радіуса r_C = 25 см. До колеса E прикладена пара сил з

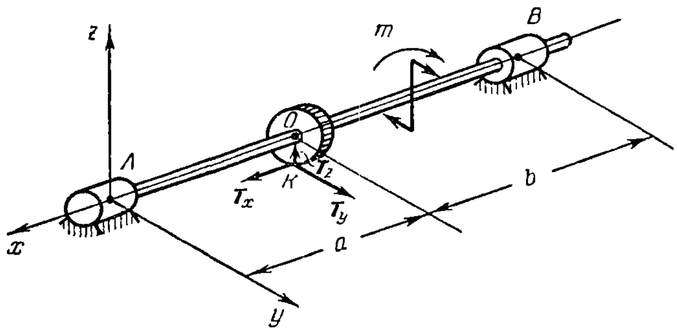


моментом m = 40 Н·м, яка пригальмовує обертання вала. Оскільки пара сил не забезпечує рівномірного руху, то додаткове гальмування системи відбувається за допомогою колодкового гальма, яке притискається силою P до шківу C. Визначити величину цієї сили та реакції в підшипниках A і B, якщо сила, що діє між гальмом і шківом F = 0,5P. Розміри вала: a = 45 см, b = 50 см, c = 35 см, e = 30 см.

Відповідь: Y_A = 104,6 Н; Z_A = 516,9 Н; Y_B = 55,4 Н; Z_B = 603 Н; P = 320 Н.

Рис. до задачі 4.1.

4.2. Косозуба шестірня радіуса r = 10 см знаходиться на валу, закріпленому в упорному підшипнику A (шарнірно нерухома опора) і радіальному підшипнику B (шарнірно рухома опора). До точки K шестерні з боку іншого колеса діє сила T, проекції якої на координатні осі T_x = 30 Н, T_y = 280 Н, T_z = 120 Н. До вала, який обертається рівномірно, прикладена пара сил з моментом m відносно осі x.

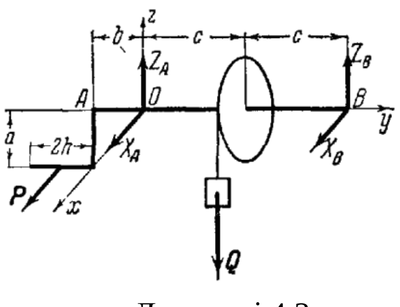


Нехтуючи вагою вала і шестерні, визначити реакції в підшипниках A і B, а також момент пари m, якщо a = 0,5 м; b = 1 м.

До задачі 4.2.

Відповідь: m = 28 Н·м; R_{Ax} = - 30 Н; R_{Ay} = - 186,7 Н; R_{Az} = - 82 Н; R_{By} = - 93,3 Н; R_{Bz} = - 38 Н.

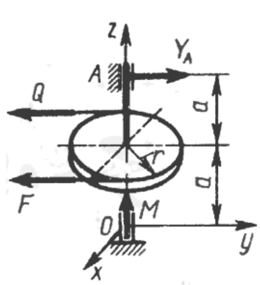
4.3. Вал підйомного механізму і його рукоятка розташовані в одній вертикальній площині. Вантаж вагою Q = 250 Н, підвішений на шківі, врівноважується силою P, прикладеною перпендикулярно до рукоятки механізму. Нехтуючи вагою вала і шківа, знайти величину сили P, якщо радіус шківа R = 15 см, геометричні розміри: a = 15 см, b = 10 см, c = 25 см, h = 12 см.



Відповідь: P = 250 Н; X_A = - 360 Н; Z_A = 125 Н; X_B = 110 Н; Z_B = 125 Н.

До задачі 4.3.

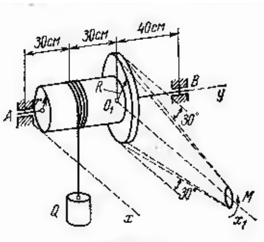
4.4. Сила F = 2Q = 120 Н, прикладена до шківу, зрівноважена парою сил з моментом M = 18 Н·м. Скласти рівняння моментів сил відносно осі Ox і визначити реакцію Y_A в підшипнику A, якщо радіус шківа r = 0,3 м, a = 0,3 м, сили F і Q паралельні до осі Oy.



Відповідь: Y_A = 90 Н.

До задачі 4.4.

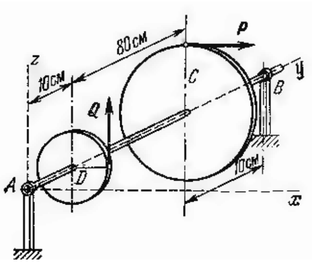
4.5. Вантаж вагою Q = 10 кН рівномірно підіймається двигуном M за допомогою нескінченого ланцюга. Визначити реакції опор A і B, а також натяг в ланцюгу, якщо гілки ланцюга нахилені до горизонту під кутом 30°. Відомо, що r = 10 см, R = 20 см, натяг веденої гілки T_2 в двічі менший натягу ведучої T_1.



Відповідь: T_1 = 10 кН; T_2 = 5 кН; X_A = - 5,2 кН; Z_A = 6 кН; X_B = -7,8 кН; Z_B = 1,5 кН.

До задачі 4.5.

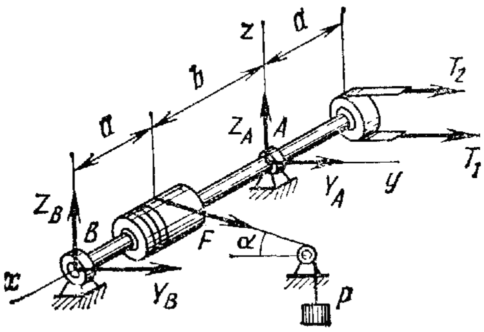
4.6. На горизонтальному валу AB знаходиться колесо C радіуса R = 1 м і шестірня D радіуса r = 10 см. До колеса прикладена горизонтальна сила P = 100 Н, а на шестірню дія вертикальна сила Q. Визначити силу Q і реакцію в підшипниках, якщо відомо, що система знаходиться в стані рівноваги.



Відповідь: Q = 1 000 Н; X_A = - 10 Н; Z_A = -900 Н; X_B = - 90 Н; Z_B = - 100 Н.

До задачі 4.6.

4.7. На горизонтальному валу, закріпленому в підшипниках A і B, знаходяться шків радіуса r_1 = 20 см і барабан радіуса r_2 = 15 см. Вал приводиться до обертання пасом, накинутим на шків, при цьому рівномірно підіймається вантаж вагою P = 540 Н.

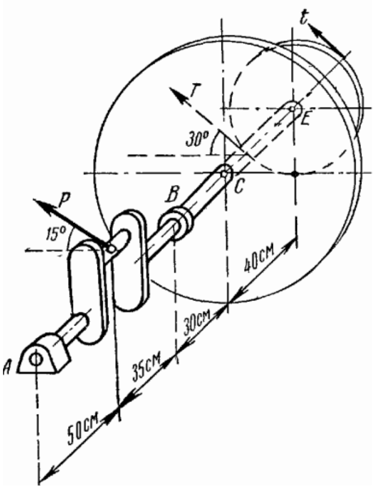


До задачі 4.7.

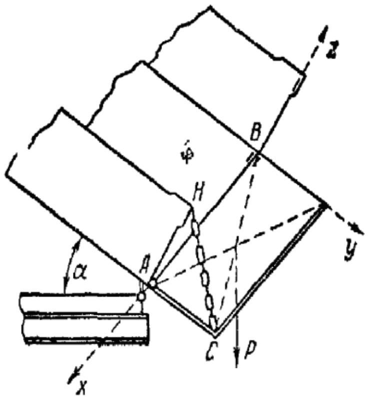
Нехтуючи вагою вала, барабана і шківа, визначити реакції в підшипниках A і B та натяг T_1 ведучої ланки ременя, якщо відомо, що він вдвічі більший за натяг веденої ланки T_2. Геометричні розміри вала: a = 40 см, b = 60 см, α = 30°.
Відповідь: T_1 = 810 Н; Y_A = - 1890 Н; Z_A = 108 Н; Y_B = 205 Н; Z_B = 162 Н.

4.8. При вертикальному положенні середньої площини коліна вала сила тиску на середину його шийки збоку шатуна дорівнює P = 12 кН і направлена в перпендикулярній до осі площині під кутом α = 15° до горизонту. В точці C на осі вала закріплений маховик вагою G =12 кН, а в точці E – шків діаметром D = 80 см з пасом, який передає крутний момент на вал робочої машини. Гілки паса лежать в площині шківа і утворюють кут β = 30° з горизонтом. Натяг T_1 ведучої гілки ременя вдвічі більший за натяг веденої гілки T_2, а відстань від осі вала до осі шейки коліна r = 15 см. Визначити натяги ведучої T_1 і веденої T_2 гілок паса і реакції в підшипниках, якщо відомо, що вал обертається рівномірно. Вагу вала і шківа до уваги не брати.
Відповідь: T_1 = 8,7 кН; T_2 = 4,3 кН; Y_A = - 4,5 кН; Z_A = -0,2 кН; Y_B = 27,4 кН; Z_B = 2,5 кН.

4.9. Кузов автомобіля-самоскида утримується під кутом α = 30° до горизонту. Задній борт кузова утримується за допомогою ланцюга *CH* таким чином, що борт і дно кузова лежать в одній площині. Визначити реакції шарнірів *A* і *B*, а також натяг *T* ланцюга *CH*, якщо вага борта *P* = 600 Н, *AH* = *AC*.
Відповідь: T = 368 Н; Y_A = 110 Н; Z_A = 0 Н; Y_B = -150 Н; Z_B = 260 Н.



До задачі 4.8.

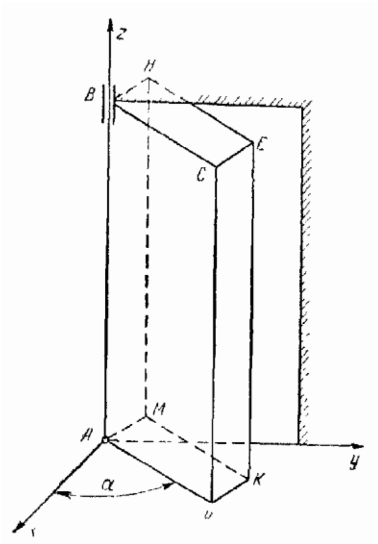


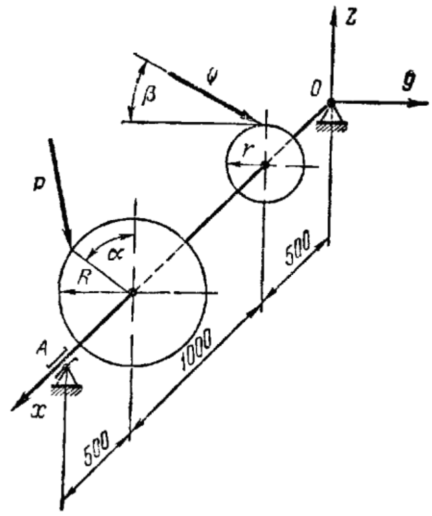
До задачі 4.9.

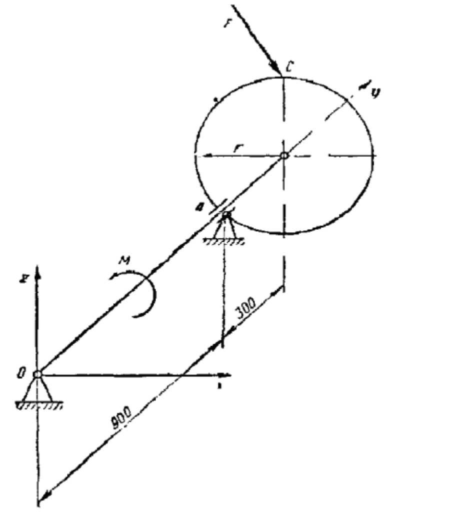
4.10. Для захисту від радіації споруджаються товстостінні приміщення. Двері такого приміщення являють собою прямокутний залізобетонний паралелепіпед *ABCDKEHM* вагою *P* = 8 кН. Визначити реакції підп’ятника *A* і підшипника *B*, якщо двері відчинені так, що утворюють кут α = 60° з віссю *x*. Товщина двері *a*, її ширина $b = 3a$, висота $h = 5a$.
Відповідь: X_A = 504 Н; Y_A = 2 480 Н; Z_A = 8 000 Н; X_B = - 504 Н; Y_B = - 2 480 Н.

4.11. Визначити реакції в радіально-упорному підшипнику *O* і радіальному підшипнику *A*, а також силу тиску *Q* на колеса на прямозубу циліндричну шестерню, якщо β = 30°, величина сили тиску колеса на конічну шестерню дорівнює *P* = 1 000 Н, ця сила утворює кут 60° з віссю *Ox* і кут 225° з віссю *Oz*. Геометричні розміри: R = 20 см, r = 10 см, α = 60°, вагу деталей до уваги не брати.
Відповідь: Q = 835 Н, X_O = - 500 Н; Y_O = - 623 Н; Z_O = 464 Н; Y_A = - 600 Н; Z_A = 660 Н.

4.12. Визначити реакції в радіально-упорному підшипнику *O* та радіальному підшипнику *A* і величину моменту *M* пари, прикладеної до валу, якщо сила тиску зубців колеса на косозубу шестерню прикладена в точці *C* і дорівнює *P* = 1 000 Н. Ця сила утворює кут 60° з віссю *Ox* і кут 240° з віссю *Oz*. Радіус шестерні r = 15 см, вагу деталей до уваги не брати.
Відповідь: M = 75 Н·м, X_O = 167 Н; Y_O = - 707 Н; Z_O = - 285 Н; X_A = - 667 Н; Z_A = 785 Н.



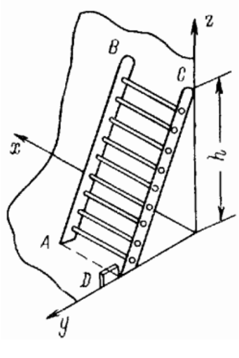


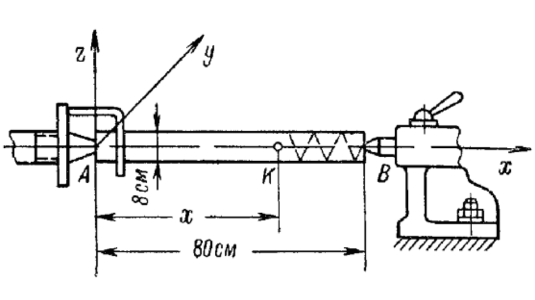


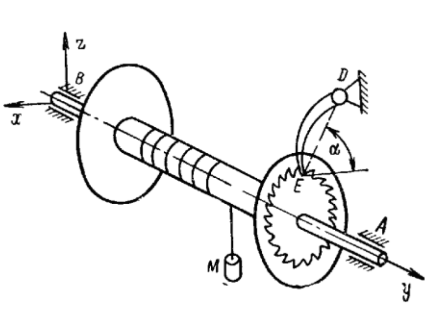
До задачі 4.10. До задачі 4.11. До задачі 4.12.

4.13. Драбина спирається на гладку стіну на висоті h = 2,5 м, а кінцем D впирається у виступ, який знаходиться на гладкому полу на відстані a = 1,5 м від стіни. Визначити реакції в точках A, B, C і D, якщо вага драбини P = 45 Н прикладена в її центрі.
Відповідь: Z_A = 22,5 Н; Y_B = 0 Н; Y_C = 13,5 Н; Y_D = - 13,5 Н; Z_D = 22,5 Н.

4.14. На токарному верстаті обробляється деталь вагою G = 400 Н. Визначити момент, який має бути прикладений до деталі для утримання її в стані рівноваги, якщо з боку різця в точці K на неї діє сила F, яка має наступні проекції на координатні осі: F_x = - 3 кН, F_y = 2,4 кН, F_z = 12 кН. Нехтуючи тертям, також визначити реакції в точках A і B як функцію координати різця x, яка визначається відносно точки A.
Відповідь: M = 480 Н·м, X_A = 3 кН; Y_A = (30x – 2 550) Н; Z_A = (-11,8 + 0,15x) кН; X_B = 0 кН; Y_B = (150 – 30x) Н; Z_B = (200 – 150x) Н.





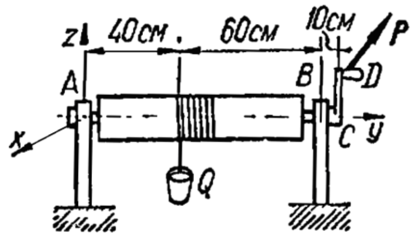


До задачі 4.13. До задачі 4.14. До задачі 4.15.

4.15. Храпове колесо радіусом r = 10 см і барабан лебідки радіусом R = 20 см і вагою 2 кН знаходяться на спільному валу AB довжиною 80 см. На барабан намотана мотузка, яка несе вантаж M вагою G = 3 кН. Визначити реакції в підшипниках A і B та зусилля в стопорній собачці ED, яка утворює з

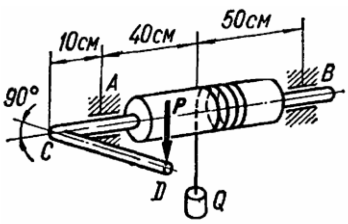
горизонтом кут $\alpha = 60°$, якщо звисаюча частина мотузки ділить барабан навпіл. Краї барабана знаходяться на відстані 10 см від підшипників. Вагою собачки, храпового колеса і мотузки, а також відстанню між колесом і барабаном знехтувати.
Відповідь: S_{ED} = 3 кН, X_A = - 1,3 кН; Z_A = 4,8 кН; X_B = - 0,19 кН; Z_B = 2,8 кН.

4.16. Із криниці за допомогою ворота рівномірно підіймають вантаж вагою Q = 90 Н. Нехтуючи вагою ворота визначити силу тиску на підшипники A і B та силу P, яку необхідно прикласти перпендикулярно до рукояті CD, довжиною 54 см в її вертикальному положенні. Радіус барабана r = 12 см.



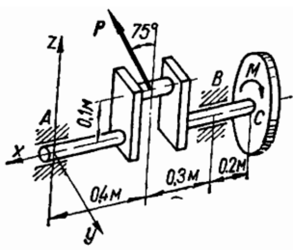
Відповідь: P = 20 Н, X_A = 2 Н; Z_A = - 54 Н; X_B = - 22 Н; Z_B = - 36 Н.
До задачі 4.16.

4.17. За допомогою ворота рівномірно підіймають вантаж вагою Q = 1 000 Н. Нехтуючи вагою ворота визначити повні реакції в підшипниках A і B та величину сили P, яку необхідно прикласти перпендикулярно до рукояті CD, довжиною 50 см при її горизонтальному положенні. Радіус вала r = 11 см.



Відповідь: P = 220 Н, R_A = 800 Н; R_B = 420 Н.
До задачі 4.17.

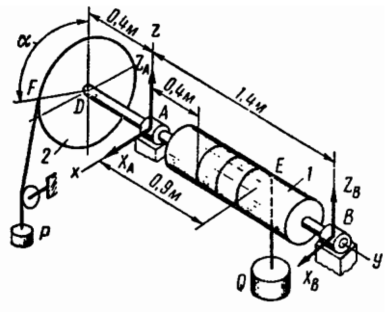
4.18. Шатун давить на колінчастий вал з силою P = 12 кН, перпендикулярною до шийки вала і спрямованою під кутом $\alpha = 75°$ до вертикалі. Нехтуючи вагою вала, визначити складові реакцій в підшипниках A і B, а також момент пари сил M, яку необхідно прикласти до маховика C вагою Q = 4,2 кН, аби вал знаходився в стані рівноваги.



До задачі 4.18.

Відповідь: M = 1,16 кН·м, Y_A = 4,97 кН; Z_A = - 2,53 кН; Y_B = 6,63 кН; Z_B = 3,62 кН.

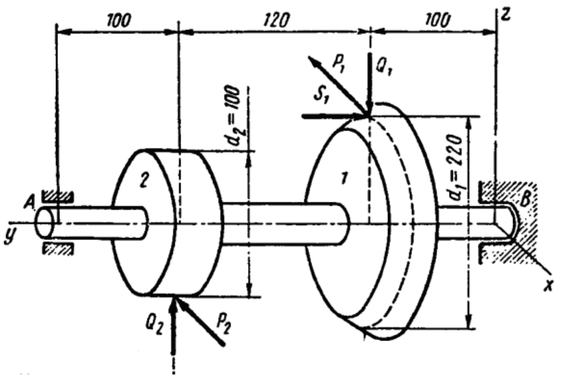
4.19. На вал 1 ворота намотана мотузка, яка утримує вантаж вагою Q. До обода колеса 2, радіус якого вчетверо більший від радіуса вала, прикріплена мотузка, яка натягується вантажем з силою P = 80 Н та сходить з колеса в точці F по дотичній так, що радіус DF колеса утворює з вертикаллю кут $\alpha = 60°$. Визначити величину вантажу Q, за якої система буде знаходитись у стані рівноваги, а також реакції в підшипниках A і B, якщо вага вала G = 600 Н прикладена в точці C, причому AC = 40 см.



До задачі 4.19.

Відповідь: M = 1,16 кН·м, Y_A = 4,97 кН; Z_A = - 2,53 кН; Y_B = 6,63 кН; Z_B = 3,62 кН.

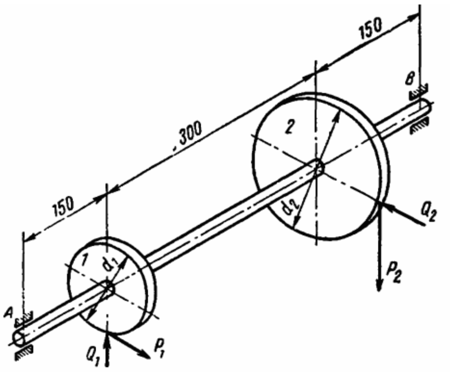
4.20. На валу редуктора жорстко закріплені два зубчасті колеса – конічне 1 і циліндричне 2. Опорами вала є підшипники, причому лівий сприймає лише радіальне навантаження, а правий – радіальне і осьове. На колесо 1 діють три сили: дотична P_1 = 4 кН, радіальна Q_1 = 1,28 кН і осьова S_1 = 0,48 кН. Визначити реакції опор A і B, а також сили P_2, Q_2 = 0,36P_2, які прикладені до колеса 2, якщо відомо, що система знаходиться в стані рівноваги. Вагою вала і колес знехтувати, необхідні розміри взяти з рисунку.



Відповідь: P_2 = 8,8 кН; Q_2 = 3,17 кН; X_A = 7,3 кН; Z_A = - 1,95 кН; X_B = 5,5 кН; Y_B = 0,48 кН; Z_B = 0,05 кН.

До задачі 4.20.

4.21. На горизонтальному валу, встановленому в підшипниках, жорстко закріплені два зубчасті колеса діаметрами d_1 = 300 мм і d_2 = 450 мм. На колесо 1 діють дві сили: дотична P_1 = 1 800 Н, радіальна Q_1 = 0,364P_1 Н. Визначити реакції опор A і B, а також сили P_2 і Q_2 = 0,364P_2, прикладені до колеса 2, якщо відомо, що система знаходиться в стані рівноваги. Вагою вала і колес знехтувати, необхідні розміри взяти з рисунку.



Відповідь: P_2 = 1 200 Н; Q_2 = 437 Н; X_A = - 1 867 Н; Z_A = - 191 Н; X_B = 104 Н; Z_B = 736 Н.

До задачі 4.21.

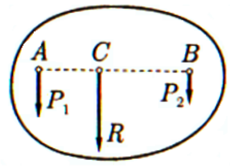
Глава 5. Центр паралельних сил і центр мас

5.1. Паралельні сили на площині

Рівнодійна двох паралельних сил P_1 і P_2 одного напряму (рис. 5.1) має такий же напрям, а її модуль дорівнює алгебричній сумі модулів доданків:

$$R = P_1 + P_2.$$

Точка прикладення рівнодійної C визначається за пропорцією. Вона завжди знаходиться між точками A і B і ділить відрізок AB на частини, обернено пропорційні до модулів сил:



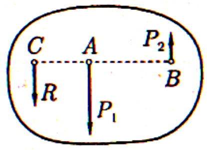
$$\frac{AC}{BC} = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow P_1 \cdot AC = P_2 \cdot BC.$$

Рис. 5.1. Складання паралельних сил одного напрямку.

Рівнодійна двох паралельних сил P_1 і P_2 протилежного напряму (рис. 5.2) має напрям більшої сили, а її модуль дорівнює:

$$R = P_1 - P_2.$$

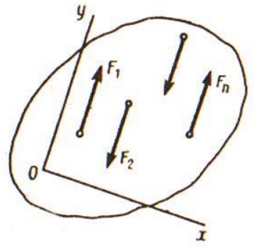
Точка прикладення рівнодійної C лежить на продовженні відрізку AB за точкою прикладення більшої сили, на відстанях від точок A і B, обернено пропорційних до модулів прикладених до них сил:



$$\frac{AC}{BC} = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow P_1 \cdot AC = P_2 \cdot BC.$$

Рис. 5.2. Складання сил протилежного напрямку.

У разі, коли усі діючі на тіло сили паралельні, зручно спрямувати вісь Ox перпендикулярно силам, а вісь Oy паралельно до них (рис. 5.3). В цьому випадку проекція кожної з сил на вісь Ox дорівнюватиме нулю, а умови рівноваги набирають вигляду:



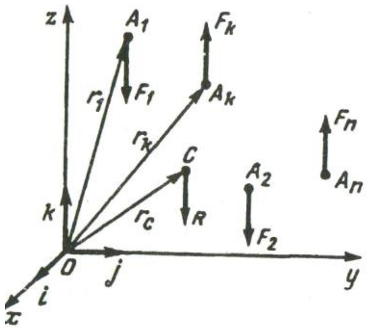
$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_0(F_i) = 0. \tag{5.1}$$

Рис. 5.3. Умови рівноваги системи паралельних сил.

Друга форма умов рівноваги у випадку паралельних сил має вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(F_i) = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} M_B(F_i) = 0, \tag{5.2}$$

причому пряма AB не повинна бути паралельна силам.



5.2. Центр паралельних сил

Нехай ми маємо систему із n паралельних сил (рис. 5.4), яка приводиться до рівнодійної R

$$R = \sum_{i=1}^{n} F_i,$$

що прикладена в точці C.

Рис. 5.4. Центр паралельних сил.

Центр паралельних сил – точка C прикладення рівнодійної системи.

Визначимо метод знаходження центру паралельних сил. Спрямуємо вісь z паралельно силам, а в точку прикладання кожної із сил із початку координат O проведемо радіус-вектори. Також проведемо радіус-вектор і до центра паралельних сил. Згідно теореми Варіньона

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{R}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i) \Rightarrow \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i).$$

Оскільки усі сили спрямовані вздовж осі z, то можна записати

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{k}R; \qquad \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{k}F_i \Rightarrow \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{k}R = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{k}F_i) = \sum_{i=1}^{n} (F_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{k}).$$

Виносимо одиничний вектор за знак суми і остаточно отримуємо для радіус-вектора центра паралельних сил

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \boldsymbol{r}_i}{R}. \qquad (5.3)$$

В проекціях на координатні осі отримуємо

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}. \qquad (5.4)$$

5.3. Центр мас твердого тіла

На кожну частину тіла поблизу поверхні Землі діє сила тяжіння, спрямована вертикально вниз. Якщо розміри тіла значно менше радіуса Землі, то сили, що діють на окремі частини тіла, можна вважати паралельними і такими, що зберігають свою величину при повороті тіла на будь-який кут.

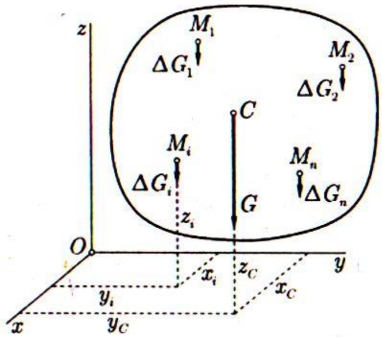


Рис. 5.5. Визначення центра мас твердого тіла.

Центр мас твердого тіла - точка твердого тіла, через яку проходить лінія дії рівнодійної сил тяжіння, що діють на окремі частини тіла. Положення центра мас не змінюється і не залежить від положення тіла в просторі. У цьому випадку координати центра мас твердого тіла можна знайти, як координати центру паралельних сил

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta G_i}{G}, \; y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta G_i}{G}, \; z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta G_i}{G}, \qquad (5.5)$$

де ΔG_i - вага окремих елементарних часток, i - кількість часток.

По формулі (5.5) також можна знайти центр мас, якщо розбити його не на елементарні частини, а на окремі частини розміру G_i, координати центрів мас яких відомі. Згідно визначення, центр мас – геометрична точка, яка може лежати і за межами даного тіла (наприклад, у кільця).

5.4. Центри мас однорідних тіл

Для однорідних тіл вага ΔP_i кожної елементарної частинки тіла M_i

$$\Delta P_i = \omega V_i,$$

де ω – вага одиниці об’єму тіла, V_i – об’єм даної елементарної частинки тіла. Тоді для ваги усього однорідного твердого тіла маємо

$$P = \omega V.$$

Тоді координати центра мас однорідного твердого тіла

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i P_i}{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \omega V_i}{\omega V} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i V_i}{V}, \; y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i P_i}{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \omega V_i}{\omega V} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i V_i}{V},$$
$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i P_i}{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \omega V_i}{\omega V} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i V_i}{V}. \qquad (5.6)$$

де сума знаходиться за всіма елементарними частинками.

У випадку плоскої однорідної фігури (рис. 5.6) формули (5.6) набувають вигляду

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i P_i}{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \omega V_i}{\omega V} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i V_i}{V}, \; y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i P_i}{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \omega V_i}{\omega V} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i V_i}{V}. \qquad (5.7)$$

де F_i – площа поверхні елементарної частинки тіла, F – площа усього тіла.

Статичний момент площі плоскої фігури відносно осі – сума добутків елементарних площ, що входять до складу фігури, на алгебричні значення їх відстаней до цієї осі

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta F_i = F y_C, \; S_y = \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta F_i = F x_C.$$

Одиниця виміру статичного моменту площі плоскої фігури відносно осі – см^3.

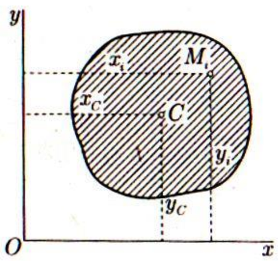


Рис. 5.6. Визначення центру ваги плоскої фігури.

Якщо відомі статичні моменти площі плоскої фігури відносно координатних осей, то координати центру ваги визначають по формулах

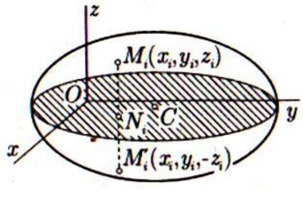
$$x_c = \frac{S_y}{F}, \; y_c = \frac{S_x}{F}.$$

Статичний момент плоскої фігури відносно осі, яка проходить через її центр мас, дорівнює нулю.

Висновок: положення центра мас однорідного тіла залежить лише від його геометричної форми і не залежить від матеріалу.

5.5. Способи визначення центрів мас

5.5.1. *Симетрія*.



Теорема: якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то його центр мас лежить відповідно в площині, на осі або в центрі симетрії.

Рис. 5.7. Визначення центрів мас симетричних тіл.

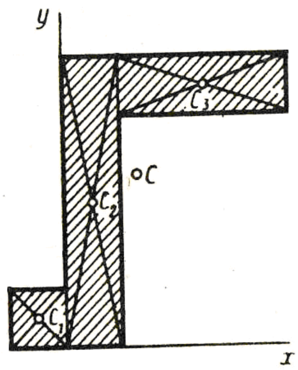
Розглянемо в якості приклада тіло, яке має площину симетрії. Помістимо площину xOy в площині симетрії однорідного тіла (рис. 5.7). Виділимо в цьому тілі дві точки M_i і M'_i, симетричні відносно площини симетрії. Координати цих точок по осі z рівні за величиною, але протилежні за знаком. Тоді проекція центра мас на данну ось

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i P_i}{P} = 0,$$

тобто центр мас даного тіла знаходиться в площині симетрії.

Наслідки теореми:

1. Центр мас однорідного відрізку прямої лежить в його середині.
2. Центри мас кола, поверхні і об'єму сфери знаходиться в їх геометричних центрах.
3. Центри мас ромба, прямокутника і квадрата лежать в точках перетину діагоналей.
4. Центр мас правильного багатокутника знаходиться в центрі вписаного або описаного кола.



5.5.2. *Розбиття.*

Якщо тіло можна розбити на кілька частин, для яких положення центрів мас відомі (рис. 5.8), то координати центра мас усього тіла можна знайти по формулах (5.6) і (5.7). При цьому число доданків в кожній сумі буде дорівнювати числу частин, на які розбите тіло.

Рис. 5.8. Метод розбиття.

5.5.3. *Доповнення.*

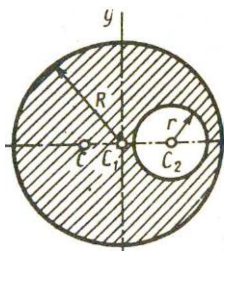
Цей спосіб є частковим випадком способу розбиття. Він застосовується до тіл, які мають вирізи, якщо центри мас тіла без вирізу і вирізаної частини відомі. Наприклад, необхідно визначити центр мас круглої пластини радіуса R з вирізом радіуса r (рис. 5.9), причому відстань $C_1C_2 = a$. Для цього спочатку знайдемо площі пластини F_1 і вирізаної частини F_2, а також площу усієї фігури

$$F_1 = \pi R^2; \quad F_2 = -\pi r^2, \quad F = F_1 + F_2 = \pi\left(R^2 - r^2\right).$$

причому площа вирізаної частини завжди вважається від’ємною.

Фігура має вісь симетрії x, на якій знаходиться центр мас ($y = 0$), і для його визначення необхідно знайти лише ординати центрів мас кожної частини

$$x_1 = 0; \qquad x_2 = a.$$



По формулі (5.5) знаходимо

$$x_C = \frac{0 \cdot \pi R^2 - a \cdot \pi r^2}{\pi\left(R^2 - r^2\right)} = \frac{-ar^2}{R^2 - r^2}; \; y_C = 0.$$

Знак мінус вказує на те, що центр мас фігури лежить лівіше від початку координат.

Рис. 5.9. Метод доповнення.

5.5.4. ***Інтегрування.***

Якщо тіло неможливо розбити на кілька простих складових частин, то тіло спочатку розбивають на довільні нескінченно малі об'єми, після чого положення центрів мас визначають за формулами

$$x_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} x dV; \qquad y_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} y dV; \qquad z_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} z dV. \qquad (5.8)$$

У випадку плоскої фігури формули інтегрування набувають вигляду

$$x_C = \frac{1}{F}\int_{(V)} x dF; \qquad y_C = \frac{1}{F}\int_{(V)} y dF; \qquad z_C = \frac{1}{F}\int_{(V)} z dF. \qquad (5.9)$$

У випадку однорідної лінії

$$x_C = \frac{1}{L}\int_{(V)} x dL; \qquad y_C = \frac{1}{L}\int_{(V)} y dL; \qquad z_C = \frac{1}{L}\int_{(V)} z dL. \qquad (5.10)$$

5.5.5. ***Експериментальний.***

Центри мас неоднорідних тіл складної конфігурації (літак, автомобіль) можна визначити лише експериментально. Одним із таких методів є *метод підвішування*, при якому досліджуване тіло підвішують на тросі за різні точки. Оскільки напрямок тросу кожен раз дає напрямок дії сили тяжіння, то точка перетину цих напрямків вказує положення центра мас.

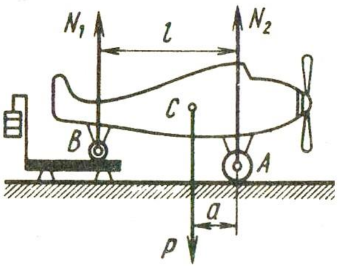


Рис. 5.10. Спосіб зважування.

Іншим способом визначення центра мас є метод зважування (рис. 5.10). Літак колесом B встановлюють на ваги і знаходять силу тиску, яка дорівнює нормальній реакції N_1. Потім на ваги встановлюють колесо A і знаходять нормальну реакцію N_2. Положення центра мас C по горизонталі визначають, прирівнявши до нуля суму моментів реакцій відносно C.

5.6. Теореми для визначення центрів мас (теореми Паппа-Гульдіна)

Теорема 1. Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо осі, яка лежить в площині фігури, але не перетинає її, дорівнює добутку площі фігури на довжину кола, описаного її центром ваги (рис. 5.11, зліва)

$$V = Fl = F \cdot 2\pi R = 2\pi x_c F, \qquad (5.11)$$

де F – площа плоскої фігури, $2\pi x_c$ – довжина кола.

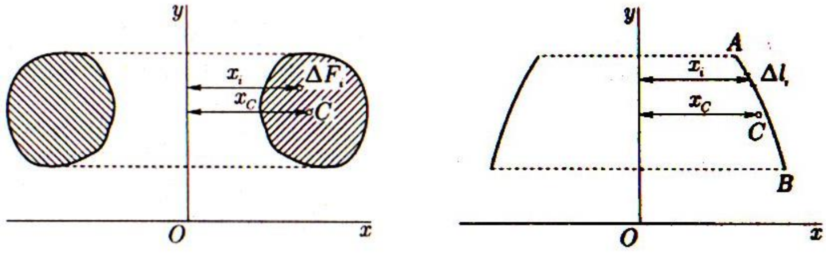


Рис. 5.11. Теореми про визначення центрів ваги.

Теорема 2. Площа

поверхні тіла, утвореного обертанням плоскої кривої навколо осі, яка лежить в її площині, але не перетинає її, дорівнює добутку довжини цієї кривої на довжину кола, описаного її центром ваги (рис. 5.11, справа).

$$F = Ll = L \cdot 2\pi R = 2\pi x_C L, \tag{5.12}$$

де L – довжина кривої, $2\pi x_c$ – довжина кола, описаного центром ваги фігури.

5.6. Центри мас деяких тіл

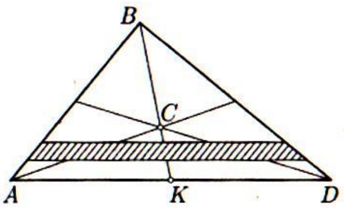


Рис. 5.12. Центр мас трикутника.

Центр мас трикутника (рис. 5.12) завжди лежить в точці перетину його медіан, тобто в точці C на відстані третини медіани від даної сторони

$$CK = \frac{BK}{3}.$$

Центр мас трапеції із сторонами $AE = a$, $BD = b$ і висотою h (рис. 5.14) завжди лежить на прямій FK, що з'єднує середини паралельних сторін трапеції, причому відстань до основи AE дорівнює

$$y_c = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}. \tag{5.13}$$

Центр мас дуги кола радіуса R с центральним кутом 2α лежить на осі симетрії дуги і його положення визначається тільки координатою x_c (рис. 5.15)

$$y_c = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{5.14}$$

Аналогічний результат виходить для центру ваги площі сектора круга.

Центр мас конуса лежить на відрізку, що з'єднує його вершину з центром ваги основи на відстані 1/4 довжини цього відрізку від центру ваги основи (рис. 5.13)

$$CK = EK/4.$$

Цю формулу також можна застосувати для визначення центру ваги об'єму чотиригранної і багатогранної пірамід.

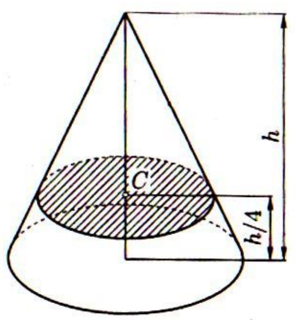


Рис. 5.13.
Центр мас конуса.

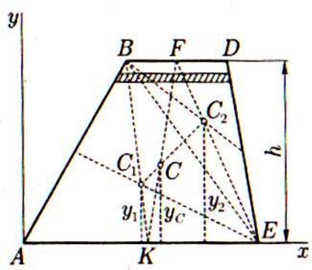


Рис. 5.14.
Центр мас трапеції.

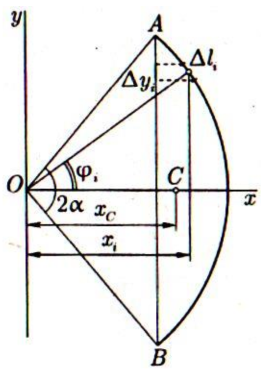


Рис. 5.15.
Центр мас дуги кола.

Питання для самоконтролю

1. Які властивості має центр мас паралельних сил?

2. Який метод застосовується для визначення центра мас плоскої фігури з отвором?
3. Яку розмірність має статичний момент площі плоскої фігури відносно осі?
4. В чому полягає суть методу розбиття?
5. Чому при повороті мотоцикліст нахиляється у бік угнутості дороги?

Завдання № 5. «Паралельні сили. Центр мас»

Рекомендації до розв'язання задач

А. Паралельні сили на площині.

1. Вибрати матеріальну систему, рівновага якої розглядається, зобразити всі активні сили, звільнити систему від в'язів, замінивши їх реакціями.
2. Обрати систему координат таким чином, щоб одна з осей була паралельна діючим силам, а інша перпендикулярна.
3. Записати дві умови рівноваги (умова сил і умова моментів).
4. В якості центра моментів рекомендується вибирати точку, через яку проходять лінії дії однієї чи декількох невідомих сил.
5. Розв'язати складені рівняння.

Б. Центр мас.

1. При розв'язанні задачі, якщо переріз складний, розбити його на прості складові частини, для яких положення центрів мас відомі.
2. Координатні осі провести так, щоб усі часті фігури мали додатні координати і при цьому щоб осі торкалися сторін фігури.
3. Знайти центри мас кожної простої частини і їх площі (об'єми, довжини).
4. Визначити положення центра мас складної фігури, яка допускає розбиття на прості частини, скориставшись формулами (5.6) – (5.7).
5. Якщо розбиття на прості складові неможливе, то для знаходження центра мас слід виконувати інтегрування за формулами (5.8) – (5.10).

Приклад розв'язання задачі

Задача 1. Визначити опорні реакції консольної балки, навантаженої зосередженою силою $P = 2$ кН і лінійно розподіленою силою з інтенсивністю $q = 0{,}5$ кН/м. Розміри балки $a = b = c = 2$ м. Власною вагою балки знехтувати.

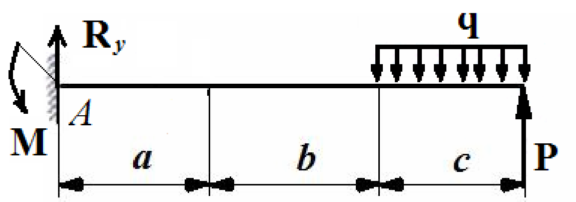


Рис. 5.16. До задачі 1.

Розв'язання.

В задачі діє плоска система паралельних сил, тому для розв'язання задачі достатньо скласти два рівняння рівноваги. Замінимо в'язі їх реакціями. В опорі балки *A* виникає вертикальна реакція $\boldsymbol{R}_{\mathrm{A}}$ і реактивний крутний момент $\boldsymbol{M}$. Напрями реакцій обираємо довільно, оскільки кожна з них має два можливі варіанти спрямування.

На балку діє сила, розподілена по лінії, тому зведемо її до рівнодійної $\boldsymbol{Q}$, модуль якої дорівнює

$$Q = qc = 0{,}5 \cdot 2 = 1\,(кН).$$

Точка прикладання умовної сили Q знаходиться посередині ділянки довжини c.

Запишемо рівняння рівноваги системи, почавши з рівняння моментів відносно точки A защемлення балки

$$\sum_{i=1}^{4} M_A(F_i) = 0;\; P(a+b+c) - Q\left(a+b+\frac{c}{2}\right) + M = 0.$$

$$M = -P(a+b+c) + Q\left(a+b+\frac{c}{2}\right) = -2\cdot(2+2+2) + 1\cdot\left(2+2+\frac{2}{2}\right) = -7(кН\cdot м).$$

Знак «мінус» вказує на те, що реактивний момент в опорі балки спрямований за годинниковою стрілкою.

Тепер записуємо проекції сил на координатну вісь y і знаходимо невідому вертикальну реакцію в опорі

$$\sum_{i=1}^{n} F_{yi} = 0.\; R_Y + P - Q = 0 \Rightarrow R_Y = 1 - 2 = -1\,(кН).$$

У цьому випадку від'ємний результат вказує на те, що вертикальна реакція спрямована вниз, а не вгору, як показано на рисунку.

Задачу розв'язано.

Задача 2. Визначити центр мас двотаврового профілю, розміри якого вказані на рис. 5.17.

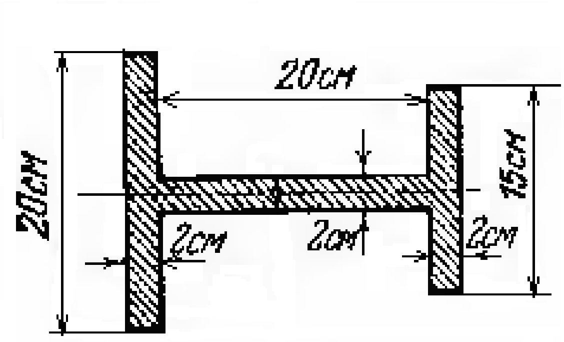


Рис. 5.17. Двотавровий профіль.

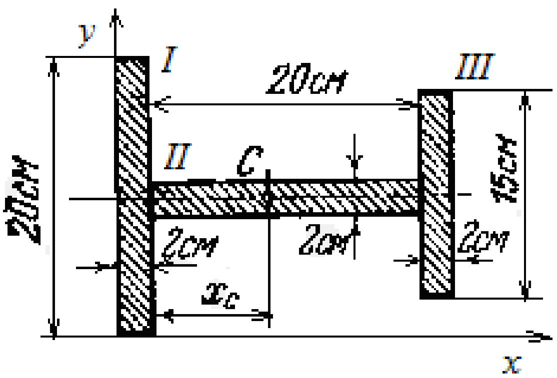


Рис. 5.18. Знаходження центра мас.

<u>Розв'язання.</u>

Оскільки в задачі розглядається плоска фігура, то необхідно визначити дві координати центра мас – x і y. Згідно рекомендацій, координатні осі проведемо так, щоб фігура не мала від'ємних частин (рис. 5.18), а саму фігуру розбиваємо на три прямокутники.

Дане тіло має вісь симетрії, тому згідно теореми, центр мас C має знаходитись на цій осі. Ордината осі симетрії

$$y_c = 10\ (мм).$$

Визначимо площі кожної з трьох простих частин

$$F_1 = 20\cdot 2 = 40\,(см^2);\; F_2 = 20\cdot 2 = 40\,(см^2);\; F_3 = 15\cdot 2 = 30\,(см^2).$$

Знаходимо центри мас простих частин, які, як відомо, знаходяться в точці перетину діагоналей.

$$x_1 = 1\,(см);\; x_2 = 12\,(см);\; x_3 = 23\,(см).$$

Знаходимо положення центра мас по абсцисі

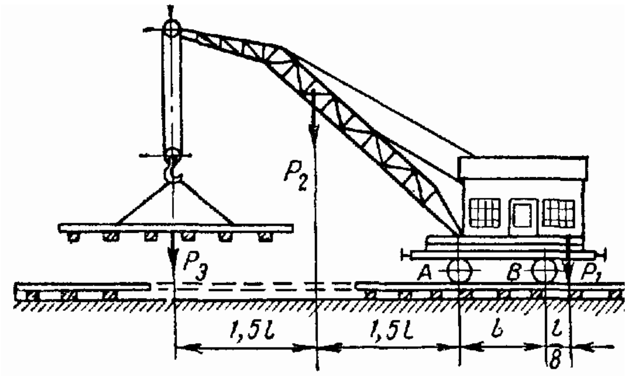
$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{40 \cdot 1 + 40 \cdot 12 + 30 \cdot 23}{40 + 40 + 30} = 11\,(см).$$

Координати центра тяжіння *C* (11, 10). Задачу розв’язано.

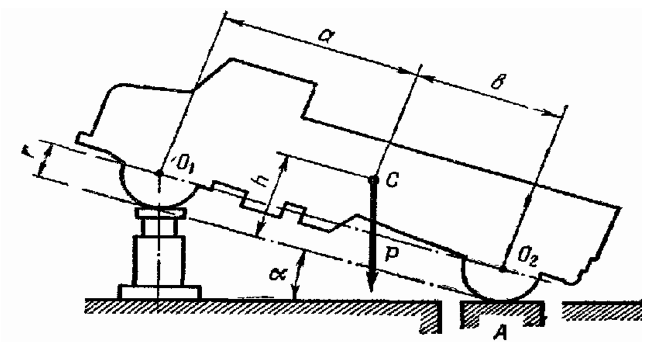
<u>Завдання №5 до РГР</u>

5.1. Визначити опорні реакції коліс залізничного крану, який слугує для переноски колії при відкритих розробках, якщо вага кузова з теліжкою P_1 = 160 кН, вага стріли P_2 = 10 кН, вага ланки залізничної колії P_3 = 20 кН.
Відповідь: $N_А$ = 85 кН, $N_В$ = 105 кН.

5.2. Для визначення висоти *h* центра тяжіння автомобіля вагою *G* = 10 кН його поставили задніми колеса на платформу *A* ваг, при цьому їх показання склали *Q* = 6,2 кН. Знайти висоту центра тяжіння, якщо α = 30°, *a* = 5 м, *b* = 3 м, *r* = 30 см.
Відповідь: $h = \dfrac{(Q-P)a + Qb}{P} ctg\alpha + r.$

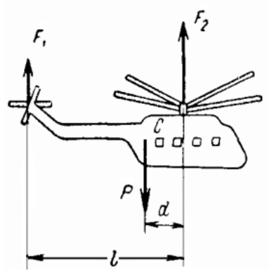


До задачі 5.1.



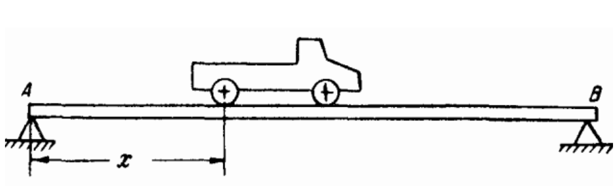
До задачі 5.2.

5.3. Гелікоптер висить нерухомо, при цьому підйомна сила хвостового гвинта F_1 складає 5% від його ваги. Знайти підйомну силу F_2 головного гвинта і відстань *d* від центра тяжіння гелікоптера *C* до осі головного гвинта, якщо вага гелікоптера *P* = 20 кН, а відстань між осями гвинтів *l* = 4 м.



Відповідь: *d* = 0,2 м, F_2 = 19 кН.
До задачі 5.3.

5.4. На горизонтальному мосту *AB* довжиною 20 м знаходиться автомобіль з навантаженням на передню вісь 10 кН і на задню вісь 20 кН. Визначити відстань *x* від осі заднього колеса до опори *A*, за якої реакції в опорах *A* і *B* будуть однакові. Відстань між передньою і задньою віссю *a* = 2,5 м.

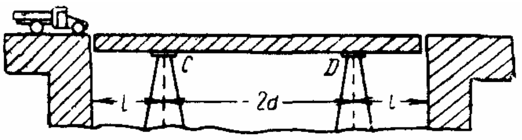


Відповідь: $x = 9{,}2$ м.

До задачі 5.4.

5.5. Тимчасовий міст, вага одного погонного метра якого $q = 1{,}7$ кН, вільно спирається на опори C і D. Визначити найбільшу довжину l консольної частини моста, за якої він не перекинеться при проїзді машини з навантаженням на передню вісь 20 кН і на задню вісь 40 кН. Відстань між передньою і задньою віссю a = 3 м, відстань між опорами CD = 6 м.

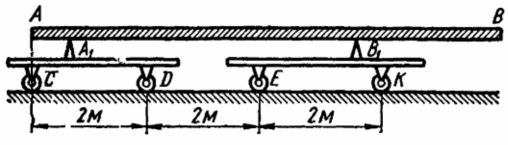
Відповідь: $l = 1$ м.



До задачі 5.5.

5.6. Однорідна балка довжиною AB = 8 м і вагою 36 кН вільно лежить на двох опорах A_1 і B_1, які розташовані на двох візках, вагою в 4 кН кожен. При цьому кінець балки A і вісь колеса C знаходяться на одній вертикалі. Визначити силу тиску коліс C, D, E і K на рейки, якщо AA_1 = 0,8 м, BB_1 = 2,8 м.

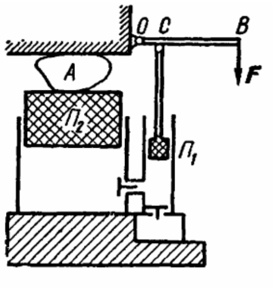
Відповідь: N_C = 7,89 кН, N_D = 5,93 кН, N_E = 12,47 кН, N_K = 17,71 кН.



До задачі 5.6.

5.7. В гідравлічному пресі відношення діаметрів поршнів D/d = 10, а BC = 9 CO. Нехтуючи тертям і вагою поршнів, визначити силу Q, яка стискає тіло A, якщо перпендикулярно до важеля OB прикладена сила F = 120 Н.

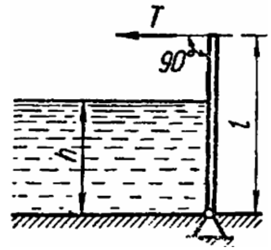
Відповідь: Q = 120 кН.



До задачі 5.7.

5.8. Визначити силу T натягу тросу, необхідну для утримання в вертикальному положенні прямокутного щита висотою l = 0,8 м і шириною b = 2 м, якщо рівень води h = 0,6 м.

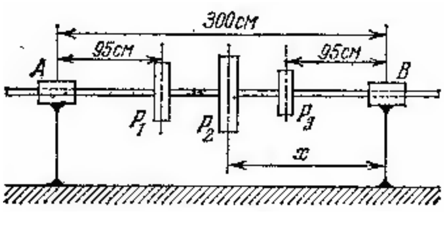
Відповідь: T = 883 Н.



До задачі 5.8.

5.9. Вал трансмісії має три шківи вагою P_1 = 3 кН, P_2 = 5 кН, P_3 = 2 кН, відстані між якими показані на рисунку. Визначити, на якій відстані x від підшипника B треба встановити шків P_2, аби реакції в підшипниках A і B були однакові. Власною вагою вала знехтувати.

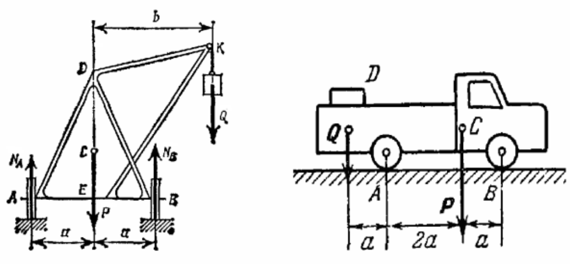
Відповідь: x = 1,39 м.



До задачі 5.9.

5.10. Визначити сили тиску на рейки коліс A і B крану, схематично зображеного на рисунку. Вага крану P = 40 кН прикладена в центрі тяжіння C, яка лежить на лінії DE. Кран підіймає вантаж вагою Q = 10 кН, відстань між колесами $AB = 2a$ = 2,5 м; виліт крану b = 3,5 м.

Відповідь: N_A = 11 кН, N_B = 39 кН.

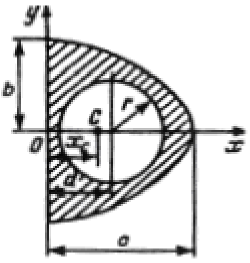


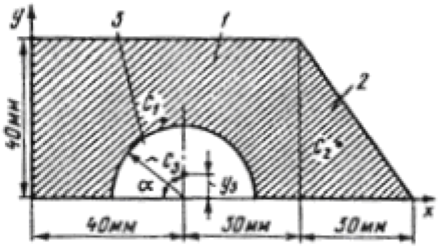
До задачі 5.10. До задачі 5.11.

5.11. В кузові вантажного автомобіля вагою P = 1 500 Н знаходиться вантаж вагою $Q = P/2$. Нехтуючи силами тертя, визначити сили тиску коліс на дорогу. Необхідні розміри вказані на рисунку.
Відповідь: R_A = 1 500 м; R_B = 750 м.

5.12. Визначити центр мас пластини, що має вигляд половини еліпса з вирізаним колом. Півосі еліпса a = 60 мм і b = 45 мм, радіус кола r = 25 мм, відстань від центра еліпса до центра кола d = 40 мм.
Відповідь: x_C = 13,0 мм, y_C = 0 мм.

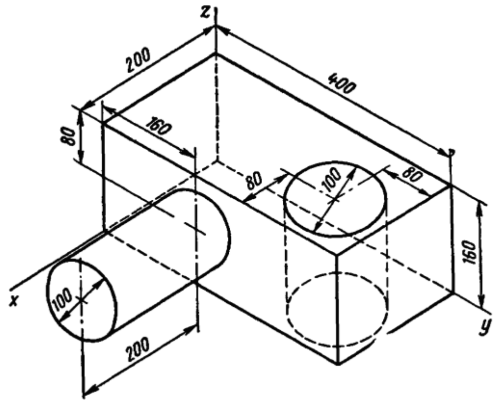
5.13. Визначити центр мас пластини з отвором у вигляді півкола радіусом r = 20 мм. Геометричні розміри пластини вказані на рисунку.
Відповідь: x_C = 43,6 мм, y_C = 20,2 мм.



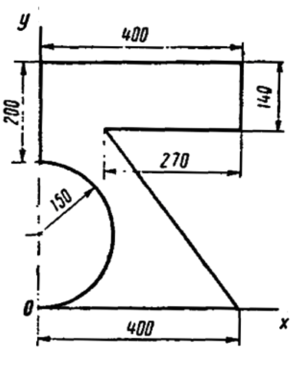


До задачі 5.12. До задачі 5.13.

5.14. Визначити положення центра мас просторової фігури, розміри якої вказано на рисунку.
Відповідь: x_C = 122 мм, y_C = 184 мм, : z_C = 80 мм.

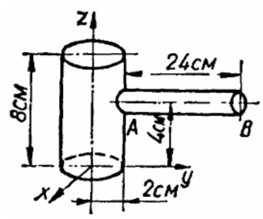


5.15. Визначити положення центра мас плоскої пластини з отвором і вирізом, розміри якої вказано на рисунку.
Відповідь: x_C = 195 мм, y_C = 284 мм.



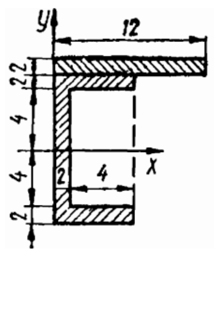
До задачі 5.14. До задачі 5.15.

5.16. Визначити положення центра мас молотка, який складається з однорідної циліндричної головки вагою 6 Н і однорідного тонкого стержня вагою 1 Н.
Відповідь: x_C = 0 см, y_C = 2 см, : z_C = 4 см.



До задачі 5.16.

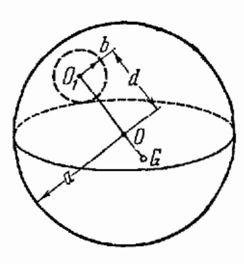
5.17. Визначити статичні моменти відносно координатних осей x і y плоскої фігури, розміри якої вказані в сантиметрах на рисунку.



Відповідь: $S_x = 168$ см^2, $S_y = 232$ см^2.

До задачі 5.17.

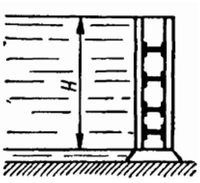
5.18. В однорідній сфері з радіусом a і центром O знаходиться сферичний виріз з радіусом b і центром O_1. Визначити центр мас даного тіла, якщо відстань між центрами сфер дорівнює d.



Відповідь: Центр мас знаходиться на прямій OO_1 на відстані $x = b^3d/(a^3 - b^3)$ від центру великої сфери.

До задачі 5.18.

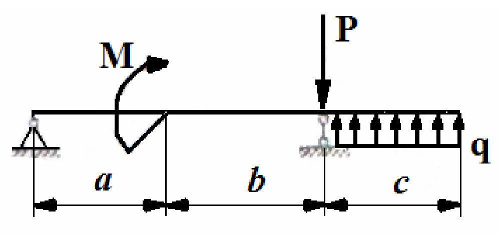
5.19. На яку відстань x по горизонталі в діаметральній площині корабля можна перемістити вантаж вагою P = 600 кН, аби загальний центр тяжіння корабля змістився не більш, ніж на 0,1 м. Водотоннажність корабля 1 200 кН. *Відповідь*: x = 20 м.



До задачі 5.20.

5.20. Тиск води передається через прямокутний щит висотою H = 4 м на чотири двотаврові балки. Визначити, на яких відстанях від вільної поверхні води h_i слід їх розташувати, аби всі балки були навантажені однаково.
Відповідь: h_1 = 1,33 м, h_2 = 2,44 м, h_3 = 3,16 м, h_4 = 3,74 м.

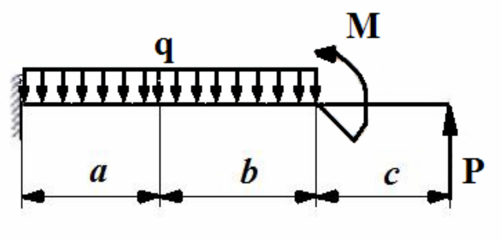
5.21. Визначити реакції в опорах невагомої двоопорної балки, яка навантажена зосередженою силою P = 5 кН, лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 1,5 кН/м і знаходиться під дією крутного моменту M = 4 кН·м. Геометричні розміри балки a = 2 м, b = 3 м, c = 2 м.
Відповідь: R_A = 5,8 кН, R_B = 2,2 кН.



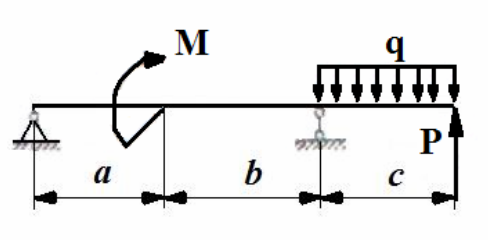
До задачі 5.21.

5.22. Визначити реакції в опорі консольної балки, яка навантажена зосередженою силою P = 3 кН, лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 0,5 кН/м і знаходиться під дією крутного моменту M = 2 кН·м. Геометричні розміри балки a = 1 м, b = 1,2 м, c = 1 м. Власною вагою балки знехтувати.
Відповідь: R = - 1,9 кН, M_A = - 10,4 кН·м.

5.23. Визначити реакції в опорах невагомої двоопорної балки з консольною частиною, яка навантажена зосередженою силою P = 4 кН, розподіленою лінійно силою з інтенсивністю q = 1 кН/м і знаходиться під дією крутного моменту M = 3 кН·м. Геометричні розміри балки a = 2 м, b = 3 м, c = 2 м.
Відповідь: R_A = 1,8 кН, R_B = - 3,8 кН.



До задачі 5.22.



До задачі 5.23.

Глава 6. Сили тертя

6.1. Види тертя

Тертя - опір, який виникає при русі або прагненні до руху одного тіла по поверхні іншого. Це складне фізичне явище, яке супроводжується нагрівом тертьових поверхонь, їх електризацією, руйнуванням і дифузією, тому часто урахування всіх факторів, що впливають на величину сил тертя не є можливим. В теоретичній механіці тертя вивчається у зв’язку з необхідністю визначення реакцій в’язей.

Виникнення тертя викликане двома причинами:

- тертьові поверхні не є ідеально гладкими, а мають нерівності, які і чинять опір руху зачіплюючись між собою;
- між тертьовими поверхнями діють сили молекулярного зчеплення, для подолання яких необхідно прикласти силу.

Кожна з причин може домінувати в залежності від умов контакту тіл.

В техніці тертя відіграє як корисну, так і шкідливу роль. Завдяки йому рухаються тіла, працюють фрикційні, пасові і ланцюгові передачі. З іншого боку, тертя є причиною зношування деталей машин і механізмів, значних втрат енергії. Підраховано, що близько 30% світових енергетичних ресурсів витрачається на подолання шкідливих сил тертя.

Для зменшення тертя використовують мастила, які можуть бути твердими, рідкими або газоподібними. В залежності від стану тертьових поверхонь виділяють наступні види тертя:

а) *Сухе тертя* – тертя без мастильних матеріалів.

б) *Тертя за наявності мастила* – поверхні твердих тіл розділені шаром мастила, а тертя відбувається між окремими його шарами. Для цього виду тертя існують свої закони і воно детально вивчається в курсі гідравліки.

6.2. Закони тертя

Сила тертя – сила, яка перешкоджає руху одного тіла по поверхні іншого. В залежності від характеру відносного переміщення тертьових поверхонь тіл розрізняють три види тертя:

1. **Тертя спокою** – має місце при спробі взаємного руху тіл, коли поверхні тіл не рухаються одна відносно іншої. Існує лише при сухому терті.
2. **Тертя ковзання** – при поступальному відносному руху стичних тіл.

3. **Тертя кочення** – при коченні одного тіла по поверхні іншого.

В інженерних розрахунках користуються наближеними законами, встановленими Амонтоном і Кулоном:

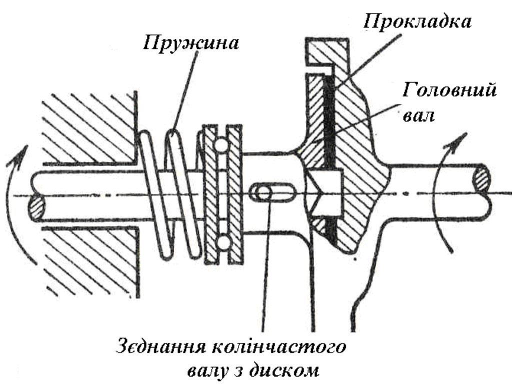
1. *Сила тертя при однакових інших умовах не залежить від розмірів тертьових поверхонь*. Закон не є справедливим для дуже малих поверхонь.

2. *Сила тертя спокою може приймати будь-яке значення від нульового до максимального*, рівного добутку коефіцієнту тертя спокою на силу нормальної реакції

$$0 \le F_{тр}^{сп} \le F_{\max} = f_0 N. \tag{6.1}$$

Максимальна сила тертя спокою F_{max} відповідає стану граничної рівноваги, коли достатньо незначного приросту зовнішньої сили, аби тіло зрушило з місця.

3. *Коефіцієнт тертя спокою залежить від матеріалу і фізичного стану тертьових поверхонь* (шорсткості, наявності мастила, вологості, температури). Матеріали з високим коефіцієнтом тертя (шкіра, гума, текстоліт) називаються **фрикційними**, з низьким (бронза, бабіт, сірий чавун) – **антифрикційними**.



В техніці сили тертя спокою (або сили зчеплення) мають велике значення. Часто використовуються пасові передачі крутного моменту з одного шківа на інший, які можливі лише за наявності сил тертя спокою між пасом і шківом. Іншим прикладом є фрикційне з'єднання двигуна з валом в автомобілі, схема якого показана на рис. 6.1.

Рис. 6.1. Фрикційне з'єднання.

4. *Сила тертя під час руху менша, ніж у стані спокою*. Майже для усіх матеріалів з підвищенням швидкості відносного руху сила тертя ковзання зменшується, виключення – тертя шкіри по сталі або чавуну.

5. *Сила тертя зростає із збільшенням часу попереднього контакту тертьових поверхонь*. Це можна пояснити деформацією поверхонь та дифузією молекул, а значить збільшенням молекулярних зв'язків.

6. *Сила тертя ковзання залежить від коефіцієнту тертя ковзання і нормальної реакції*

$$F_{тр}^{ков} = fN. \tag{6.2}$$

Зменшення шорсткості поверхонь із метою послаблення сил тертя не ефективне, оскільки при ідеально доведених (полірованих та протравлених) поверхнях сили тертя не зменшуються, а навпаки, сильно зростають. У випадку щільного контакту поверхонь істотно проявляються атомно-молекулярні сили зчеплення, тому в таких випадках необхідно використовувати вираз для сили ковзання, отриманий російським вченим Б.П. Дерягіним

$$F_{тр}^{ков} = f(N + Sp_0), \tag{6.3}$$

де S – сумарна площа контактуючих поверхонь між тілами, p_0 – додатковий тиск, обумовлений силами молекулярного зчеплення.

Задовільної теорії, яка б пояснювала закони тертя, на цей час не існує. Схематизуючи явище, можна представити процес наступним чином. Поверхні тіл не є ідеально гладкими (рис. 6.2), тому при контакті вони деформуються, причому деформації залежать від місцевого тиску і можуть мати як пружний, так і пластичний характер. Стискання двох тіл і проникнення виступів одного тіла в западини іншого залежить від сили, що притискає тіла одне до одного та фізичного стану поверхні кожного з тіл.

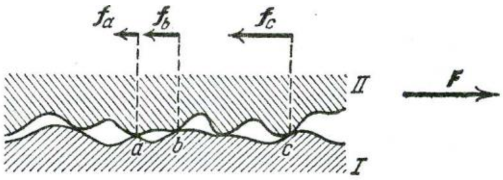


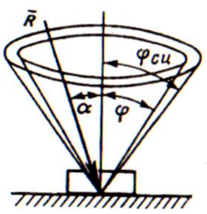
Рис. 6.2. Природа сил тертя.

Під час спокою, коли виникає сила тертя спокою, горизонтальні складові сил, що виникають між виступами обох тіл, зрівноважують зовнішню силу, створюючи тим самим силу тертя спокою.

Під час руху нерівності обох тіл також зачіпляються, але ще і ударяють між собою, викликаючи коливання в різних напрямах, які розповсюджуються в тілах. Ці сили взаємодії в сумі і дають силу тертя ковзання. В цьому випадку велике значення відіграють пластичні деформації при ударах виступів.

6.3. Кут і конус тертя

Кут тертя – найбільший кут, на який через тертя відхиляється від нормалі повна реакція *R* опорної поверхні:



$$tg\varphi = \frac{F}{N} = f \Rightarrow \varphi = arctgf. \tag{6.4}$$

Рис.6.3. Кут і конус тертя.

Тангенс кута тертя дорівнює коефіцієнту тертя ковзання (або спокою) матеріалу. Якщо кут прикладення зовнішньої сили α менший за кут тертя φ, то тіло завжди перебуватиме в стані рівноваги.

Конус тертя – геометричне місце усіх можливих напрямків граничної реакції. Ним пояснюється явище заклинювання механізмів, коли жодною прикладеною всередині конуса силою не вдається зрушити з місця деталь.

Якщо коефіцієнти тертя ковзання і спокою постійні по усіх напрямах, то конуси тертя колові (рис. 6.3). Неколові конуси мають анізотропні матеріали, для яких коефіцієнти тертя різні в різних напрямах (вздовж і поперек волокон деревини чи напрямку прокату сталі).

Величину коефіцієнта тертя ковзання можна визначити за допомогою похилої площини (рис. 6.4). Для цього повільно збільшують кут нахилу площини α і при деякій величині кута φ починається рух тіла. Коефіцієнт тертя ковзання знаходять за формулою (6.4).

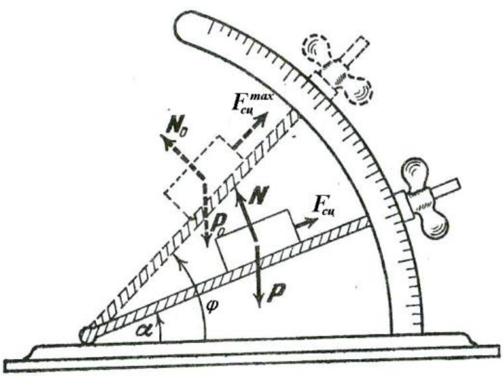
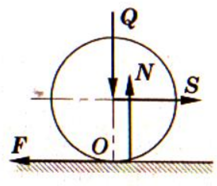


Рис. 6.4. Експериментальне визначення коефіцієнтів тертя.



6.4. Тертя кочення

Тертя кочення - опір, який виникає при коченні або спробі кочення одного тіла по поверхні іншого. Відносна швидкість точок контакту дорівнює нулю. Як і у випадку ковзання, розрізняють тертя кочення і тертя зчеплення при коченні.

Рис. 6.5. Тертя кочення.

Нехай каток ваги $\boldsymbol{Q}$ і радіусу R (рис. 6.5) покоїться на горизонтальній площині. По осі катка прикладемо силу S. Каток залишатиметься в спокої, поки ця сила не досягне певного значення.

Для реальних тіл завжди існує деформація катка і площини, тому нормальна реакція $\boldsymbol{N}$ прикладена не в точці O, а дещо зрушена по напряму дії сили. Тому можна сказати, що до катка прикладена пара, у якої гранична величина моменту

$$\boldsymbol{M}_{max} = k \cdot \boldsymbol{N}$$

пропорційна максимальному тиску катка на площину. Коефіцієнт тертя кочення k виражається в одиницях довжини (см або мм) і визначається експериментальним шляхом. Коефіцієнт тертя кочення залежить від матеріалу катка, площини і фізичного стану цих поверхонь.

З рисунка видно, що величина моменту пари

$$M_{max} = R \cdot S.$$

Прирівнюючи два останні вираження, отримуємо

$$k \cdot N = R \cdot S \rightarrow S = k \cdot N / R.$$

При такій величині сили каток починає котитися без ковзання. Коли ж величина сили досягне значення

$$S = f \cdot N, \tag{6.5}$$

каток котитиметься з ковзанням. Тут f - коефіцієнт тертя ковзання.

Сили тертя кочення грає важливу роль при русі міського транспорту (автобусу, трамваю). При коченні без ковзання немає відносного руху стичних точок поверхонь колеса і дороги. У цьому випадку має місце сила зчеплення при ковзанні, яка має бути менша силу тертя ковзання

$$F_{ков}^{зч} = \frac{M}{R} \leq F_{ков}. \tag{6.6}$$

Сила зчеплення при ковзанні є рушійною силою, а її величина залежить від обертового моменту двигуна. Формула (6.6) є **умовою кочення колеса без ковзання**. Часто при русі з місця трамваю або автомобіля по снігу чи грязі при різкому збільшенні обертового моменту має місце буксування колес. Колеса ковзають, обертаються зі значною швидкістю, в той час як рушійна сила мала. Це пояснюється тим, що має місце ковзання, сила якого ще й зменшується при збільшенні швидкості. Тому при русі з місця треба плавно збільшувати обертовий момент M.

При гальмуванні автомобіля також не слід різко збільшувати гальмівний момент $M_г$. Оскільки сила ковзання менша за силу зчеплення, то не треба доводити колеса до ковзання. Слід тримати гальмівний момент на самій межі перед ковзанням, але це вимагає значного досвіду, тому при екстреному гальмуванні майже завжди має місце ковзання.

Ковзання при русі нерейкового транспорту небезпечне, оскільки воно може призвести до заносу і втрати керування. Суть явища: якщо тіло ковзає в горизонтальній площині, то навіть невелика сила, прикладена перпендикулярно до напряму ковзання, викликає значні переміщення. Це пояснюється тим, що сила зчеплення в перпендикулярному до руху напряму практично дорівнює нулю. Тому на великих машинах встановлюють спеціальні пристрої, які підтримують необхідну величину гальмівного моменту.

Сили тертя кочення значно менші від сил тертя ковзання. Тому з енергетичної точки зору вигідно, де це можливо, замінити тертя ковзання тертям кочення, як це зроблено в підшипниках кочення, широко вживаних в техніці. У випадку плоскої поверхні (рис. 6.6, б) має місце чисте кочення роликів, а у підшипнику (рис. 6.6, а) чисте кочення не може бути реалізоване. Але ковзання тим менше, чим менше відношення радіуса ролика r до радіуса внутрішнього кільця R. Та дуже маленький радіус кульки робити не можна через його вдавлювання в прилеглу поверхню.

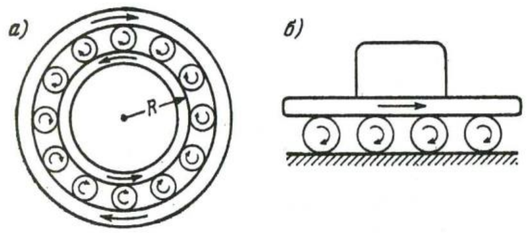


Рис. 6.6. Використання тертя кочення.

6.5. Тертя нитки о циліндричну поверхню

Нехай до нитки, яка накинута на циліндричний вал радіуса R, прикладена сила P (рис. 6.7). Необхідно знайти найменшу силу Q, яку треба прикласти з іншого боку, аби система залишилась в стані спокою.

Розглянемо рівновагу малого елементу нитки DE, довжина якого

$$dl = Rd\theta.$$

Різниця натягів нитки dT в точках D і E має компенсуватися силою тертя dF, аби система знаходилась в стані рівноваги

$$dT = fdN, \qquad (6.7)$$

де f – коефіцієнт тертя нитки по валу. Значення нормальної реакції знайдемо із умови рівноваги системи по осі y

$$dN - T\sin\frac{d\theta}{2} - (T + dT)\sin\frac{d\theta}{2}.$$

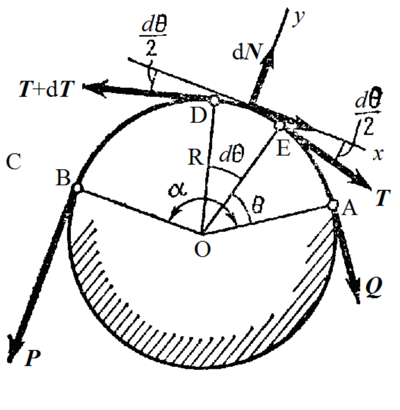


Рис. 6.7. Тертя нитки по валу.

Оскільки кут $d\theta$ малий, то його синус приблизно дорівнює самому куту, тому

$$dN = T\frac{d\theta}{2} + (T + dT)\frac{d\theta}{2} = T\frac{d\theta}{2} + T\frac{d\theta}{2} + dT\frac{d\theta}{2} = 2T\frac{d\theta}{2} = Td\theta.$$

В даній формулі після розкриття дужок знехтували третім доданком, оскільки він значно менший за перші два. Підставимо отриманий вираз до (6.7) і розв'яжемо диференціальне рівняння

$$dT = fTd\theta \Rightarrow \int_{Q}^{P}\frac{dT}{T} = \int_{0}^{\alpha} fd\theta \Rightarrow \ln P - \ln Q = f\alpha \Rightarrow \frac{P}{Q} = e^{f\alpha} \Rightarrow Q = Pe^{-f\alpha}. \qquad (6.8)$$

З остаточної формули видно, що сила Q залежить лише від коефіцієнта тертя та кута α і не залежить від радіуса вала. На практиці формула (6.8) має велике значення, адже збільшуючи кут α (намотуючи нитку на вал), можна значно зменшити силу Q, необхідну для утримання системи в стані рівноваги.

Питання для самоконтролю

1. В яких випадках виникають сили тертя?
2. Які види тертя існують?
3. Від чого залежить максимальна величина сили тертя спокою?
4. Чим визначається величина коефіцієнта тертя ковзання?

Завдання № 6. «Сили тертя»

Рекомендації до розв'язання задач

1. Вибрати тіло чи матеріальну систему, рівновага якої розглядається, зобразити всі активні сили, звільнити систему від в'язів, замінивши їх реакціями.

2. При розв'язанні задач визначити напрямок можливого руху тіл системи або частин тіла.

3. В площині можливого руху прикласти сили тертя по дотичній до шорсткої поверхні у напрямку, протилежному напрямку цього руху.

4. Обрати ортогональну систему координат таким чином, щоб осі були паралельні як можна більшій кількості діючих сил.

3. Записати необхідні умови рівноваги (сил і моментів).

4. В якості центра моментів рекомендується вибирати точку, в якій перетинаються лінії дії однієї чи двох невідомих сил.

5. Розв'язати складені рівняння.

Приклад розв'язання задачі

Задача 1. Драбина довжиною AB = 3 м спирається на шорсткі стіну і підлогу, утворюючі кут 60° з віссю x. В точці D на драбині знаходиться чоловік вагою Q = 700 Н. Коефіцієнт тертя між драбиною і підлогою f_B = 0,25, між драбиною і стіною f_A = 0,15. Нехтуючи вагою драбини, знайти максимальну відстань BD, на яку може піднятися чоловік, аби драбина залишалася в стані рівноваги.

Розв'язання

В даній задачі розглядається рівновага драбини. Згідно плану розв'язання задачі замінюємо в'язі їх реакціями. В точках A і B будуть діяти по дві сили: нормальні реакції, перпендикулярні опорній поверхні, і сили тертя, направлені проти можливого руху драбини. В даній задачі ми маємо плоску систему сил, тому необхідно скласти три рівняння рівноваги. За початок координат візьмемо точку О на перетині ліній дії двох сил тертя. Осі направимо вздовж стіни і підлоги, аби максимально спростити подальші розрахунки.

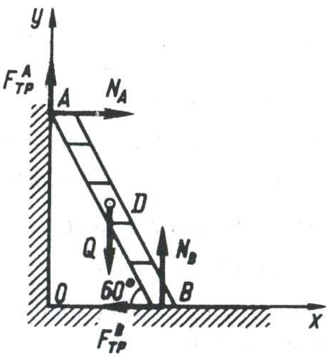


Рис. 6.9. До задачі 1.

Запис рівнянь рівноваги плоскої системи сил почнемо з рівняння моментів, хоча в даній задачі порядок не має значенн/я

Невідомі нормальні реакції в точках A і B знаходимо з двох інших рівнянь рівноваги

$$\sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0 \Rightarrow N_A - F_{mp}^{B} = 0 \Rightarrow N_A - f_B N_B = 0 \Rightarrow N_A = 0{,}25 N_B.$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{yi} = 0 \Rightarrow N_B + F_{mp}^{A} - Q = 0 \Rightarrow N_B + f_A N_A = Q \Rightarrow N_B + 0{,}15 N_A = 700.$$

Розв'язуємо сумісно рівняння сил

$$N_B + 0{,}15 \cdot 0{,}25 N_B = 700 \Rightarrow 1{,}04 N_B = 700 \Rightarrow N_B = 673\,(H).$$

$$N_A = 0{,}25 \cdot 673 = 168\,(H).$$

Тепер залишається підставити отримані нормальні реакції в рівняння моментів

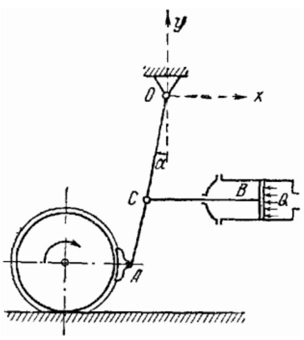
$$BD = \frac{1050 - 0{,}85 \cdot 673}{350} = 1{,}37\,(м).$$

Задачу розв'язано.

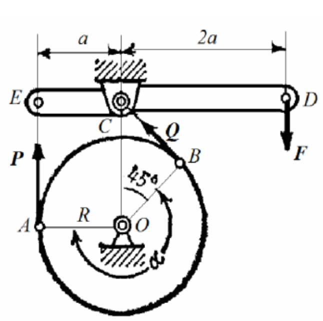
<u>Завдання № 6 до РГР</u>

6.1. На потужних електровозах часто використовуються гальма пневматичного типу, в яких стиснене повітря із спеціального резервуару тисне на поршень B циліндра. Цей тиск за допомогою важеля OA передається на гальмівну колодку. Визначити реакцію в шарнірі O і силу тиску гальмівної колодки на колесо, якщо сила тиску на поршень B дорівнює Q = 50 кН, коефіцієнт тертя колодки о колесо f = 0,18; AC = 0,4OA; tg α = 0,25; розмірами гальмівної колодки знехтувати.

Відповідь: $X_O = 21{,}3\,(кН);\ Y_O = 5{,}2\,(кН),\ N = 28{,}7\,(кН).$



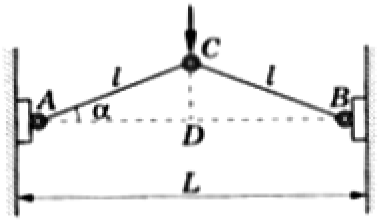
До задачі 6.1.



До задачі 6.2.

6.2. До важеля *DE* стрічкового гальма прикладена сила F = 2 кН. Визначити гальмівний момент M_m , який діє на шків радіуса R = 60 см, якщо $CD = 2CE$ = 80 см, а коефіцієнт тертя стрічки о шків f = 0,5.
Відповідь: = 2,06 кН·м.

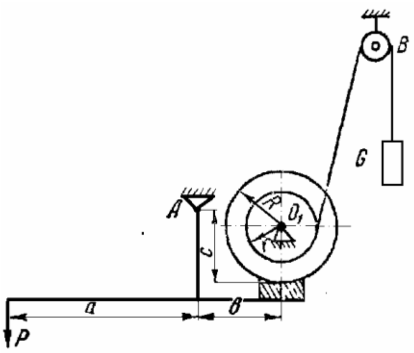
6.3. Визначити, якими мають бути розміри механізму, аби при коефіцієнті тертя f = 0,6 між стіною та повзунами *A* і *B* даний механізм був самогальмівним.

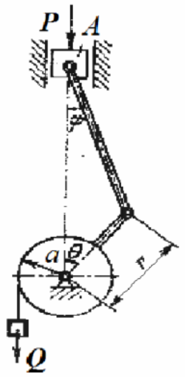


Відповідь: $0,5 < l/L < 0,585$.
До задачі 6.3.

6.4. Визначити найменшу величину сили *P*, необхідну для того, щоб загальмувати шків O_1 колодкового гальма, а також реакцію в шарнірі *A*. Коефіцієнт тертя між гальмівною колодкою і поверхнею шківа дорівнює f_1 = 0,45. Геометричні розміри механізму: a = 70 см, b = 30 см, c = 35 см, радіуси шківів R = 40 см, r = 25 см, вага тягаря G = 500 Н.
Відповідь:

6.5. Визначити мінімальне і максимальне значення сили *P*, необхідної для утримання вантажу вагою *Q* в заданому положенні, якщо коефіцієнт тертя між повзуном і напрямною дорівнює f, довжина кривошипа r, кут його повороту θ, кут між шатуном і віссю напрямної дорівнює φ, радіус барабана a.





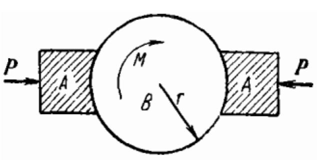
Відповідь:

$$P_{\min} = \frac{Qa(\cos\varphi - f\sin\varphi)}{r\sin(\varphi+\theta)};$$

$$P_{\max} = \frac{Qa(\cos\varphi + f\sin\varphi)}{r\sin(\varphi+\theta)}.$$

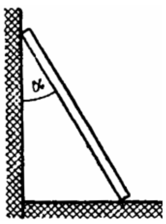
До задачі 6.4. До задачі 6.5.

6.6. На валу жорстко закріплено гальмівне колесо *B* радіуса r = 25 см, до якого з силою P = 800 Н притискаються гальмівні колодки *A*. До валу прикладена пара сил з моментом M = 100 Н·м. Визначити мінімальне значення коефіцієнту тертя ковзання f між гальмівним колесом і колодками, за якого вал буде знаходитись в стані спокою.



Відповідь: f = 0,25.
До задачі 6.6.

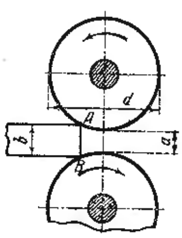
6.7. За яких значень кута α однорідна драбина, яка спирається на шорсткі стіну і підлогу, буде знаходитись в стані рівноваги? Коефіцієнти тертя в місцях контакту драбини з підлогою і стіною вважати однаковими і рівними f.



Відповідь: $\alpha \le arctg\dfrac{2f}{1-f^2}$.
До задачі 6.7.

6.8. Прокатний стан складається з двох валів діаметром d = 50 см, які обертаються в протилежні боки. Відстань між валами a = 0,5 см. Якої товщини b листи можна обробляти на цьому стані, якщо коефіцієнт тертя розпеченої сталі по чавуну f = 0,10?

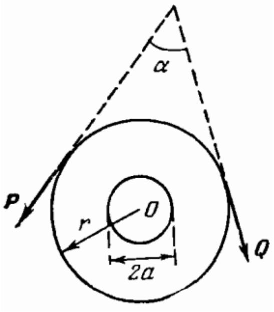
Відповідь: $b \le 0{,}75$ см.



До задачі 6.8.

6.9. Шків радіуса r = 40 мм насаджений на вал радіуса a = 15 см, котрий може обертатись в підшипниках. Коефіцієнт тертя між валом і підшипниками f = 0,05. Визначити величину сили Р, яка утримає вал в стані спокою, якщо до нього прикладена сила Q = 600 Н, яка утворює із силою P кут α = 90°.

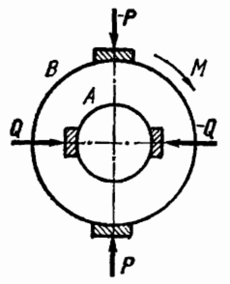
Відповідь: $b \le 0{,}75$ см.



До задачі 6.8.

6.10. На вал A радіуса r = 25 см і шків B радіуса R = 50 см, жорстко скріплені між собою, діє пара сил з моментом M = 200 Н·м. До валу притиснуті гальмівні колодки, кожна з яких діє на нього із силою Q = 250 Н. Визначити найменшу силу P, яку необхідно прикласти к двом іншим гальмівним колодкам, притиснутим до шківа B, аби вал знаходився в стані спокою. Коефіцієнт тертя колодок об вал f_1 = 0,25, об шків – f_2 = 0,4.

Відповідь: P = 422 Н.



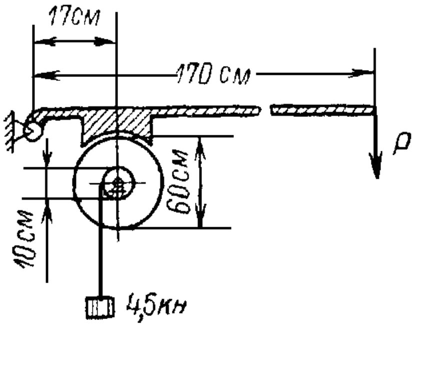
До задачі 6.10.

6.11. На барабан ворота намотаний трос, на кінці якого знаходиться вантаж вагою G = 4,5 кН. Визначити найменшу величину сили P, яку треба прикласти до рукояті колодкового гальма, аби барабан знаходився в стані рівноваги. Коефіцієнт тертя f = 0,5, вагою рукояті знехтувати, необхідні розміри вказані на рисунку.

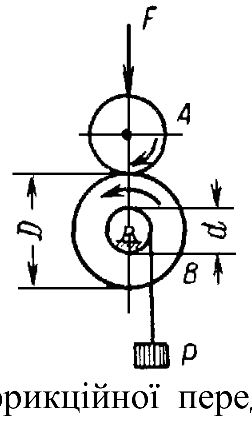
Відповідь: P = 150 Н.

6.12. З якою мінімальною силою F необхідно притиснути фрикційний шків A до шківу B, аби останній знаходився в стані рівноваги, якщо сила P = 500 Н, коефіцієнт тертя f = 0,5, співвідношення діаметрів D/d = 2?

Відповідь: F = 500 Н.

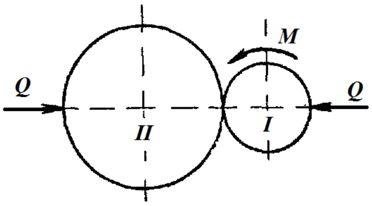


До задачі 6.11.



До задачі 6.12.

6.13. На циліндричні катки фрикційної передачі діють однакові за модулем сили Q, які утримують систему в стані граничної рівноваги. Визначити величину цих сил, якщо на каток I радіуса R = 0,25 см діє пара сил з моментом M = 80 Н·м, а коефіцієнт тертя між катками f = 0,5.

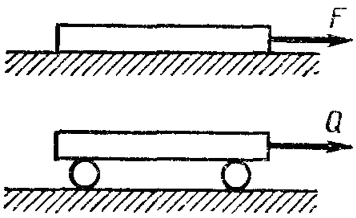


Відповідь: Q = 640 Н.

До задачі 6.13.

6.14. Визначити відношення між максимальними значеннями горизонтальних сил F і Q, прикладених до того ж самого важкого брусу, за яких віх буде залишатися в стані рівноваги безпосередньо на шорсткій поверхні і на циліндричних катках. Коефіцієнт тертя ковзання f = 0,1, коефіцієнт тертя кочення k = 0,005. Радіус кожного катка r = 5 см, вагу катків до уваги не брати.

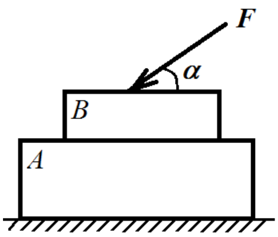
Відповідь: F/Q = 200.



До задачі 6.14.

6.15. На верхній грані прямокутного бруса A ваги P_1 = 300 Н знаходиться прямокутний брус B ваги P_2 = 100 Н. Брус A знаходиться на горизонтальній площині, причому коефіцієнт тертя між ними f_1 = 0,15. Коефіцієнт тертя між брусами A і B f_2 = 0,25. До бруса B прикладена сила F під кутом α = 45° до горизонту. Визначити, при якому максимальному значенні сили F верхній брус буде знаходитись в стані рівноваги.

Відповідь: F = 47,1 Н.



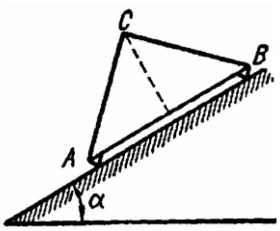
До задачі 6.15.

6.16. На верхній грані прямокутного бруса A ваги P_1 = 300 Н знаходиться прямокутний брус B ваги P_2 = 100 Н. Брус A знаходиться на горизонтальній площині, причому коефіцієнт тертя між ними f_1 = 0,15 (рис. до задачі 6.15). Коефіцієнт тертя між брусами A і B f_2 = 0,25. До бруса B прикладена сила F під кутом α = 45° до горизонту. Визначити, до якого максимального значення сили F нижній брус буде нерухомим відносно горизонтальної площини.

Відповідь: F = 100 Н.

6.17. На шорсткій похилій площині знаходиться призматичне тіло, з прикріпленими до нього виступами A і B. Визначити найбільший кут нахилу площини α, за якого можлива рівновага тіла, якщо $AB = BC = AC$, а коефіцієнти тертя між похилою площиною і виступами A і B відповідно дорівнюють f_1 і f_2.

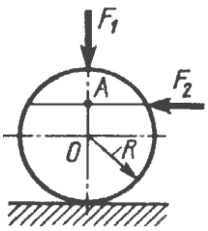
Відповідь: $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}(f_1 + f_2)}{f_2 - f_1 + 2\sqrt{3}}$.



До задачі 6.17.

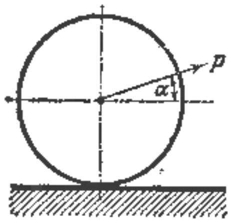
6.18. На однорідний каток вагою G = 2 кН діє горизонтальна сила F_2 = 10 Н і вертикальна сила F_1. Знайти найбільше за модулем значення сили F_1, необхідне для початку руху катка. Коефіцієнт тертя кочення k = 0,005 м, радіус катка R = 0,8 м, OA = 0,4 м.

Відповідь: F_1 = 400 Н.



До задачі 6.18.

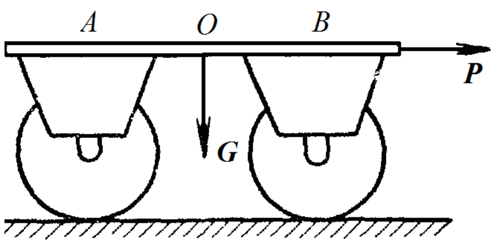
6.19. Визначити кут нахилу α сталевої площини до горизонту, при якому сталевий ролик радіуса 50 мм буде котитися рівномірно. Коефіцієнт тертя кочення k = 0,05 мм.
Відповідь: $\alpha = 3'26''$.
6.20. До однорідного катка вагою G = 4 кН прикладена пара сил з моментом M = 20 Н·м. Визначити найменший коефіцієнт тертя кочення, при якому каток буде знаходитись в стані рівноваги.
Відповідь: k = 0,5 см.
6.21. Визначити силу P, необхідну для рівномірного кочення циліндричного катка радіуса r = 50 см і ваги G = 300 Н по горизонтальній площині, якщо коефіцієнт тертя кочення k = 0,5 см. Кут між лінією дії сили P і горизонталлю α = 30°.
Відповідь: P = 5,72 Н.



До задачі 6.21.

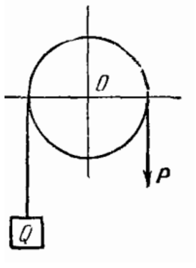
6.22. Під яким кутом α необхідно прикласти силу P = 4 Н до циліндричного катка радіуса r = 50 см і ваги G = 300 Н (рис. до задачі 6.21) для його рівномірного кочення по горизонтальній площині, якщо коефіцієнт тертя кочення між катком і поверхнею k = 0,5 см.
Відповідь: α = 48,6°.
6.23. Визначити силу P, необхідну для рівномірного кочення циліндричного катка радіуса r = 50 см і ваги G = 300 Н по горизонтальній площині (рис. до задачі 6.21), якщо коефіцієнт тертя кочення k = 0,5 см.
Відповідь: P = 3 Н.

6.24. Визначити величину горизонтальної сили P, під дією якої візок вагою G = 600 Н буде рухатись рівномірно по рейковій колії, якщо вага кожного колеса Q = 50 Н, радіус R = 30 см, $AO = OB$, коефіцієнт тертя кочення k = 0,5 см.
Відповідь: P = 10,8 Н.



До задачі 6.24.

6.25. На нерухомий циліндр навита мотузка, до одного з кінців якої прикріплений вантаж вагою Q = 800 Н. Скільки разів достатньо намотати мотузку на циліндр, аби втримати систему в рівновазі за допомогою сили P = 20 Н, прикладеної вертикально до іншого кінця мотузки. Коефіцієнт тертя мотузки о циліндр f = 0,25.
Відповідь: n = 2 рази.



До задачі 6.25.

РОЗДІЛ II. КІНЕМАТИКА

Глава 7. Кінематика точки

7.1. Загальні визначення кінематики

Кінематика – розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух абсолютно твердого тіла або матеріальної точки незалежно від діючих на них сил. Простір, в якому відбувається рух, вважається тривимірним, а всі вимірювання виконуються за законами евклідової геометрії.

Проміжок часу – перебіг часу між двома фізичними явищами.

Початковий час – момент початку відліку.

Рух – зміна положення тіла або точки в просторі з часом. Для визначення руху тіла або точки необхідно мати систему відліку.

Система відліку – годинник і тіло відліку, відносно якого розглядається рух даного тіла. Може бути як рухомою, так і умовно нерухомою. Рух тіла або точки напряму залежить від вибору системи відліку. Всі системи відліку прийнято поділяти на два типи:

1. *Інерціальні* – в них ізольована матеріально точка може нескінченно довго знаходитись у стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху. Завжди знаходяться у стані спокою або рухаються рівномірно і прямолінійно.
2. *Неінерціальні* – не мають властивостей попередніх систем.

Якщо в кожен момент часу можна визначити положення тіла відносно системи відліку, то рух вважається заданим (заданий закон руху).

Траєкторія – лінія, яку описує тіло або точка в процесі руху. За формою може бути прямолінійна або криволінійна.

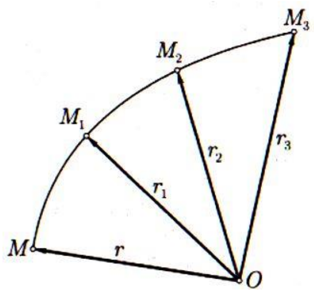
Основна задача кінематики: знаходження способів задання і визначення загальних кінематичних характеристик: положення, швидкості і прискорення.

7.2. Способи задання руху матеріальної точки, рівняння руху

Існує три способи задання руху матеріальної точки: векторний, координатний і натуральний.

7.2.1. *Векторний спосіб.*

Положення точки в просторі однозначно визначається радіус-вектором $\boldsymbol{r}$, проведеним з деякого нерухомого центру O в дану точку M (рис. 7.1). В процесі руху точки радіус-вектор змінюється за величиною і напрямком, а рівняння руху точки у векторній формі має вигляд



$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t). \tag{7.1}$$

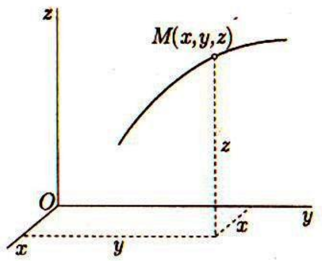
Годограф - лінія, утворена кінцями якого-небудь вектора при його русі. Тому, траєкторія точки M є годографом її радіус-вектора.

Рис. 7.1. Векторний спосіб задання руху.

Векторний спосіб завдання руху дуже зручний для обчислень, тому широко застосовується в кінематиці і динаміці.

7.2.2. *Координатний спосіб.*

Положення точки M в **декартовій системі** відліку $Oxyz$ описується через задання трьох координат x, y и z (рис. 7.2). Рівняння руху точки в декартових координатах



$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t). \tag{7.2}$$

Рух точки в площині описується двома першими рівняннями, якщо ж точка рухається прямолінійно, то досить одного рівняння.

Рис. 7.2. Задання руху в декартовій системі координат.

Якщо виразити з першого рівняння час

$$t = \varphi(x)$$

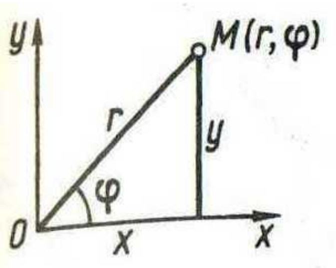
і підставити в два останні рівняння, то отримуємо

$$y = y(x),\quad z = z(x) \tag{7.3}$$

рівняння траєкторії точки в декартових координатах.

Положення точки M в **полярній системі** відліку описується через задання двох координат r і φ (рис. 7.3). Тоді рівняння руху точки

$$r = r(t),\quad \varphi = \varphi(t). \tag{7.4}$$



Якщо виразити з другого рівняння час і підставити у перше рівняння, то отримуємо

$$r = r(\varphi) \tag{7.5}$$

рівняння траєкторії точки в полярних координатах.

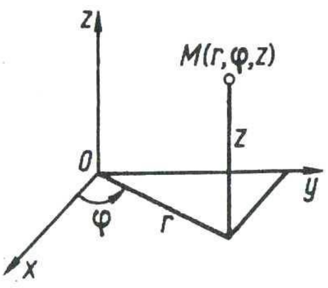
Рис. 7.3. Задання руху в полярній системі координат.

Перехід від декартових координат до полярних і навпаки проводять за формулами

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\qquad r = \sqrt{x^2 + y^2},\quad \varphi = arctg\frac{y}{x},\quad z = 0.$$

Положення точки M в **циліндричних координатах** описується через задання трьох координат r, φ і z (рис. 7.4). Тоді рівняння руху точки

$$r = r(t),\quad \varphi = \varphi(t),\ z = z(t). \tag{7.6}$$



Якщо виразити з першого рівняння час і підставити у друге рівняння, то отримуємо

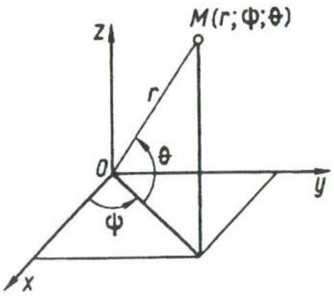
$$\varphi = \varphi(r),\quad z = z(r) \tag{7.7}$$

рівняння траєкторії точки в циліндричних координатах.

Рис. 7.4. Задання руху в циліндричних координатах.

Перехід від декартових координат до циліндричних і навпаки проводять за формулами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z(t); \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = arctg\frac{y}{x}, \quad z = z(t).$$



Положення точки M в **сферичних координатах** описується трьома координатами r, ψ і θ (рис. 7.5). Тоді рівняння руху точки

$$r = r(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t). \qquad (7.8)$$

Рис. 7.5. Задання руху в сферичних координатах.

Якщо виразити з першого рівняння час і підставити у друге рівняння, то отримуємо

$$\psi = \psi(r), \quad \theta = \theta(r) \qquad (7.9)$$

рівняння траєкторії точки в сферичних координатах.

Перехід від декартових координат до сферичних і навпаки проводять за формулами

$$x = r\cos\theta\cos\psi, \quad y = r\cos\theta\sin\psi, \quad z = r\sin\theta;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \psi = arctg\frac{y}{x}, \qquad \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \qquad (7.10)$$

7.2.3. *Натуральний спосіб.*

Якщо траєкторія точки наперед задана, то для визначення закону її руху достатньо вказати положення точки на даній траєкторії. Для цього треба визначити початок відліку O, вказати додатний і від'ємний напрями. Тоді положення точки M буде визначатися лише дуговою координатою s, яка відкладена по траєкторії від точки O (рис. 7.6).

Рівняння руху точки в натуральному виді

$$s = f(t), \qquad (7.11)$$

причому ця функція має бути однозначною, неперервною та диференційовною.

Дугову координату s не слід поєднувати із шляхом σ, який пройшла дана точка. Вони дорівнюють одне одному лише у випадку, коли точка M почала рух із центру O в додатному напрямі. Якщо ж в початковий момент часу точка займала положення M_0, а в кінцевий момент – положення M і рухалась в одному напрямку, то її шлях визначається за формулою

$$\sigma = |MM_0| = |OM - OM_0| = |s - s_0|.$$

Рис. 7.6. Задання руху при натуральному способі.

7.3. Швидкість і прискорення точки при різних способах задання руху

7.3.1. *Векторний спосіб*

Швидкість матеріальної точки – фізична величина, яка характеризує її переміщення за досить малий проміжок і в даний момент часу (або в даному місці), вона дорівнює першій похідній радіус-вектора точки за часом:

$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \qquad (7.12)$$

Швидкість спрямована по дотичній до траєкторії у бік руху точки. У випадку криволінійної траєкторії напрям вектора швидкості безперервно змінюється.

За одиницю виміру швидкості в системі СІ приймають метр за секунду (м/с). Також швидкість може виражатися у кілометрах за годину (км/год)

$$1[м/с] = \frac{18}{5}[км/год].$$

Середня швидкість точки за проміжок часу Δt визначається за формулою

$$\boldsymbol{\upsilon}_{сер} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}. \tag{7.13}$$

Середня швидкість лише наближено відображає характер дійсного руху точки.

Прискорення матеріальної точки – міра зміни швидкості точки, яка дорівнює першій похідній від швидкості за часом або другій похідній від радіус-вектора за часом

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt}. \tag{7.14}$$

За одиницю виміру прискорення в системі СІ приймають метр за секунду в квадраті (м/с^2). Оскільки прискорення точки дорівнює першій похідній швидкості, то воно напрямлене по дотичній до годографа швидкості.

Інколи використовують середнє прискорення тіла

$$\boldsymbol{a}_{сер} = \frac{\Delta \boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t}, \tag{7.15}$$

яке також досить наближено характеризує характер зміни швидкості і напрямлене за вектором $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$.

7.3.2. ***Координатний спосіб.***

Проекції швидкості точки на нерухомі осі **декартової системи координат** дорівнюють першим похідним відповідних координат за часом:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \qquad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \qquad \upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \tag{7.16}$$

Вектор швидкості точки можна записати через орти

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{i}\upsilon_x + \boldsymbol{j}\upsilon_y + \boldsymbol{k}\upsilon_z = \boldsymbol{i}\frac{dx}{dt} + \boldsymbol{j}\frac{dy}{dt} + \boldsymbol{k}\frac{dz}{dt}.$$

Модуль швидкості можна знайти по формулі

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Його напрямок визначають за допомогою напрямних косинусів

$$\cos(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{i}) = \frac{\upsilon_x}{\upsilon}, \; \cos(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{j}) = \frac{\upsilon_y}{\upsilon}, \; \cos(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{k}) = \frac{\upsilon_z}{\upsilon}.$$

Проекції прискорення точки на **декартові осі координат** дорівнюють першим похідним відповідних проекцій швидкості за часом на ті ж осі, або другим похідним відповідних координат даної точки за часом:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \dot{\upsilon}_x = \ddot{x}, \qquad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \dot{\upsilon}_y = \ddot{y}, \qquad a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \dot{\upsilon}_z = \ddot{z}.$$

Модуль і напрям прискорення визначається за формулами

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\upsilon_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\upsilon_z}{dt}\right)^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2},$$

$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}) = \frac{a_x}{a}, \ \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}) = \frac{a_y}{a}, \ \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}) = \frac{a_z}{a}.$$

Проекції швидкості точки на нерухомі осі **полярної системи координат** дорівнюють першим похідним відповідних координат за часом:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(r\cos\varphi)}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\varphi + r\frac{d(\cos\varphi)}{dt} = \upsilon_r\cos\varphi - r\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi = \upsilon_r\cos\varphi - \upsilon_\varphi\sin\varphi,$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(r\sin\varphi)}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\frac{d(\sin\varphi)}{dt} = \upsilon_r\sin\varphi + r\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi = \upsilon_r\sin\varphi + \upsilon_\varphi\cos\varphi.$$

Тут υ_r і υ_φ – проекції швидкості на радіальний і трансверсальний напрями відповідно (рис. 7.8).

Модуль вектора швидкості в полярних координатах

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_\varphi^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}.$$

Проекції прискорення точки на **полярні осі координат** дорівнюють:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \quad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Модуль прискорення визначається за формулою

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})^2}.$$

7.3.3. *Натуральний спосіб*

Кожній точці траєкторії відповідає певний радіус-вектор, тому за даного способу задання руху для вектора швидкості маємо

$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \boldsymbol{\tau}\frac{ds}{dt} = \boldsymbol{\tau}\dot{s}, \tag{7.17}$$

де $\boldsymbol{\tau}$ – орт, який вказує додатний напрямок руху.

Модуль швидкості дорівнює абсолютному значенню похідної від дугової координати точки за часом

$$|\boldsymbol{\upsilon}| = \left|\frac{ds}{dt}\right|.$$

Теорема: повне прискорення точки при натуральному способі задання руху дорівнює векторній сумі дотичного (тангенціального) та нормального (доцентрового) прискорень

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_\tau. \tag{7.18}$$

Нормальне прискорення направлене убік угнутості траєкторії до центра кривини. Воно характеризує зміну швидкості за напрямом, а його модуль

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}. \tag{7.19}$$

Нормальне прискорення існує лише при криволінійному русі точки.

Дотичне прискорення направлене убік руху точки по дотичній до траєкторії. Воно характеризує зміну швидкості за величиною, його модуль дорівнює другій похідній від дугової координати за часом або першій похідній від проекції швидкості на дотичну за часом

$$a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d\upsilon_\tau}{dt}. \tag{7.20}$$

Оскільки дотична завжди перпендикулярна до радіусу, то модуль повного прискорення точки і його напрям визначаються по теоремі Піфагора

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon_\tau}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{R}\right)^2},$$

$$\cos(a,\tau) = \frac{a_\tau}{a}, \cos(a,n) = \frac{a_n}{a}. \tag{7.21}$$

Якщо рух точки заданий координатним способом, то рівняння руху точки по траєкторії має вигляд

$$s = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{7.22}$$

Питання для самоконтролю

1. В чому полягає основна задача кінематики точки?
2. Які існують способи задання руху?
3. Який спосіб задання руху зручно використовувати при заданій наперед траєкторії точки?
4. В яких випадках зручно використовувати полярну систему координат?
5. Яка існує залежність між радіус-вектором точки і її прискоренням?

Завдання № 7. «Кінематика точки»

Рекомендації до розв'язання задач

Рівняння руху задано **натуральним способом**.

1. Для визначення швидкості, нормального і дотичного прискорень як функції від часу або в певний момент часу необхідно знайти похідні від рівняння руху (7.11) по формулам (7.17), (7.19) – (7.21).

2. У випадку, коли відома траєкторія точки і необхідно віднайти закон її руху по заданій швидкості чи прискоренню, задача розв'язується шляхом інтегрування заданої функції. При цьому мають бути задані початкові або кінцеві умови для визначення констант інтегрування.

Рівняння руху задано **координатним способом**.

1. Необхідно отримати рівняння траєкторії точки, виключивши з вихідних рівнянь час.
2. Шляхом диференціювання вихідних рівнянь визначити проекції швидкостей і прискорень на координатні осі.
3. По теоремі Піфагора визначити абсолютні величини швидкості й прискорення.
4. У випадку, коли необхідно віднайти рівняння траєкторії точки і закон її руху по заданій швидкості чи прискоренню, задача розв'язується шляхом інтегрування заданої функції. При цьому мають бути задані початкові або кінцеві умови для визначення констант інтегрування.

Рівняння руху задано **векторним способом**.

1. В цьому випадку швидкості і прискорення визначаються шляхом диференціювання вихідного рівняння (7.1) по формулам (7.12) і (7.14).
2. Закон руху точки по траєкторії визначають по формулі (7.22).

<u>Приклад розв'язання задачі</u>

Задача 1. Знайти рівняння траєкторії точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = 2t, \qquad y = 5t.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.

Розв'язання

Аби знайти рівняння траєкторії точки, достатньо виключити з рівнянь час. З першого рівняння знаходимо

$$t = \frac{x}{2},$$

після чого підставляємо в друге рівняння

$$y = 5\frac{x}{2} = 2{,}5x \Rightarrow y - 2{,}5x = 0.$$

Дане рівняння є рівнянням прямої лінії.

Для знаходження начального положення точки необхідно в рівняння руху підставити нульове значення часу

$$x_0 = 2 \cdot 0 = 0; \qquad y_0 = 5 \cdot 0 = 0.$$

Початкове положення точки M_0 (0;0).

Знаходимо проекції швидкості на осі декартової системи координат

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(2t)}{dt} = 2\left(\frac{м}{с}\right); \; \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(5t)}{dt} = 5\left(\frac{м}{с}\right).$$

Абсолютну швидкість знаходимо по теоремі Піфагора

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} = 5{,}4\left(\frac{м}{с}\right).$$

Знаходимо проекції прискорення на осі декартової системи координат

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d(2)}{dt} = 0\left(\frac{м}{с^2}\right); \qquad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d(5)}{dt} = 0\left(\frac{м}{с^2}\right).$$

Абсолютне прискорення також знаходимо по теоремі Піфагора

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = \sqrt{0} = 0\left(\frac{м}{с}\right).$$

Задачу розв’язано.

Задача 2. Визначити траєкторію, швидкість і прискорення точки, рух якої задано рівняннями в полярних координатах

$$r = t^2\,(м), \qquad \varphi = 2t\,(рад).$$

Розв’язання

Аби знайти рівняння траєкторії точки, достатньо виключити з рівнянь час. З другого рівняння знаходимо

$$t = \frac{\varphi}{2},$$

після чого підставляємо в перше рівняння

$$r = \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{\varphi^2}{4}.$$

Знаходимо перші похідні від рівнянь руху в полярній системі координат

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\left(t^2\right)}{dt} = 2t; \qquad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(2t)}{dt} = 2.$$

Закон зміни швидкості знаходимо по наступній формулі

$$\upsilon = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} = \sqrt{(2t)^2 + t^4 \cdot 4} = \sqrt{4t^2 + 4t^4} = 2t\sqrt{1 + t^2}\ (м/с).$$

Знаходимо другі похідні за часом від радіус-вектора *r* і полярного кута φ

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d(2t)}{dt} = 2;\ \ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d(2)}{dt} = 0.$$

Закон зміни прискорення знаходимо по формулі

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})^2} = \sqrt{\left(2 - t^2 \cdot 4\right)^2 + (2 \cdot 2t \cdot 2 + 0)^2} =$$

$$\sqrt{4 - 16t^2 + 16t^4 + 64t^2} = \sqrt{4 + 48t^2 + 16t^4} = 2\sqrt{1 + 12t^2 + 4t^4}\ (м/с^2).$$

Завдання № 7 до РГР

7.1. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = 3t, \qquad y = 2t.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $2x - 3y = 0$; $\upsilon = 3,6$ м/с; $a = 0$ м/с^2.

7.2. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = 3 + t, \qquad y = t^2 + 2t + 1.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $y = x^2 - 4x + 4$; $\upsilon = 3,6$ м/с; $a = 2$ м/с^2.

7.3. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = t^2 + 2, \qquad y = t^2 + 1.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $x - y - 1 = 0$; $\upsilon = 0$ м/с; $a = 2,83$ м/с^2.

7.4. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = 3\cos 2t, \qquad y = 3\sin 2t.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $x^2 + y^2 = 9$; $\upsilon = 6$ м/с; $a = 12$ м/с^2.

7.5. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = \cos 2t, \qquad y = 2\sin 2t.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $x^2 + y^2/4 = 1$; $\upsilon = 4$ м/с; $a = 4$ м/с^2.

7.6. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = \cos^2 t, \qquad y = \sin 2t.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $4x - 4x^2 = y^2$; $\upsilon = 2$ м/с; $a = 4{,}47$ м/с^2.

7.7. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = \sin\frac{\pi t}{4}, \quad y = 3\cos\frac{\pi t}{4}.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $x^2 + y^2/9 = 1$; $\upsilon = \pi/4$ м/с; $a = 3\pi^2/16$ м/с^2.

7.8. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = 2\sin\frac{\pi t}{2}, \ \ y = 2\cos\frac{\pi t}{2}.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $x^2 + y^2 = 4$; $\upsilon = \pi$ м/с; $a = \pi^2/2$ м/с^2.

7.9. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = e^t + e^{-t}, \ \ y = e^t - e^{-t}.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $y(x - y)^2 = 2x$; $\upsilon = 2$ м/с; $a = 2$ м/с^2.

7.10. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = 2e^t, \qquad y = 2e^{-t}.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $yx = 4$; $\upsilon = 2{,}83$ м/с; $a = 2{,}83$ м/с^2.

7.11. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = \sqrt{t}, \qquad y = e^{-t}.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в момент часу $t = 1$ с.

Відповідь: $y = e^{-x^2}$; $\upsilon = 0{,}62\ м/с$; $a = 0{,}45\ м/с^2$.

7.12. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = 4t, \qquad y = \frac{1}{t+2}.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $y(x+8) = 4$; $\upsilon = 4{,}01$ м/с; $a = 0{,}25$ м/с^2.

7.13. Визначити траєкторію, швидкість і прискорення точки, рух якої задано рівняннями в полярних координатах

$$r = 3e^t, \qquad \varphi = \frac{t}{2}.$$

Відповідь: $r = 3e^{2\varphi}$; $\upsilon = 1{,}5e^t\sqrt{5}$; $a = \frac{15}{4}e^t$.

7.14. Визначити траєкторію, швидкість і прискорення точки, рух якої задано рівняннями в полярних координатах

$$r = 2t, \varphi = 3t.$$

Відповідь: $r = \frac{2\varphi}{3}$; $\upsilon = 2\sqrt{1+9t^2}$; $a = 6\sqrt{4+9t^2}$.

7.15. Визначити траєкторію, швидкість і прискорення точки, рух якої задано рівняннями в полярних координатах

$$r = t, \quad \varphi = 5t.$$

Відповідь: $r = \frac{\varphi}{5}$; $\upsilon = \sqrt{1+25t^2}$; $a = 5\sqrt{4+25t^2}$.

7.16. Визначити траєкторію, швидкість і прискорення точки, рух якої задано рівняннями в полярних координатах

$$r = 2\sin t, \quad \varphi = \frac{t}{3}.$$

Відповідь: $r = 2\sin 3\varphi$; $\upsilon = \frac{2}{3}\sqrt{1+8\cos^2 t}$; $a = \frac{4}{9}\sqrt{9+16\sin^2 t}$.

7.17. Визначити траєкторію, швидкість і прискорення точки, рух якої задано рівняннями в полярних координатах

$$r = 2 - 4\cos t, \qquad \varphi = t.$$

Відповідь: $r = 2 - 4\cos\varphi$; $\upsilon = \sqrt{20 - 16\cos t}$; $a = \sqrt{68 - 32\cos t}$.

7.18. Рівняння руху точки задане у векторній формі

$$\boldsymbol{r} = (2t - 4)\boldsymbol{i} + (3 + 2t)\boldsymbol{j}.$$

Визначити траєкторію точки, а також її абсолютну швидкість і прискорення.

Відповідь: $y - x - 7 = 0$; $\upsilon = 2{,}83$ м/с; $a = 0$ м/с^2.

7.19. Рівняння руху точки задане у векторній формі

$$\boldsymbol{r} = t^2\boldsymbol{i} + 2t^3\boldsymbol{j}.$$

Визначити траєкторію точки, а також її абсолютну швидкість і прискорення в момент часу $t = 1$ с.

Відповідь: $y = 2x^{3/2}$; $\upsilon = 3{,}6$ м/с; $a = 2{,}5$ м/с^2.

7.20. Рівняння руху точки задане у векторній формі

$$\boldsymbol{r} = \cos t\boldsymbol{i} + \sin 2t\boldsymbol{j}.$$

Визначити траєкторію точки, а також її абсолютну швидкість і прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $4x^2 - 4x^4 = y^2$; $\upsilon = 2$ м/с; $a = 1$ м/с^2.

7.21. Рівняння руху точки задане у векторній формі

$$\boldsymbol{r} = 3\cos t^3\,\boldsymbol{i} + \sin 2t^3\,\boldsymbol{j}.$$

Визначити траєкторію точки, а також її абсолютну швидкість і прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $x^2/9 + y^2/4 = 1$; $\upsilon = 0$ м/с; $a = 0$ м/с^2.

7.22. Рівняння руху точки задане у векторній формі

$$\boldsymbol{r} = \cos 2t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j}.$$

Визначити траєкторію точки, а також її абсолютну швидкість і прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $x = \cos 2y$; $\upsilon = 1$ м/с; $a = 4$ м/с^2.

7.23. Визначити рівняння руху точки по траєкторії, а також значення дугової координати s в момент часу $t = 5$ с, якщо прискорення точки задане рівнянням

$$a = 2t + 1\left(м/с^2\right).$$

Швидкість точки в початковий момент часу дорівнювала нулю, а її положення співпадало із початком відліку.

Відповідь: $s = t^3/3 + t^2/2$ м; $s_5 = 54{,}2$ м.

7.24. Визначити рівняння руху точки по траєкторії, а також значення дугової координати s і шлях x в момент часу t = 5 с, якщо швидкість точки задана рівнянням

$$\upsilon = 2t + 1\,(м/с).$$

Відповідь: $s = t^2 + t$ м; $s(5)$ = 30 м; x = 30 м.

7.25. Визначити рівняння руху точки по траєкторії, а також значення дугової координати s в момент часу t = 6 с, якщо швидкість точки задана рівнянням

$$\upsilon = t^2 - 2t - 1\,(м/с).$$

Відповідь: $s = t^3/3 - t^2 - t$ м; $s(6)$ = 30 м.

Глава 8. Найпростіші рухи твердого тіла

Тверде тіло – тіло, у якого відстань між його будь-якими двома точками не змінюється в процесі руху. Всі рухи тіл можна розділити на вільні та невільні – обмежені накладеними в'язами.

Число ступенів вільності – число незалежних параметрів, які однозначно визначають положення твердого тіла в просторі. Вільне тверде тіло має шість степеней вільності.

Розрізняють п'ять видів руху твердого тіла: поступальний, обертальний, плоскопаралельний, сферичний та рух вільного тіла. До найпростіших рухів твердого тіла належать поступальний та обертальний рухи.

8.1. Поступальний рух твердого тіла

Поступальний – такий рух твердого тіла, при якому будь-яка пряма, проведена в тілі, залишається протягом усього часу руху паралельна своєму початковому положенню.

Теорема: при поступальному русі всі точки твердого тіла описують однакові (співпадаючі при паралельному переносі) траєкторії і в кожен момент часу мають рівні швидкості і прискорення.

Ця теорема дозволяє звести вивчення руху твердого тіла до вивчення руху окремої точки тіла, оскільки рівняннями поступального руху тіла є рівняння руху однієї точки (зазвичай центру ваги тіла)

$$x = f(t),\ \ y = f(t),\ \ z = f(t).$$

Точки тіла при поступальному русі описують будь-які траєкторії, у тому числі і прямі, тому прямолінійний рух є окремим випадком поступального руху.

8.1.1. *Прямолінійний поступальний рух*

Прямолінійний – рух тіла, при якому його траєкторією є пряма лінія. Положення будь-якої точки при такому русі визначається однією координатою, а тому рівняння руху має вигляд

$$x = f(t). \tag{8.1}$$

Види прямолінійного руху:

1. *Прямолінійний рівномірний* – рух тіла по прямій лінії з постійною швидкістю

$$\upsilon = \text{const}.$$

Прискорення точки за такого руху дорівнює нулю, а положення точки у будь-який момент часу визначається по формулі

$$x = x_0 + \upsilon t, \tag{8.2}$$

тому графіком пройденої відстані є пряма лінія.

2. *Прямолінійний рівнозмінний* – рух тіла по прямій лінії з постійним прискоренням

$$\upsilon \neq \text{const}, \ \ a = \text{const}.$$

Швидкість тіла змінюється в часі за законом

$$\upsilon = \upsilon_0 + at, \tag{8.3}$$

а координата тіла у будь-який момент часу визначається співвідношенням

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + at^2/2, \tag{8.4}$$

тому графіком пройденої відстані є парабола. Прискорення тіла може бути як додатним, так і від’ємним.

При прямолінійному русі тіла нормальне прискорення відсутнє, тому його абсолютне прискорення дорівнює дотичному

$$a = a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}. \tag{8.5}$$

Прикладом прямолінійного рівнозмінного руху є прямолінійний гармонійний коливальний рух. Іншим випадком поступального руху є криволінійний рух.

8.1.2. *Криволінійний поступальний рух*

Криволінійний – рух тіла, при якому його траєкторією є будь-яка непряма лінія.

Види криволінійного руху:

1. *Плоский* – число рівнянь руху тіла дорівнює двом. Рівняння плоского криволінійного руху в декартових координатах

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

2. *Просторовий* – число рівнянь руху тіла дорівнює трьом. Рівняння просторового криволінійного руху в декартових координатах

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

При криволінійному русі окрім дотичного прискорення має місце ще і нормальне прискорення

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}. \tag{8.6}$$

За характером криволінійний рух поділяють на два види:

1. *Рівномірний криволінійний рух* – тіло рухається по кривій з постійною швидкістю, тоді повне прискорення дорівнює нормальному

$$a = a_n = \frac{\upsilon^2}{R}, \qquad a_\tau = 0.$$

2. *Рівнозмінний криволінійний рух* – тіло рухається по кривій зі змінною швидкістю, а повне прискорення знаходиться як геометрична сума нормального і дотичного прискорень. Модуль повного прискорення тіла

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{R}\right)^2}. \qquad (8.7)$$

Якщо напрям дотичного прискорення збігається з напрямом швидкості, то рух є рівноприскореним, інакше – рівносповільненим.

8.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі – такий рух, при якому пряма, що проходить через які-небудь дві точки OO_1 під час руху залишається нерухомою. Ця пряма є віссю обертання.

Положення тіла при його обертанні навколо нерухомої осі визначається кутом повороту φ, який вважають додатним при обертанні проти ходу годинникової стрілки.

Кінематичне *рівняння обертального руху тіла* навколо нерухомої осі

$$\varphi = \varphi(t). \qquad (8.8)$$

Одиницею виміру кута повороту φ в системі СІ є радіан (рад).

Кутова швидкість – фізична величина, яка характеризує зміну кута повороту з часом і дорівнює першій похідній за часом від кута повороту

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \qquad (8.9)$$

Одиницею виміру кутової швидкості є радіан за секунду (рад/с).

Рівномірне обертання – обертання, при якому кутова швидкість є сталою величиною (ω = const). Рівняння рівномірного обертання тіла навколо нерухомої осі

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \qquad (8.10)$$

де φ_0 – початковий кут повороту. Кутова швидкість також визначає напрям обертання: якщо $\omega > 0$ – тіло обертається в напрямі зростання кута повороту, а при $\omega < 0$ – навпаки. Інколи використовують середню кутову швидкість за певний проміжок часу

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

За рівномірного обертання середня і миттєва кутові швидкості однакові.

В техніці замість кутової швидкості часто застосовують частоту обертання *n*, яка вимірюється в обертах за хвилину (об/хв) і пов’язана з кутовою швидкістю співвідношенням

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \qquad (8.11)$$

Найбільш повільні обертання зустрічаються в зоряному світі. Так Сонце робить 1 оберт навколо центра Галактики за 180 мільйонів років. В техніці мають місце найшвидші обертання – декілька мільйонів обертів за хвилину (гіроскопи Гюгенара в магнітному полі).

Кутова швидкість є ковзним вектором, напрям якого збігається із віссю обертання і визначається за правилом правого гвинта.

Кутове прискорення – фізична величина, яка характеризує змінення кутової швидкості з часом і дорівнює першій похідній за часом від кутової швидкості або другій похідній за часом від кута повороту

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \qquad (8.12)$$

Одиницею виміру кутового прискорення є радіан за секунду в квадраті (рад/с^2).

Кутове прискорення теж є ковзним вектором, напрямленим вздовж осі обертання. Якщо напрями векторів $\boldsymbol{\omega}$ і $\boldsymbol{\varepsilon}$ співпадають, то обертання є *прискореним*, якщо протилежні – то с*повільненим*. При $\boldsymbol{\varepsilon}$ = 0 обертання стає рівномірним.

Рівнозмінне обертання – обертання, при якому кутове прискорення не змінюється ($\boldsymbol{\varepsilon}$ = const). Рівняння рівнозмінного обертання тіла навколо нерухомої осі

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \qquad \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \qquad (8.13)$$

де ω_0 – початкова кутова швидкість.

Траєкторіями точок тіла при обертанні навколо нерухомої осі є кола, площини яких перпендикулярні до осі обертання. Центри кіл знаходяться в точках перетину осі обертання з указаними площинами.

Відстань, яку проходить точка при повороті на кут φ

$$s = R\varphi, \qquad (8.14)$$

де R – радіус обертання.

Лінійна швидкість – швидкість будь-якої точки, що здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі. Якщо дана точка знаходиться на ободі тіла, яке обертається, то її швидкість називають *коловою*. Швидкість за визначенням

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega. \qquad (8.15)$$

Лінійна швидкість при обертанні навколо нерухомої осі напрямлена по дотичній до траєкторії в бік обертання.

Лінійне прискорення – прискорення будь-якої точки, яка здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі. Прискорення при такому русі зручно знаходити, скориставшись натуральним способом задання руху

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n.$$

Дотичне прискорення характеризує зміну швидкості за величиною

$$a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2(R\varphi)}{dt^2} = R\frac{d^2\varphi}{dt^2} = R\varepsilon$$

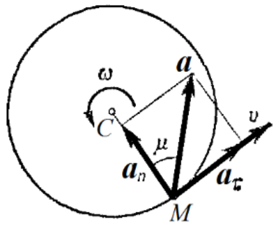
і має місце лише за прискореного або сповільненого обертання.

Нормальне прискорення характеризує зміну швидкості за напрямом

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2$$

і завжди має місце при обертальному русі. Тоді модуль лінійного прискорення

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(R\omega^2\right)^2 + (R\varepsilon)^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \qquad (8.16)$$



Напрям лінійного прискорення визначається кутом μ, утвореним між ним і нормальним прискоренням (рис. 12.1)

$$\mu = arctg\frac{a_\tau}{a_n} = arctg\frac{R\varepsilon}{R\omega^2} = arctg\frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Рис. 12. 1. Прискорення при обертальному русі.

Питання для самоконтролю

1. Яку траєкторію мають точки твердого тіла при поступальному русі?
2. Який взаємозв'язок між лінійними і кутовими швидкостями при обертанні тіла навколо нерухомої осі?
3. Які механізми перетворюють обертальний рух у поступальний.
4. Як визначається прискорення точки при обертальному русі?

Завдання № 8. «Найпростіші рухи твердого тіла»

<u>Рекомендації до розв'язання задач</u>

А. Поступальний рух тіла.

1. Якщо по заданому закону поступального руху (8.2) необхідно визначити лінійні швидкість і прискорення, то така задача розв'язується шляхом послідовного диференціювання закону руху, результатом якого є формули (8.3) і (8.5).
2. Якщо по заданому прискоренню тіла, яке рухається поступально, необхідно визначити його закон руху, то така задача розв'язується шляхом послідовного інтегрування формул (8.3) і (8.5). В цьому випадку мають бути задані початкові або кінцеві умови для визначення констант інтегрування.
3. У випадку криволінійного руху абсолютне прискорення визначається по теоремі Піфагора, як геометрична сума дотичного і нормального прискорень. Складові абсолютного прискорення знаходяться по формулам (8.5) і (8.6) відповідно.

Б. Обертальний рух тіла.

1. Якщо по заданому закону обертального руху (8.8) необхідно визначити кутові швидкість і прискорення, то така задача розв'язується шляхом послідовного диференціювання закону руху по формулам (8.9) і (8.12).
2. Якщо по заданому кутовому прискоренню тіла, яке обертається, необхідно визначити його закон руху, то така задача розв'язується шляхом послідовного інтегрування формул (8.9) і (8.12). В цьому випадку мають бути задані початкові або кінцеві умови для визначення констант інтегрування.

3. Якщо необхідно перетворити обертальний рух одного тіла в обертальний рух іншого тіла, то така задача розв'язується з використанням формул зубчастих механізмів чи передач із гнучкими в'язами

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{d_1}{d_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

<u>Приклад розв'язання задачі (поступальний рух)</u>

Задача 1. Повзун рухається по прямолінійній напрямній з прискоренням

$$a=2\sin 4t \text{ м/с}^2.$$

Знайти рівняння руху повзуна, якщо його початкова швидкість υ_0 дорівнює 6 м/с, а початкове положення співпадає з початком відліку.

Розв'язання

Даний тип задач відноситься до п. 2 рекомендацій і розв'язується інтегруванням закону зміни прискорення. Спочатку визначимо швидкість руху повзуна по напрямній

$$a=\frac{d\upsilon}{dt}\Rightarrow\int\limits_{\upsilon_0}^{\upsilon}d\upsilon=\int\limits_0^t a dt.\quad \upsilon-\upsilon_0=\int\limits_0^t 2\cos 4t dt=\left(\frac{2\sin 4t}{4}\right)_0^t=0{,}5\sin 4t.$$

$$\upsilon=\upsilon_0+0{,}5\sin 4t=6+0{,}5\sin 4t.$$

Закон руху повзуна по напрямній визначимо за допомогою інтегрування останньої формули

$$\upsilon=\frac{dx}{dt}\Rightarrow\int\limits_0^x dx=\int\limits_0^t \upsilon dt.\qquad x=\int\limits_0^t(6+0{,}5\sin 4t)dt=\left(6t-\frac{0{,}5\cos 4t}{4}\right)_0^t=$$

$$=6t-\frac{0{,}5\cos 4t}{4}+\frac{0{,}5}{4}=6t+0{,}125(1-\cos 4t)\ (м).$$

Задачу розв'язано.

<u>Приклад розв'язання задачі (обертальний рух)</u>

Задача 2. Махове колесо починає обертатися прискорено із стану спокою із кутовим прискоренням ε = 5 рад/с^2. За який час t_1 частота обертання колеса буде дорівнювати n = 960 об/хв? Скільки часу t_2 має обертатися колесо з таким прискоренням, аби здійснити 500 обертів?

Розв'язання

1. Визначимо кутову швидкість, яка відповідає частоті обертання колеса n

$$\omega=\frac{\pi n}{30}=\frac{3{,}14\cdot 960}{30}=100{,}5\ (рад/с).$$

Оскільки за умов задачі колесо обертається із стану спокою, то початкова кутова швидкість ω_0 = 0 рад/с. Із формули для кутової швидкості прискореного руху знайдемо час, за який колесо досягне швидкості ω

$$\omega=\omega_0+\varepsilon t_1=\varepsilon t_1\Rightarrow t_1=\frac{\omega}{\varepsilon}=\frac{100{,}5}{5}=20{,}1\ (c).$$

2. Визначимо кутове переміщення при 500 обертах колеса

$$\varphi=2\pi N=2\cdot 3{,}14\cdot 500=3140\ (рад).$$

Із формули для кута повороту при прискореному русі знайдемо час, за який колесо зробить 500 обертів

$$\varphi = \omega_0 t_2 + \frac{\varepsilon t_2^2}{2} = \frac{\varepsilon t_2^2}{2} \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2\varphi}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3140}{5}} = 35{,}4\ (c).$$

Задачу розв’язано.

Завдання № 8 до РГР

8.1. На якій відстані від центру грози звук грому чутно через 8 с після того, як спостерігач помітив сполох блискавки? Швидкість звуку в повітрі дорівнює приблизно 340 м/с.
Відповідь: s = 2 720 м.

8.2. За який час стругальна машина зніме 1 шар з дошки шириною 0,9 м і довжиною 6 м, якщо різець машини шириною 5 мм рухається рівномірно зі швидкістю 0,54 м/с? На зворотному ході різець не працює і рухається зі швидкістю 1,08 м/с.
Відповідь: t = 3 000 с.

8.3. Мотоцикліст, рухаючись з постійною швидкістю 20 м/с, проїхав на червоне світло повз контрольний пункт, порушивши правила дорожнього руху. Через 4 с з контрольного поста за ним рушила машина з постійним прискоренням, яка настигла порушника через 1 000 м. Через який час машина настигла порушника, чому дорівнювало її прискорення і швидкість в момент затримки порушника?
Відповідь: t = 50 с, a = 0,95 м/с^2, υ = 43,7 м/с.

8.4. Камінь, кинутий із моста, за умов вільного падіння досягає поверхні води через 2,5 с. За який час він досягне поверхні води, якщо кинути його вниз зі швидкістю 1 м/с?
Відповідь: t = 2,42 с.

8.5. Для визначення глибини ущелини в неї кидають камінь без початкової швидкості, одночасно вмикаючи секундомір. Звук від падіння каменя був зафіксований через 7,9 с. Визначити глибину ущелини, вважаючи швидкість звука в повітрі постійною і рівною 340 м/с.
Відповідь: h = 259,5 м.

8.6. Матеріальна точка рухається по колу радіуса R = 10 м, причому закон руху має вигляд

$$s = 10t - 2{,}5t^2 \text{ м.}$$

Визначити абсолютне прискорення точки в момент часу t = 0,5 с.
Відповідь: a = 7,53 м/с^2.

8.7. Повзун рухається по прямолінійній напрямній з прискоренням

$$a = -9{,}86\sin 1{,}57t \text{ м/с}^2.$$

Знайти рівняння руху повзуна, якщо його початкова швидкість дорівнює 6,28 м/с, а початкове положення співпадає з початком відліку.
Відповідь: $x = 4\sin 1{,}57t$ м.

8.8. Шахтна кліть рухається зі швидкістю 12 м/с. Який шлях s після зупинки електродвигуна пройде кліть, якщо її прискорення дорівнює -1,2 м/с^2? Який час t вона буде рухатися до зупинки?
Відповідь: $s = 60$ м; $t = 10$ с.

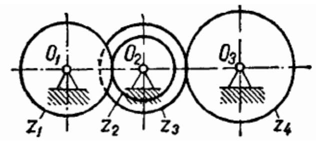
8.9. Швидкість вертикального занурення підводного човна

$$\upsilon = 2\left(1 - e^{-4t}\right) \text{ м/с}.$$

Визначити залежність відстані, пройденої підводним човном, від часу і прискорення човна, як функцію його швидкості.
Відповідь: $s = 2t - 0{,}5(1 - e^{-4t})$; $a = 4(2 - \upsilon)$ м/с^2.

8.10. Вал діаметра $d = 60$ см обертається рівномірно із частотою $n = 1\,200$ об/хв. Визначити швидкість і прискорення точок вала на його поверхні.
Відповідь: $\upsilon = 37{,}7$ м/с, $a = 4\,732{,}6$ м/с^2.

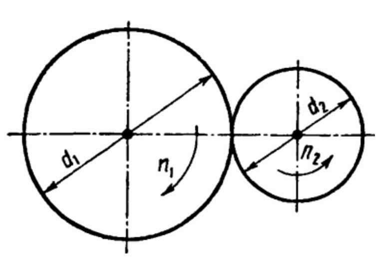
8.11. Шестерні скріплені між собою і обертаються навколо паралельних нерухомих осей. Ведуча шестірня 1 обертається із кутовою швидкістю $\omega_1 = 1{,}57$ рад/с. Знайти кутову швидкість ω_4 веденої шестерні і передаточне число u усього механізму. Кількість зубців на шестернях $z_1 = 30$, $z_2 = 20$, $z_3 = 25$, $z_4 = 60$.
Відповідь: $\omega_4 = 0{,}98$ рад/с, $u = 1{,}6$.



До задачі 8.11.

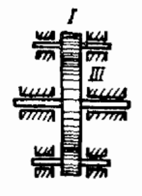
8.12. Вал починає обертатися рівноприскорено із стану спокою і за перші 14 с робить $N = 120$ обертів. З яким кутовим прискоренням обертається вал і яку кутову швидкість він отримав за цей час?
Відповідь: $\varepsilon = 7{,}69$ рад/с^2, $\omega = 107{,}6$ рад/с.

8.13. Каток фрикційної передачі діаметром $d_1 = 420$ мм обертається із частотою $n_1 = 180$ об/хв. Чому має дорівнювати діаметр другого катка, якщо його частота обертання $n_2 = 600$ об/хв? Визначити також прискорення точок на ободі кожного з катків.
Відповідь: $d_2 = 0{,}126$ м, $a_1 = 74{,}2$ м/с^2, $a_2 = 248{,}5$ м/с^2.



До задачі 8.13.

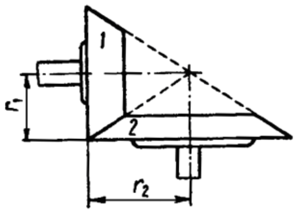
8.14. Корабельний зубчастий редуктор складається з трьох коліс: перше має діаметр 20 см і обертається з частотою 7 200 об/хв, друге робить 4 000 об/хв, третє – 600 об/хв. Визначити діаметри другого і третього коліс.
Відповідь: $d_2 = 0{,}036$ м, $d_3 = 0{,}24$ м.



До задачі 8.14.

8.15. Махове колесо, яке оберталось із частотою 950 об/хв, при гальмуванні почало обертатися сповільнено і зупинилося через 30 с. Визначити кутове прискорення і кількість обертів, зроблених колесом до зупинки.
Відповідь: ε = - 3,31 рад/с^2, N = 237,6 обертів.

8.16. Визначити, за який час t конічне зубчасте колесо 1 радіуса r_1 = 20 мм отримає частоту обертання n_1 = 2 900 об/хв, якщо воно приводиться до руху із стану спокою зубчастим колесом 2 радіуса r_2 = 40 мм, яке обертається з кутовим прискоренням 2 рад/с^2.
Відповідь: t = 76,4 с.



До задачі 8.16.

8.17. Вал електродвигуна обертається згідно рівняння

$$\varphi = 5t + 1{,}2t^3 \ (рад).$$

Визначити, за який час його кутова швидкість стане ω = 70 рад/с, чому в цей час буде дорівнювати кутове прискорення і скільки обертів зробить вал?
Відповідь: t = 4,3 с, ε = 30,6 рад/с^2, N = 18,6 обертів.

8.18. Електричний вентилятор, який обертався з кутовою швидкість 50 рад/с, після виключення струму зробив 40 обертів і зупинився. Скільки часу пройшло до моменту зупинки вентилятора і яким було його кутове прискорення, якщо рух вентилятора можна вважати рівносповільненим?
Відповідь: t = 12 с, ε = 5,23 рад/с^2.

8.19. Чому дорівнює початкова кутова швидкість шківа і його кутове прискорення, якщо обертаючись рівносповільнено, він зупинився через 8 с, зробивши при цьому 24 оберти?
Відповідь: ω_0 = 37,7 рад/с, ε = 4,7 рад/с^2.

8.20. Шків коливається навколо своєї осі згідно рівняння

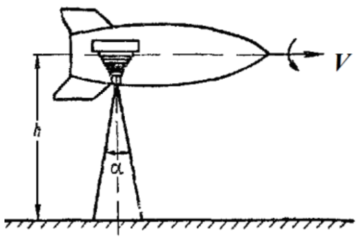
$$\varphi = 2\sin \pi t \ \text{рад.}$$

Визначити максимальну величину повного прискорення точки шківа, яка відстоїть від осі обертання на відстані 10 см.
Відповідь: a_{max} = 4,41 м/с^2.

8.21. Вантаж підіймається за допомогою мотузки, намотаної на блок радіуса r = 15 см без початкової швидкості з прискоренням a = 0,3 м/с^2 = const. Визначити кутове прискорення блока і нормальне прискорення точки на його поверхні через 5 с після початку руху.
Відповідь: ε = 2 рад/с^2, a_n = 15 м/с^2.

8.22. Штучний супутник обертається навколо Землі на висоті h = 500 км по коловій орбіті. Визначити час одного повного обертання і його швидкість, якщо його доцентрове прискорення дорівнює прискоренню вільного падіння на даній висоті (g = 8,5 м/с^2). Радіус Землі R = 6 370 км.
Відповідь: t = 5 646 с, υ = 7 642 м/с.

8.23. Пристрій для фотографування хмарного покрову Землі рухається горизонтально зі швидкістю 7 550 м/с на висоті 800 км і при цьому рівномірно обертається навколо власної осі. Оптична вісь перпендикулярна до осі апарату, знімок робиться кожен раз, коли об'єктив займає найнижче положення. З якою кутовою швидкістю має обертатися пристрій навколо своєї осі, аби при фотографуванні не перекривалися сусідні кадри, якщо кут зйомки α = 1°?
Відповідь: ω = 3,4 рад/с.



До задачі 8.23.

Глава 9. Складний рух матеріальної точки

9.1. Загальні визначення складного руху

Для дослідження найпростіших видів руху твердого тіла або точки достатньо однієї системи координат (декартової, полярної, циліндричної або сферичної). Але у ряді випадків для розв'язання задач є зручним розглядати рух точки або тіла по відношенню одночасно до двох систем координат, одна з яких нерухома, а друга рухається певним чином по відношенню до першої.

Розглянемо точку M, яка довільним чином рухається по відношенню до системи відліку $Oxyz$. Ця система, у свою чергу, рухається відносно нерухомої системи відліку $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 9.1).

Відносний рух - рух, що здійснює точка M по відношенню до рухомої системи координат $Oxyz$. Такий рух бачить спостерігач, який переміщається разом з цією системою. Швидкість і прискорення точки M по відношенню до системи відліку $Oxyz$ будуть відносною швидкістю і відносним прискоренням відповідно. При обчисленні відносної швидкості і прискорення рух осей $Oxyz$ до уваги не беруть.

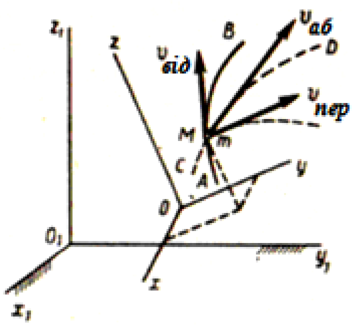


Рис. 9.1. Складний рух точки.

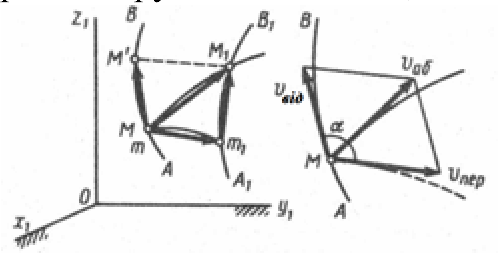
Переносний рух – рух рухомої системи $Oxyz$ (або незмінно пов'язаного з нею тіла) відносно нерухомої системи відліку $O_1x_1y_1z_1$. Тоді переносні швидкість і прискорення – це швидкість і прискорення довільної точки M, незмінно зв'язаної з рухомою системою $Oxyz$, відносно нерухомої системи.

Абсолютний (складний) рух – рух, що здійснюється точкою M по відношенню до нерухомої системи відліку $O_1x_1y_1z_1$. Траєкторія CD цього руху буде абсолютною траєкторією, швидкість і прискорення точки M по відношенню до нерухомої системи – це абсолютні швидкість і прискорення.

Основна задача складного руху точки: визначення залежностей між кінематичними характеристиками абсолютного, переносного і відносного рухів.

9.2. Теорема про додавання швидкостей

Нехай точка M при русі здійснила відносне переміщення уздовж траєкторії AB, визначуване вектором MM' (рис. 9.2). Крім того, рухаючись разом з рухомими осями, вона перейшла в нове положення A_1B_1. В результаті точка отримала абсолютне переміщення MM_1.



Теорема про додавання швидкостей: при складному русі абсолютна швидкість точки дорівнює геометричній сумі відносної і переносної швидкостей:

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_{від} + \boldsymbol{\upsilon}_{пер}. \tag{9.1}$$

Рис. 9.2. Теорема про додавання швидкостей.

Вектори відносної і переносної швидкостей спрямовані по дотичних до своїх траєкторій, а абсолютна швидкість визначається за правилом паралелограма. У аналітичному виді модуль абсолютної швидкості визначається по формулі:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_{від}^2 + \upsilon_{пер}^2 + 2\upsilon_{від}\upsilon_{пер}\cos\alpha}\,, \tag{9.2}$$

де α - кут між векторами відносної і переносної швидкостей.

9.3. Теорема про додавання прискорень (Коріоліса)

Для знаходження абсолютного прискорення точки при складному русі диференціюємо рівняння (9.1)

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\upsilon_{â³ä}}{dt} + \frac{d\upsilon_{ïåð}}{dt} = \boldsymbol{a}_{â³ä} + \boldsymbol{a}_{ïåð} + 2\omega_{ïåð} \times \upsilon_{â³ä}. \tag{9.3}$$

Відносне прискорення $\boldsymbol{a}_{від}$ характеризує зміну відносної швидкості тільки при відносному русі. Рух осей $Oxyz$, тобто переносний рух, при цьому до уваги не беруть.

Переносне прискорення $\boldsymbol{a}_{пер}$ характеризує зміну переносної швидкості тіла, незмінно зв'язаного з рухомою системою відліку $Oxyz$, в процесі його переносного руху. Відносний рух при цьому до уваги не беруть.

Коріолісове (поворотне) прискорення – подвоєний векторний добуток переносної кутової швидкості рухомої системи на відносну швидкість точки

$$\boldsymbol{a}_{кор} = 2(\boldsymbol{\omega}_{пер} \times \boldsymbol{\upsilon}_{від}). \tag{9.4}$$

Прискорення Коріоліса характеризує зміну відносної швидкості точки при її переносному русі і зміну переносної швидкості точки при її відносному русі.

Теорема Коріоліса: абсолютне прискорення точки при складному русі дорівнює геометричній сумі відносного, переносного і коріолісова прискорень.

9.4. Визначення модуля і напрямку прискорення Коріоліса

Модуль коріолісова прискорення згідно властивостей векторного добутку буде дорівнювати

$$a_{кор} = 2|\omega_{пер}|\cdot|\upsilon_{від}|\cdot sin\alpha, \tag{9.5}$$

де α – кут між векторами $\boldsymbol{\omega}_{пер}$ і $\boldsymbol{\upsilon}_{від}$.

Вектор коріолісова прискорення перпендикулярний площині, яка проходить через вектори $\boldsymbol{\omega}$ і $\boldsymbol{\upsilon}_{від}$ (рис. 9.3). Напрям прискорення Коріоліса зручніше знаходити за **правилом Жуковського**: щоб знайти напрям коріолісова прискорення, слід спроектувати відносну швидкість точки $\boldsymbol{\upsilon}_{від}$ на площину, перпендикулярну осі переносного обертання, і повернути цю проекцію на 90° у бік переносного обертання.

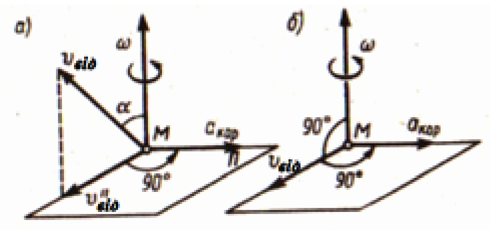


Рис. 9.3. Визначення напряму $a_{кор}$ за правилом Жуковського.

Якщо відносна траєкторія – це плоска крива, яка переміщується увесь час у своїй площині, то кут α = 90°, і тоді модуль коріолісова прискорення

$$a_{кор} = 2|\omega_{пер}|\cdot|\upsilon_{від}|.$$

В такому випадку напрям вектора коріолісова прискорення можна знайти, повернувши вектор відносної швидкості на 90° у напрямк0443 переносного обертання.

Випадки **перетворення в нуль** прискорення Коріоліса:

1. Коли переносний рух рухомої системи координат $Oxyz$ є поступальним, тобто

$$\boldsymbol{\omega}_{пер} = 0.$$

2. Коли відносна швидкість в даний момент перетворюється на нуль, тобто

$$\boldsymbol{\upsilon}_{від} = 0.$$

3. Коли відносний рух відбувається по напряму, паралельному до осі обертання переносного руху, тобто вектори $\boldsymbol{\omega}_{пер}$ і $\boldsymbol{\upsilon}_{від}$ є колінеарними

$$\alpha = 0 \text{ або } \alpha = 180°.$$

В усіх цих випадках абсолютне прискорення визначається по формулі:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{від} + \boldsymbol{a}_{пер}.$$

Коріолісове прискорення характеризує зміну відносної швидкості точки через переносний непоступальний рух і зміну модуля і напряму переносної швидкості через її відносний рух.

Коріолісове прискорення отримують усі точки і тіла, які рухаються по поверхні Землі, оскільки обертання Землі є для них переносним рухом. Так кориолисове прискорення викликає додаткові рухи часток води: до правого берега в північній півкулі і до лівого берега в південній (закон Бера). Тому в північній півкулі лівий берег є крутим, а правий – пологим незалежно від напрямку течії ріки.

Коріолісовим прискоренням також обумовлене переважне стирання правої рейки залізничних колій у північній півкулі і лівої – у південній. Але таке явище можна фіксувати лише у двоколійних залізних дорогах, де рух потягів по даній колії завжди в одному напрямку. Переважне стирання рейки має місце незалежно від напряму прокладання дороги.

Оскільки кутова швидкість переносного руху (обертання Землі) невелика

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 0{,}000073\left(\frac{рад}{с}\right),$$

то дію прискорення Коріоліса можна визначити або за великих відносних швидкостей руху, або коли ця дія має місце протягом тривалого часу.

В північній півкулі поворотне прискорення викликає відхилення тіл, які вільно падають, до сходу. Приміром, при падінні на широті 45° з висоти у 80 м тіло зміститься на схід приблизно на 3 см.

Наявність поворотної сили, викликаної обертанням Землі, призводить до того, що сила тяжіння тіла і сила його ваги відрізняються саме на величину сили Коріоліса. Крім того, виникає поворотна сила, викликана обертанням Землі навколо Сонця, але вона значно менша за поворотну силу від добового обертання, тому її до уваги не беруть.

Питання для самоконтролю

1. У яких випадках необхідно розглядати рух точки як складний?
2. У чому полягає основна задача складного руху?
3. Як визначається абсолютна швидкість точки при складному русі?
4. Назвіть фізичні причини виникнення коріолісова прискорення.
5. В яких випадках прискорення Коріоліса дорівнює нулю?

Завдання № 9. «Складний рух матеріальної точки»

Рекомендації до розв’язання задач

А. Розв’язання задач на теорему про складання швидкостей.

1. Розкласти рух на складові, визначити абсолютний, переносний і відносний рухи.
2. Обрати дві системи координат – абсолютну, яка вважається умовно нерухомою, і рухому.
3. Подумки зупинити переносний рух і знайти швидкість відносного руху точки.
4. Не звертаючи уваги на відносний рух знайти швидкість переносного руху точки.
5. Визначити абсолютну швидкість точки за допомогою теореми (9.1).

Б. Розв’язання задач на теорему про складання прискорень.

1. Розкласти рух на складові, визначити абсолютний, переносний і відносний рухи.
2. Обрати дві системи координат – абсолютну, яка вважається умовно нерухомою, і рухому.
3. Подумки зупинити переносний рух і знайти швидкість і прискорення відносного руху точки.

4. Не звертаючи уваги на відносний рух знайти кутову швидкість і прискорення переносного руху точки.
5. Визначити прискорення Коріоліса по формулі (9.5).
6. За допомогою метода проекцій визначити проекції абсолютного прискорення точки на координатні осі.
7. Визначити абсолютну швидкість точки та її напрямок за допомогою знайдених проекцій на координатні осі.

<u>Приклад розв'язання задачі</u>

Задача 1. Круглий циліндр радіуса R = 30 см обертається навколо вертикальної осі $0z$ з кутовою швидкістю, які змінюється по закону

$$\omega = 0{,}5t^2 \ \ (\frac{рад}{с}).$$

По гвинтовому пазу на поверхні циліндра рухається точка M, причому довжина її траєкторії MM_0 змінюється по закону

$$s = 0{,}2t^2 \ \ (м).$$

Дотична до гвинтової лінії складає кут γ = 30° з твірною циліндра. Визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки в момент часу t = 5 с.

Розв'язання

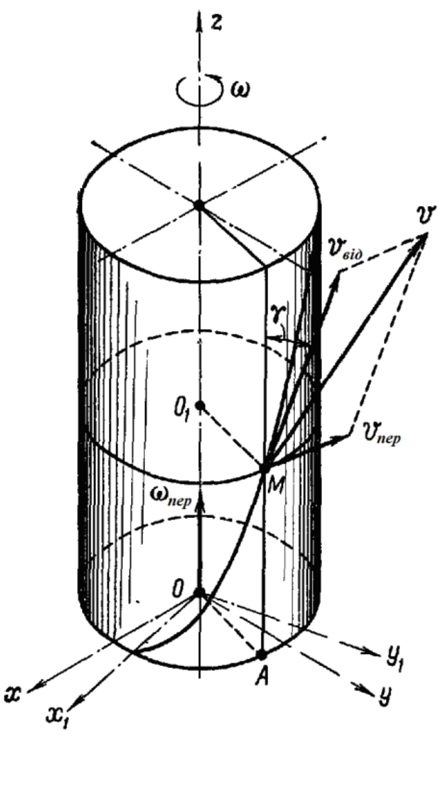
1. Визначення модуля і напрямку абсолютної швидкості.

Визначимо складові руху точки M в даній задачі. Переносним рухом буде обертання точки разом з циліндром навколо осі z з кутовою швидкістю ω. Для описання переносного руху оберемо рухому систему координат Ox_1y_1z. Переносна швидкість при обертальному русі завжди направлена по дотичній до траєкторії в сторону обертання і знаходиться по формулі

$$\upsilon_{пер} = \omega R = 0{,}5t^2 \cdot R = 0{,}5 \cdot 25 \cdot 0{,}3 = 3{,}8 \left(\frac{м}{с^2}\right).$$

Подумки зупиняємо переносний рух системи. Відносним рухом буде рух точки M по гвинтовому пазу умовно нерухомого циліндра. Відносну швидкість визначимо як першу похідну від дугової координати

$$\upsilon_{від} = \frac{ds}{dt} = \frac{d\left(0{,}2t^2\right)}{dt} = 0{,}4t = 0{,}4 \cdot 5 = 2 \left(\frac{м}{с}\right).$$



Відносна швидкість спрямована по дотичній до гвинтової лінії (рис. 9.4).

Напрямок абсолютної швидкості знайдемо за правилом паралелограма, а її модуль визначимо по формулі

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_{пер}^2 + \upsilon_{від}^2 + 2\upsilon_{пер}\upsilon_{від}\cos\alpha} =$$

$$= \sqrt{3{,}8^2 + 2^2 + 2 \cdot 3{,}8 \cdot 2 \cdot \cos 60°} = 5{,}1\,(м/с),$$

де α = 90° - γ = 60° – кут між векторами відносної і переносної швидкості.

Рис. 9.4. До визначення абсолютної швидкості.

2. Визначення модуля і напрямку абсолютного прискорення.

Визначимо модуль кутового прискорення переносного руху точки M (обертання навколо осі z) в заданий момент часу

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\left(0{,}5t^2\right)}{dt} = t = 5\left(\frac{рад}{c^2}\right).$$

При нерівномірному обертанні матеріальної точки навколо нерухомої осі її прискорення має дві складові – дотичну і нормальну

$$\boldsymbol{a}_{пер} = \boldsymbol{a}_{пер}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{пер}^{n}.$$

Дотична складова переносного прискорення характеризує зміну переносної швидкості за величиною, вона спрямована по дотичній до кругового перерізу циліндра, а її модуль визначається по формулі

$$a_{пер}^{\tau} = \varepsilon R = 5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5\ \left(\text{м/с}^2\right).$$

Нормальна складова переносного прискорення характеризує зміну переносної швидкості за напрямом, вона спрямована по радіусу до центра циліндра, а її модуль визначається по формулі

$$a_{пер}^{n} = \frac{\upsilon_{пер}^2}{R} = \frac{3{,}8^2}{0{,}3} = 48{,}1\ \left(\text{м/с}^2\right).$$

Відносне прискорення матеріальної точки також має дві складові – дотичну і нормальну

$$\boldsymbol{a}_{від} = \boldsymbol{a}_{від}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{від}^{n}.$$

Дотична складова відносного прискорення характеризує зміну величини відносної швидкості точки при русі по гвинтовому пазу, вона спрямована по дотичній до гвинтової лінії, а її модуль визначається по формулі

$$a_{від}^{\tau} = \frac{d\upsilon_{від}}{dt} = \frac{d(0{,}4t)}{dt} = 0{,}4\ \left(\text{м/с}^2\right).$$

Нормальна складова відносного прискорення характеризує зміну відносної швидкості за напрямом, вона спрямована по радіусу до центра циліндра, а її модуль визначається по формулі

$$a_{від}^{n} = \frac{\upsilon_{від}^2}{\rho} = \frac{\upsilon_{від}^2}{4R} = \frac{2^2}{4 \cdot 0{,}3} = 0{,}33\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right),$$

де ρ – радіус кривини гвинтової лінії, який визначається по формулі

$$\rho = \frac{R}{\sin^2\gamma} = \frac{R}{\sin^2 30^\circ} = \frac{R}{(1/2)^2} = 4R.$$

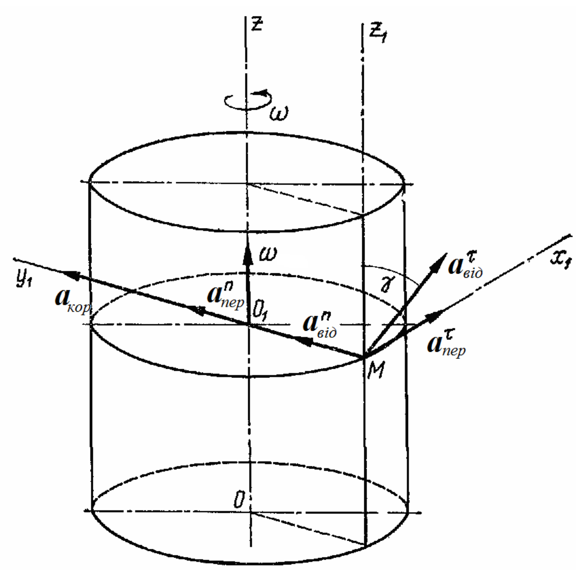


Рис. 9.5. До визначення абсолютного прискорення.

Оскільки вектори переносної кутової швидкості і відносної швидкості не паралельні, а утворюють кут γ, то буде мати місце коріолісове прискорення, модуль якого визначається по формулі (9.7)

$$a_{кор} = 2\omega\upsilon_{від}\sin\gamma = 2\cdot 0{,}5t^2\cdot 2\sin 30° = 2\cdot 0{,}5\cdot 25\cdot 2\cdot 1/2 = 25\ \left(\text{м/с}^2\right).$$

Аби визначити напрям прискорення Коріоліса, треба спроектувати вектор відносної швидкості на горизонтальну площину, після чого повернути на 90° проти годинникової стрілки. Прискорення Коріоліса буде спрямоване по радіусу циліндра у тому ж напрямку, що й два нормальні прискорення.

Згідно теореми Коріоліса про складання прискорень маємо

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{від} + \boldsymbol{a}_{пер} + \boldsymbol{a}_{кор} = \boldsymbol{a}^n_{від} + \boldsymbol{a}^\tau_{від} + \boldsymbol{a}^n_{пер} + \boldsymbol{a}^\tau_{пер} + \boldsymbol{a}_{кор}.$$

Для знаходження модуля абсолютного прискорення спроектуємо всі складові прискорень на осі системи координат Ox_1y_1z:

$$a_x = a^\tau_{від}\cos(90° - \gamma) + a^\tau_{пер} = 0{,}4\cdot\cos 60^0 + 1{,}5 = 1{,}7\ \left(\text{м/с}^2\right);$$

$$a_y = a^n_{від} + a^n_{пер} + a_{кор} = 0{,}33 + 48{,}1 + 25 = 73{,}43\ \left(\text{м/с}^2\right);$$

$$a_z = a^\tau_{від}\cos\gamma = 0{,}4\cdot\cos 30^0 = 0{,}35\ \left(\text{м/с}^2\right).$$

Модуль абсолютного прискорення знайдемо по теоремі Піфагора

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{1{,}7^2 + 73{,}43^2 + 0{,}35^2} = 73{,}45\ \left(\text{м/с}^2\right).$$

Задачу розв'язано.

<u>Завдання № 9 до РГР</u>

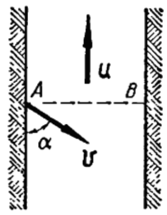
9.1. Вниз за течією ріки рухається човен із власною швидкістю 4 км/год. Швидкість течії ріки 2 км/год. Визначити швидкість човна відносно берега і відстань, яку пройде човен вздовж берега за 20 хвилин.
Відповідь: υ = 6 км/год, s = 2 км.

9.2. Відстань у 60 км між двома портами на річці корабель проходить без зупинки за течією за t_1 = 2 години, проти течії – за t_2 = 4 години. Визначити швидкість течії річки і власну швидкість корабля.
Відповідь: $\upsilon_{теч}$ = 7,5 км/год, $\upsilon_{кор}$ = 22,5 км/год.

9.3. Каплі дощу при вертикальному падінні залишають на склі вагона потяга сліди під кутом α = 30° до вертикалі. Визначити, з якою швидкістю падають каплі, якщо швидкість потяга в даний момент $\upsilon_{пот}$ = 11 м/с.
Відповідь: υ = 18,5 м/с.

9.4. Пасажир потягу, який рухається зі швидкістю 140 км/год, протягом 6 с спостерігав зустрічний потяг довжиною 400 м. Визначити швидкість зустрічного потягу.
Відповідь: υ = 100 км/год.

9.5. Човен перепливає річку шириною 235 м, тримаючи курс під кутом α відносно берега. Через 150 с він пристає до точки B, яка лежить на прямій AB, перпендикулярній до берега. Визначити кут α і швидкість човна відносно води, якщо швидкість течії 3,25 м/с постійна по всій ширині річки.

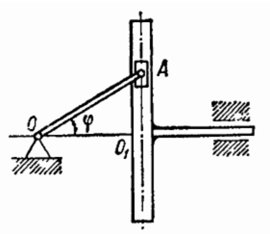


Відповідь: $\alpha = 60°$, $\upsilon = 1{,}8$м/с.

До задачі 9.5.

9.6. Кривошип OA довжиною 12 см обертається по закону

$$\varphi = \frac{\pi t^2}{3}\ (рад),$$



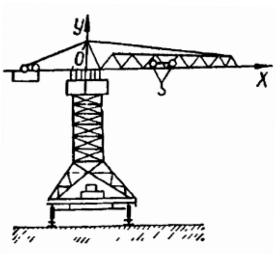
чим приводить до руху кулісу. Визначити швидкість куліси і швидкість повзуна A відносно куліси в момент часу $t = 5$ с.

Відповідь: $\upsilon_K = 1{,}09$ м/с, $\upsilon_A = 0{,}63$ м/с.

До задачі 9.6.

9.7. Візок рухається по стрілі крану згідно рівняння

$$x = 20\sin^2 0{,}08t\ (м).$$



Визначити абсолютну швидкість візка в момент часу $t = 10$ с, якщо стріла крану обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю ω = 0,08 рад/с.

Відповідь: $\upsilon = 1{,}76$ м/с.

До задачі 9.7.

9.8. Обертання диску навколо власної осі відбувається по закону

$$\varphi = 1{,}5t^2\ \ (рад).$$

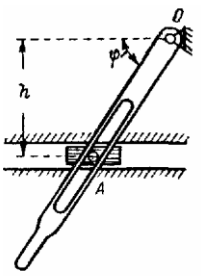
В той же час, уздовж радіуса диску по напрямку від центру до ободу рухається матеріальна точка M, причому її рух відносно диску задається рівнянням

$$s = \left(1 + t^2\right)\ (см).$$

Визначити абсолютну швидкість цієї точки в момент часу $t = 1$ с.

Відповідь: $\upsilon = 6{,}32$ см/с.

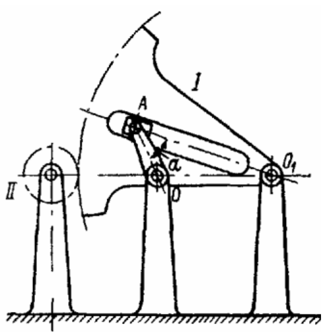
9.9. Повзун A переміщується по прямолінійним напрямним за допомогою важеля, який обертається навколо нерухомої осі O. Визначити швидкість повзуна, як функцію кута повороту важеля φ, якщо в даний момент його кутова швидкість ω, а відстань від осі O до напрямних дорівнює h.



Відповідь: $\upsilon = \dfrac{\omega h}{\sin^2\varphi}$.

До задачі 9.9.

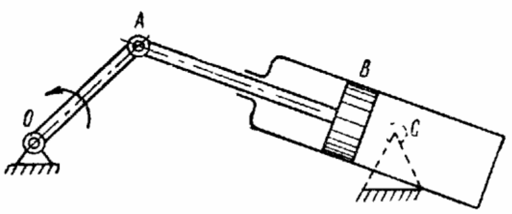
9.10. Реверсивна передача з зубчастим сектором радіуса R = 60 см приводиться до руху кривошипом OA, який обертається навколо нерухомої осі O з постійною кутовою швидкістю ω = 5 рад/с. Цапфа A кривошипу ковзає по коливній кулісі. Визначити кутову швидкість колеса II радіуса r = 10 см в момент, коли α = 30°, якщо OO_1 = 1,5 OA.



Відповідь: ω = 11,4 рад/с.

До задачі 9.10.

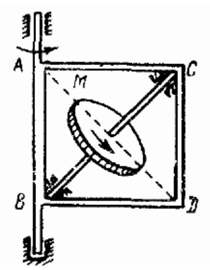
9.11. В поршневому двигуні з коливним циліндром кривошип OA обертається з частотою 300 об/хв. Визначити величину прискорення Коріоліса в той момент, коли кривошип і циліндр утворюють з горизонталлю кути 30° і 15° відповідно. Рухому систему координат зв'язати з циліндром.



Відповідь: $a_{кор}$ = 51,1 м/с^2.

До задачі 9.11.

9.12. Квадратна рама із стороною a = 10 см обертається навколо осі AB с постійною кутовою швидкістю ω_1 = 5 рад/с. Навколо осі BC, яка співпадає з діагоналлю рами, обертається диск радіуса R = 3,5 см з постійною кутовою швидкістю ω_2 = 7 рад/с. Визначити абсолютне прискорення точки M, яка в даний момент часу знаходиться на диску в площині рами.



Відповідь: a = 3,36 м/с^2.

До задачі 9.12.

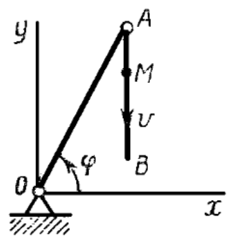
9.13. Кривошип OA = 15 см обертається навколо горизонтальної осі по закону

$$\varphi = \pi t \ (рад).$$

По вертикальному стержню AB, шарнірно з'єднаному з кривошипом, рухається точка M, швидкість якої змінюється по закону

$$\upsilon = 1{,}5t \ (м/с).$$

Визначити абсолютну швидкість, абсолютне і коріолісове прискорення точки M в момент часу t = 1 с.

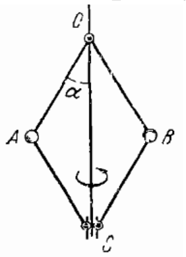


Відповідь: υ = 1,95 м/с, $a_{кор}$ = 0 м/с^2, a = 2,10 м/с^2.

До задачі 9.13.

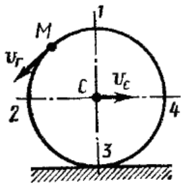
9.14. При пуску головного корабельного двигуна кулі відцентрового регулятора Ватта розходяться на кут α, який змінюється по закону $\alpha = 0{,}035t + 0{,}0017t^2 \ (рад)$. Кут повороту регулятора навколо власної осі також є функцією часу $\varphi = 0{,}3t^3 \ (рад)$.

Визначити абсолютні швидкість і прискорення куль регулятора, вважаючи їх матеріальними точками, якщо довжина стержнів OA = OB = AC = BC = 0,9 м. *Відповідь*: υ = 40,5 м/с, a = 3 646 м/с^2.



До задачі 9.14.

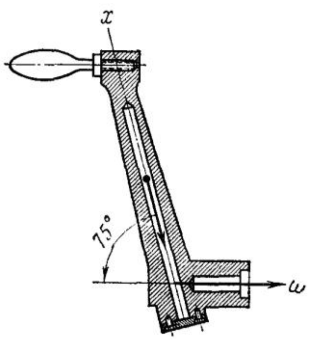
9.15. Колесо котиться без ковзання по прямолінійній рейці, швидкість його центру постійна і дорівнює $\upsilon_C = 2$ м/с. По ободу колеса рухається матеріальна точка M з постійною по модулю швидкістю $\upsilon = 3$ м/с. Знайти абсолютну швидкість точки M в чотирьох положеннях, вказаних на рисунку.



Відповідь: $\upsilon_1 = 1$ м/с, $\upsilon_2 = 1$ м/с, $\upsilon_3 = 3$ м/с, $\upsilon_4 = 5$ м/с.

До задачі 9.15.

9.16. По всій довжині ручки молочного сепаратора просвердлений циліндричний канал, в який поміщено сигнальну кульку. При недостатній частоті обертання ручки кулька б'ється о дзвоник, який закриває канал знизу. Визначити прискорення Коріоліса кульки, якщо ручка нахилена до власної осі обертання під кутом 75° і має частоту обертання $n = 45$ об/хв. Кулька рухається по каналу по закону



$$x = 0{,}22\sin\varphi + 0{,}36e^{-\varphi}\ \ (м).$$

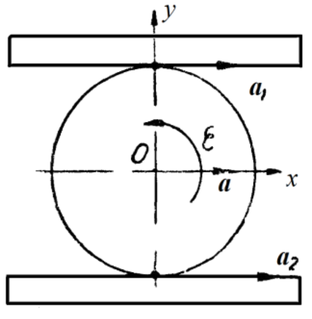
Відповідь: $a_{кор} = 9{,}42\cos\varphi - 15{,}3e^{-\varphi}\ \ (м).$

До задачі 9.16.

9.17. Залізничний потяг рухається рівномірно зі швидкістю 36 км/год. Під час руху зривається з кронштейна сигнальний ліхтар, підвішений до останнього вагону. Визначити траєкторію руху ліхтаря і відстань s, яку пройде потяг за час його падіння, якщо ліхтар знаходився на висоті 4,9 м. Вісі координат провести через початкове положення ліхтаря: Оx – в напрямку руху потягу, Оy – вертикально вниз.

Відповідь: $y = 0{,}049x^2$, $s = 10$ м.

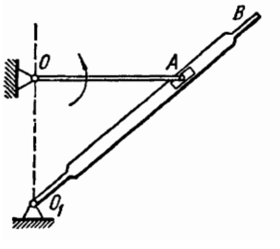
9.18. Зубчасте колесо радіуса $R = 0{,}5$ м затиснуте між двома паралельними рейками, які ковзають в один і той же бік з прискореннями $a_1 = 1{,}5$ м/с^2 і $a_2 = 2{,}5$ м/с^2. Знайти прискорення центра колеса O і його кутове прискорення. Прямолінійний рух системи координат разом із центром O вважати переносним.



Відповідь: $a = 2$ м/с^2, $\varepsilon = 1$ рад/с^2.

До задачі 9.18.

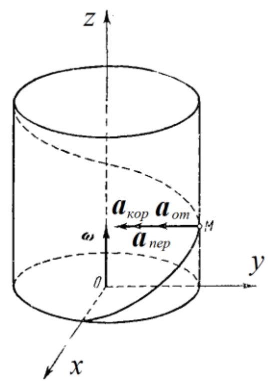
9.19. Кривошип OA кулісного механізму обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = 3{,}38$ рад/с, приводячи до руху повзун A і кулісу O_1B. Визначити відносне прискорення повзуна і кутове прискорення куліси в момент, коли OA перпендикулярно до OO_1, якщо $OA = 10$ см, $OO_1 = 24$ см.



Відповідь: $a = 0{,}37$ м/с^2, $\varepsilon = 2{,}86$ рад/с^2.

До задачі 9.19.

9.20. Циліндр обертається навколо осі z с постійною кутовою швидкістю ω_z = 2 рад/с. По поверхні циліндра рухається точка M, рівняння руху якої задані координатним способом



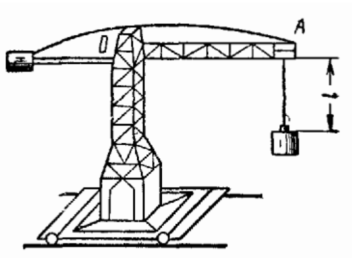
$$x_1 = 3\cos 2t,\ y = 3\sin 2t,\ z = 3t$$

відносно осей рухомої системи координат, яка обертається разом з циліндром. Визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M, якщо вісь z_1 співпадає із віссю симетрії циліндра.

Відповідь: υ = 25,5 м/с, a = 206,5 м/с^2.

До задачі 9.20.

9.21. Кран рухається по прямолінійним рейкам із прискоренням a = 0,5 м/с^2 і одночасно обертається навколо власної осі з кутовою швидкістю ω = 0,5 рад/с. Довжина частини троса, що звисає з стріли крана, змінюється по закону



До задачі 9.21.

$$l = 15 - t^2\ \ (м).$$

Виліт крану OA дорівнює R = 8 м. Визначити абсолютне прискорення вантажу в момент, коли стріла крана паралельна рейкам.

Відповідь: a = 4,03 м/с^2.

Глава 10. Плоскопаралельний рух твердого тіла

10.1. Рівняння плоскопаралельного руху

Плоскопаралельний (плоский) – рух твердого тіла, при якому усі його точки рухаються паралельно деякій фіксованій площині Oxy. Плоский рух здійснюють багато частин машин (шатун в кривошипно-шатунному механізмі, колесо на прямолінійній ділянці і так далі). Обертання твердого тіла є частковим випадком плоскопаралельного руху.

Для вивчення руху усього тіла досить розглянути рух плоского перерізу S, паралельного фіксованій площині Oxy.

Положення усієї фігури S визначається положенням проведеного на ній відрізку AB (рис. 10.1). Положення самого відрізку можна визначити, знаючи координати x_A і y_A точки A і кут φ, утворений відрізком з віссю x. Точку A, яку обрали для визначення положення відрізку, називають *полюсом*.

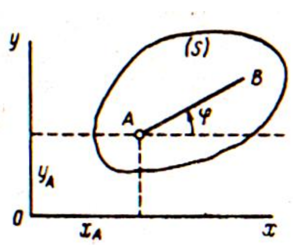


Рис. 10.1. Плоскопаралельний рух тіла.

При русі тіла координати точки A і кут φ змінюються, тому рівняння плоскопаралельного руху має вигляд

$$x_A = f(t),\ y_A = f(t),\ \varphi = f(t). \qquad (10.1)$$

Перші два рівняння описують поступальний рух точки A (φ = const), а третє рівняння описує обертання твердого тіла навколо нерухомого полюса A (x_A і y_A = const).

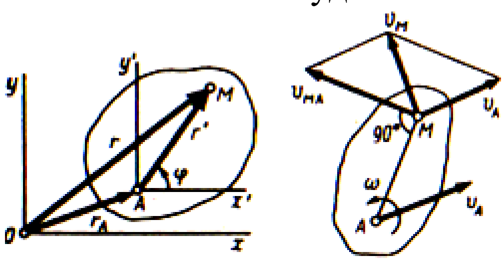
Висновок: плоскопаралельний рух довільної точки M можна розглядати як два одночасні рухи: поступальний зі швидкістю полюса A, і обертальний навколо цього полюса.

Кінематичними характеристиками плоского руху є швидкість $\boldsymbol{\upsilon}_A$ і прискорення $\boldsymbol{a}_A$ поступального руху полюса, а також кутова швидкість $\boldsymbol{\omega}$ і кутове прискорення $\boldsymbol{\varepsilon}$ обертального руху тіла навколо полюса. При вивченні руху за полюс можна приймати будь-яку точку фігури, оскільки обертова частина руху від вибору полюса не залежить.

10.2. Швидкості точок тіла при плоскопаралельному русі

Положення будь-якої точки M фігури визначається радіус-вектором $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}',$$



де $\boldsymbol{r}_A$ – радіус-вектор полюса A, $\boldsymbol{r}'$ - вектор, який визначає положення точки M в рухомій системі координат $Ox'y'$, незмінно пов'язаній із полюсом A (рис. 10.2).

Тоді швидкість точки M

Рис. 10.2. Швидкість при плоскому русі.

$$\boldsymbol{\upsilon}_M = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} \rightarrow \boldsymbol{\upsilon}_M = \boldsymbol{\upsilon}_A + \boldsymbol{\upsilon}_{MA}. \qquad (10.2)$$

Висновок: швидкість будь-якої точки M плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості $\boldsymbol{\upsilon}_A$ поступального руху полюса A і швидкості $\boldsymbol{\upsilon}_{MA}$, яку отримує точка M при обертанні всієї фігури навколо цього полюса.

Швидкість, яку отримує точка M при обертанні фігури

$$\upsilon_{ÌÀ} = \omega \cdot ÌÀ\ , \qquad (10.3)$$

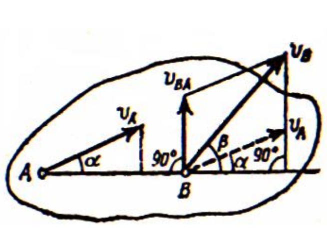
де ω – кутова швидкість обертання фігури навколо полюса A, перпендикулярна до радіус-вектора $\boldsymbol{r}$. Модуль і напрям швидкості υ_M знаходяться за правилом паралелограма (рис. 10.2).

Теорема про швидкості двох точок: при плоскопаралельному русі проекції швидкостей будь-яких двох точок твердого тіла на пряму, яка проходить через ці точки, дорівнюють одна одній.

Доведення.

Нехай A і B – довільні точки плоскої фігури, яка здійснює плоскопаралельний рух (рис. 10.3). Приймемо точку A за полюс, тоді швидкість точки B

$$\boldsymbol{\upsilon}_B = \boldsymbol{\upsilon}_A + \boldsymbol{\upsilon}_{BA}. \qquad (10.4)$$



Проектуємо цей вираз на пряму AB (вектор швидкості $\boldsymbol{\upsilon}_{BA}$ перпендикулярний прямій AB, тому його проекція дорівнює нулю). Остаточно отримуємо:

Рис. 10.3. Теорема про швидкості двох точок.

$$\upsilon_A \cdot \cos\alpha = \upsilon_B \cdot \cos\beta.$$

Якби теорема не виконувалася, то відстань між точками A і B в процесі руху змінювалася, що неможливо для абсолютно твердого тіла. Тому теорема справедлива за будь-якого руху твердого тіла.

10.3. Миттєвий центр швидкостей, його знаходження

Миттєвий центр швидкостей - точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент дорівнює нулю. Ця точка знаходиться на перетині миттєвої осі обертання з площиною руху. Якщо фігура рухається непоступально, то така точка існує, притому єдина.

Окремі випадки визначення миттєвого центру швидкостей:

а) Кочення одного циліндричного тіла по поверхні іншого (рис. 10.4, зліва). В даному випадку миттєвим центром швидкостей є точка P контакту тіла, що котиться, і нерухомої поверхні. За відсутності ковзання її швидкість дорівнюватиме нулю.

б) Якщо швидкості точок A і B паралельні (рис. 10.4, справа), але лінія AB не перпендикулярна до напрямів цих швидкостей, то миттєвий центр швидкостей лежить в нескінченності. Швидкості усіх точок тіла однакові за величиною і напрямом, значить має місце випадок миттєвого поступального руху.

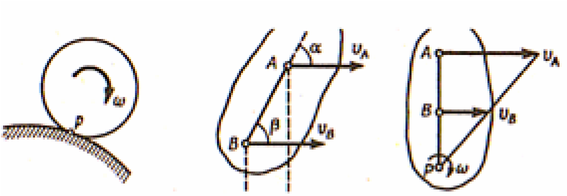


Рис. 10.4. Знаходження миттєвого центру швидкостей.

в) Якщо швидкості точок A і B паралельні, а лінія AB перпендикулярна до напрямків цих швидкостей, то положення миттєвого центра швидкостей визначається побудовою, як показаною на рис. 10.4.

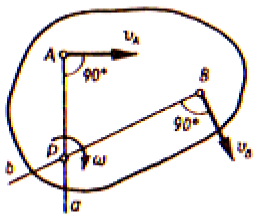
Висновок: для визначення миттєвого центру швидкостей необхідно знати напрями швидкостей будь-яких двох точок плоскої фігури.

Якщо відоме положення миттєвого центру швидкостей, то зручно прийняти його за полюс при визначенні швидкостей інших точок. Знаходимо швидкість точки A (рис. 10.5)

$$\boldsymbol{\upsilon}_A = \boldsymbol{\upsilon}_P + \boldsymbol{\upsilon}_{PA} = \boldsymbol{\upsilon}_{PA}, \tag{10.5}$$

оскільки швидкість полюса дорівнює нулю. Аналогічний результат виходить для будь-якої іншої точки фігури. Тому, швидкості точок плоскої фігури визначаються в даний момент так, якби рух фігури був обертанням навколо миттєвого центру швидкостей.

$$\upsilon_{\grave{A}} = \omega \cdot \text{Ð}\grave{A};\ \ \upsilon_{\hat{A}} = \omega \cdot \text{Ð}\hat{A} \Rightarrow \frac{\upsilon_{\grave{A}}}{\text{Ð}\grave{A}} = \frac{\upsilon_{\hat{A}}}{\text{Ð}\hat{A}}.$$



Швидкості точок плоскої фігури пропорційні їх відстаням від миттєвого центру швидкостей.

Рис. 10.5. Визначення швидкостей точок за допомогою миттєвого центру швидкостей.

Висновки:
а) для визначення швидкості будь-якої точки плоскої фігури необхідно знати модуль і напрям швидкості однієї точки і напрям швидкості іншої точки.
б) кутова швидкість плоскої фігури у будь-який момент часу дорівнює відношенню швидкості точки до її відстані від миттєвого центру швидкостей.
в) в механізмі з декількох ланок, які рухаються непоступально, кожна ланка в даний момент часу має свій миттєвий центр швидкостей і свою кутову швидкість.

10.4. Визначення прискорень точок тіла при плоскопаралельному русі

Теорема: прискорення будь-якої точки M плоскої фігури геометрично складається з прискорення полюса A і прискорення, яке отримує точка M при обертанні навколо цього полюса

$$\boldsymbol{a}_M = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\boldsymbol{r}`}{dt^2} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{MA}. \tag{10.6}$$

Прискорення точки тіла при обертальному русі є геометричною сумою нормального і дотичного прискорень (рис. 10.6)

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{M} = \boldsymbol{a}_\mathrm{A} + \boldsymbol{a}^\tau_{MA} + \boldsymbol{a}^n_{MA}.$$

Дотичне і нормальне прискорення визначаються по формулах

$$\boldsymbol{a}^\tau_{MA} = MA\cdot\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{a}^n_{MA} = MA\cdot\boldsymbol{\omega}^2.$$

Модуль і напрям прискорення $\boldsymbol{a}_{MA}$ визначають по теоремі Піфагора

$$a_{MA} = \sqrt{\left(\boldsymbol{a}^\tau_{MA}\right)^2 + \left(\boldsymbol{a}^n_{MA}\right)^2} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{10.7}$$

Якщо полюс A рухається не прямолінійно, то його прискорення теж можна представити як суму дотичної і нормальної складових

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{M} = \boldsymbol{a}^\tau_A + \boldsymbol{a}^n_A + \boldsymbol{a}^\tau_{MA} + \boldsymbol{a}^n_{MA}. \tag{10.8}$$

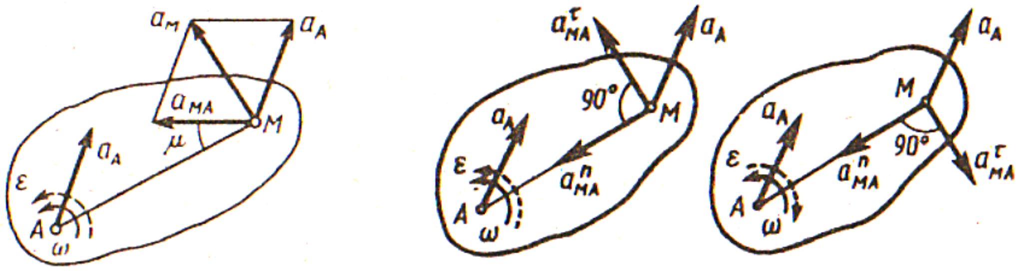


Рис. 10.6. Визначення прискорень точок при плоскопаралельному русі.

10.5. Миттєвий центр прискорень, його знаходження

Миттєвий центр прискорень - точка плоскої фігури, прискорення якої в даний момент дорівнює нулю. Якщо фігура рухається непоступально, то така точка існує, причому тільки одна. У загальному випадку руху миттєві центри швидкостей і прискорень не співпадають. Вони співпадають тільки тоді, коли фігура обертається навколо нерухомої осі.

Порядок знаходження миттєвого центра прискорень:

1. Визначити кут μ по формулі

$$tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \tag{10.9}$$

2. З точки A під кутом μ до вектора прискорення $\boldsymbol{a}_A$ провести пряму AE, яка відхилена у бік обертання фігури у разі прискореного обертання, і в протилежну сторону при сповільненому обертанні (тобто у бік кутового прискорення).

3. Відкласти уздовж лінії AE відрізок AQ, який дорівнює

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Прискорення точок плоскої фігури визначаються в даний момент так, якби рух фігури був обертанням навколо миттєвого центру прискорень Q

$$\frac{a_M}{MQ} = \frac{a_A}{AQ} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Прискорення точок плоскої фігури пропорційні їх відстаням від миттєвого центру прискорень Q.

Питання для самоконтролю

1. Який рух тіла називається плоскопаралельним?
2. Скільки степенів вільності має тіло при плоскому русі?
3. Дайте визначення миттєвого центра швидкостей?
4. Як визначається швидкість будь-якої точки фігури при плоскому русі?
5. Яку точку плоскої фігури називають миттєвим центром прискорень?
6. Чому при розв'язанні задач в якості полюса вигідно обирати миттєвий центр швидкостей?
7. Сформулюйте теорему про швидкості двох точок.

Завдання № 10. «Плоскопаралельний рух тіла»

<u>Рекомендації до розв'язання задач</u>

А. Розв'язання задач через знаходження миттєвих центрів швидкостей і прискорень.

1. Знайти точку M тіла, швидкість і прискорення якої необхідно визначити.
2. Визначити положення миттєвого центру швидкостей P фігури.
3. Знайти миттєву кутову швидкість обертання ω плоскої фігури навколо миттєвого центру швидкостей.
4. Користуючись формулою (10.3) знайти швидкість точки M.
5. Визначити положення миттєвого центру прискорень π фігури за алгоритмом п. 10.5 лекції, знайти миттєве кутове прискорення ε даної фігури.
6. Користуючись формулами прискорення при обертальному русі знайти прискорення точки M.

Б. Розв'язання задач за допомогою теорем про швидкості і прискорення точок тіла при плоскопаралельному русі.

1. Знайти точку M тіла, швидкість і прискорення якої необхідно визначити.
2. Обрати полюс A – точку фігури, швидкість якої відома або може бути визначена з умов задачі.
3. Знайти вектор швидкості полюса $\boldsymbol{v}_A$.

4. Зобразити вектор швидкості полюса, приклавши його до точки, швидкість якої знаходиться.
5. Визначити швидкість $\boldsymbol{\upsilon}_{MA}$ обертання даної точки M навколо полюса A.
6. За допомогою теореми синусів або косинусів знайти модуль швидкості точки M, а її напрямок визначити графічно, побудувавши трикутник.
7. Обрати полюс A_1 – точку фігури, прискорення якої відоме або може бути визначене з умов задачі.
8. Знайти вектор прискорення полюса $\boldsymbol{a}_{A1}$.
9. Зобразити вектор швидкості полюса, приклавши його до точки, швидкість якої знаходиться.
10. Визначити прискорення $\boldsymbol{a}^n_{MA1}$, яке виникає при обертанні даної точки навколо полюса A_1 і побудувати вектор даного прискорення.
11. Визначити прискорення $\boldsymbol{a}^\tau_{MA1}$, яке виникає при обертанні всієї фігури навколо полюса A_1 і побудувати вектор даного прискорення.
12. Геометрично чи аналітично знайти модуль і напрям прискорення даної точки M.

Приклад розв'язання задачі (знаходження миттєвих центрів)

Задача 1. Куля радіуса R = 0,5 м котиться без ковзання по горизонтальній прямій, причому рух її центра є рівномірним із швидкістю υ_O = 1 м/с. Визначити швидкості і прискорення точок A_1, A_2, A_3 і A_4 кінців вертикального і горизонтального діаметрів кулі (рис. 10.7).

Розв'язання

1. Визначення швидкостей точок кулі.

Оскільки кочення кулі відбувається без ковзання, то дану задачу зручно розв'язувати методом миттєвого центру швидкостей. Точка A_1 в даний момент знаходиться у контакті з землею, тому її швидкість дорівнює нулю і вона є миттєвим центром швидкостей $\upsilon_1 = 0$.

Інші три точки здійснюють обертальний рух навколо точки A_1. Знайдемо модулі й напрямки їх швидкостей, для чого спочатку визначимо кутову швидкість кулі через відому швидкість її центру.

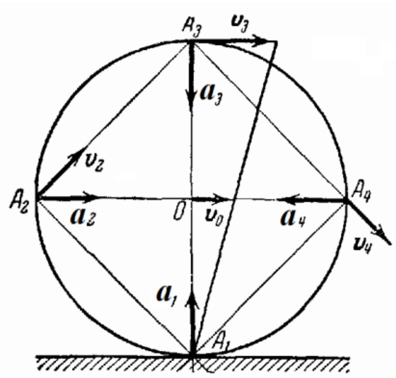


Рис. 10.7. Миттєві центри швидкостей і прискорень.

Швидкість точки O в обертальному русі навколо точки A_1

$$\upsilon_O = \omega \cdot OA_1 = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon_O}{R} = \frac{1}{0,5} = 2 \left(рад/с \right).$$

Для точки A_2 швидкість обертання навколо миттєвого центру швидкостей

$$\upsilon_2 = \omega \cdot A_1A_2 = \omega\sqrt{R^2 + R^2} = 2 \cdot \sqrt{0{,}25 + 0{,}25} = 1{,}41\ (м/с).$$

Швидкість точки A_2 спрямована перпендикулярно A_1A_2 в напрямку руху колеса.

Швидкість точки A_4 знаходиться аналогічно

$$\upsilon_4 = \omega \cdot A_1A_4 = \omega\sqrt{R^2 + R^2} = 2 \cdot \sqrt{0{,}25 + 0{,}25} = 1{,}41\ (м/с).$$

Швидкість точки A_4 спрямована перпендикулярно A_1A_4 в напрямку руху колеса.

Швидкість точки A_3 також знайдемо через миттєвий центр швидкостей

$$\upsilon_3 = \omega \cdot A_1A_3 = \omega \cdot 2R = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 2\ (м/с).$$

2. Визначення прискорень точок кулі.

Оскільки точка O рухається з постійною швидкістю, то її прискорення

$$a_O = \frac{d\upsilon_O}{dt} = \frac{d(1)}{dt} = 0\ \left(\frac{м}{с^2}\right).$$

Це означає, що точка O є миттєвим центром прискорень. В такому випадку прискорення точок A_1, A_2, A_3 і A_4 є доцентровими прискореннями при обертальному русі навколо точки O. Оскільки всі ці точки знаходяться на однаковій відстані R від центру прискорень, то їх прискорення будуть однакові

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \omega^2 R = 2^2 \cdot 0{,}5 = 2\ (м/с^2).$$

Всі прискорення спрямовані по відповідним радіусам до миттєвого центру прискорень. Задачу розв'язано.

Приклад розв'язання задачі (теореми про швидкості і прискорення)

Задача 2. Знайти швидкість повзуна B нецентрального кривошипного механізму, в момент коли повзун, який обертається з кутовою швидкістю ω = 1,5 рад/с навколо горизонтальної осі O, утворює кут α = 30° з горизонтом (рис. 10.8). Розміри ланок OA = 40 см, AB = 200 см, OC = 20 см.

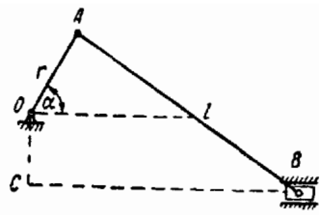


Рис. 10.8. Нецентральний кривошипний механізм.

Розв'язання

Розв'язання задачі здійснюємо згідно пункту *Б* рекомендацій. Зображуємо на рисунку весь механізм і точку B на ньому в заданому положенні (рис. 10.9).

Точка B належить шатуну, який здійснює плоскопаралельний рух. За полюс оберемо точку A, яка одночасно належить і шатуну і кривошипу. Знайдемо швидкість точки A при обертальному русі

$$\upsilon_A = \omega \cdot OA = 1{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}6\ (м/с).$$

Вектор $\boldsymbol{\upsilon}_A$ прикладаємо в точці B перпендикулярно до положення кривошипа OA в даний момент часу.

Визначимо положення миттєвого центру швидкостей.

Для цього необхідно знати напрями швидкостей двох точок шатуна.

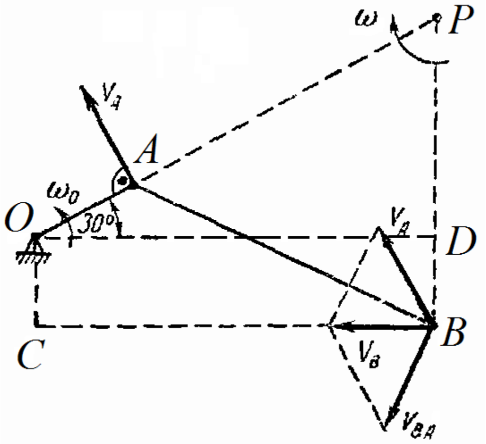


Рис. 10.9. До задачі 2.

Напрямок швидкості $\boldsymbol{\upsilon}_A$ нам відомий, а швидкість точки B спрямована по горизонталі в напрямку руху кривошипа. Аби визначити положення точки P, проведемо перпендикуляри до векторів швидкостей точок A і B. Точка їх перетину і є миттєвим центром швидкостей.

Визначимо кутову швидкість шатуна. Для цього необхідно знати величину швидкості якої-небудь точки та її відстань до миттєвого центру швидкостей. В даному випадку

$$\omega = \upsilon_A / AP. \tag{10.10}$$

Відстань AP знайдемо з умов задачі. Спочатку визначимо кут ABP

$$\sin\angle ABD = \frac{OA\sin 30^\circ + OC}{AB} = \frac{40\cdot 0{,}5 + 20}{200} = 0{,}2.$$

$$\angle ABD = \arcsin 0{,}2 = 11{,}5^\circ \Rightarrow \angle ABP = 78{,}5^\circ.$$

Оскільки в трикутнику ABP нам відома лише сторона AB, то для застосування теореми синусів необхідно визначити кут APB. Розглянемо трикутник OPE

$$\angle APB = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ.$$

За допомогою теореми синусів знаходимо

$$\frac{AP}{\sin\angle ABP} = \frac{AB}{\sin\angle APB} \Rightarrow AP = \frac{AB\sin\angle ABP}{\sin\angle APB} = \frac{0{,}2\cdot\sin 78{,}5^\circ}{\sin 60^\circ} = 2{,}26(м).$$

Підставляємо отримане значення в формулу (10.10)

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{0{,}6}{2{,}26} = 0{,}265\left(\frac{рад}{с}\right).$$

Визначаємо відносну швидкість обертання точки B навколо полюса A

$$\upsilon_{BA} = \omega\cdot AB = 0{,}265\cdot 0{,}2 = 0{,}53(м/с).$$

Вектор швидкості $\boldsymbol{\upsilon}_{BA}$ перпендикулярний до шатуна AB і направлений убік обертання шатуна. Прикладаємо його в точці B і далі за правилом паралелограма визначаємо вектор швидкості точки B. Модуль швидкості даної точки знаходимо аналітично

$$\upsilon_{\hat{A}} = \sqrt{\upsilon_{\hat{A}}^2 + \upsilon_{\hat{A}\grave{A}}^2 + 2\upsilon_{\grave{A}}\upsilon_{\hat{A}\grave{A}}\cos\angle OAB} = \sqrt{\upsilon_{\grave{A}}^2 + \upsilon_{\hat{A}\grave{A}}^2 + 2\upsilon_{\grave{A}}\upsilon_{\hat{A}\grave{A}}\cos(180^\circ - \angle PAB)} =$$

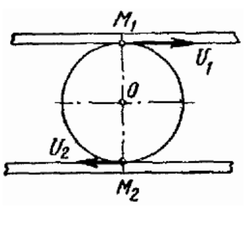
$$= \sqrt{0{,}6^2 + 0{,}53^2 + 2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}53\cdot\cos(180^\circ - (180^\circ - 78{,}5^\circ - 60^\circ))} = 0{,}41(ì\ /ñ).$$

Задачу розв’язано.

Завдання № 10 до РГР

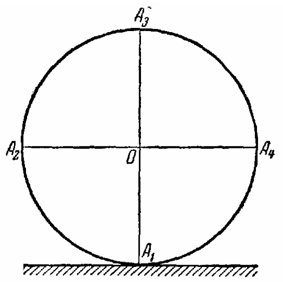
10.1. Зубчасте колесо радіуса R = 0,5 м затиснуте між двома паралельними рейками, які рухаються в протилежні боки з постійними швидкостями υ_1 = 2,5 м/с і υ_2 = 1,5 м/с. Знайти швидкість центра колеса O і кутову швидкість колеса, якщо воно котиться по рейкам без ковзання.

Відповідь: υ_O = 0,5 м/с, ω = 4 рад/с.



До задачі 10.1.

10.2. Куля радіуса R = 1 м котиться без ковзання по горизонтальній прямій, причому рух її центра є прискореним і описується рівнянням



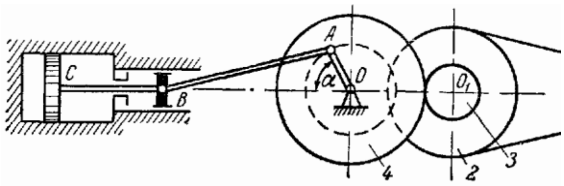
$$s = t + \frac{t^2}{2} \ (м).$$

Визначити швидкості і прискорення точок A_1, A_2, A_3 і A_4 кінців вертикального і горизонтального діаметрів кулі.

Відповідь: $\upsilon_1 = 0$ м/с, $\upsilon_2 = 1{,}41$ м/с, $\upsilon_3 = 2$ м/с, $\upsilon_4 = 1{,}41$ м/с, $a_1 = 1$ м/с^2, $a_2 = 2{,}24$ м/с^2, $a_3 = 2{,}24$ м/с^2, $a_4 = 1$ м/с^2.

До задачі 10.2.

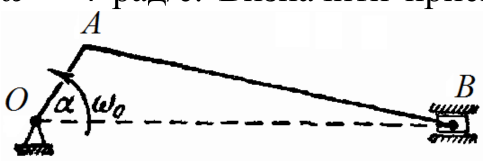
10.3. Привод поршневого насосу складається з приводного шківа 2 і шестерні 3, жорстко закріплених на валу O_1, обертання якого передається на вал кривошипа O за допомогою за допомогою шестерень 3 і 4. Вал O приводить до руху шатун AB, шток BC и поршень C. Визначити кутову швидкість шатуна AB і швидкість точки B при вертикальному положенні кривошипа OA, якщо його частота обертання $n = 60$ об/хв, $OA = 20$ см, $AB = 100$ см, радіуси шестерень $R_3 = 10$ см, $R_4 = 30$ см.



Відповідь: $\upsilon_B = 0{,}42$ м/с, $\omega = 0$ рад/с.

До задачі 10.3.

10.4. Кривошип OA обертається рівномірно навколо осі O з кутовою швидкістю $\omega = 4$ рад/с. Визначити прискорення точки B в момент часу, коли кривошип утворює кут $\alpha = 60°$ з горизонтом, якщо довжина шатуна $AB = 40$ см.

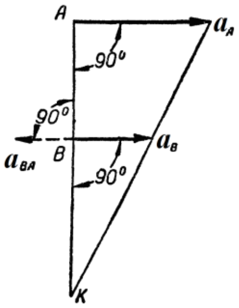


Відповідь: $a_B = 0{,}6$ м/с^2.

До задачі 10.4.

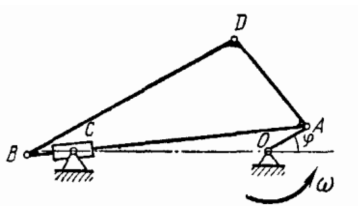
10.5. Визначити миттєвий центр швидкостей, кутову швидкість і кутове прискорення плоскої фігури, якщо в даний момент часу прискорення точки A $a_A = 0{,}15$ м/с^2, а прискорення точки B $a_B = 0{,}10$ м/с^2. Вектори прискорень точок A і B перпендикулярні до відрізку AB і спрямовані в один бік. Довжина відрізку $AB = 10$ см.

Відповідь: $\omega = 0$ рад/с, $\varepsilon = 0{,}5$ рад/с^2.



До задачі 10.5.

10.6. Визначити швидкості точок A, B і D механізму в положенні, в якому кривошип, який обертається із кутовою швидкістю $\omega = 20$ рад/с, утворює кут $\varphi = 30°$ з горизонтальною лінією. Довжина кривошипа $OA = 50$ мм, відстань між осями $OC = 200$ мм, $AB = 250$ мм, $BD = 200$ мм.

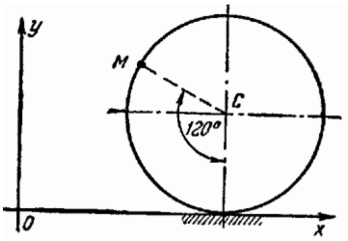


Відповідь: $\upsilon_A = 1{,}0$ м/с, $\upsilon_B = 0{,}45$ м/с, $\upsilon_D = 1{,}04$ м/с,

До задачі 10.6.

10.7. Рівняння руху точки M обода колеса електровоза має вигляд

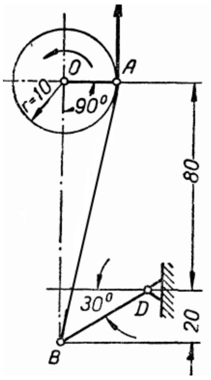
$$x = 3t - 0{,}33\sin 9{,}23t; \quad y = 0{,}33(1 - \cos 9{,}23t) \ м.$$



Початок координат співпадає з початковим положенням точки. Визначити положення миттєвого центра прискорень і прискорення миттєвого центра швидкостей в момент часу t, за який колесо повернулось на кут 120°. *Відповідь:* a_P = 27,7 м/с^2.

До задачі 10.7.

10.8. Визначити швидкість і прискорення точки B чотириланкового механізму в момент часу, коли ланка OA горизонтальна, а ланка BD направлена під кутом 30° до горизонтальної лінії. Кривошип OA довжиною r = 10 см обертається проти ходу годинникової стрілки з постійною частотою n = 100 об/хв. Довжина ланки AB = 100 см, ланки BD = 40 см, інші необхідні розміри вказано на рисунку.

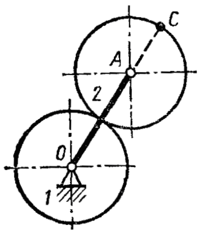


Відповідь: v_B = 1,27 м/с, a_P = 0,3 м/с^2.

До задачі 10.8.

10.9. Електропоїзд при відході від станції рухається по прямолінійній ділянці колії з прискоренням a = 3 м/с^2, причому його колеса котяться без буксування та ковзання. Знайти прискорення миттєвого центра швидкостей колеса через 2 с після відходу потягу, якщо радіус колеса R = 0,5 м.
Відповідь: a_P = 72 м/с^2.

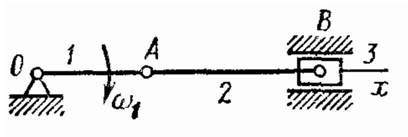
10.10. В диференціальному механізмі кривошип OA обертається навколо нерухомої осі O з кутовою швидкість ω_{OA} = 2 рад/с, а колесо 1 навколо тієї ж осі зі швидкістю ω_1 = 4 рад/с. Чому дорівнює швидкість точки C на верхньому кінці діаметра колеса 2, якщо радіуси колес r_1 = r_2 = 0,1 м? Кривошип і колесо 1 обертаються одному напрямку.



Відповідь: v_C = 0,4 м/с.

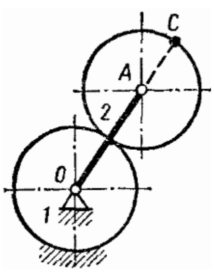
До задачі 10.10.

10.11. Кривошип OA кривошипно-шатунного механізму обертається з постійною кутовою швидкістю ω = 6 рад/с. Визначити кутове прискорення ε і кутову швидкість ω_2 шатуна AB в положенні механізму, коли кривошип і шатун знаходяться на горизонтальній прямій.



Довжина кривошипа OA = 0,2 м, довжина шатуна AB = 0,6 м. *Відповідь:* ε = 0 рад/с^2, ω_2 = 2 рад/с.

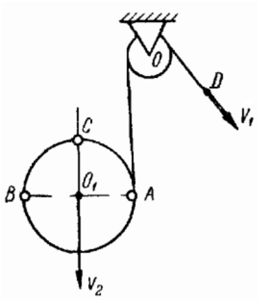
До задачі 10.11.



10.12. В планетарному механізмі колесо 2 приводиться до руху кривошипом OA, який обертається навколо осі O нерухомого колеса 1. Чому дорівнює швидкість точки C на верхньому кінці діаметра колеса 2, якщо радіуси коліс r_1 = r_2 = 0,1 м, а кутова швидкість кривошипа ω_{OA} = 2 рад/с? Кривошип і колесо 1 обертаються в одному напрямку. *Відповідь:* v_C = 0,8 м/с.

До задачі 10.12.

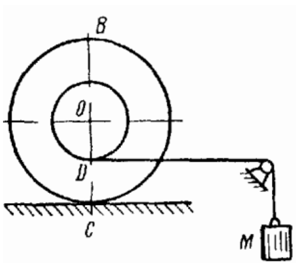
10.13. Циліндр радіусом R = 0,5 м обмотаний тросом, перекинутим через блок O. Кінець тросу рухається зі швидкістю υ_1 = 2 м/с, в той час як центр циліндра має швидкість υ_2 = 3 м/с. Визначити кутову швидкість циліндра, вважаючи ділянку троса від циліндра до блока вертикальною. Також знайти величини швидкостей точок B і C на горизонтальному і вертикальному діаметрах циліндра.



Відповідь: ω = 10 рад/с, υ_B = 7 м/с, υ_C = 5,8 м/с.

До задачі 10.13.

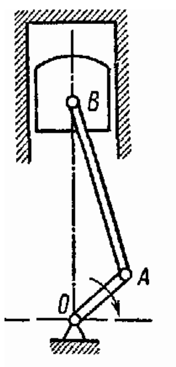
10.14. Котушка радіуса R = 0,5 м, яка котиться без ковзання по горизонтальній площині, приводиться до руху за допомогою вантажу M. Вантаж, прив'язаний до нитки, намотаної на барабан котушки, рухається вниз маючи в даний час швидкість υ = 2 м/с і прискорення a = 1 м/с^2. Визначити прискорення точок B і C котушки, які в даний момент часу знаходяться на різних кінцях її вертикального діаметру. Відомо, що радіус барабану котушки r = 0,3 м.



Відповідь: a_B = 50,2 м/с^2, a_C = 50 м/с^2.

До задачі 10.14.

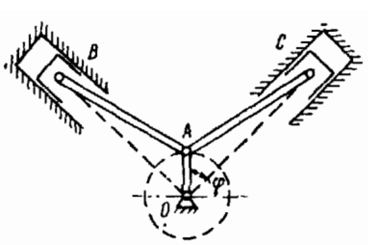
10.15. Колінчастий вал в період пуску двигуна обертається з кутовою швидкість ω = 2 рад/с і кутовим прискоренням ε = 1 рад/с^2. Визначити прискорення поршня B і кутове прискорення шатуна AB в крайньому правому положенні кривошипа OA. Довжина кривошипа OA = 20 см, довжина шатуна AB = 90 см.



Відповідь: a_B = 0,02 м/с^2, ε_{AB} = 0,91 рад/с^2.

До задачі 10.15.

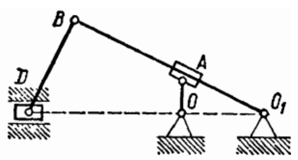
10.16. Визначити швидкості і прискорення поршнів двигуна з V - подібним розходженням циліндрів, в момент коли φ = 90°, якщо довжина кривошипа OA = 10 см, довжина шатунів AB = AC = 14 см. Кривошип обертається з постійною кутовою швидкістю ω_0 = 10 рад/с, а кут BAC між осями циліндрів складає 90°.



Відповідь: υ_B = 0 м/с, υ_C = 1 м/с, a_B = 17,1 м/с^2, a_C = 1,0 м/с^2.

До задачі 10.16.

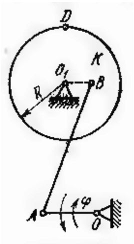
10.17. Стержень O_1B проходить через трубку A, ось якої прикріплена до кінця кривошипа довжиною OA = 10 см, який обертається із частотою n = 90 об/хв. Визначити швидкість повзуна D та кутові швидкості ланок O_1B і BD в момент часу, коли кривошип займає вертикальне положення. *Відповідь:* υ_D = 2,1 м/с, ω_{O1B} = 1,9 рад/с, ω_{BD} = 7,5 рад/с.



До задачі 10.17.

10.18. Точильний станок приводиться до руху педаллю OA = 24 см, яка коливається навколо осі O по закону

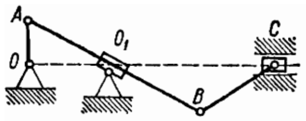
$$\varphi = \frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi t}{2},\ рад.$$



Точильний камінь обертається навколо осі O_1 за допомогою стержня AB, а осі O і O_1 перпендикулярні площині рисунка. Визначити швидкість точки D, яка лежить на ободі точильного каменя радіуса R = $2BO_1$ в момент, коли OA і O_1B розташовані горизонтально.
Відповідь: υ_D = 0,39 м/с.

До задачі 10.18.

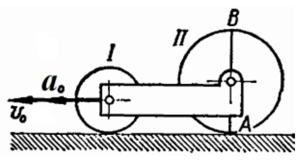
10.19. Кривошип довжиною OA = 14 см, який обертається із частотою n = 300 об/хв навколо нерухомої осі O, приводить до руху ланку AB = 1 м, яка проходить через поворотну трубку з нерухомою віссю O_1, і стержень BC з



повзуном C на кінці. Визначити швидкість повзуна C в момент часу, коли кривошип займає вертикальне положення, якщо BC = 0,5 м, OO_1 = 0,48 м.
Відповідь: υ_C = 3,0 м/с.

До задачі 10.19.

10.20. Спарений каток рухається по прямолінійній ділянці дороги з прискоренням a_0 = 0,5 м/с^2 і має в даний момент швидкість υ_0 = 1 м/с^2.



Визначити швидкість і прискорення протилежних кінців A і B вертикального діаметру циліндра II, якщо його радіус дорівнює R = 0,5 м.
Відповідь: υ_A = 0 м/с, υ_B = 2 м/с, a_A = 2 м/с^2, a_B = 2,24 м/с^2.

До задачі 10.20.

Глава 11. Складний рух твердого тіла

11.1. Складання поступальних рухів

Тверде тіло, як і матеріальна точка, може одночасно брати участь у кількох простих рухах, тому головним завданням кінематики складного руху є знаходження у кожен момент часу залежностей між лінійними та кутовими швидкостями. На тверде тіло також переносяться поняття про абсолютний, переносний та відносний рухи точки.

Теорема. При складанні поступальних рухів твердого тіла утворюється результуючий поступальний рух зі швидкістю, яка дорівнює векторній сумі швидкостей складових рухів

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_{від} + \boldsymbol{\upsilon}_{пер}. \quad (11.1)$$

В цьому випадку задача зводиться до складного руху матеріальної точки.

При складанні довільної кількості поступальних рухів результуючий рух також буде поступальним, тоді швидкість і прискорення тіла

$$\boldsymbol{\upsilon} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\upsilon}_i; \qquad \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}_i.$$

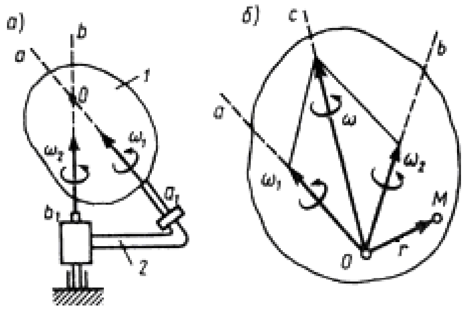
Миттєво-поступальний – рух, при якому швидкості усіх точок тіла рівні між собою лише у визначений проміжок часу. При такому русі прискорення точок різні, тому їх не можна підсумувати за наведеною вище формулою.

11.2. Складання обертань твердого тіла навколо перетинних осей

А) Складання кутових швидкостей

Теорема. При складанні двох миттєвих обертань твердого тіла навколо перетинних осей утворюється результуюче обертання навколо миттєвої осі з кутовою швидкістю, що дорівнює векторній сумі кутових швидкостей складових обертань.

Нехай відносний рух тіла є обертанням навколо осі a_1a з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_1$, а переносний рух – теж обертанням із швидкістю $\boldsymbol{\omega}_2$ навколо осі b_1b, яка перетинається з віссю a_1a в точці O (рис. 11.1). Визначимо абсолютну швидкість якої-небудь довільної точки M. Швидкість точки M при відносному русі і переносному рухах



$$\boldsymbol{v}_{від} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}, \qquad \boldsymbol{v}_{пер} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}.$$

Та оскільки результуючий рух є обертанням з деякою кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$, то

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \rightarrow \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2.$$

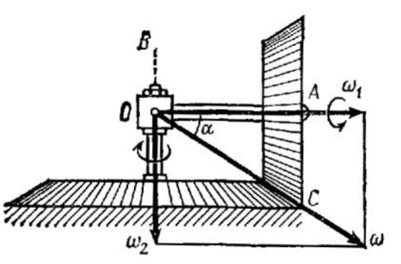
Рис. 11.1. Складання обертань навколо перетинних осей.

Якщо тіло бере участь в n миттєвих обертаннях навколо декількох осей, перетинних в точці O, то абсолютний рух буде обертанням навколо осі, що проходить через точку O, з миттєвою кутовою швидкістю

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i . \qquad (11.2)$$

Б) Складання кутових прискорень

Нехай обертання тіла навколо кожної з двох перетинних осей відбувається з кутовим прискоренням, причому ε_1 – переносне прискорення обертання навколо власної осі OA, ε_2 – відносне прискорення обертального руху навколо осі нерухомого колеса (рис. 11.2). Згідно (11.2) абсолютно кутова швидкість ω рухомої шестерні



$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \omega_1 + \omega_2 .$$

Рис. 11.2. Додавання прискорень при обертанні навколо перетинних осей.

Диференціюємо за часом останнє співвідношення і отримуємо формулу для складання кутових прискорень

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\omega_2 \times \omega_1), \qquad (11.3)$$

де ε_1 – зміна переносної кутової швидкості при переносному русі, ε_2 – зміна відносної кутової швидкості при відносному русі, третій доданок характеризує зміну переносної кутової швидкості при відносному русі та зміну відносної кутової швидкості при переносному русі.

В техніці складання обертань навколо перетинних осей має широке застосування: конічні передачі в редукторах, карданна передача (шарнір Гука) в тракторах і автомобілях, маніпуляційних роботах, зовнішній карданний підвіс в гіроскопічних приладах.

11.3. Пара обертань

Пара обертань – сукупність двох обертань твердого тіла навколо паралельних осей з рівними за величиною, але протилежними за напрямком кутовими швидкостями.

Теорема. Пара обертань еквівалентна миттєво-поступальному руху зі швидкістю, що дорівнює моменту пари кутових швидкостей.

Нехай переносним рухом тіла є обертання з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_1$ навколо вісі OO_1, а відносним рухом – обертання зі швидкістю $\boldsymbol{\omega}_2 = -\boldsymbol{\omega}_1$ навколо вісі OO_2. В такому випадку абсолютна швидкість довільної точки M згідно теореми про складання швидкостей

$$\upsilon_M = \upsilon_{\text{ïåð}} + \upsilon_{\text{â³ä}} = \omega_1 \times \boldsymbol{r}_1 + \omega_2 \times \boldsymbol{r}_2 = \omega_1 \times (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2).$$

Оскільки відстань між осями обертання

$$\boldsymbol{O}_1\boldsymbol{O}_2 = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2,$$

то абсолютна швидкість точки M

$$\upsilon_M = \omega_1 \times \boldsymbol{O}_1\boldsymbol{O}_2.$$

Оскільки вектори $\boldsymbol{\omega}_1$ і $\boldsymbol{O}_1\boldsymbol{O}_2$ не залежать від положення точки M, то абсолютний рух буде миттєво-поступальним.

Момент пари обертань – векторний добуток $\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{O}_1\boldsymbol{O}_2$, який є вільним вектором, оскільки не залежить від вибору точки M. Сукупність n пар обертань еквівалентна одній парі, тобто миттєво-поступальному руху.

Теорема. Не змінюючи руху твердого тіла, вектор кутової швидкості його обертання можна перенести паралельно самому собі в будь-яку точку тіла, приєднуючи при цьому відповідний момент пари обертань.

Прикладом пари обертань слугують педалі велосипеда, також вона зустрічається при русі кліщів маніпуляційного робота.

11.4. Складання обертань навколо паралельних осей

Нехай відносний рух тіла є обертанням навколо осі aa' з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_1$, а переносний рух – теж обертанням зі швидкістю $\boldsymbol{\omega}_2$ навколо осі bb', причому кутові швидкості не утворюють пару обертань.

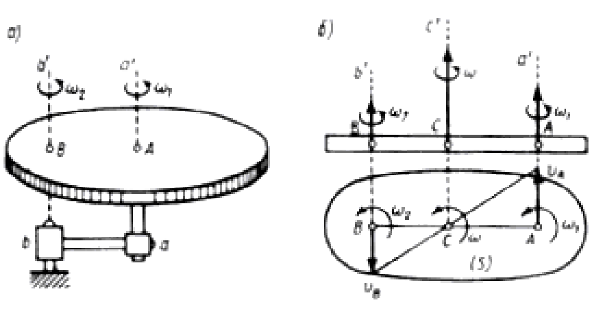


Рис. 11.3. Складання обертань одного напряму.

Розглянемо два окремі випадки:

А) Обертання спрямовані в один бік

Швидкості точок A і B паралельні одна одній, спрямовані в протилежні напрямки і визначаються за формулами:

$$\upsilon_A = \omega_2 \cdot AB, \quad \upsilon_B = \omega_1 \cdot AB.$$

Вісь cc' є миттєвою віссю обертання, а C – миттєвим центром швидкостей, тому

$$\omega = \frac{\upsilon_{\hat{A}}}{\hat{A}\tilde{N}} = \frac{\upsilon_{\grave{A}}}{\grave{A}\tilde{N}} \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon_{\grave{A}} + \upsilon_{\hat{A}}}{\grave{A}\hat{A}}.$$

Підставивши перше рівняння до другого отримуємо

$$\omega = \omega_1 + \omega_2; \ \frac{\omega_1}{\hat{A}\tilde{N}} = \frac{\omega_2}{\grave{A}\tilde{N}} = \frac{\omega}{\grave{A}\hat{A}}. \qquad (11.4)$$

Теорема: якщо тіло бере участь одночасно в двох спрямованих в один бік обертаннях, то його абсолютний рух буде обертанням навколо миттєвої осі, положення якої визначається за пропорцією. Кутова швидкість дорівнює алгебричній сумі кутових швидкостей переносного і відносного рухів.

Б) Обертання спрямовані в різні боки

В такому випадку швидкості точок A і B паралельні одна одній (рис. 11.4), мають однакові напрямки і визначаються за формулами:

$$\upsilon_A = \omega_2 \cdot AB, \ \upsilon_B = \omega_1 \cdot AB.$$

Вісь cc' є миттєвою віссю обертання, а точка C – миттєвим центром швидкостей, тому

$$\omega = \frac{\upsilon_B}{BC} = \frac{\upsilon_A}{AC} \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon_B - \upsilon_A}{AB}.$$

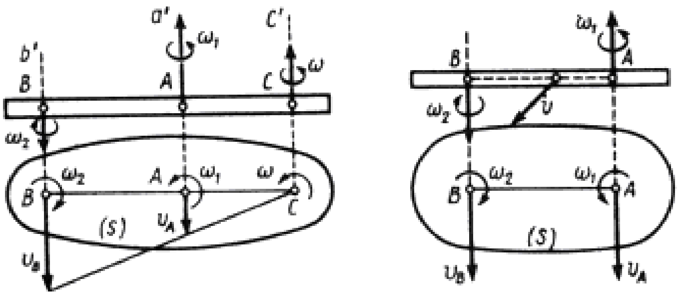


Рис. 11.4. Складання обертань, направлених в різні боки.

Підставляючи перше рівняння до другого, отримуємо

$$\omega = \omega_1 - \omega_2; \frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}. \qquad (11.5)$$

Теорема: якщо тіло бере участь одночасно в двох спрямованих в протилежні боки обертаннях, то його абсолютний рух буде обертанням навколо миттєвої осі, положення якої визначається за пропорцією. Кутова швидкість абсолютного руху дорівнює різниці кутових швидкостей переносного і відносного рухів.

11.5. Метод зупинення

Використовується в задачах руху планетарних механізмів зовнішнього і внутрішнього зачеплень, тобто коли відбувається складання обертань навколо паралельних або перетинних осей.

Планетарний (епіциклічний) механізм – зачеплення двох або декількох коліс, із яких одне колесо нерухоме або рухається навколо нерухомої осі, а інші обертаються навколо осей, закріплених на рухомому водилі. На рис. 11.5 показана схема планетарного механізму з нерухомим колесом I, водилом OB і рухомими колесами *II* і *III*, осі яких переміщуються в просторі. Нерухоме колесо *I* називають сонячним, а колеса *II* і *III* – сателітами.

Суть метода зупинення полягає в тому, що системі уявно надають додатковий рух, при якому водило стає нерухомим. Тоді колеса *II* і *III*, які до цього здійснювали складний рух навколо двох паралельних осей, будуть обертатися навколо нерухомих осей *A* і *B*. У даному випадку необхідно задати уявне обертання площині рисунка за годинниковою стрілкою із кутовою швидкістю ω_{OB}.

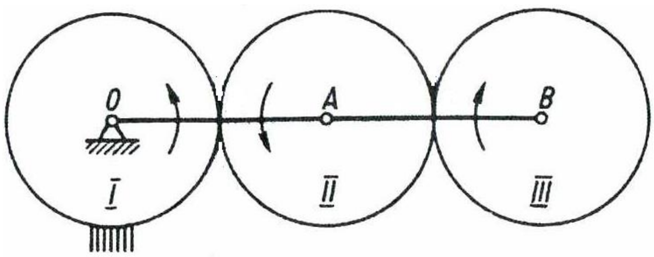


Рис. 11.5. Планетарний механізм.

Для зручності складають таблицю значень кутових швидкостей усіх ланок механізму до і після зупинення ведучої ланки. Для механізму на рис. 11.5 таблиця має наступний вигляд

Ланки механізму	**OB**	**I**	**II**	**III**
До зупинення	ω_{OB}	0	ω_2	ω_3
Після зупинення	0	$-\omega_{OB}$	$\omega_2 - \omega_{OB}$	$\omega_3 - \omega_{OB}$

Після побудови таблиці знаходять залежності між кутовими швидкостями кожних двох суміжних коліс після зупинення. При цьому слід пам’ятати, що у разі зовнішнього зачеплення відношення кутових швидкостей від’ємне, а у разі внутрішнього – додатне.

Відношення кутових швидкостей після зупинення для коліс *I* і *II*

$$\frac{\omega_{II}}{\omega_I} = -\frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{\omega_2 - \omega_{OB}}{-\omega_{OB}} = -\frac{r_1}{r_2}. \qquad (11.6)$$

Аналогічно для коліс *II* і *III* маємо

$$\frac{\omega_{III}}{\omega_{II}} = -\frac{r_2}{r_3} \Rightarrow \frac{\omega_3 - \omega_{OB}}{\omega_2 - \omega_{OB}} = -\frac{r_2}{r_3}. \qquad (11.7)$$

Із одержаних відношень визначають шукані абсолютні кутові швидкості ω_2 і ω_3. Формули виду (11.6) і (11.7) називаються формулами Вілліса, вони широко застосовуються в ТММ при розрахунку багатьох механізмів.

Питання для самоконтролю

1. Як визначаються миттєво-поступальний та миттєво-обертальний рухи?
2. Що називають парою обертань?
3. Коли доцільно застосовувати метод зупинення?
4. До чого у загальному випадку зводиться просторовий рух твердого тіла?
5. Коли має місце пара кутових прискорень твердого тіла?

Завдання № 11. «Складний рух твердого тіла»

<u>Рекомендації до розв’язання задач</u>

1. Подумки закріплюємо всі колеса на водилі (кривошипі) і надаємо йому обертання з кутовою швидкістю водила відносно його власної нерухомої вісі. Це є перший рух.

2. Звільняємо колеса від водила, подумки закріпивши його. Таким чином отримуємо звичайну рядову передачу з нерухомими осями.
3. Подумки провертаємо центральне колесо з кутовою швидкістю, яка дорівнює різниці кутових швидкостей водила та центрального колеса і спрямована в бік, протилежний напряму обертання водила.
4. За допомогою передаточних відношень визначаємо кутові швидкості усіх інших коліс, які вони отримали при обертанні центрального колеса. Це буде другим рухом.
5. Додаємо кутові швидкості всіх складових передачі, отримані ними в першому і другому рухах.
6. Із отриманих в результаті складання залежностей між кутовими швидкостями знаходимо необхідні величини.
7. За необхідності визначаємо кутові прискорення по формулі (11.3).

<u>Приклад розв'язання задачі</u>

Задача 1. Кривошип OA обертається навколо осі O нерухомої шестірні з числом зубців $Z_0 = 60$ з частотою $n_0 = 30$ об/хв і несе на собі вісь подвійної шестерні з числами зубців $Z_1 = 40$ і $Z_2 = 50$ (рис. 11.5). Визначити частоту обертання шестерні 3 з кількістю зубців $Z_3 = 25$.

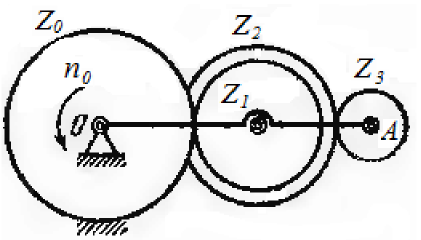


Рис. 11.5. До задачі 1.

Розв'язання

При розв'язанні задачі використаємо метод зупинення. Надамо усій системі миттєвий переносний рух, при якому кривошип OA стає нерухомим. Тепер всі ланки здійснюють простий обертальний рух навколо нерухомих осей. Будуємо таблицю миттєвих частот обертання усіх ланок до і після зупинення кривошипу.

Ланки механізму	**ОВ**	**0**	**1**	**2**	**3**
До зупинення	n_0	0	n_1	n_1	n_3
Після зупинення	0	$- n_0$	$n_1 - n_0$	$n_1 - n_0$	$n_3 - n_0$

Далі за допомогою формул Вілліса почергово знайдемо частоти обертання кожного з коліс. Для першого колеса маємо

$$\frac{Z_0}{Z_1} = -\frac{n_1 - n_0}{-n_0} = \frac{n_1 - n_0}{n_0} = \frac{n_1}{n_0} - 1 \Rightarrow \frac{n_1}{n_0} = \frac{Z_0}{Z_1} + 1 \Rightarrow n_1 = n_0\left(1 + \frac{Z_0}{Z_1}\right).$$

Колеса 1 і 2 утворюють подвійну шестірню, тому обертаються вони в одному напрямку і з однією частотою n_1. Для зачеплення другого і третього коліс маємо

$$\frac{Z_3}{Z_2}=-\frac{n_1-n_0}{n_3-n_0}=-\frac{n_0\left(1+\dfrac{Z_0}{Z_1}\right)-n_0}{n_3-n_0}=-\frac{n_0+n_0\dfrac{Z_0}{Z_1}-n_0}{n_3-n_0}=\frac{n_0\dfrac{Z_0}{Z_1}}{n_0-n_3}.$$

$$n_0-n_3=n_0\frac{Z_0}{Z_1}\cdot\frac{Z_2}{Z_3}\Rightarrow n_3=n_0-n_0\left(\frac{Z_0Z_2}{Z_1Z_3}\right)=n_0\left(1-\frac{Z_0Z_2}{Z_1Z_3}\right);$$

$$n_3=30\cdot\left(1-\frac{60\cdot 50}{40\cdot 25}\right)=-60\left(\frac{\text{об}}{\text{хв}}\right).$$

Знак мінус у відповіді вказує на те, що частота обертання третього колеса спрямована в протилежний по відношенню до напрямку обертання кривошипа *OA* бік. Задачу розв'язано.

<u>Приклад розв'язання задачі</u>

Задача 2. Квадратна рама обертається навколо осі *AB* з частотою n_1 = 30 об/хв. Навколо осі *BC*, яка співпадає з діагоналлю квадрата, обертається диск з частотою n_2 = 40 об/хв. (рис. 11.6). Визначити абсолютну кутову швидкість і абсолютне кутове прискорення диска.

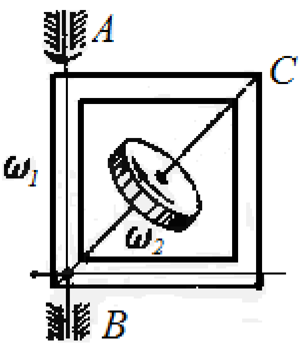


Рис. 11.6. До задачі 2.

Розв'язання

Переносним рухом буде обертання рамки навколо осі *AB*. Модуль кутової швидкості переносного руху

$$\omega_1=\frac{\pi n_1}{30}=\frac{3{,}14\cdot 30}{30}=3{,}14\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right)=const,$$

а її вектор спрямований вниз по прямій *AB*.

Відносним рухом буде обертання рамки навколо власної осі *BC*. Модуль кутової швидкості відносного руху

$$\omega_2=\frac{\pi n_2}{30}=\frac{3{,}14\cdot 40}{30}=4{,}19\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right)=const,$$

а її вектор спрямований вниз по діагоналі *BC*.

Оскільки кутові швидкості є константами, то кутові прискорення переносного і відносного рухів будуть дорівнювати нулю

$$\varepsilon_1=\frac{d\omega_1}{dt}=\frac{d(3{,}14)}{dt}=0,\quad \varepsilon_2=\frac{d\omega_2}{dt}=\frac{d(4{,}19)}{dt}=0.$$

Абсолютну кутову швидкість знайдемо по формулі (11.3)

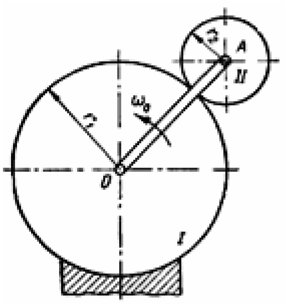
$$\varepsilon=\varepsilon_{\mathbf{1}}+\varepsilon_{\mathbf{2}}+(\omega_2\times\omega_1)\Rightarrow\varepsilon=0+0+\omega_1\omega_2\sin\alpha=3{,}14\cdot 4{,}19\cdot\sin 45°=9{,}3\left(\text{ðàä/ñ}^2\right),$$

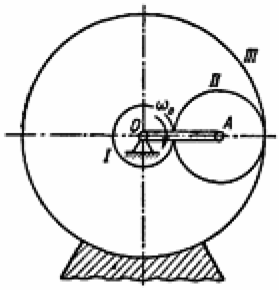
де α = 45° – кут між векторами кутових швидкостей $\boldsymbol{\omega}_1$ і $\boldsymbol{\omega}_2$. Задачу розв'язано.

<u>Завдання № 11 до РГР</u>

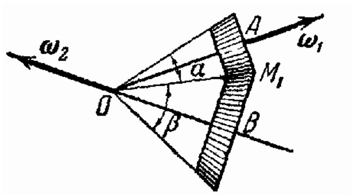
11.1. Кривошип *OA* епіциклічного механізму рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω_0 = 4 рад/с проти руху годинникової стрілки і приводить до руху колесо *II*. Визначити абсолютну кутову швидкість ω_2 колеса *II*, якщо відомо, що радіуси коліс r_1 = 50 см і r_2 = 20 см. *Відповідь:* ω_2 = 14 рад/с.

11.2. Кривошип OA рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω_0 = 5 рад/с за рухом годинникової стрілки і приводить до руху колесо II, яке котиться всередині нерухомого колеса III. Колесо II приводить до руху колесо I, яке знаходиться з ним в зачепленні і обертається навколо осі O. Визначити кутову швидкість ω_1 колеса I, якщо кількість зубців коліс Z_1 = 20 і Z_2 = 30.
Відповідь: ω_1 = 25 рад/с.


До задачі 11.1.

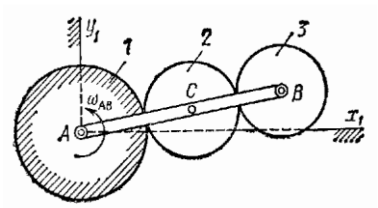

До задачі 11.2.

11.3. Два конічні зубчасті колеса обертаються навколо нерухомих осей, перетинних в точці O. Отвори обох конусів дорівнюють α = 30° і β = 60° відповідно. Перше колесо обертається з кутовою швидкістю ω_1 = 5 рад/с. Визначити кутову швидкість ω_2 другого колеса.
Відповідь: ω_2 = 2,89 рад/с.



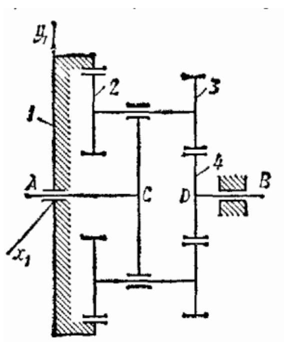
До задачі 11.3.

11.4. В планетарному механізмі радіус нерухомої шестірні 1 r_1 = 40 см, а рухомі шестерні 2 і 3 мають однаковий радіус $r_2 = r_3$ = 30 см. Визначити кутову швидкість шестерні 3, якщо відомо, що кривошип AB обертається з кутовою швидкістю ω_{AB} = 6 рад/с.*Відповідь:* ω_3 = - 2 рад/с.

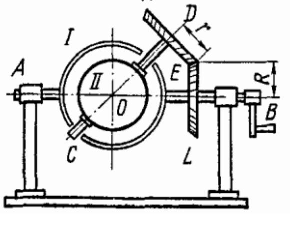


До задачі 11.4.

11.5. Редуктор швидкостей складається з нерухомої шестерні 1 з числом зубців Z_1 = 100, спарених шестерень 2 і 3 на кривошипі з числом зубців Z_2 = 30 і Z_3 = 20 відповідно, та шестерні 4 з числом зубців Z_4 = 60 на вихідному валу BD. Ведучий вал обертається з частотою n_{AC} = 1 420 об/хв. Визначити частоту обертання веденого вала BD.
Відповідь: n_{BD} = 1 578 об/хв.

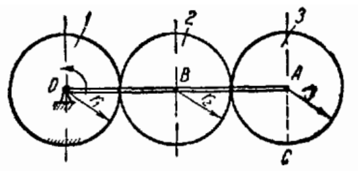

До задачі 11.5.

11.6. Дробарка складається з кулі II, в якій знаходяться важкі подрібнювальні кульки і речовина, що подрібнюється. Куля II сидить на осі CD, на якій також заклинене конічне зубчасте колесо K радіуса r = 30 см. Вісь CD знаходиться в підшипниках рами I, яка складає одне ціле з віссю AB і приводиться до обертання за допомогою рукоятки з кутовою швидкістю ω_1 = 10 рад/с. Колесо K находиться в зачепленні з нерухомим колесом L радіуса R = 50 см. Визначити абсолютну кутову швидкість ω_2 дробарки.
Відповідь: ω_2 = 16,7 рад/с.



До задачі 11.6.

11.7. Кривошип OA обертається з кутовою швидкістю ω_{OA} = 2 рад/с навколо нерухомої осі O. Диск 2 на пальці кривошипа котиться без ковзання по

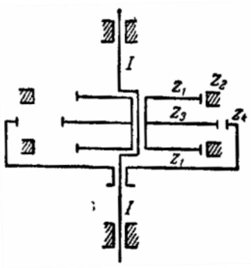


нерухомому диску 1 і приводить до руху диск 3, який вільно закріплений на пальці A кривошипу. Визначити швидкість точки C диска 3 в момент, коли кут OAC = 90°, якщо радіуси коліс $r_1 = r_2 = r_3 =$ 30 см.

Відповідь: υ_C = 2,4 м/с.

До задачі 11.7.

11.8. Для передачі обертання від двигуна до канатного барабану машини використовується планетарний механізм. При обертанні колінчастого вала I потрійна шестерня 1 – 3 котиться по нерухомій шестерні 2 і приводить до руху барабан 4. Визначити кутову швидкість барабана ω_4, якщо кутова швидкість колінчастого вала ω_1 = 10 рад/с, а число зубців шестерень відповідно дорівнює Z_1 = 30, Z_2 = 35, Z_3 = 32 і Z_4 = 40.

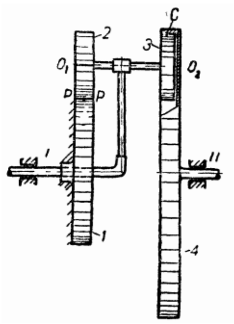


Відповідь: ω_4 = 0,08 рад/с.

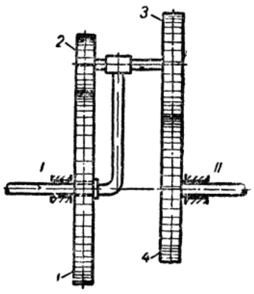
До задачі 11.8.

11.9. Редуктор швидкостей з диференціальною передачею складається з нерухомої шестерні 1 радіусом r_1 = 40 см, двох спарених шестерень 2 і 3 з радіусами r_2 = 20 см і r_3 = 30 см відповідно, та шестерні 4 радіусом r_4 = 90 см з внутрішнім зачепленням, яка знаходиться на вихідному валу II. Вхідний вал I та кривошип, який несе осі шестерень, обертаються з частотою n_I = 1 800 об/хв. Визначити частоту обертання веденого вала II.

Відповідь: n_{II} = 3 000 об/хв.



До задачі 11.9.

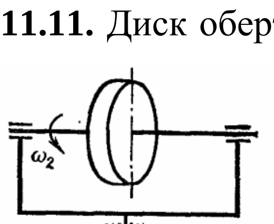


До задачі 11.10.

11.10. Редуктор з диференціальною передачею складається із шестерні 1 з числом зубців Z_1 = 80, двох спарених передатних шестерень 2 і 3 з числом зубців Z_2 = 20 і Z_3 = 40 відповідно, та шестерні 4 з числом зубців Z_4 = 60, яка знаходиться на вихідному валу II. Вхідний вал I і кривошип, який несе осі шестерень 2 і 3, обертаються з кутовою швидкістю ω_I = 120 рад/с, а шестерня 1 обертається з кутовою швидкістю ω_1 = 180 рад/с, причому вал I та шестерня 1 обертаються в одному напрямку. Визначити кутову швидкість обертання веденого вала II.

Відповідь: ω_{II} = 280 рад/с.

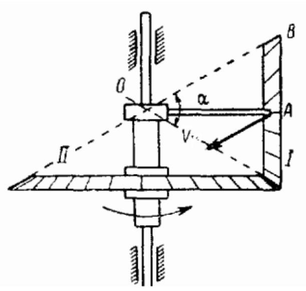
11.11. Диск обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю ω_1 = 4 рад/с і навколо горизонтальної осі з кутовою швидкістю ω_2 = 3 рад/с. Знайти абсолютну кутову швидкість і абсолютне кутове прискорення диску.



Відповідь: ω = 5 рад/с, ε = 12 рад/с^2.

До задачі 11.11.

11.12. Конічний каток I з кутом при вершині α = 60° котиться без ковзання по конічній поверхні II, яка обертається навколо нерухомої осі по закону



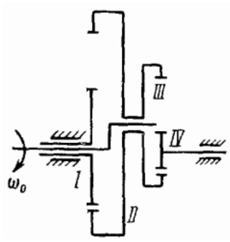
$$\varphi = 2t^2,\ рад.$$

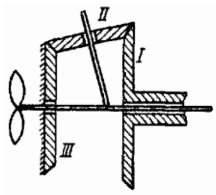
Визначити в момент t = 1 с величину швидкості точки B катка I, яка найбільш віддалена від поверхні II, якщо швидкість центра катка A по відношенню до поверхні II υ_A = 0,02t м/с і має напрям, показаний на рисунку. Також відомо, що OA = 16 см.
Відповідь: υ_B = 0,6 м/с.

До задачі 11.12.

11.13. В диференціальному механізмі водило обертається з частотою n_0 = 160 об/хв. Визначити частоту і напрям обертання колеса I, при якому вал колеса IV буде залишатись нерухомим. Радіуси колес відповідно дорівнюють r_1 = 10 см, r_2 = 15 см, r_3 = 8 см. *Відповідь:* n_I = 70 об/хв.

11.14. Планетарний редуктор авіаційного двигуна складається з двох рухомих коліс I і II з числами зубців Z_1 = 40 і Z_2 = 20 відповідно, та нерухомого колеса III з числом зубців Z_3 = 35. Визначити число обертів n гвинта літака, якщо шестерня I обертається з частотою n_I = 2 420 об/хв.
Відповідь: n = 1 760 об/хв.

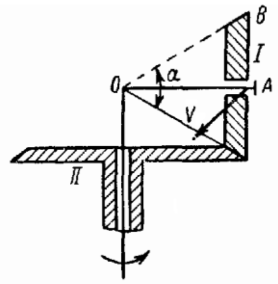




До задачі 11.13. До задачі 11.14.

11.15. Конічна шестерня з величиною початкового конусу OA = 8 см і кутом при вершині α = 60° находиться в зачепленні з конічним колесом II, яке обертається навколо нерухомої осі по закону

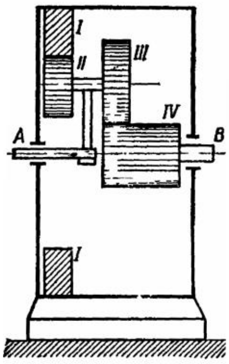
$$\varphi = 0{,}25t^2,\ рад.$$

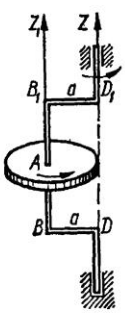


Визначити в момент t = 1 с величину прискорення точки B катка I, яка найбільш віддалена від колеса II, якщо швидкість центра катка A по відношенню до поверхні II υ_A = 0,02t м/с і має напрям, показаний на рисунку.

До задачі 11.15. *Відповідь:* a_B = 0,017 м/с^2.

11.16. Зубчасте колесо I редуктора швидкостей нерухоме, а спарені зубчасті колеса II і III, вільно насаджені на вісь, приводяться до руху за допомогою вала A, який обертається з частотою n_A = 80 об/хв. Визначити частоту обертання n_B вала B, скріпленого з зубчастим колесом IV, якщо число зубців коліс Z_1 = 120, Z_2 = 20, Z_3 = 60 і Z_4 = 40. *Відповідь:* n_B = 0,017 об/хв.



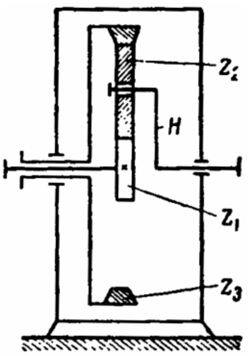


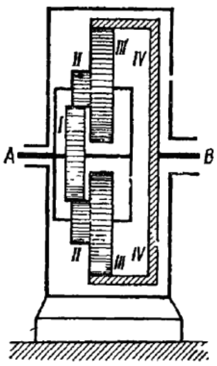
11.17. Диск A обертається навколо осі z_1 згідно рівняння $\varphi_1 = 0{,}25t^2\ рад,$

а вісь z_1 обертається навколо нерухомої осі z по закону $\varphi_1 = 0{,}5t^2\ рад.$

Визначити відстань d від миттєвої осі обертання диска до нерухомої осі z, якщо BD = B_1D_1 = 30 см.
Відповідь: d = 0,1 м.

До задачі 11.16. До задачі 11.17.



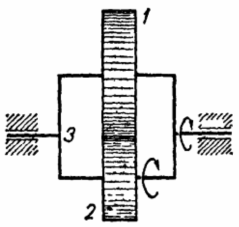


11.18. Визначити кутову швидкість водила H і колеса 2 диференціального зубчастого механізму, якщо числа зубців коліс Z_1 = 18, Z_3 = 54. Частота обертання колеса 1 n_1 = 120 об/хв, а частота обертання колеса 3 n_3 = 60 об/хв, причому напрям обертання даного колеса протилежний до напряму обертання колеса 1.
Відповідь: n_H = - 15 об/хв, n_2 = - 150 об/хв.

До задачі 11.18. До задачі 11.19.

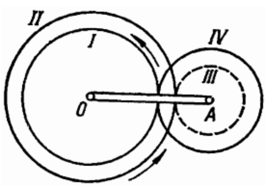
11.19. Шестерня *I* і спарені шестерні *II* і *III* редуктора швидкостей вільно насаджені на осі, причому шестерня *III* має внутрішнє зачеплення з колесом *IV*, яке жорстко закріплене на валу *B*. Ведучий вал *A* разом з рамою обертається з частотою n_A = 600 об/хв, а шестерня *I* обертається в протилежному напрямі з частотою n_I = 300 об/хв. Визначити частоту обертання веденого вала *B*, якщо числа зубців Z_{I} = 40, Z_{II} = 20, Z_{III} = 30 і Z_{IV} = 90. *Відповідь:* n_B = 1 200 об/хв.

11.20. На раму 3 вільно насаджені шестерні 1 і 2, число зубців яких Z_1 = 65 і Z_2 = 45 відповідно. Рама 3 обертається з частотою 142 об/хв, а шестерня 2 при обертанні навколо власної осі в тому ж напрямку, що і рама, має частоту 78 об/хв. Визначити частоту обертання шестерні 1. *Відповідь:* n_1 = 88 об/хв.



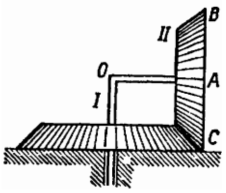
До задачі 11.20.

11.21. Зубчасті колеса *I* і *II* та кривошип *OA*, який несе вісь обертання спарених шестерень *III* і *IV*, вільно насаджені на вісь обертання *O*. Числа зубців коліс Z_I = 75, Z_{II} = 100, Z_{III} = 25 і Z_{IV} = 50. Визначити частоту обертання кривошипа *OA*, якщо колеса *I* і *II* обертаються проти годинникової стрілки з частотою n_I = 120 об/хв і n_{II} = 90 об/хв. *Відповідь:* n_{OA} = 72 об/хв.

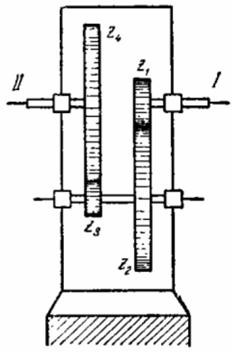


До задачі 11.21.

11.22. Конічна шестерня *II*, яка знаходиться в зачепленні з нерухомою шестернею *I*, приводиться до руху за допомогою кривошипа *OA*. Кривошип обертається навколо вертикальної осі з частотою n_{OA} = 90 об/хв. Визначити швидкість і прискорення кінців вертикального діаметра *BC*, якщо *OA* = *OC* = 5 см.
Відповідь: υ_B = 0,94 м/с, υ_C = 0 м/с, a_B = 1,40 м/с^2, a_C = 0,63 м/с^2.

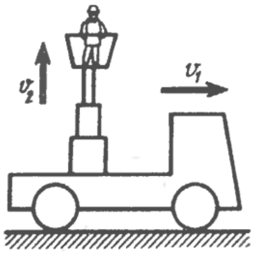


До задачі 11.22.



11.23. Редуктор швидкостей, призначений для зміни величини кутової швидкості при передачі обертання від вала *I* до вала *II*, складається з чотирьох зубчастих коліс, які обертаються навколо нерухомих осей. Зубчасті колеса мають числа зубців Z_1 = 12, Z_2 = 72, Z_3 = 10. Вал *I* обертається з частотою n_I = 5400 об/хв. Знайти число зубців шестерні 4, при якому вал *II* буде обертатися з частотою n_{II} = 100 об/хв. *Відповідь:* Z_4 = 90.

До задачі 11.23.



11.24. Автомобіль рухається зі швидкістю υ_1 = 3,6 км/год, а монтажна вишка підіймається зі швидкістю υ_2 = 0,5 м/с. Визначити абсолютну швидкість працівника, який нерухомо стоїть у вишці.
Відповідь: υ = 1,12 м/с.

До задачі 11.24.

Глава 12. Сферичний рух твердого тіла

12.1. Рівняння сферичного руху твердого тіла

Сферичний – рух твердого тіла, при якому тільки одна з його точок увесь час залишається нерухомою. Траєкторії інших точок розміщуються на поверхнях сфер з центром у нерухомій точці.

Для визначення сферичного руху тіла використовують дві системи координат: *Oxyz* – нерухому з початком координат в точці *O*, *Oξηζ* – рухому систему, незмінно пов'язану з тілом, яке обертається, і теж має початок в точці *O* (рис. 12.1). *Лінія кутів* – лінія *OJ* перетину нерухомої площини *xOy* з рухомою площиною *ξOη*.

Положення твердого тіла однозначно визначається трьома кутами Ейлера, назви яких узяті з небесної механіки: (x^J) = ψ – кут прецесії; (z^ζ) = θ – кут нутації; (J^ξ) = φ – кут власного обертання. Додатні напрямки кутів показані на рис. 12.1 стрілкою.

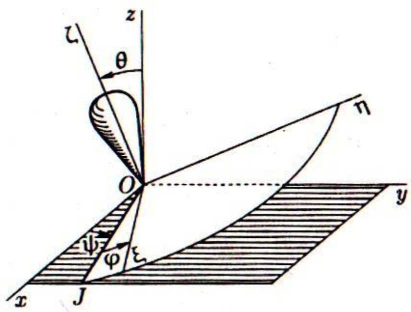


Рис. 12.1. Сферичний рух твердого тіла.

Оскільки для описання руху достатньо трьох кутів, то таке тіло має три ступені вільності. Під час руху всі Ейлерові кути можуть змінюватися, тому однозначно описують рух тіла **рівняння сферичного руху твердого тіла**

$$\psi = f_1(t),\ \theta = f_2(t),\ \varphi = f_3(t). \qquad (12.1)$$

12.2. Кутова швидкість твердого тіла при сферичному русі

При зміні кута φ тіло здійснює власне обертання навколо осі ζ з кутовою швидкістю

$$\omega_1 = \dot{\varphi}.$$

При зміні кута ψ тіло здійснює обертання (прецесію) навколо осі z з кутовою швидкістю

$$\omega_2 = \dot{\psi}.$$

При зміні кута θ тіло здійснює обертання (нутацію) навколо лінії кутів *OJ* з кутовою швидкістю

$$\omega_3 = \dot{\theta}.$$

Вектори кутових швидкостей направлені уздовж осей Oζ, *Oz* і *OJ*, тому тіло бере участь в 3 миттєвих обертаннях навколо осей, які перетинаються в точці *O*. Згідно (11.2), абсолютний рух буде обертанням навколо осі, що проходить через точку О, з миттєвою кутовою швидкістю

$$\omega = \sum_{i=1}^{3} \omega_i = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_3. \qquad (12.2)$$

Модуль вектора миттєвої кутової швидкості визначається по формулі

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta}. \qquad (12.3)$$

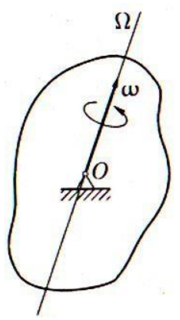
Проекції вектора кутової швидкості на осі координат нерухомої системи знаходяться по формулам

$$\omega_x = \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi;\ \omega_y = -\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\psi;\ \omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}. \qquad (12.4)$$

Проекції вектора кутової швидкості на осі координат рухомої системи знаходяться по формулам

$$\omega_\xi = \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\varphi;\ \omega_\eta = \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\varphi;\ \omega_\zeta = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}. \qquad (12.5)$$

Теорема Ейлера-Даламбера: тверде тіло, яке має одну нерухому точку О, можна перемістити з одного положення в будь-яке інше поворотом навколо деякої осі, що проходить через нерухому точку *O* (рис. 12.2). Цю вісь називають миттєвою віссю обертання твердого тіла.



Миттєва вісь обертання OΩ – геометричне місце точок тіла, швидкості яких в даний момент дорівнюють нулю. Напрямок даної вісі у просторі і в самому тілі безперервно змінюється.

Вектор кутової швидкості направлений від нерухомої точки *O* вздовж миттєвій осі так, щоб дивлячись назустріч осі, бачити тіло таким, що обертається проти годинникової стрілки.

Рис. 12.2. Миттєва вісь обертання твердого тіла.

12.3. Кутове прискорення твердого тіла при сферичному русі

Миттєве кутове прискорення – векторна величина, яка характеризує зміну з часом кутової швидкості за модулем та напрямком і визначається, як перша похідна від вектора кутової швидкості

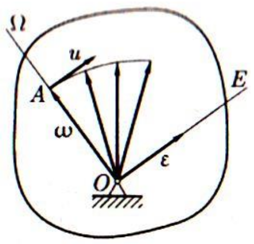
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (12.6)$$

Розглядаючи вектор $\boldsymbol{\omega}$ як радіус вектор точки *A*, можна знайти кутове прискорення тіла як швидкість кінця вектора кутової швидкості при русі по його годографу

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{u}. \qquad (12.7)$$

Позначимо через $\boldsymbol{\omega}_0$ орт миттєвої осі *Ω*, тоді вектор кутового прискорення визначиться по формулі

$$\varepsilon = \frac{d(\omega\omega_{\boldsymbol{0}})}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\omega_{\boldsymbol{0}} + \omega\frac{d\omega_{\boldsymbol{0}}}{dt} = \varepsilon_{\boldsymbol{1}} + \varepsilon_{\boldsymbol{2}}.$$



Перша складова кутового прискорення у формулі (12.8) характеризує зміну кутової швидкості за величиною, а друга складова – за напрямом.

Напрям вектора кутового прискорення *OE* збігається з напрямом дотичної до траєкторії вектора $\boldsymbol{u}$ у відповідній точці (рис. 12.3). Тому за сферичного руху напрямок вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ не збігається з напрямом вектора $\boldsymbol{\omega}$.

Рис. 12.3. Визначення напрямку кутового прискорення.

Існує також інший спосіб визначення кутового прискорення. Проекції кутового прискорення на осі нерухомої системи координат можна одержати диференціюванням за часом формул (12.4)

$$\varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt};\ \varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt};\ \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}.$$

Модуль миттєвого кутового прискорення в нерухомій системі координат визначається по теоремі Піфагора

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2}.$$

Проекції кутового прискорення на осі рухомої системи координат можна одержати диференціюванням за часом формул (12.5)

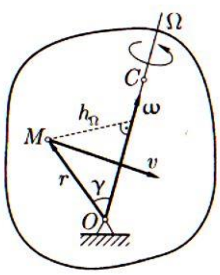
$$\varepsilon_\xi = \frac{d\omega_\xi}{dt};\ \varepsilon_\eta = \frac{d\omega_\eta}{dt};\ \varepsilon_\zeta = \frac{d\omega_\zeta}{dt},$$

А модуль миттєвого кутового прискорення

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_\xi^2 + \varepsilon_\eta^2 + \varepsilon_\zeta^2}.$$

12.4. Швидкості точок тіла при сферичному русі

Оскільки при сферичному русі тіло обертається навколо миттєвої осі *OΩ*, то знаючи її положення і кутову швидкість тіла, можна знайти швидкість будь-якої точки *M* твердого тіла за формулою Ейлера



$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}, \tag{12.8}$$

де $\boldsymbol{r}$ – радіус-вектор, проведений з нерухомого центру *O* до даної точки *M* (рис. 12.4).

Рис. 12.4. Швидкість точки при сферичному русі.

Модуль швидкості точки

$$\upsilon = \omega r\cdot\sin\gamma = \omega h_\Omega, \tag{12.9}$$

де h_Ω - відстань до миттєвої осі обертання.

Розподіл швидкостей точок твердого тіла при сферичному русі такий же, як і при обертанні тіла навколо нерухомої осі. Проекції швидкості точки на нерухомі і рухливі осі координат визначаються з формули Ейлера

$$\upsilon_x = \omega_y z - \omega_z y,\quad \upsilon_y = \omega_z x - \omega_x z,\ \upsilon_z = \omega_x y - \omega_y x.$$
$$\upsilon_\xi = \omega_\eta\zeta - \omega_\zeta\eta,\quad \upsilon_\eta = \omega_\zeta\xi - \omega_\xi\zeta,\ \upsilon_\zeta = \omega_\xi\eta - \omega_\eta\xi. \tag{12.10}$$

12.5. Прискорення точок тіла при сферичному русі

Оскільки прискорення є перша похідна від швидкості за часом, то абсолютне прискорення довільної точки тіла M при сферичному русі

$$\boldsymbol{a}_M = \dot{\upsilon}_M = (\dot{\omega} \times \boldsymbol{r}) + (\omega \times \dot{\boldsymbol{r}}) = (\varepsilon \times \boldsymbol{r}) + (\omega \times \upsilon). \quad (12.11)$$

Теорема Ривальса: прискорення точки твердого тіла, яке здійснює сферичний рух, дорівнює геометричній сумі обертового і доосьового прискорень

$$\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}_{об} + \boldsymbol{a}_{ос}.$$

Вектор *обертового* прискорення

$$\boldsymbol{a}_{об} = (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r})$$

направлений перпендикулярно площині, що проходить через точку M і вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ (рис. 12.5), а його модуль визначається по формулі

$$a_{об} = \varepsilon r \sin\beta = \varepsilon h_1,$$

де h_1 – відстань від точки M до вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Вектор *доосьового* прискорення

$$\boldsymbol{a}_{ос} = (\omega \times \upsilon)$$

направлений вздовж лінії MC (рис. 12.5), його модуль визначається по формулі

$$a_{ос} = \omega\upsilon \sin 90° = \omega^2 h.$$

Обертова складова абсолютного прискорення $a_{об}$ може мати будь-який напрямок, перпендикулярний до вектора $\boldsymbol{r}$, оскільки на напрям вектора кутового прискорення $\boldsymbol{\varepsilon}$ не накладено жодних обмежень. В цьому є відмінність від випадку обертання тіла навколо нерухомої осі, де доцентрове і дотичне прискорення завжди взаємно перпендикулярні і лежать в площині, перпендикулярній до осі обертання.

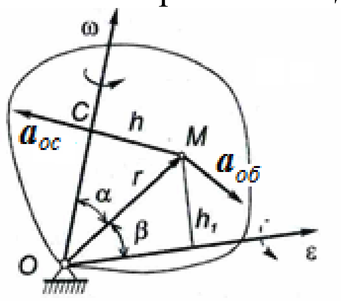


Рис. 12.5. Прискорення точки при сферичному русі.

Модуль прискорення точки визначається по формулі

$$a_M = \sqrt{a_{ос}^2 + a_{об}^2 + 2a_{ос}a_{об}\cos\left(a_{ос}\hat{\ } a_{об}\right)}.$$

Проекції прискорення точки на осі нерухомої системи координат

Ошибка! Ошибка внедренного объекта.

Проекції прискорення точки на осі рухомої системи координат

$$a_\xi = \varepsilon_\eta \zeta - \varepsilon_\zeta \eta + \omega_\xi (\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \xi;$$

$$a_\eta = \varepsilon_\zeta \xi - \varepsilon_\xi \zeta + \omega_\eta (\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \eta;$$

$$a_z = \varepsilon_\xi \eta - \varepsilon_\eta \xi + \omega_\zeta (\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \zeta.$$

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення сферичного руху твердого тіла.
2. Скільки ступеней вільності має тіло при сферичному русі?
3. Яким чином задаються кути Ейлера при сферичному русі?
4. Запишіть рівняння сферичного руху твердого тіла.

5. Що називається миттєвою віссю обертання, яку роль вона відіграє у описанні сферичного руху?

Завдання № 12. «Сферичний рух твердого тіла»

Рекомендації до розв’язання задач

А. *Відомі рівняння руху тіла у вигляді кутів Ейлера, необхідно визначити кутові швидкість і прискорення тіла, лінійні швидкість і прискорення довільної точки тіла М.*

1. Визначити похідні від кутів Ейлера за часом.
2. Знайти проекції кутової швидкості на осі рухомої і нерухомої систем координат по формулам (12.4) – (12.5).
3. Визначити величину миттєвої кутової швидкості по формулі (12.3).
4. Визначити положення миттєвої осі, знайти миттєве кутове прискорення.
5. Визначити модуль і напрямок швидкості точки *М*.
6. Визначити обертову і доосьову складові прискорення точки *М*, через них знайти модуль і напрямок повного прискорення точки *М*.

Б. *Відомі швидкість довільної точки тіла М і положення миттєвої осі обертання, необхідно визначити миттєві кутові швидкість і прискорення тіла, лінійні швидкість і прискорення будь-яких точок тіла.*

1. Обрати рухому і нерухому системи координат, визначити миттєву кутову швидкість твердого тіла.
2. Визначити шукані швидкості точок твердого тіла.
3. Знайти миттєве кутове прискорення твердого тіла як швидкість кінця вектора миттєвої кутової швидкості.
4. Визначити обертову і доосьову складові прискорення точок твердого тіла, потім через них знайти абсолютні прискорення даних точок.

Приклад розв’язання задачі

Задача 1. Тверде тіло обертається навколо нерухомої точки згідно закону

$$\psi = 0{,}5t \ \text{ðàä}, \ \varphi = 6t \ \text{ðàä}, \ \theta = \frac{\pi}{4} \ \text{ðàä}.$$

Визначити миттєву кутову швидкість тіла, а також швидкість точки тіла *М* (2, 3, 5), координати якої задано в сантиметрах в рухомій системі координат, жорстко зв’язаній з тілом.

Розв’язання

Розглядаємо рух тіла одночасно в двох системах координат з центрами в точці *O*: рухомій $Ox_1y_1z_1$, жорстко зв’язаній з тілом, і нерухомій $Oxyz$. Знайдемо похідні за часом від кутів Ейлера

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d(0{,}5t)}{dt} = 0{,}5\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right), \ \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(6t)}{dt} = 6\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right), \ \dot{\theta} = 0.$$

Миттєва кутова швидкість твердого тіла

$$\boldsymbol{\omega} = 0{,}5\boldsymbol{k} + 6\boldsymbol{k}_1 \ (\text{рад/с}).$$

Знаходимо проекції кутової швидкості на осі координат нерухомої системи

$$\omega_x = \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi = 4{,}2\sin 0{,}5t \ \text{(ðàä/ñ)};$$

$$\omega_y = -\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\psi = -4{,}2\cos 0{,}5t \ \text{(ðàä/ñ)};$$

$$\omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} = 4{,}7 \ \text{(ðàä/ñ)}.$$

Знаходимо проекції кутової швидкості на осі координат рухомої системи

$$\omega_{x1} = \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\varphi = 0{,}35\sin 6t \ \text{(рад/с)};$$

$$\omega_{y1} = \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\varphi = 0{,}35\cos 6t \ \text{(рад/с)};$$

$$\omega_{z1} = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} = 6{,}35 \ \text{(рад/с)}.$$

Знаходимо величину миттєвої кутової швидкості

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta} = \sqrt{0{,}5^2 + 6^2 + 0 + 2\cdot 0{,}5\cdot 6\cdot\cos 45^\circ} = 6{,}4 \ \text{(ðàä/ñ)}.$$

Проекції швидкості точки M на осі рухомої системи координат

$$\upsilon_{x1} = \omega_{y1}z_1 - \omega_{z1}y_1 = 0{,}35\cos 6t\cdot 5 - 6{,}35\cdot 3 = 1{,}75\cos 6t - 19{,}05 \ \text{(см/с)};$$

$$\upsilon_{y1} = \omega_{z1}x_1 - \omega_{x1}z_1 = 6{,}35\cdot 2 - 0{,}35\sin 6t\cdot 5 = 12{,}7 - 1{,}75\sin 6t \ \text{(см/с)};$$

$$\upsilon_{z1} = \omega_{x1}y_1 - \omega_{y1}x_1 = 0{,}35\sin 6t\cdot 3 - 0{,}35\cos 6t\cdot 2 = 1{,}05\sin 6t - 0{,}7\cos 6t \ \text{(см/с)}.$$

Абсолютну швидкість точки M виразимо через її проекції

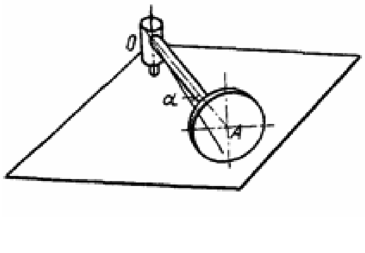
$$\upsilon_M = (1{,}75\cos 6t - 19{,}05)\boldsymbol{i_1} + (12{,}7 - 1{,}75\sin 6t)\boldsymbol{j_1} + (1{,}05\sin 6t - 0{,}7\cos 6t)\boldsymbol{k_1} \ \text{(ñì/ñ)}.$$

Задачу розв’язано.

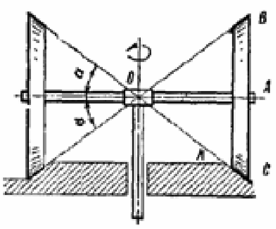
Завдання № 12 до РГР

12.1. Вісь *OA* млинового бігуна обертається рівномірно навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю $\omega_1 = 2$ рад/с. Довжина осі $OA = 1{,}2$ м, радіус бігуна $r = 40$ см. Нехтуючи ковзанням бігуна, визначити вектор його кутової швидкості.
Відповідь: $\omega = 8$ рад/с.

12.2. Знайти швидкість і прискорення точки *B* конічного катка, який рівномірно котиться без ковзання по горизонтальній конічній кільцевій опорі. Діаметр катка $BC = 30$см, $OA = 20$ см, швидкість центру катка $\upsilon_A = 0{,}4$ м/с перпендикулярна площині рисунка і направлена на спостерігача.
Відповідь: $\upsilon_B = 0{,}79$ м/с, $a_B = 2{,}57$ м/с^2.



До задачі 12.1.

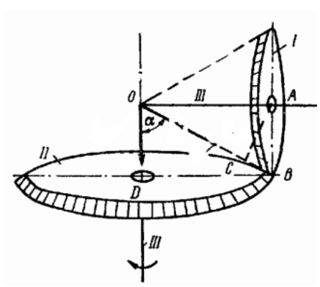


До задачі 12.2.

12.3. Конічна шестерня *I* радіуса $r = 20$ см знаходиться в зачепленні з нерухомим колесом *II* радіуса $R = 40$ см і приводиться до руху кривошипом *III*, який обертається по закону

$$\varphi = 1{,}5t^2 \ (рад).$$

Визначити величину кутової швидкості ω і кутового прискорення ε в момент часу $t = 1$ с.
Відповідь: $\omega = 6{,}71$ рад/с, $\varepsilon = 19{,}21$ рад/с^2.



До задачі 12.3.

12.4. Тверде тіло обертається навколо нерухомої точки згідно закону

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{4}\ рад,\ \varphi = \frac{\pi t}{4}\ рад,\ \theta = \frac{\pi}{3}\ рад.$$

Визначити швидкість точки тіла *M* (0, 0, 32), координати якої задано в сантиметрах в нерухомій системі координат в даний момент часу.

Відповідь: $\upsilon_M = 21{,}8$ см/с.

12.5. Тверде тіло обертається навколо нерухомої точки згідно закону

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{4}\ рад,\ \varphi = \frac{\pi t}{4}\ рад,\ \theta = \frac{\pi}{3}\ рад.$$

Визначити прискорення точки тіла *M* (0, 0, 32), координати якої задано в сантиметрах в нерухомій системі координат в даний момент часу.

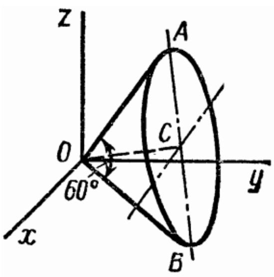
Відповідь: $a_M = 29{,}6$ см/с^2.

12.6. Тверде тіло обертається навколо нерухомої точки *O*, прийнятої за початок відліку нерухомої системи координат *Oxyz*. Визначити в даний момент часу швидкість точки *N* (0,5; 1,7; 2) тіла, якщо миттєва вісь проходить в цей момент через точку *M* (2; 1,73; 3), утворюючи з осями координат гострі кути, а миттєва кутова швидкість дорівнює 8 рад/с.

Відповідь: $\upsilon_N = 8$ см/с.

12.7. Коловий конус висотою *OC* = 20 см і кутом при вершині *AOB* = 60° рівномірно котиться без ковзання по площині *xOy*, причому точка *O* залишається нерухомою, а конус здійснює за 1 секунду 2 оберти навколо осі *Oz*. Визначити кутову швидкість ω обертання конуса навколо миттєвої осі.

Відповідь: $\omega = 21{,}75$ рад/с.



До задачі 12.7.

12.8. Коловий конус висотою *OC* = 20 см і кутом при вершині *AOB* = 60° рівномірно котиться без ковзання по площині *xOy*, причому точка *O* залишається нерухомою, а конус здійснює за 1 секунду 2 оберти навколо осі *Oz* (рис. до задачі 12.7). Визначити кутове прискорення ε конуса.

Відповідь: $\varepsilon = 273{,}2$ рад/с^2.

12.9. Прямий коловий конус *OAB* з кутом при вершині $2\alpha = 60°$ котиться без ковзання по нерухомому конусу *OAD* так, що його вершина залишається нерухомою, а швидкість центра *C* основи дорівнює $\upsilon_C = 6t$ см/с. Визначити швидкості і прискорення кінців вертикального діаметра *AB* в момент часу $t = 2$ с, якщо *OC* = 6 см.

Відповідь: $\upsilon_A = 0$ м/с, $a_A = 0{,}48$ м/с^2, $\upsilon_B = 0{,}24$ м/с, $a_B = 0{,}84$ м/с^2.

До задачі 12.9.

12.10. Прямий коловий конус висотою *OC* = 20 см і кутом при вершині $2\alpha = 60°$ рівномірно котиться без ковзання по горизонтальній площині так, що швидкість центра *C* основи постійна і дорівнює $\upsilon = 0{,}3$ м/с. Визначити швидкості і прискорення кінців діаметра *A* і *B*.

Відповідь: $\upsilon_A = 0$ м/с, $a_A = 1{,}2$ м/с^2, $\upsilon_B = 0{,}6$ м/с, $a_B = 1{,}6$ м/с^2.

12.11. Тверде тіло обертається навколо нерухомої точки по закону

$$\psi = \frac{\pi}{2} - 2t \ \text{рад}, \ \varphi = 2t \ \text{рад}, \ \theta = \frac{\pi}{6} \ \text{рад}.$$

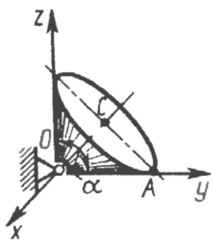
Визначити швидкість і прискорення точки тіла M, координати якої в момент часу $t = \pi/2$ с дорівнюють відповідно $x = 4$ см, $y = 5$ см, $z = 6$ см.
Відповідь: $\upsilon_M = 0{,}07$ м/с, $a_M = 0{,}18$ м/с^2.

12.12. При сферичному русі твердого тіла вектор його миттєвої кутової швидкості має вигляд

$$\omega = 2^t \boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \ \text{ðàä}/c.$$

Визначити в момент часу $t = 1$ с швидкість точки M з координатами $x = 0$ м, $y = 1$ м, $z = 1$ м.
Відповідь: $\upsilon_M = 3$ м/с.

12.13. Конус з кутом при вершині $\alpha = 90°$ і висотою $OC = 10$ см котиться по горизонтальній площині, обертаючись навколо точки O, причому швидкість центра основи $\upsilon_C = 0{,}1$ м/с. Визначити модуль доосьового прискорення точки A.
Відповідь: $a_{oc} = 0$ м/с^2.



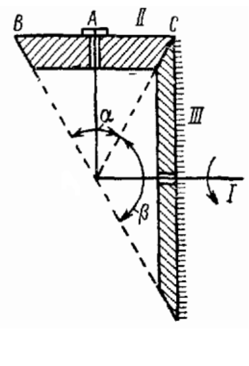
До задачі 12.13.

12.14. Проекції кутової швидкості твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої точки O, на осі нерухомої координатної системи $Oxyz$ виражаються формулами

$$\omega_x = 2t, \ \omega_y = t^2, \ \omega_z = t^3,$$

де кутова швидкість виражена в радіанах за секунду, а час в секундах. Визначити в момент часу $t = 1$ с швидкість і прискорення точки тіла M (1, 0, 0), координати якої задано в сантиметрах.
Відповідь: $\upsilon_M = 1{,}41$ см/с, $a_M = 6{,}71$ см/с^2.

12.15. Вал I, який обертається рівноприскорено з кутовим прискоренням $\varepsilon_0 = 0{,}5$ рад/с^2, приводячи до руху шестерню II радіуса $r = 4$ см, яка знаходиться в зачепленні з нерухомою шестернею III. Визначити в момент часу $t = 1$ с прискорення точок B і C рухомої шестерні, якщо кути при вершинах початкових конусів рухомої і нерухомої шестерень дорівнюють $\alpha = 60°$ і $\beta = 120°$ відповідно. Кутова швидкість вала I в початковий момент часу $\omega_0 = 1$ рад/с.
Відповідь: $a_B = 0{,}54$ м/с^2, $a_C = 0{,}31$ м/с^2.



До задачі 12.15.

12.16. При сферичному русі твердого тіла вектор його миттєвої кутової швидкості має вигляд

$$\omega = 2^t \boldsymbol{i} + t^2 \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \ \text{ðàä}/c.$$

Визначити модуль миттєвого кутового прискорення ε твердого тіла в момент часу $t = 1$ с.

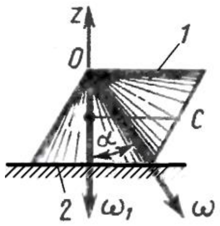
Відповідь: ε = 2,63 рад/с^2.

12.17. Кутова швидкість обертання тіла, яке здійснює сферичний рух, дорівнює 14 рад/с, а миттєва вісь в цей момент часу складає з координатними осями нерухомої системи кути $\alpha = 65°$, $\beta = 31°$, $\gamma = 73°$. Для точки M (10, 0, 20), координати якої задано в сантиметрах, знайти модуль швидкості υ та проекції швидкості υ_x, υ_y і υ_z на координатні осі.

Відповідь: υ = 2,8 м/с, υ_x = 2,4 м/с, υ_y = 0,8 м/с, υ_z = 1,2 м/с.

12.18. Конус 1 котиться по нерухомому конусу 2 з постійною кутовою швидкістю ω = 3,1 рад/с. Перпендикуляр CN, опущений з центру C основи конуса 1, обертається навколо осі Oz з кутовою швидкістю ω = 1,8 рад/с. Визначити кутове прискорення конуса 1, якщо кут α = 30°.

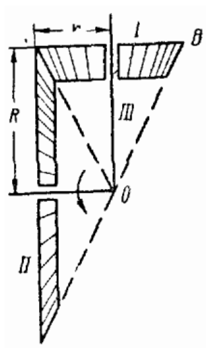
Відповідь: ε = 2,83 рад/с^2.



До задачі 12.18.

12.19. Конічна шестерня I радіуса r = 25 см знаходиться в зачепленні з нерухомим колесом II радіуса R = 50 см і приводиться до руху валом III, який обертається рівноприскорено з кутовим прискоренням ε_0 = 1,57 рад/с^2 і має в початковий момент часу кутову швидкість ω_0 = 1,57 рад/с. Визначити величину кутової швидкості ω і кутового прискорення ε тіла, а також лінійну швидкість точки B рухомої шестерні в момент часу t = 1 с.

Відповідь: ω = 10,5 рад/с, ε = 44,5 рад/с^2, υ_B = 4,71 м/с.



До задачі 12.19.

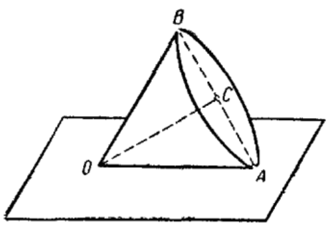
12.20. Тверде тіло обертається навколо нерухомої точки O згідно закону $\psi = \dfrac{\pi t}{2}$ *рад*, $\varphi = \pi t$ *рад*, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ *рад*.

Визначити прискорення точки тіла M, яка в даний момент часу лежить на миттєвій осі обертання на відстані OM = 3,5 см від нерухомої точки O.

Відповідь: a_M = 0,15 м/с^2.

12.21. Конус з кутом при вершині $2\alpha = 60°$ і радіусом основи r = 20 см котиться по нерухомій горизонтальній площині без ковзання, причому швидкість центра основи C постійна і дорівнює υ_C = 0,6 м/с. Визначити кутову швидкість ω і кутове прискорення ε конуса.

Відповідь: ω = 3,46 рад/с, ε = 6,93 рад/с^2.



До задачі 12.21.

12.22. Конус з кутом при вершині $2\alpha = 60°$ і радіусом основи r = 20 см котиться по нерухомій горизонтальній площині без ковзання (рис. до задачі 12.21), причому швидкість центра основи C постійна і дорівнює υ_C = 0,6 м/с. Визначити швидкості і прискорення найвищої та найнижчої точок A і B основи конуса. *Відповідь:* υ_A = 0 м/с, a_A = 2,77 м/с^2, υ_B = 1,2 м/с, a_B = 3,66 м/с^2.

РОЗДІЛ III. ДИНАМІКА

Глава 13. Закони і задачі динаміки

13.1. Основні закони динаміки

Динаміка - розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальної точки, системи матеріальних точок і абсолютно твердого тіла під дією сил, прикладених до них. У динаміці узагальнюються поняття, розглянуті в статиці та кінематиці. В основі динаміки лежать три закони Ньютона, які є законами природи, встановленими на основі тривалих спостережень.

Системи координат, в яких ці закони справедливі, називаються *інерційними*. При розв'язанні багатьох задач механіки з достатньою мірою точності можна вважати інерціальною систему, яка покоїться або рухається поступально, прямолінійно і рівномірно відносно Землі. Лише при розв'язанні задач небесної механіки доводиться враховувати обертання Землі, тому в цьому випадку за інерціальну приймають систему з початком координат в центрі Сонця і осями, направленими до трьох нерухомих зірок.

Перший закон Ньютона (закон інерції): ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху до тих пір, поки прикладені сили не змінять її стану. Ізольованою вважають точку, для якої можна знехтувати взаємодією з іншими тілами.

Інертність - здатність ізольованої матеріальної точки зберігати свій стан рівномірного руху за відсутності діючих сил. Якщо на точку починає діяти сила, то її стан змінюється не миттєво і тим повільніше, чим більше інертність. Мірою інертності точки є її маса.

Другий закон Ньютона (основний закон динаміки): прискорення точки, що знаходиться під дією сили F, пропорційне величині сили і має однаковий з нею напрям

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}. \tag{13.1}$$

Коефіцієнтом пропорційності в даному законі є маса точки. Тож маса є мірою інертності тіла, але лише при поступальному русі, коли всі його точки мають однакові прискорення.

Маса – фізична величина, яка є мірою інертних або гравітаційних властивостей точки (тіла). Сучасною наукою встановлено еквівалентність інертної і гравітаційної мас. Прийнявши Землю за інерційну систему відліку, можна визначити масу тіла через його вагу

$$P = mg \Rightarrow m = \frac{P}{g}.$$

Оскільки всі тіла в одному місці Землі падають з однаковим прискоренням $\boldsymbol{g}$, то виходить, що вага тіла пропорційна масі і не залежить від його форми. Але також відомо, що на екваторі і на полюсі тіла падають з різними прискореннями при незмінній масі. Крім того, космонавт в ракеті далеко від

Землі майже повністю втрачає свою вагу, хоча його маса не змінюється. Тому поняття маси і ваги не еквівалентні, різниця між ними витікає з закону всесвітнього тяготіння.

Третій закон Ньютона (закон дії і протидії): дві матеріальні точки або тіла взаємодіють з силами, рівними за величиною і спрямованими в протилежні сторони уздовж їх спільної лінії дії

$$F_{12} = -F_{21}. \tag{13.2}$$

Цей закон справедливий в будь-якій системі відліку, оскільки він не містить кінематичних характеристик об'єктів.

Принцип суперпозиції: якщо на точку одночасно діє декілька сил, то кожна з сил надає таке прискорення, як у випадку, коли б вона діяла одна. Прискорення матеріальної точки при одночасній дії сил дорівнює геометричній сумі прискорень від кожної з сил окремо.

Принцип суперпозиції не може використовуватись у випадку, коли діючі сили залежать від прискорення точки. Такі сили у природі зустрічаються дуже рідко, прикладом є електромагнітна сила тяжіння точки до нерухомого центра.

13.2 Класифікація сил в динаміці

Сили, які діють на вільну точку, тіло або систему точок по характеру дії зручно розділити на зовнішні та внутрішні.

1. *Зовнішні* – сили, які діють на точки даної системи збоку інших механічних об'єктів, які до даної системи не входять. Позначаються $\boldsymbol{F}^e$ від латинського слова *exterior* – зовнішній.

2. *Внутрішні* – сили взаємодії між точками даної механічної системи. Позначаються $\boldsymbol{F}^i$ від латинського слова *interior* – внутрішній.

Одна й та ж сила може бути як зовнішньою, так і внутрішньою, в залежності від вибору механічної системи. Наприклад, тиск продуктів згоряння паливної суміші на поршень ДВЗ є зовнішньою силою по відношенні до поршня і внутрішньою по відношенні до всього двигуна.

Сили, що діють на невільну точку, тіло або систему точок, прийнято поділяти на активні та реакції в'язей.

1. *Реакції в'язей* – сили, які діють на точки даної системи збоку в'язей. Інколи їх називають пасивними силами, оскільки виникають вони лише під дією активних сил. Позначаються такі сили $\boldsymbol{F}^r$.

2. *Активні* – сили, які своєю дією спричиняють прискорення точок системи або реакції в'язей. Позначаються $\boldsymbol{F}^a$.

Сила є активною чи реакцією в'язі по своїй природі і не залежить від вибору матеріальної системи. Наприклад, тиск ноги велосипедиста на педаль велосипеда є активною силою незалежно від того, яку механічну систему ми розглядаємо – велосипед чи велосипед з велосипедистом.

Сили в динаміці також класифікують в залежності від їхньої природи.

1. *Сила тяжіння* – постійна для даного місця сила, яка діє на все тіла поблизу поверхні Землі. Її модуль дорівнює вазі тіла

$$F_{тяж} = P = mg, \tag{13.3}$$

де g – прискорення вільного падіння, яке залежить від географічної широти місцевості і висоти над рівнем моря ($g \approx 9{,}815$ м/с^2).

Із закону всесвітнього тяжіння можна дати інше визначення даної сили – це сила, з якою притягуються одне до одного два тіла з масами m_1 і m_2

$$F_{тяж} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{13.4}$$

де $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/кг·с^2 – гравітаційна стала, r – відстань між центрами мас тіл.

2. *Сила тертя ковзання* – сила, яка діє при взаємному русі або спробі руху двох стичних поверхонь, її модуль дорівнює

$$F_{ков} = fN, \tag{13.5}$$

де f – коефіцієнт тертя, який характеризує стан тертьових поверхонь; N – нормальна реакція, що залежить від сили, з якою притискаються тертьові поверхні одна до одної.

3. *Сила пружності* – сила, яка пропорційна деформації твердого тіла. Визначається дана сила із закону Гука

$$F = -cx, \tag{13.6}$$

де c – коефіцієнт жорсткості твердого тіла, x – абсолютна деформація тіла. Знак мінус вказує на те, що дана сила завжди протидіє деформації. Закон Гука є справедливим доти, доки в тілі не спостерігається залишкових деформацій.

4. *Сил аеродинамічного опору* – сила, яка діє на тіло при його повільному русі в дуже в’язкому середовищі, вона є функцією від швидкості тіла

$$R = -\alpha v, \tag{13.7}$$

де α – коефіцієнт опору. Знак мінус вказує на те, що дана сила напрямлена в бік, протилежний до вектору швидкості.

5. *Сила в’язкого тертя* – сила, яка діє на тіло при його русі в не дуже в’язкому середовищі (вода, повітря), вона є функцією квадрату швидкості тіла

$$R = -0{,}5c\rho S v^2, \tag{13.8}$$

де c – безрозмірний коефіцієнт опору, ρ – густина середовища, S – площа проекції тіла на площину, перпендикулярну до напрямку руху.

13.3. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Нехай рух матеріальної точки M маси m задано у **векторній формі** за допомогою радіус-вектора $\boldsymbol{r}$, тоді основне рівняння динаміки матиме вигляд

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}\left(t, \boldsymbol{r}, \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right). \tag{13.9}$$

В загальному випадку сила може залежати від часу, координат і швидкості руху. Від часу залежить більшість сил, які мають місце при роботі машин і механізмів. Від координат залежать сили пружності (13.6), а також сили електричної, магнітної та ядерної взаємодії. Від швидкості руху залежать розглянуті вище сили в’язкого тертя (13.7) і аеродинамічного опору (13.8). Рівняння (13.9) носить назву *рівняння руху точки у векторній формі*.

Нехай рух матеріальної точки M маси m задано у **координатній формі**, тоді замість рівняння (13.9) отримаємо три рівняння

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right). \qquad (13.10)$$

Рівняння (13.10) називаються *динамічними рівняннями руху матеріальної точки в координатній формі*. Кожне з диференціальних рівнянь є рівнянням другого порядку, тому система в цілому має шостий порядок.

Якщо спроектувати обидві частини основного рівняння динаміки (13.1) на **натуральні осі**, то *динамічні рівняння руху в натуральній формі* матимуть вигляд

$$m\frac{d\upsilon_\tau}{dt} = F_\tau\left(t, s, \frac{ds}{dt}\right); \quad m\frac{\upsilon^2}{\rho} = F_n\left(t, s, \frac{ds}{dt}\right). \qquad (13.11)$$

Якщо спроектувати основне рівняння динаміки (13.1) на радіальний і трансверсальний напрямки **полярної системи** координат, то можна отримати *динамічні рівняння руху матеріальної точки в полярній системі координат*

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = F_r\left(t, r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}\right); \quad \frac{m}{r}\frac{d\left(r^2\dot{\varphi}\right)}{dt} = F_\varphi\left(t, r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}\right). \qquad (13.12)$$

Якщо спроектувати основне рівняння динаміки (13.1) на осі **циліндричної системи** координат, то можна отримати *динамічні рівняння руху матеріальної точки в циліндричній системі координат*

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = F_r\left(t, r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}\right),$$
$$\frac{m}{r}\frac{d\left(r^2\dot{\varphi}\right)}{dt} = F_\varphi\left(t, r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}\right), \quad m\ddot{z} = F_z\left(t, r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}\right). \qquad (13.13)$$

Якщо спроектувати основне рівняння динаміки (13.1) на осі **сферичної системи** координат, то можна отримати *динамічні рівняння руху матеріальної точки в сферичній системі координат*

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\psi}^2\cos^2\theta - r\dot{\theta}^2\right) = F_r\left(t, r, \psi, \theta, \dot{r}, \dot{\psi}, \dot{\theta}\right),$$
$$\frac{m}{r\cos\theta}\frac{d\left(r^2\dot{\psi}\cos^2\theta\right)}{dt} = F_\psi\left(t, r, \psi, \theta, \dot{r}, \dot{\psi}, \dot{\theta}\right), \qquad (13.14)$$
$$\frac{m}{r}\left[\frac{d\left(r^2\dot{\theta}\right)}{dt} + r^2\dot{\psi}^2\cos\theta\sin\theta\right] = F_\theta\left(t, r, \psi, \theta, \dot{r}, \dot{\psi}, \dot{\theta}\right).$$

13.4. Дві основні задачі динаміки

Задачі динаміки у випадку *вільної* матеріальної точки (тіла або системи):

1. **Пряма задача** – знаючи закон руху точки (тіла, системи), визначити рівнодійну сил, які діють на даний механічний об'єкт. Ця задача розв'язується через визначення проекцій результуючої сили на координатні осі

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = m\frac{d^2z}{dt^2}, \qquad (13.15)$$

після чого знаходиться модуль результуючої сили і її напрям

$$F=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2},\ \cos\left(\boldsymbol{F}\,^\wedge Ox\right)=\frac{X}{F},\ \cos\left(\boldsymbol{F}\,^\wedge Oy\right)=\frac{Y}{F},\ \cos\left(\boldsymbol{F}\,^\wedge Oz\right)=\frac{Z}{F}. \quad (13.16)$$

Подібним чином розв'язується пряма задача і в інших системах координат. Слід зазначити, що пряма задача динаміки може бути розв'язана для будь-якого закону руху механічного об'єкта.

2. **Обернена задача** – знаючи сили, які діють на матеріальну точку (тіло, систему), її початкове положення і швидкість, визначити закон руху даного механічного об'єкта.

Оскільки сили, які діють на точку, найчастіше є змінними величинами, то праві части диференціальних рівнянь руху точки в декартових координатах можуть бути функціями t, x, y, z, υ_x, υ_y, υ_z. При інтегруванні кожного з рівнянь з'являються дві константи, тому при інтегруванні всієї системи отримуємо шість сталих інтегрування, які мають бути визначені з початкових умов

$$t = t_0,\ x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0,\ \upsilon_x = \upsilon_{x0},\ \upsilon_y = \upsilon_{y0},\ \upsilon_z = \upsilon_{z0}.$$

Ці значення підставляються в загальні рішення відповідних диференціальних рівнянь, після чого шуканий закон руху має вигляд

$$x = f_1(t, x_0, y_0, z_0, \upsilon_{x0}, \upsilon_{y0}, \upsilon_{z0}),$$
$$y = f_2(t, x_0, y_0, z_0, \upsilon_{x0}, \upsilon_{y0}, \upsilon_{z0}),$$
$$z = f_3(t, x_0, y_0, z_0, \upsilon_{x0}, \upsilon_{y0}, \upsilon_{z0}).$$

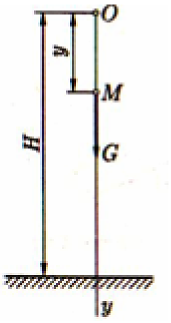
Під дією однієї і тієї ж сили точка може здійснювати цілий клас рухів, визначуваних початковими умовами. Так, під дією сили тяжіння тіло може рухатися по вертикалі або по сімейству парабол, залежно від напряму початкової швидкості.

При складанні диференціальних рівнянь за початковий момент зручно прийняти момент початку руху, для якого відомі швидкість і положення точки. Початкова швидкість характеризує сили, що діяли на точку до початкового моменту. Диференціальні рівняння описують рух точки до тих пір, поки на неї діють сили, що увійшли до правої частини. Якщо дія сил змінюється або припиняється, то необхідно складати нові рівняння.

Задачі динаміки у випадку *невільної* матеріальної точки (тіла, системи):
1. **Пряма задача** – знаючи закон руху і активні сили, визначити реакції в'язей.
2. **Обернена задача** – знаючи діючі сили, визначити закон руху точки і реакції накладених в'язей.

13.5. Часткові випадки визначення законів руху

На відміну від прямої задачі, обернена задача не може бути розв'язана в загальному вигляді. Лише у випадках, коли сила $\boldsymbol{F}$ має досить простий вигляд, можуть бути отримані шукані рівняння руху. Нижче розглянуті деякі подібні випадки.



1. *Рух тіла під дією постійної сили*

Прикладом такого руху є вільне падіння тіла без урахування опору повітря. Нехай точка M падає на поверхню Землі (рис. 13.1) під дією сили тяжіння $\boldsymbol{G}$ без початкової швидкості. Виберемо за початок відліку O точку, звідки починає свій рух точка M. В такому випадку початкові умови мають вигляд

$$t_0 = 0 \text{ с},\ y_0 = 0 \text{ м},\ \upsilon_0 = 0 \text{ м/с}.$$

Рис. 13.1. Рух тіла під дією постійної сили.

Оскільки рух носить прямолінійний характер, то диференціальне рівняння має вигляд

$$m\ddot{y} = \sum Y_i = G = mg \Rightarrow \ddot{y} = g.$$

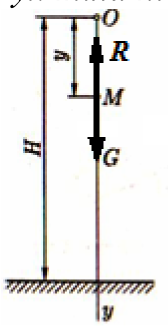
Зінтегрувавши дане рівняння, отримаємо закон зміни швидкості

$$\ddot{y} = \frac{d\upsilon_y}{dt} = g \Rightarrow \int_0^{\upsilon_y} d\upsilon_y = g\int_0^t dt \Rightarrow \upsilon_y = gt.$$

Для знаходження рівняння руху ще раз зінтегруємо отримане рівняння

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = gt \Rightarrow \int_0^y dy = g\int_0^t tdt \Rightarrow y = \frac{gt^2}{2}.$$

2. *Рух тіла під дією сили, яка залежить від швидкості*



Прикладом такого руху є вільне падіння тіла з урахуванням сил опору повітря. Нехай точка M падає без початкової швидкості на поверхню Землі (рис. 13.2) під дією сили тяжіння $\boldsymbol{G}$ і сили опору повітря $\boldsymbol{R}$, яка визначається по формулі (13.7) і направлена проти руху точки.

Початкові умови мають вигляд

$t_0 = 0$ с, $y_0 = 0$ м, $\upsilon_{y0} = 0$ м/с.

Рис. 13.2. Вільне падіння з урахуванням сил опору.

Диференціальне рівняння в даному випадку має вигляд

$$m\ddot{y} = G - R = mg - \alpha\upsilon \Rightarrow \ddot{y} = g - \frac{\alpha}{m}\upsilon = g - k\upsilon.$$

Для спрощення запису введено змінну $k = \alpha/m$. Аби отримати закон зміни швидкості, необхідно зінтегрувати дане рівняння з початковими умовами

$$\frac{d\upsilon_y}{dt} = g - k\upsilon_y \Rightarrow \int_0^{\upsilon_y} \frac{d\upsilon_y}{g - k\upsilon_y} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{k}\ln\left|g - k\upsilon_y\right| = t.$$

$$\ln\left|g - k\upsilon_y\right| = -kt \Rightarrow g - k\upsilon_y = e^{-kt} \Rightarrow \upsilon_y = \frac{g - e^{-kt}}{k}.$$

При $t \to \infty$ швидкість падіння досягає граничного значення

$$\upsilon_{гр} = \frac{g}{k} = \frac{gm}{\alpha},$$

тобто через деякий проміжок часу сила опору зрівнюється з вагою тіла і рух стає рівномірним. Після другого інтегрування отримуємо рівняння вільного падіння тіла з урахуванням опору середовища:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g - e^{-kt}}{k} \Rightarrow \int_0^y dy = \int_0^t \frac{g - e^{-kt}}{k}dt;\ y = \frac{gt}{k} + \frac{e^{-kt}}{k^2} = \frac{kgt + e^{-kt}}{k^2}.$$

3. *Рух тіла під дією сили, яка залежної від координати точки*

Прикладом такого руху є коливальний рух під дією сили пружності, який детально розглянуто в наступному параграфі. Нехай точка M відштовхується від деякого центру O з силою, модуль якої пропорційний відстані до даного центру x

$$|F| = ax,$$

де a – довільний коефіцієнт пропорційності, а початкові умови мають вигляд

$$t = 0,\ x(0) = x_0,\ \upsilon(0) = \upsilon_0.$$

Диференціальне рівняння цього руху має вигляд

$$m\ddot{x} = ax \Rightarrow m\frac{d\upsilon}{dt} = ax.$$

Для інтегрування цього рівняння необхідно виключити час t

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = \upsilon\frac{d\upsilon}{dx}.$$

Отримане диференціальне рівняння легко інтегрується

$$m\upsilon\frac{d\upsilon}{dx} = ax \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\upsilon d\upsilon = \frac{a}{m}\int_{x_0}^{x}xdx \Rightarrow \frac{(\upsilon-\upsilon_0)^2}{2} = \frac{a(x-x_0)^2}{2m} \Rightarrow \upsilon-\upsilon_0 = \sqrt{\frac{a}{m}}(x-x_0).$$

Для отримання рівняння руху диференціюємо ще раз за часом

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_0 + \sqrt{\frac{a}{m}}(x-x_0) \Rightarrow \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\upsilon_0 + \sqrt{\frac{a}{m}}(x-x_0)} = \sqrt{\frac{m}{a}}\int_{x_0}^{x}\frac{d\left(\upsilon_0 + \sqrt{\frac{a}{m}}(x-x_0)\right)}{\upsilon_0 + \sqrt{\frac{a}{m}}(x-x_0)} = \int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{a}}\ln\left|\upsilon_0 + \sqrt{\frac{a}{m}}(x-x_0)\right|_{x_0}^{x} = \sqrt{\frac{m}{a}}\ln\left|\frac{\upsilon_0 + \sqrt{\frac{a}{m}}(x-x_0)}{\upsilon_0}\right|.$$

4. *Рух тіла під дією центральної сили*

Центральна – сила, лінія дії якої весь час проходить через нерухому точку (центр сили). Така сила є функцією радіусу, тому рівняння руху матеріальної точки

$$m\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}).$$

Траєкторія точки, що рухається під дією центральної сили, є плоскою кривою, а її диференціальне рівняння

$$F_r = -\frac{mC^2}{r^2}\left[\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right], \tag{13.17}$$

де C – константа, яка визначається з початкових умов. Формула (13.17) є *другою формулою Біне*. Вона дозволяє визначити центральну силу по траєкторії в полярних координатах, або траєкторію точки, якщо відома центральна сила.

Швидкість точки при русі по заданій траєкторії визначається з *першої формули Біне*

$$\upsilon^2 = C^2\left[\left(\frac{d(1/r)}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right]. \qquad (13.18)$$

Формули (13.17) і (13.18) широко використовуються при розв'язанні задач небесної механіки.

Питання для самоконтролю

1. Які закони лежать в основі динаміки?
2. Чи є різниця між гравітаційною і інерціальною масами?
3. У чому суть прямої та оберненої задач динаміки?
4. Як записуються рівняння руху вільної точки в полярних координатах?
5. Яку силу називають центральною, наведіть приклади таких сил?

Завдання № 13. «Закони і задачі динаміки»

Рекомендації до розв'язання задач

А) Розв'язання прямої задачі динаміки

1. Нанести на рисунок матеріальну точку разом з прикладеними до неї силами.
2. Скориставшись принципом звільнення від в'язей, показати на рисунку відповідні реакції в'язей.
3. Обрати систему відліку, якщо вона не задана умовами задачі.
4. По заданому закону руху визначити проекції швидкості точки на осі системи координат.
5. Визначити проекції прискорення точки на осі системи координат, після чого знайти абсолютне прискорення.
6. Скласти диференціальні рівняння руху і з них віднайти шукані величини.

Б) Розв'язання оберненої задачі динаміки

1. Обрати систему координат і записати для неї початкові умови руху точки.
2. Показати на рисунку активні сили і сили реакцій, прикладені до даної точки.
3. Скласти диференціальні рівняння руху матеріальної точки.
4. Зінтегрувати систему диференціальних рівнянь і визначити за допомогою початкових умов сталі інтегрування.
5. Скориставшись рівняннями руху, визначити шукані величини.

Приклад розв'язання задачі (пряма задача динаміки)

Задача 1. Рівняння руху матеріальної точки маси m = 2 кг в декартових координатах мають наступний вигляд

$$x = 2t^2 + 3\ м,\quad y = t^3 - 2t\ м,\quad z = t + 2\,м.$$

Визначити величину і напрям сили, яка діє на матеріальну точку в момент часу $t = 1$ с.

Розв'язання.

Знаходимо проекції швидкості матеріальної точки на осі декартової системи координат

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left(2t^2+3\right)}{dt} = 4t\ м/с,\quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d\left(t^3-2t\right)}{dt} = 3t^2-2\ м/с,$$

$$\upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d(t+2)}{dt} = 1\ м/с.$$

Знаходимо проекції прискорення матеріальної точки на осі декартової системи координат в момент часу $t = 1$ с

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d(4t)}{dt} = 4\ м/с^2,\quad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d\left(3t^2-2\right)}{dt} = 6t = 6\ м/с^2,$$

$$a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d(1)}{dt} = 0\ м/с^2.$$

Знаходимо проекції сили на осі декартової системи координат згідно (13.15)

$$X = ma_x = 2\cdot 4 = 8\ H,\quad Y = ma_y = 2\cdot 6 = 12\ H,\quad Z = ma_z = 2\cdot 0 = 0\ H.$$

Модуль сили і напрямні косинуси знаходимо по формулі (13.16)

$$F = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = \sqrt{8^2+12^2+0} = 14{,}4H.$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{F} = \frac{8}{14{,}4} = 0{,}556 \Rightarrow \alpha = \arccos 0{,}556 = 56{,}2°;$$

$$\cos\beta = \frac{Y}{F} = \frac{12}{14{,}4} = 0{,}556 \Rightarrow \alpha = \arccos 0{,}833 = 39{,}8°;$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{F} = \frac{0}{14{,}4} = 0 \Rightarrow \alpha = \arccos 0 = 90°.$$

Задачу розв’язано.

Приклад розв’язання задачі (обернена задача динаміки)

Задача 2. На тіло маси $m = 2$ кг, яке кинули угору зі швидкістю $\upsilon_0 = 20$ м/с, діє сила опору, величина якої залежить від швидкості

$$R = 0{,}4\upsilon.$$

Знайти, через який час тіло досягне свого найвищого положення.

Розв’язання.

Нанесемо на рисунку сили, які діють на дане тіло. На нього діє сила тяжіння, яка завжди спрямована до центру Землі, і сила опору з боку повітря, яка напрямлена протилежно швидкості тіла (рис. 13.3). Рух каменю буде сповільненим, його прискорення буде спрямовано у бік, протилежний швидкості, тобто вниз. Складаємо диференціальне рівняння руху

$$m\ddot{y} = -mg - R = -mg - 0{,}4\upsilon \Rightarrow \ddot{y} = -\left(g + \frac{0{,}4}{m}\upsilon\right) = -(9{,}81 + 0{,}2\upsilon).$$

Рис. 13.3. До задачі 2.

Інтегруючи дане диференціальне рівняння отримаємо закон зміни швидкості

$$\frac{d\upsilon}{dt} = -(9{,}81 + 0{,}2\upsilon) \Rightarrow -\int\limits_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{9{,}81 + 0{,}2\upsilon} = \int\limits_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{0{,}2}\left[\ln|9{,}81 + 0{,}2\upsilon| - \ln|9{,}81 + 0{,}2\upsilon_0|\right] = t.$$

Швидкість тіла в його найвищій точці буде дорівнювати нулю, тому час підйому тіла

$$t = -5\ln\frac{|9{,}81 + 0{,}2\cdot 0|}{9{,}81 + 0{,}2\cdot 20} = 1{,}71(c).$$

Задачу розв’язано.

Завдання №13 до РГР

13.1. Матеріальна точка маси m = 1 кг рухається згідно рівнянням

$$x = 3\cos 4t \ м, \quad y = 3\sin 4t \ м.$$

Визначити силу F, яка діє на матеріальну точку.

Відповідь: F = 48 Н.

13.2. Сила, яка діє на автомобіль масою m одразу після початку ним руху, описується рівнянням

$$F = a - b\upsilon,$$

де a і b – довільні константи. Визначити дану силу, як функцію від часу.

Відповідь: $F = ae^{-\frac{bt}{m}}$.

13.3. Автомобіль маси m рухається по горизонтальній дорозі під дією сили тяги двигуна Q і сумарної сили опору руху

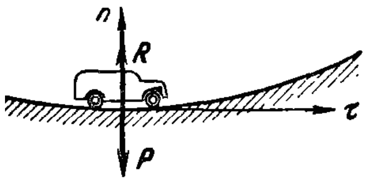
$$R = k\upsilon^2 \ H.$$

Визначити швидкість автомобіля в момент, коли пройдений шлях дорівнює s, якщо його початкова швидкість υ_0.

Відповідь: $\upsilon = \sqrt{\frac{1}{k}\left[Q - \left(Q - k\upsilon_0^2\right)e^{-\frac{2ks}{m}}\right]}$.

13.4. Автомобіль маси m = 1 200 кг рухається по дну яру з постійною по модулю швидкістю υ = 36 км/год. Визначити силу тиску автомобіля на дно яру в самій нижчий точці, якщо радіус кривини в ній ρ = 50 м. Автомобіль вважати матеріальною точкою, силами опору руху знехтувати.

Відповідь: R = 14 172 Н.



До задачі 13.4.

13.5. З поверхні Землі кинуте догори тіло масою m = 0,5 кг з початковою швидкість υ_0 = 10 м/с. Визначити, з якою швидкістю υ_1 тіло впаде назад на Землю, якщо на нього діє сила опору з боку повітря

$$R = 0{,}05\upsilon \ H.$$

Відповідь: υ_1 = 9,35 м/с.

13.6. Матеріальна точка маси m рухається під дією центральної сили по спіралі, рівняння якої має вигляд

$$r = ae^{-\lambda\varphi},$$

де a і λ – сталі величини. Визначити закон зміни центральної сили.

Відповідь: $F = -\dfrac{4mC^2\left(1+\lambda^2\right)}{r^3}$.

13.7. Камінь маси m = 1 кг кинутий угору з початковою швидкістю υ_0 = 6 м/с. Визначити, на якій висоті H над Землею його швидкість зменшиться вдвічі, якщо сила опору руху каменя

$$R = 0{,}01\upsilon^2\,(H).$$

Відповідь: H = 1,345 м.

13.8. Куля пробиває дошку товщиною h = 30 мм і при цьому її швидкість змінюється від υ_0 = 100 м/с до υ_1 = 10 м/с. Вважаючи силу опору пропорційною квадрату швидкості, визначити час руху кулі крізь дошку.

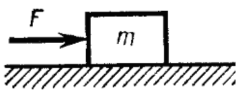
Відповідь: t = 0,0012 с.

13.9. Парашутист маси m = 90 кг опускається на землю без початкової швидкості. Визначити граничну (максимальну) швидкість його руху, якщо сила опору збоку повітря

$$R = 35{,}3\upsilon^2\ H.$$

Відповідь: υ = 5 м/с.

13.10. Горизонтальна сила F = 30 Н приводить до руху із стану спокою брусок маси m = 0,2 кг, який знаходиться на шорсткій горизонтальній поверхні. Знайти прискорення бруска, якщо коефіцієнт тертя між ним і поверхнею дорівнює f = 0,3 і не залежить від швидкості.



Відповідь: a = 3,06 м/с^2.

До задачі 13.10.

13.11. Автомобіль з вантажем вагою G = 54 000 Н рухається по випуклому мосту зі швидкістю υ = 10 м/с. Визначити силу тиску автомобіля на міст в момент проходження через його середину, якщо радіус кривини в середині моста ρ = 50 м.

Відповідь: N = 42 991 Н.

13.12. Тіло починає ковзати по похилій площині з кутом нахилу α = 30° без початкової швидкості, причому сила опору руху визначається по формулі

$$R_{on} = 0{,}5Pe^{-0{,}5t}.$$

Визначити рівняння руху даного тіла, якщо в момент початку руху воно мало нульову початкову координату.

Відповідь: $x = 4{,}9\left(\dfrac{t^2}{2} - 4e^{-0{,}5t}\right)$ м.

13.13. Літак починає пікірувати без початкової вертикальної швидкості, причому сила опору повітря руху літака пропорційна квадрату його відносної швидкості. Визначити вертикальну швидкість літака і пройдений ним шлях як функцію від його максимальної можливої швидкості.

Відповідь: $s = -\dfrac{\upsilon_{\max}^2}{2g}\ln\left|1-\dfrac{\upsilon^2}{\upsilon_{\max}^2}\right|$; $\upsilon = \upsilon_{\max}\sqrt{1-e^{-\frac{2gs}{\upsilon_{\max}^2}}}$.

13.14. Матеріальна точка маси m = 1 кг рухається вздовж осі Ox під дією сили

$$F = 1 + \upsilon \ H.$$

Вважаючи початкові умови руху точки нульовими, визначити координату x точки в момент часу t = 1 с.

Відповідь: x = 1,72 м.

13.15. Сила тяги гвинтів гелікоптера маси m = 800 кг при вертикальному підйомі складає 1,5 його ваги, а опір повітря виражається формулою

$$R = 980\upsilon,$$

Визначити максимальну можливу швидкість підйому гелікоптера.

Відповідь: υ = 4 м/с.

13.16. Матеріальна точка маси m = 3 кг рухається під дією направленої вздовж осі Ox періодичної сили

$$F = 3\sin t \ H.$$

Вважаючи початкові умови руху точки нульовими, визначити закон руху даної матеріальної точки.

Відповідь: $x = t - \sin t$ м.

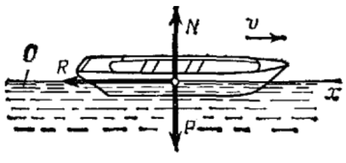
13.17. Визначити закон руху шматка антрациту при його ковзанні по сталевим решіткам вздовж очисної лави, якщо кут падіння пласта α = 30°, а коефіцієнт тертя тіла о площину f = 0,3. Рух антрациту починається із стану спокою.

Відповідь: $x = 0{,}98t^2$ м.

13.18. Човен масою m = 40 кг штовхають, надавши їй початкову швидкість υ_0 = 0,5 м/с. Визначити, через який час швидкість човна зменшиться вдвічі і який шлях при цьому він пройде, якщо сила опору води

$$R_{on} = 9{,}1\upsilon \ \text{Н}.$$

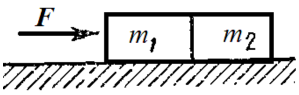
Відповідь: t = 3 с, s = 1,1 м.



До задачі 13.18.

13.19. Два бруска масами m_1 = 6 кг і m_2 = 4 кг, які знаходяться в контакті на шорсткій горизонтальній площині, приводяться до руху силою F = 25 Н. Визначити прискорення брусків a і силу S взаємодії між ними, якщо коефіцієнт тертя ковзання f = 0,2.

Відповідь: a = 0,54 м/с^2, S = 10 Н.



До задачі 13.19.

13.20. В разі аварійної ситуації на атомному реакторі стержень масою m = 25 кг і довжиною l = 250 см падає в канал під дією власної ваги і додаткової сили Q = 245 Н, яка діє на початковій ділянці падіння l_1 = 30 см. Падінню перешкоджає постійна сила тертя $F_{\text{тер}}$ = 49 Н. Знайти час повного входу стержня в канал, довжина якого дорівнює довжині стержня, якщо стержень починає рухатися без початкової швидкості, а нижній кінець стержня знаходиться у входу в канал в момент початку руху. Знайти також швидкість стержня в момент, коли він досягає дна.

Відповідь: t = 0,622 с, υ = 6,7 м/с.

13.21. Автомобіль вагою 9 810 Н рухається під ухил 30° до горизонту з вимкненим зчепленням, знаходячись під дією сили опору руху

$$R = 0{,}15\upsilon^2 \text{ Н.}$$

Нехтуючи силами тертя, визначити максимальну швидкість, яку може розвинути даний автомобіль.

Відповідь: υ_{max} = 180 м/с.

13.22. Визначити силу тиску збоку людини вагою G = 850 Н на підлогу швидкісного ліфту на початку підйому і перед зупинкою, якщо його прискорення і гальмування однакові за величиною і дорівнюють $0{,}4g$.

Відповідь: T_1 = 1 190 Н, T_2 = 510 Н.

13.23. Дрезина рухається по горизонтальній прямолінійній ділянці дороги зі швидкістю 90 км/год. В деякий момент часу двигун дрезини вимикають. Вважаючи опір руху постійним і таким, що складає 20% від ваги дрезини, визначити час і шлях, який пройде дрезина з моменту вимкнення двигуна до повної зупинки.

Відповідь: t = 12,7 с, s = 159 м.

13.24. На вал діаметром d = 20 см намотана мотузка, до вільного кінця якої підвішений вантаж вагою G = 800 Н. Кутова швидкість обертання валу змінюється по закону $\omega = 30t$ рад/с. Визначити натяг мотузки в момент підняття вантажу.

Відповідь: T = 1 045 Н.

13.25. Потяг рухався по горизонтальній прямолінійній ділянці дороги зі швидкістю 126 км/год. Побачивши нерухомий трактор на рейках машиніст почав гальмування із силою, рівною 0,05 ваги потягу. На якій відстані машиніст ввімкнув гальмування, якщо потяг зупинився за 5 м до трактора?

Відповідь: s = 1255 м.

13.26. На вал діаметром d = 20 см намотана мотузка, до вільного кінця якої підвішений вантаж вагою G = 800 Н. Кутова швидкість обертання валу змінюється по закону $\omega = t$ рад/с. Визначити натяг мотузки в момент, коли вантаж опускається.

Відповідь: T = 555 Н.

Глава 14. Прямолінійні коливання матеріальної точки

14.1. Загальні визначення коливального руху

Коливання являють собою один з найбільш розповсюджених видів руху, тому вивчення їх властивостей необхідно для розуміння багатьох фізичних і механічних явищ. Рух транспортних засобів, робота приладів і механізмів завжди супроводжуються коливаннями (вібраціями), збільшення амплітуди яких вище допустимої норми (наприклад, при резонансі) може призвести до аварії. Наряду з цим, коливання широко використовуються в різноманітних вібромашинах, а явище резонансу знайшло застосування майже у всіх сферах науки і техніки.

Коливальний рух відбувається у випадку, коли на точку, відхилену від положення рівноваги, діє відновлююча сила, яка прагне повернути її в початкове положення. Розрізняють чотири типи коливань:

1. Вільні коливання.
2. Згасаючі коливання.
3. Змушені коливання без урахування сил опору.
4. Змушені коливання з урахуванням сил опору.

Основні характеристики коливального руху:

1. *Амплітуда коливань A*, м – найбільше відхилення точки *M* від положення статичної рівноваги *O*, яке визначається по формулі

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\upsilon_0}{k}\right)^2}. \qquad (14.1)$$

З (14.1) видно, що амплітуда не залежить від параметрів коливальної системи, а визначається лише початковими умовами.

2. *Фаза коливань kt + α*, рад – величина, яка визначає положення точки *M* в даний момент і напрям її подальшого руху. Фаза збільшується з часом.

3. *Початкова фаза коливань α*, рад – величина фази коливань в момент початку руху. Як і амплітуда, вона залежить від початкових умов

$$\alpha = arctg\frac{kx_0}{\upsilon_0}. \qquad (14.2)$$

4. *Період коливань T*, с – проміжок часу, за який відбувається одне повне коливання (рис. 14.1)

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}. \qquad (14.3)$$

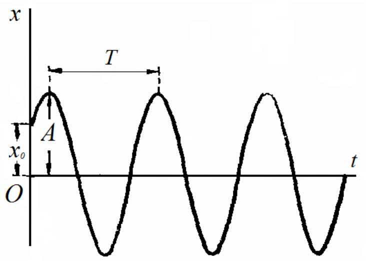


Рис. 14.1. Графік гармонічних коливань.

5. *Кругова частота k*, рад/с – величина, яка визначає кількість коливань матеріальної точки за 2π секунд

$$k = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{c}{m}}. \qquad (14.4)$$

6. *Циклічна частота ν*, Гц – величина, яка визначає кількість коливань за одиницю часу

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}}. \qquad (14.5)$$

З (14.3) – (14.5) видно, що кругова частота *k*, циклічна частота ν і період *T* не залежать від початкових умов і визначаються лише параметрами коливальної системи.

Гармонічний прямолінійний рух є *таутохронним* (період не залежить від початкових умов) та *ізохронним* (період не залежить від амплітуди).

14.2. Вільні коливання матеріальної точки

Вільні коливання – коливання, що відбуваються під дією відновлюючої сили. Прикладом такої сили є сила пружності.

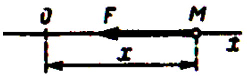


Рис. 14.2. Відновлюючи сила.

Нехай точка M рухається прямолінійно під дією сили пружності $\boldsymbol{F}$ (рис. 14.2), спрямованої до центру O і пропорційної відстані від нього

$$F = -cx,$$

де c – коефіцієнт жорсткості, який дорівнює силі, необхідній для деформації ненавантаженої пружини на одиницю довжини. Диференціальне рівняння руху точки має вигляд

$$m\ddot{x} = -cx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0. \tag{14.6}$$

Введемо позначення $c/m = k^2$, після чого остаточно отримаємо

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \tag{14.7}$$

диференціальне рівняння вільних коливань за відсутності опору.

Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -k^2 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-k^2} = \pm ki. \tag{14.8}$$

Корні такого рівняння завжди комплексні, тому загальне розв'язання даного диференціального рівняння має вигляд

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{14.9}$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування, що визначаються з початкових (крайових) умов руху. Можна замість C_1 и C_2 використати інші сталі A и α, тоді закон руху

$$x = A\sin(kt+\alpha). \tag{14.10}$$

З (14.10) видно, що точка під дією відновлюючої сили буде здійснювати простий *гармонічний рух* по закону синуса або косинуса. В даному випадку сталі інтегрування визначаються по формулах

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2},\ \alpha = arctg\frac{C_1}{C_2}. \tag{14.11}$$

На практиці часто зустрічаються коливання, в яких крім відновлюючої сили $\boldsymbol{F}$ діє ще й постійна сила $\boldsymbol{P}$ (рис. 14.3). Прикладом таких коливань є рух тіла на пружині. Тоді положенням рівноваги для точки M буде точка O_1, в якій зрівноважуються сили $\boldsymbol{F}$ і $\boldsymbol{P}$

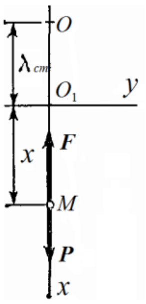
$$F = P \Rightarrow c\lambda_{cm} = P \Rightarrow \lambda_{cm} = \frac{P}{c} = \frac{mg}{c}. \tag{14.12}$$

Величина λ_{cm} є статичним подовженням пружини. Оберемо за початок відліку статичне положення рівноваги і запишемо диференціальне рівняння точки M

$$m\ddot{x} = -c(x + \lambda_{cm}) + P = -cx - c\lambda_{cm} + P = -cx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0. \tag{14.13}$$

Формула (14.13) співпадає з (14.6), тому можна зробити висновок, що постійна сила не змінює характеру коливань, а лише зміщує їх центр на величину λ_{cm} в напрямку дії сили.

Період коливань можна виразити через статичне подовження



$$T=2\pi\sqrt{\frac{m\lambda_{cm}}{P}}=2\pi\sqrt{\frac{\lambda_{cm}}{g}}. \qquad (14.14)$$

Рис. 14.3. Вплив постійної сили на вільні коливання.

14.3. Згасаючі коливання матеріальної точки

Згасаючі коливання – вільні коливання, які відбуваються під дією відновлюючої сили і сили опору руху. Сила опору виникає при русі точки в повітрі або рідині і при невеликих швидкостях точки може вважатись пропорційною першому ступеню її швидкості.

Нехай точка M рухається прямолінійно під дією сили в'язкого тертя $\boldsymbol{R}$ і відновлюючої сили $\boldsymbol{F}$ (рис. 14.4).

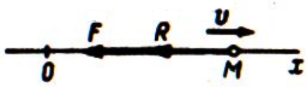


Рис. 14.4. Згасаючі вільні коливання точки.

Диференціальне рівняння руху точки

$$m\ddot{x}=-F-R\Rightarrow m\ddot{x}=-cx-\alpha\dot{x}\Rightarrow\ddot{x}+\frac{\alpha}{m}\dot{x}+\frac{c}{m}x=0.$$

Провівши наступні заміни $c/m = k^2$ і $\alpha/m = 2b$, отримаємо

$$\ddot{x}+2b\dot{x}+k^2x=0 \qquad (14.15)$$

диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань.

Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2b\lambda + k^2 = 0$ має корні

$$\lambda_{1,2}=\frac{-2b\pm\sqrt{(2b)^2-4\cdot1\cdot k^2}}{2\cdot1}=-b\pm\sqrt{b^2-k^2}\,, \qquad (14.16)$$

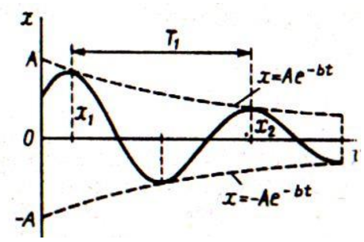
тому можливі три випадки загального рішення (14.15):

1. **Випадок малого опору** $k > b$ – корні характеристичного рівняння комплексні, тому загальне рішення диференціального рівняння має вигляд

$$x=e^{-bt}(C_1\cos\sqrt{k^2-b^2}t+C_2\sin\sqrt{k^2-b^2}t)\,, \qquad (14.17)$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування, які визначаються з початкових (граничних) умов руху. Аналогічно (14.10) можна ввести сталі A і α, які визначаються після формул (14.11), тоді рішення диференціального рівняння матиме вид

$$x=Ae^{-bt}\sin(\sqrt{k^2-b^2}t+\alpha)\,. \qquad (14.18)$$



З (14.18) видно, що ці коливання матеріальної точки є згасаючими неперіодичними (рис. 14.5), оскільки експонента з часом асимптотично наближується до нуля.

Рис. 14.5. Графік згасаючих вільних коливань точки.

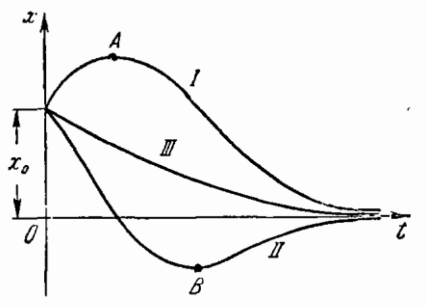
Період згасаючих коливань – проміжок часу між послідовними максимальними відхиленнями матеріальної точки центру коливань

$$T_1=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-b^2}}=\frac{2\pi}{k\sqrt{1-b^2/k^2}}=\frac{T}{\sqrt{1-b^2/k^2}}. \qquad (14.19)$$

З (14.19) видно, що за наявності сил опору період дещо збільшується в порівнянні з періодом вільних коливань.

Декремент коливань e^{-bT_1} – величина, яка характеризує швидкість згасання коливань. Модуль її логарифма bT_1 зветься *логарифмічним декрементом коливань*.

2. **Випадок великого опору** $k < b$ – корні (14.16) характеристичного рівняння дійсні, тому його загальне розв'язання має вигляд



$$x = C_1 e^{\left(-b-\sqrt{b^2-k^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-b+\sqrt{b^2-k^2}\right)t}, \quad (14.20)$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування, які визначаються з початкових (граничних) умов руху. З (14.20) видно, що під дією сили опору і відновлюючої сили точка M здійснює *аперіодичний згасаючий рух* (рис. 14.6).

Рис. 14.6. Коливання за значного опору середовища.

Характер аперіодичного руху залежатиме від початкових умов:

а) Якщо $x_0 > 0$ і $\upsilon_0 > 0$, точка буде рухатись згідно кривої *I*, спочатку досягши точки *A* максимального відхилення, а далі асимптотично наближаючись до положення рівноваги, але не проходячи через нього (рис. 14.6);

б) Якщо $x_0 > 0$ і $\upsilon_0 < 0$, причому швидкість достатня для проходження положення рівноваги

$$\upsilon_0 \geq x_0\left(b + \sqrt{b^2 - k^2}\right),$$

то точка буде рухатись згідно кривої *II*, досягши спочатку максимального відхилення за положенням рівноваги *B*, а потім асимптотично наближаючись до центру коливань (рис. 14.6);

в) Якщо $x_0 > 0$ і $\upsilon_0 < 0$, причому швидкість недостатня для проходження положення рівноваги

$$\upsilon_0 \leq x_0\left(b + \sqrt{b^2 - k^2}\right),$$

то точка буде рухатись згідно кривої *III*, асимптотично наближаючись до положення рівноваги (рис. 14.6).

3. **Граничний випадок опору** $k = b$ – корні характеристичного рівняння дійсні кратні

$$\lambda_{1,2} = -b,$$

тому загальне рішення (14.15) має вигляд

$$x = e^{-bt}(C_1 + C_2 t),$$

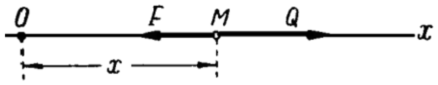
де C_1 і C_2 – сталі інтегрування, які визначаються з початкових (граничних) умов руху. Рух і в цьому випадку не буде коливальним, графіки аналогічні рис. 14.6, тобто залежать від початкових умов.

14.4. Змушені коливання без урахування сил опору

Змушені коливання – коливання, за яких на матеріальну точку окрім відновлюючої діє ще й збурена сила, що змінюється з часом.

Нехай точка *M* рухається прямолінійно під дією відновлюючої сили $\boldsymbol{F}$, спрямованої до центру *O*, і гармонічної збуреної сили $\boldsymbol{Q}$ з частотою *p* (рис. 14.7)

$$Q_x = Q_0 \sin pt,$$



оскільки саме така збурена сила становить найбільший практичний інтерес.

Рис. 14.7. Змушені коливання.

Диференціальне рівняння руху точки

$$m\ddot{x} = Q - F \Rightarrow m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin pt \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{Q_0}{m}\sin pt.$$

Ввівши позначення $c/m = k^2$ и $Q_0/m = P_0$, отримуємо

$$\ddot{x} + k^2 x = P_0 \sin pt \tag{14.21}$$

диференціальне рівняння змушених коливань за відсутності опору.

Як відомо з курсу вищої математики, рішення даного рівняння складається з двох частин

$$x = \bar{x} + x^*, \tag{14.22}$$

де перший доданок – це загальне рішення однорідного рівняння (14.21) без правої частини, а другий доданок – це яке-небудь часткове рішення рівняння (14.21) з правою частиною.

Загальне розв’язання однорідного рівняння може бути представлено у вигляді (14.9) або (14.10). Використаємо другий варіант

$$\bar{x} = A\sin(kt + \alpha).$$

Вважаючи, що частоти власних і вимушених коливань не співпадають ($p \neq k$), часткове розв’язання будемо шукати у вигляді

$$x^* = B\sin pt. \tag{14.23}$$

Для визначення константи *B* знаходимо другу похідну від часткового розв’язання і підставляємо в диференційне рівняння (14.21)

$$\ddot{x}^* = -Bp^2 \sin pt. \qquad \ddot{x}^* + k^2 x^* = P_0 \sin pt \Rightarrow$$

$$-Bp^2 \sin pt + k^2 B\sin pt = P_0 \sin pt. \qquad B\left(k^2 - p^2\right) = P_0 \Rightarrow B = \frac{P_0}{k^2 - p^2}.$$

Остаточно розв’язання (14.20) має вигляд

$$x = \bar{x} + x^* = A\sin(kt + \alpha) + \frac{P_0 \sin pt}{k^2 - p^2}, \tag{14.24}$$

З (14.24) видно, що точка під дією відновлюючої і збуреної сил буде здійснювати складний коливальний рух, який є суперпозицією вільних і змушених коливань. Крім того, другий доданок (14.24) не містить сталих інтегрування, а це означає, що змушені коливання не залежать від початкових умов руху точки.

Змушені коливання, частота яких менша за частоту вільних коливань ($p < k$), називаються *змушеними коливаннями малої частоти*. Змушені коливання, частота яких більша за частоту вільних коливань ($p > k$), називаються *змушеними коливаннями великої частоти*.

14.5. Змушені коливання з урахуванням сил опору

Нехай точка M рухається прямолінійно під дією відновлюючої сили $\boldsymbol{F}$, спрямованої до центру O, сили опору середовища $\boldsymbol{R}$ і гармонічної збуреної сили $\boldsymbol{Q}$ з частотою p. Тоді *диференціальне рівняння вимушених коливань за наявності сил опору* має вигляд

$$\ddot{x}+2b\dot{x}+k^2x=P_0\sin pt\,. \tag{14.25}$$

Рішення рівняння в цьому випадку має вигляд (14.22), причому загальне розв'язання рівняння без правої частини має вигляд (14.18)

$$\bar{x}=Ae^{-bt}\sin(\sqrt{k^2-b^2}t+\alpha),$$

а часткове розв'язання шукаємо у вигляді (14.23)

$$x^*=B\sin(pt+\delta).$$

Для визначення константи B знаходимо похідні від часткового розв'язання

$$\dot{x}^*=Bp\cos(pt+\delta). \qquad \ddot{x}^*=-Bp^2\sin(pt+\delta).$$

і підставивши в диференційне рівняння (14.23), остаточно отримуємо

$$x=Ae^{-bt}\sin(\sqrt{k^2-b^2}t+\alpha)+\frac{P_0\sin(pt-\delta)}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2}}, \tag{14.26}$$

де A и α – сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов.

Перший доданок в (14.26) характеризує вільні коливання. Оскільки він з часом спадає по експоненті, то такі коливання будуть швидко згасати і ними можна знехтувати. Другий доданок в (14.26) характеризує змушені коливання, які відбуваються з частотою збуреної сили, а опір не впливає на період змушених коливань. Амплітуда не залежить від початкових умов і часу, а тому є сталою. Сумарний рух є суперпозицією вільних і змушених коливань (рис. 14.8), але його графік суттєво відрізняється від графіку змушених коливань лише в початкові моменти руху.

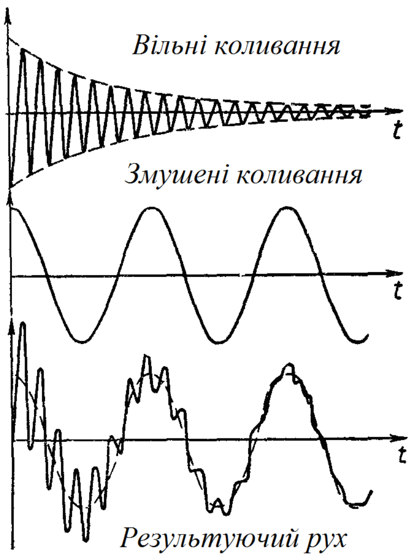


Рис. 14.8. Графік змушених коливань з урахуванням опору.

Для характеристики змушених коливань використовуються такі величини:

1. *Коефіцієнт розстроєння* – відношення частоти змушених коливань до частоти власних коливань

$$z=\frac{p}{k}. \tag{14.27}$$

2. *Безрозмірний коефіцієнт в'язкості* – відношення параметру b до частоти власних коливань

$$h=\frac{b}{k}. \tag{14.28}$$

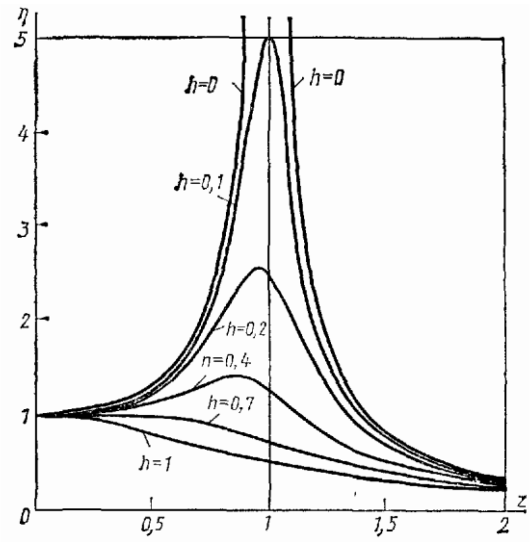
3. *Коефіцієнт динамічності* – характеризує динамічний ефект, викликаний дією збуреної сили

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - z^2\right)^2 + 4h^2 z^2}}. \qquad (14.29)$$

У випадку *змушених коливань малої частоти* ($p < k$) фаза результуючого руху співпадає з фазою збуреної сили $pt + \delta$, а амплітуда знаходиться по формулі

$$A = \frac{P_0}{m\left(k^2 - p^2\right)}. \qquad (14.30)$$

У випадку *змушених коливань великої частоти* ($p > k$) фаза сумарного руху протилежна фазі збуреної сили $pt + \delta$, тобто відстоїть від неї на величину π. Амплітуда в такому випадку знаходиться по формулі



$$A = \frac{P_0}{m\left(p^2 - k^2\right)}. \qquad (14.31)$$

Як видно з формул (14.30) – (14.31), амплітуда змушених коливань визначається величинами частот власних коливань і збуреної сили, тому її амплітуду зручно визначати з графіку залежності коефіцієнта динамічності від коефіцієнта розстроєння (рис. 14.9), який носить назву резонансних кривих.

Рис. 14.9. Резонансні криві.

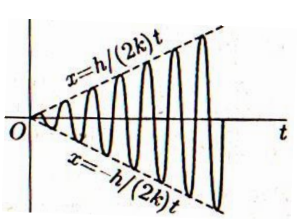
14.6. Резонанс і биття

При рівності частоти вільних коливань і частоти збуреної сили ($p = k$) має місце явище ***резонансу***.

Рух матеріальної точки при резонансі є результатом накладення вільних коливань (14.9) і змушених коливань, які описуються другим доданком в (14.26), розкритим за правилом Лопіталя.

Рішення цього диференціального рівняння записується у вигляді

$$x = x_1 + x_2 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{P_0 t}{2mk} \sin(kt - \frac{\pi}{2}). \qquad (14.32)$$



З (14.32) видно, що при резонансі рух точки складається з трьох коливальних рухів, але третій доданок є неперіодичним членом в який входить час, тому амплітуда лінійно зростатиме (рис. 14.10). Частота і період при резонансі дорівнюють частоті і періоду вільних коливань точки, а фаза відстає від фази збуреної сили на π/2.

Рис. 14.10. Зростання амплітуди при резонансі.

Явище резонансу може бути причиною руйнування конструкції або створювати в ній небезпечні напруження. Тому важливою задачею є створення умов, за яких резонанс неможливий. Для цього частоти збурених сил мають бути по можливості далекі від частот власних коливань.

При частоті збуреної сили, близькій до частоти вільних коливань ($p \approx k$), настає явище ***биття***. Рівняння руху в цьому випадку

$$x = \frac{2P_0}{k^2 - p^2}\sin(\frac{p-k}{2}t)\cos pt \qquad (14.33)$$

Такий рух можна розглядати як коливання частоти p и періоду $\tau = 2\pi/p$, амплітуда яких є періодичною функцією, причому період зміни амплітуди T_A

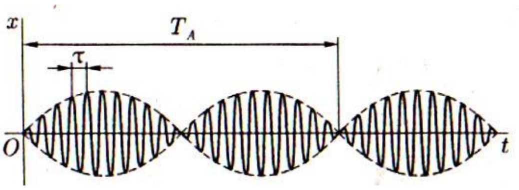


Рис. 14.11. Графік биття.

$$T_A = \frac{2\pi}{(p-k)/2} = 4\pi(p-k)$$

такого умовного коливання значно більший від періоду τ дійсної зміни амплітуди (рис. 14.11).

Питання для самоконтролю

1. Під дією якої сили мають місце вільні коливання?
2. Який вигляд має загальний розв’язок рівняння вільних коливань?
3. В якому положенні найдоцільніше розміщувати початок відліку?
4. Які коливання є згасаючими і чим вони відрізняються від вільних?
5. Що таке змушені коливання і які їх види існують?
6. В чому полягає відмінність між явищами биття і резонансу?
7. Що називають декрементом і логарифмічним декрементом коливань?

Завдання № 14. «Коливальний рух матеріальної точки»

Рекомендації до розв’язання задач

1. Обрати систему відліку, прийнявши за початок положення статичної рівноваги матеріальної точки.
2. Записати початкові умови руху матеріальної точки.
3. Зобразити на рисунку задані сили, які прикладені до матеріальної точки.
4. Застосувавши принцип звільнення від в’язей, нанести на рисунок реакції в’язей.
5. Скласти диференціальні рівняння в проекції на відповідну вісь.
6. Зінтегрувати отримані рівняння, для визначення сталих інтегрування використати початкові умови.

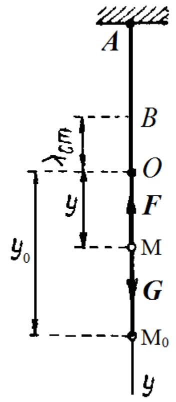
Приклад розв’язання задачі (вільні коливання)

Задача 1. Вантаж вагою G = 20 Н підвішений на пружині AB, кінець A якої закріплений нерухомо. Коли вантаж знаходиться в спокої, статичне подовження пружини складає λ_{cm} = 5 см. В початковий момент часу вантаж був зміщений із положення спокою вниз на y_0 = 10 см і відпущений з початковою швидкістю υ_0 = 6 м/с. Визначити рівняння руху вантажу, нехтуючи вагою пружини.

Розв’язання.

Вважаємо вантаж матеріальною точкою, а за початок відліку беремо точку O положення статичної рівноваги, тоді початкове положення вантажу буде знаходитись в точці M_0.

Диференціальне рівняння для коливання вантажу на пружині має вигляд (14.10)



$$\ddot{y} + \frac{c}{m} y = 0.$$

Виразивши жорсткість пружини через статичне подовження по (14.10), отримаємо

$$c = \frac{mg}{\lambda_{cm}} \Rightarrow \ddot{y} + \frac{g}{\lambda_{cm}} y = 0.$$

Рис. 14.12. До задачі 1.

Із загального виду рівняння гармонічних коливань знайдемо кругову частоту коливань

$$\ddot{y} + k^2 y = 0 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{cm}}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}05}} = 14\left(\frac{рад}{с}\right).$$

Загальне розв’язання даного диференціального рівняння може бути отримане у вигляді (14.9) або (14.10). Скористаємося другим випадком

$$y = A\sin(kt+\alpha).$$

Амплітуду і початкову фазу коливань визначаємо по формулам (14.1) і (14.2)

$$A = \sqrt{0{,}1^2 + \left(\frac{6}{14}\right)^2} = \sqrt{0{,}19} = 0{,}44\,м, \quad \alpha = \frac{14 \cdot 0{,}1}{6} = 0{,}23\,рад.$$

Шукане рівняння коливань вантажу має вигляд

$$y = 0{,}44\sin(14t+0{,}23) \text{ м}.$$

Задачу розв’язано.

Приклад розв’язання задачі (змушені коливання)

Задача 2. Електричний двигун маси m = 50 кг встановлений на балці, жорсткість якої c = 180 кН/м. На вал двигуна насаджений вантаж вагою m_1 = 0,2 кг на відстані r = 2 см від осі вала. Кутова швидкість двигуна ω = 65 рад/с. Знайти рівняння змушених коливань двигуна, нехтуючи вагою балки і опором руху вала.

Розв’язання.

В даній задачі мають місце вимушені коливання двигуна без урахування сил опору. Будемо розглядати рух точки O двигуна, вважаючи, що в ній зосереджена уся його маса. Початок координат візьмемо в положенні статичної рівноваги центра ваги двигуна O, а вісь x спрямуємо вертикально угору.

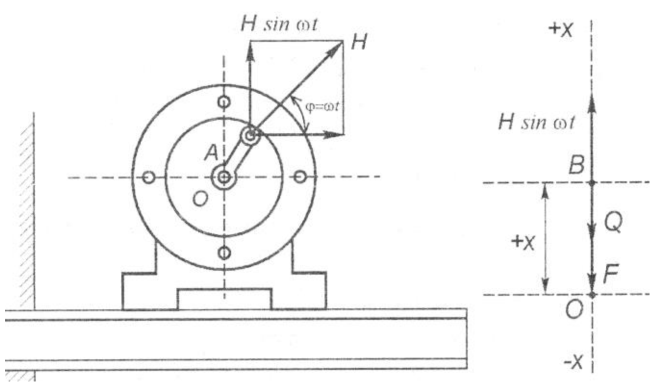


Рис. 14.13. До задачі 2.

Вважаємо, що в момент пуску двигуна точка O знаходиться в положенні статичної рівноваги і не має початкової швидкості, тому початкові умови $x(0) = \lambda_{cm}, \quad \upsilon(0) = 0.$ На точку O діє сила власної ваги двигуна mg, сила пружності балки F і відцентрова сила інерції вантажу H, спрямована по радіусу OA. Статичною вагою вантажу m_1 можна

знехтувати, оскільки вона дуже мала у порівнянні з вагою двигуна.
Складаємо диференціальне рівняння руху точки O в проекції на вісь x

$$m\ddot{x} = -mg - F - H\sin\omega t = -mg - c\left(x - \lambda_{ст}\right) + m_1 r\omega^2 \sin\omega t.$$

$$m\ddot{x} = -cx - m_1 r\omega^2 \sin\omega t \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{m_1 r\omega^2}{m}\sin\omega t.$$

Проведемо заміну $c/m = k^2$ и визначимо кругову частоту

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{180000}{50}} = 60\left(\frac{рад}{с}\right).$$

Частота вільних коливань менша за частоту збуреної сили, тому маємо змушені коливання високої частоти, при яких резонанс неможливий. Підставимо числові значення і остаточно отримаємо диференціальне рівняння руху

$$\ddot{x} + 3600x = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}02 \cdot 65^2}{50}\sin\omega t \Rightarrow \ddot{x} + 3600x = 0{,}34\sin\omega t.$$

Розв'язання даного рівняння складатиметься із загального і часткового розв'язань, тобто матиме вигляд (14.22)

$$x = \bar{x} + x^*.$$

Загальне розв'язання однорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\bar{x} = A\sin 60t.$$

Для визначення амплітуди використаємо формулу (14.1) і початкові умови

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\upsilon_0}{k}\right)^2} = \lambda_{ст} = \frac{g}{k^2} = \frac{9{,}81}{3600} = 0{,}003(м) \Rightarrow \bar{x} = 0{,}3\sin 60t\,(см).$$

Часткове розв'язання будемо шукати у вигляді

$$x^* = B\sin 65t.$$

Амплітуда змушених коливань за відсутності опору і резонансу визначається по формулі

$$B = \frac{m_1 r\omega^2}{m\left(k^2 - \omega^2\right)} = \frac{0{,}34}{\left(60^2 - 65^2\right)} = 0{,}0005(м) \Rightarrow x^* = 0{,}05\sin 65t\,(см).$$

Закон руху матеріальної точки О під дією заданих сил остаточно матиме вигляд

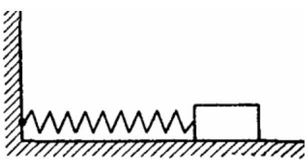
$$x = 0{,}3\sin 60t + 0{,}05\sin 65t\,(см).$$

Задачу розв'язано.

<u>Завдання №14 до РГР</u>

14.1. Тіло вагою P = 25 Н, яке прикріплене до кінця недеформованої пружини і лежить на гладкій горизонтальній площині, відхиляють вправо на 6 см, після чого надають йому початкову швидкість υ_0 = 30 см/с, направлену вліво. Нехтуючи масою пружини, визначити закон руху даного тіла, якщо відомо, що для подовження пружини на 1 см необхідно прикласти силу 3 Н.

Відповідь: x = 0,066 sin(10,8t – 1,14π) м.



До задачі 14.1.

14.2. Яким має бути статичний прогин ресор залізничних вагонів аби при середній швидкості υ = 60 км/год і довжині рейки l = 12 м вагон не попадав у резонанс із поштовхами на стиках рейок.
Відповідь: λ_{cm} > 13 см.
14.3. До однієї й тієї ж пружини підвісили спочатку вантаж вагою 100 Н, а потім вантаж вагою 300 Н. Знайти рівняння руху кожного з вантажів, якщо вони підвішувались до недеформованої пружини і відпускалися без початкової швидкості. Жорсткість пружини c = 3 кН.
Відповідь: $x_1 = -0{,}03\cos 17{,}2t$ м, $x_2 = -0{,}10\cos 9{,}9t$ м.
14.4. Електричний двигун маси m = 30 кг встановлений на балці, жорсткість якої c = 3 Н/м. На вал двигуна насаджений вантаж вагою m_1 = 200 г на відстані r = 1,3 см від осі вала (рис. 14.13). Кутова швидкість двигуна ω = 90 рад/с. Визначити критичну кількість обертів двигуна за хвилину, при якій настає резонанс.
Відповідь: n = 950 об/хв.
14.5. Вантаж вагою G = 20 Н підвішений на двох пружинах з жорсткостями c_1 = 200 Н/м і c_2 = 100 Н/м, з’єднаних послідовно. Визначити період коливань і рівняння руху вантажу, якщо в початковий момент часу він був зміщений із положення спокою вниз на y_0 = 5 см і відпущений з початковою швидкістю υ_0 = 2 м/с, спрямованою уверх.
Відповідь: T = 1,1 с; $y = 0{,}05\cos 5{,}7t - 0{,}35\sin 5{,}7t$ м.

До задачі 14.5.

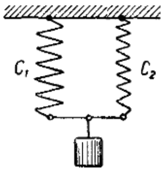
14.6. Вантаж масою m = 20 кг підвішений до пружини з жорсткістю c = 400 Н/м і здійснює вертикальні прямолінійні коливання. Визначити, на якій відстані від положення статичної рівноваги знаходиться центр тяжіння вантажу в момент, коли його прискорення дорівнює 3 м/с^2.
Відповідь: x = 0,15 м.
14.7. Диференціальне рівняння коливального руху матеріальної точки має вигляд

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 20x = 0.$$

Найти логарифмічний декремент коливань, розглядаючи максимальні відхилення після півперіоду коливань.
Відповідь: bT = 3,14.

14.8. Матеріальна точка маси 1 кг здійснює вільні згасаючі коливання в середовищі, яке створює силу опору в 1 Н при швидкості руху точки в 1 м/с. З яким періодом коливається дана точка, якщо за два повних коливання амплітуда зменшилась у e разів?
Відповідь: T = 1 с.
14.9. Тіло масою m = 5 кг здійснює прямолінійні коливання на пружині з жорсткістю c = 2 кН/м, причому опір середовища пропорційний швидкості. Після чотирьох коливань амплітуда зменшилась у 12 разів. Визначити період і логарифмічний декремент коливань.
Відповідь: T = 0,314 с, bT = 0,625.

14.10. Вантаж вагою G = 20 Н підвішений на двох пружинах з жорсткостями c_1 = 100 Н/м і c_2 = 200 Н/м, з'єднаних паралельно. Визначити період коливань і рівняння руху вантажу, якщо в початковий момент часу він був зміщений із положення спокою вниз на y_0 = 5 см і відпущений з початковою швидкістю υ_0 = 2 м/с, спрямованою уверх. Вантаж розташований таким чином, що подовження пружин однакове.



Відповідь: T = 0,52 с; $y = -0{,}05\cos 12{,}1t + 0{,}166\sin 12{,}1t$ м.

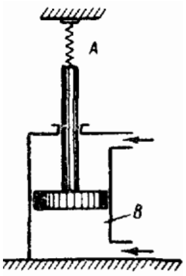
До задачі 14.10.

14.11. Диференціальне рівняння коливального руху матеріальної точки має вигляд

$$\ddot{x} + 36x = 50\sin(5t + 0{,}8).$$

Визначити коефіцієнт динамічності. *Відповідь*: η = 3,27.

14.12. Пружина A з'єднана із штоком поршня, який знаходиться в камері B. До камери почергово зверху і знизу поступає стисле повітря, внаслідок чого сила, яка діє на поршень, змінюється по закону



$$F = 2{,}3\sin 8\pi t \text{ Н.}$$

Визначити закон руху поршня, якщо його маса m = 0,5 кг, а жорсткість пружини c = 200 Н/м.

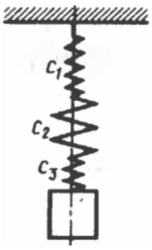
Відповідь: $x = 0{,}024\cos 20t - 0{,}02\sin 8\pi t$ м.

До задачі 14.12.

14.13. Вантаж на пружині рухається вздовж вертикалі під дією збуреної сили

$$Q = 10\sin(20t + 1) \text{ Н.}$$

Нехтуючи опором руху, визначити величину коефіцієнта динамічності η, якщо статична деформація пружини дорівнює 9,8 см. *Відповідь*: η = 0,33.



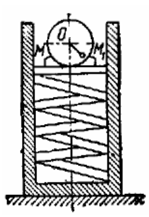
14.14. Визначити кутову частоту вільних вертикальних коливань вантажу вагою m = 5 кг, підвішеного на трьох пружинах з однаковими коефіцієнтами жорсткості $c_1 = c_2 = c_3$ = 490 Н/м.

Відповідь: k = 5,72 рад/с.

До задачі 14.14.

14.15. Вантаж вагою m = 98 г був підвішений до кінця пружини, яка знаходилась в початковий момент часу в недеформованому стані, і відпущений без початкової швидкості. Знайти рівняння коливань вантажу, якщо відомо, що для деформації даної пружини на 1 см необхідно прикласти силу 0,14 Н. *Відповідь*: $x = 0{,}068\sin(12t - \pi/2)$ м.

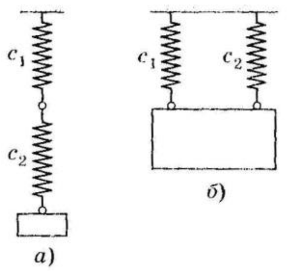
14.16. Електричний двигун встановлений на платформі M, яка утримується пружиною. Загальна вага двигуна і платформи 325 Н, зменшення довжини пружини на 1 см відбувається при статичному навантаженні силою у 300 Н. На валу двигуна, який обертається з кутовою швидкістю ω = 30 рад/с, знаходиться вантаж M_1 ваги 2 Н на відстані 1,3 см від осі вала. Визначити рівняння змушених коливань платформи, якщо в початковий момент вона знаходилась в стані спокою.



Відповідь: $x = 0{,}12t\sin 30t$ см.

До задачі 14.16.

14.17. Визначити відношення періодів коливань вантажу на двох однакових



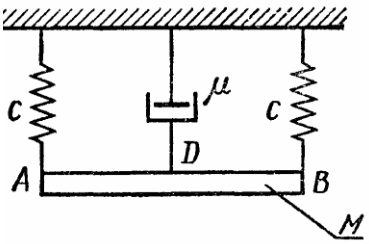
пружинах жорсткістю c_1 = 1 кН/м і c_2 = 4 кН/м при їх послідовному (рис. а) і паралельному (рис. б) з'єднаннях.
Відповідь: T_1/T_2 = 2,5.
До задачі 14.17.

14.18. Диференціальне рівняння коливального руху матеріальної точки має вигляд

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 30x = 4\sin 2t.$$

Визначити амплітуду коливань матеріальної точки.
Відповідь: A = 0,035 м.

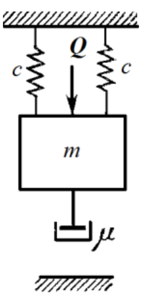
14.19. Горизонтальний брус AB маси m = 10 кг закріплений на підвісці, яка складається з двох паралельно з'єднаних пружин однакової жорсткості c = 25



кН/м і гідравлічного демпфера з коефіцієнтом опору μ = 0,2 кН·с/м. Визначити закон вертикального руху бруса після надання йому в положенні рівноваги початкової швидкості υ_0 = 1,4 м/с, спрямованої вниз. $AD = DB$.
Відповідь: $x = 2e^{-10t}\sin 70t$ см.

До задачі 14.19.

14.20. Вантаж маси m = 2 кг закріплений на пружно-в'язкій підвісці, яка



складається з двох паралельно з'єднаних пружин однакової жорсткості c = 144 Н/м і гідравлічного демпфера з коефіцієнтом опору μ = 20 Н·с/м і знаходиться під дією гармонічної вертикальної сили Q. Визначити частоту p коливань вантажу, якщо їх фаза відстає від фази збуреної сили на 45°.
Відповідь: p = 8 рад/с.
До задачі 14.20.

14.21. Двигун маси m, встановлений на пружному фундаменті, здійснює n обертів за хвилину. Наявність не зрівноважених деталей двигуна призводить до того, що фундамент здійснює коливання з амплітудою a. Визначити найбільше значення збуреної сили H, якщо статичний осад фундаменту f. Силами опору руху знехтувати.

Відповідь: $H = ma\left(\dfrac{g}{f} - \dfrac{\pi^2 n^2}{900}\right).$

14.22. Статична деформація вертикальної пружини під дією вантажу, підвішеного до нижнього кінця, дорівнює $\lambda_{ст}$ = 10 см. Вантаж відтягли з положення статичної рівноваги донизу на відстань x_0 = 15 см і надали йому вертикальну швидкість υ_0 = 1 м/с, спрямовану вниз. Визначити рівняння руху вантажу, якщо вісь x проведена із положення статичної рівноваги вниз.
Відповідь: x = 15cos 9,9t + 10sin 9,9t см.

14.23. Статичне подовження пружини під дією вантажу маси m = 3 кг дорівнює $\lambda_{ст}$ = 2 см. На вантаж в процесі руху діє сила опору

$$R = -b\upsilon \text{ Н.}$$

Визначити найменше значення коефіцієнту b, для якого при швидкості υ = 1 м/с процес руху буде аперіодичним.
Відповідь: b = 132,9 кг/с.

14.24. До тіла M маси m = 500 г прикріплені кінці трьох горизонтальних пружин з коефіцієнтами c_1 = 100 Н/м і c_2 = 150 Н/м. Нехтуючи тертям, визначити період коливань даного вантажу.

Відповідь: T = 0,22 с.
До задачі 14.24.

14.25. У скільки разів період згасаючих коливань більше періоду відповідних вільних коливань без урахування сил опору, якщо логарифмічний декремент затухання дорівнює 1,31?
Відповідь: у 1,08 рази.

Глава 15. «Невільний і відносний рух матеріальної точки»

<u>15.1. Невільна матеріальна точка</u>

Коли на рух матеріальної точки в просторі не накладено жодних обмежень, то вона є вільною. Її закон руху в такому випадку визначається лише характером прикладених сил та початковими умовами. Однак частіше рух точки супроводжується безпосереднім контактом з іншими тілами. В такому випадку точку вважають невільною.

Невільна – матеріальна точка, на рух якої накладені в'язі. При дії на неї різних сил невільна точка буде здійснювати рух по чітко визначеній траєкторії або знаходитись в чітко визначеній області, тобто характер руху визначається накладеними в'язями. Рівняння цих траєкторій або областей звуться рівняннями в'язей. Так, рівняння в'язі

$$f(x, y, z) = 0 \tag{15.1}$$

вказує на те, що точка рухається по деякій незмінній поверхні (час не входить в рівняння) і не може залишити її в жодну з сторін.

При вивченні законів руху невільної матеріальної точки використовують **принцип звільнення від в'язей**: невільний рух матеріальної точки можна розглядати як вільний, якщо дію в'язей замінити силами реакцій. Із даного принципу витікає, що невільна матеріальна точка знаходиться під дією двох типів сил:

1. *Активних* (сил, що задаються) – сил, які виражають дію на точку з боку зовнішніх тіл, прагнучих викликати її рух.

2. *Пасивних* (реакцій в'язей) – сил, які залежать від активних сил, фізичних властивостей в’язі і руху точки. У відсутності активних сил не існують.

15.2. Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки

Нехай матеріальна точка *M* рухається під дією сили ***P*** (рис. 15.1) по нерухомій абсолютно гладкій поверхні, рівняння якої

$$f(x, y, z) = 0, \qquad (15.2)$$

яка є в’яззю для точки *M*. Запишемо основне рівняння динаміки невільної матеріальної точки

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N}, \qquad (15.3)$$

де ***N*** – реакція в’язі.

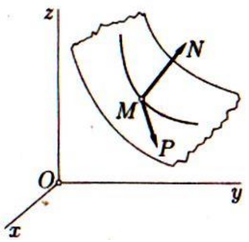


Рис. 15.1. Рух невільної матеріальної точки.

В проекції на координатні осі диференціальне рівняння (15.5)

$$m\ddot{x} = X + N_x,\ m\ddot{y} = Y + N_y,\ m\ddot{z} = Z + N_z.$$

Проекції реакції в’язі на координатні осі можна представити у виді

$$N_x = N\cos(\boldsymbol{N},\boldsymbol{i}) = N\frac{\partial f/\partial x}{\Delta f},\ N_y = N\cos(\boldsymbol{N},\boldsymbol{j}) = N\frac{\partial f/\partial y}{\Delta f},\ N_z = N\cos(\boldsymbol{N},\boldsymbol{k}) = N\frac{\partial f/\partial z}{\Delta f}.$$

Тоді рівняння руху набувають вигляду

$$m\ddot{x} = X + \frac{N}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial x},\ m\ddot{y} = Y + \frac{N}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial y},\ m\ddot{z} = Z + \frac{N}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Введемо множник Лагранжа $\lambda = N/\Delta f$ и остаточно отримаємо

$$m\ddot{x} = X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x},\ m\ddot{y} = Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y},\ m\ddot{z} = Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} \qquad (15.4)$$

диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки у формі Лагранжа (рівняння Лагранжа 1 роду).

Три диференціальні рівняння (15.4) і рівняння в’язі (15.2) містять чотири невідомих, тобто розв’язання можливе. Однак в декартовій системі координат розв’язання може бути отримане лише для найпростіших в’язей першого порядку. У ряді випадків більш ефективним є інший підхід, розглянутий далі. Нехай точка *M* рухається під дією сили ***P*** (рис. 15.2) з нерухомої абсолютно гладкої лінії, рівняння якої

$$f(x, y) = 0$$

є для точки *M* в'яззю і лежить в одній площині з силою ***P***.

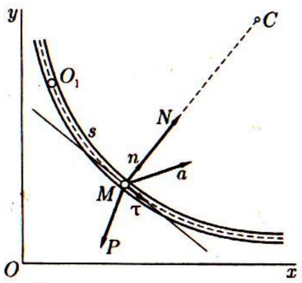
Знову запишемо основне рівняння динаміки невільної матеріальної точки

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N}.$$

При русі точки по плоскій лінії зручно проектувати його на натуральні координатні осі, тобто на напрями дотичної і нормалі до траєкторії, які теж лежать в цій площині. Тоді

$$ma\cos(a, \tau) = P_\tau,\quad ma\cos(a, n) = P_n + N. \qquad (15.5)$$

Підставивши значення прискорень в рівняння (15.5), остаточно отримуємо



$$m\frac{d^2s}{dt^2} = P_\tau,\ m\frac{\upsilon^2}{\rho} = P_n + N \quad (15.6)$$

диференціальні рівняння плоского руху невільної матеріальної точки у формі Ейлера.

Рис. 15.2. Плоский рух невільної матеріальної точки.

Рівняння Ейлера можна використовувати і при просторовому русі точки, у цьому випадку до (15.6) додається проекція на бінормаль, тобто

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = P_\tau,\ m\frac{\upsilon^2}{\rho} = P_n + N,\ 0 = F_b + N_b. \quad (15.7)$$

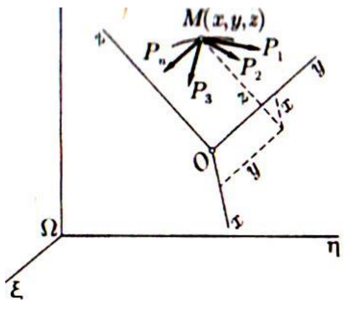
Рівняння (15.7) мають назву **диференціальних рівнянь руху невільної матеріальної точки у формі Ейлера.**

15.3. Відносний рух матеріальної точки

Другий закон динаміки та отримані з нього диференціальні рівняння справедливі лише при русі відносно інерційних систем координат. Для описання руху матеріальної точки відносно неінерційних систем необхідно внести в рівняння певні поправки. В такому випадку рух точки розглядається по відношенню до двох систем, тобто являється складним.

Розглянемо рух матеріальної точки *M* по відношенню до двох система відліку: *Ωξηζ* – інерційна нерухома система, а не пов'язана з нею *Oxyz* – неінерційна рухома система (рис. 15.3). В цьому випадку мають місце три рухи:

1. *Переносний* – рух неінерційної системи *Oxyz* по відношенню до інерційної системи *Ωξηζ*. Він є заданим і не залежить від руху матеріальної точки *M*.



2. *Абсолютний* – рух точки *M* по відношенню до інерційної системи координат *Ωξηζ*. Його прискорення визначається за допомогою другого рівняння динаміки.
3. *Відносний* – рух точки *M* по відношенню до неінерційної системи координат *Oxyz*. Саме він і є предметом вивчення в даному розділі.

Рис. 15.3. Відносний рух матеріальної точки.

З кінематики відомо, що абсолютне прискорення дорівнює геометричній сумі трьох прискорень: відносного, переносного и коріолісова

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{від} + \boldsymbol{a}_{пер} + \boldsymbol{a}_{кор}. \quad (15.8)$$

Підставивши (15.8) в другий закон динаміки отримуємо

$$m(\boldsymbol{a}_{від} + \boldsymbol{a}_{пер} + \boldsymbol{a}_{кор}) = \sum \boldsymbol{P}_i.$$

Введемо поняття переносної и коріолісової сил інерції

$$\boldsymbol{\Phi}_{пер} = -m\boldsymbol{a}_{пер};\quad \boldsymbol{\Phi}_{кор} = -m\boldsymbol{a}_{кор}.$$

Перенісши їх у праву частину остаточно отримаємо

$$M\boldsymbol{a}_{від} = \sum \boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{\Phi}_{кор} + \boldsymbol{\Phi}_{пер} \quad (15.9)$$

основне рівняння динаміки відносного руху: у разі непоступального переносного руху відносний рух матеріальної точки можна представити як абсолютний, якщо до діючих сил додати переносну і коріолісову сили інерції.

Слід зазначити, що в інерційній системі відліку прискорення точки може бути тільки результатом дії на неї сил, тоді як в неінерційній системі – ще і результатом руху самої системи. В проекції на координатні осі основне рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки має вигляд

$$m\ddot{x} = \sum X + \varPhi_x^{пер} + \varPhi_x^{кор},\ m\ddot{y} = \sum Y + \varPhi_y^{пер} + \varPhi_y^{кор},\ m\ddot{z} = \sum Z + \varPhi_z^{пер} + \varPhi_z^{кор}.$$

15.4. Часткові випадки переносного руху точки

1. Переносний рух є нерівномірним обертанням тіла навколо нерухомої осі. Переносне прискорення в цьому випадку можна розкласти на дотичну і доцентрову складові

$$\boldsymbol{a}_{пер} = \boldsymbol{a}_{пер}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{пер}^{n} \Rightarrow \boldsymbol{\varPhi}_{пер} = \boldsymbol{\varPhi}_{пер}^{\tau} + \boldsymbol{\varPhi}_{пер}^{n}.$$

Тоді рівняння динаміки відносного руху набуває вигляду

$$m\boldsymbol{a}_{від} = \sum \boldsymbol{P_i} + \boldsymbol{\varPhi}_{кор} + \boldsymbol{\varPhi}_{пер}^{\tau} + \boldsymbol{\varPhi}_{пер}^{n}. \tag{15.10}$$

2. Переносний рух є рівномірним обертанням тіла навколо нерухомої осі. В цьому випадку кутове прискорення, а значить і дотична складова переносної сили інерції дорівнюють нулю

$$\boldsymbol{\varepsilon} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\varPhi}_{пер}^{\tau} = 0,$$

а рівняння динаміки відносного руху має вигляд

$$m\boldsymbol{a}_{від} = \sum \boldsymbol{P_i} + \boldsymbol{\varPhi}_{кор} + \boldsymbol{\varPhi}_{пер}^{n}.$$

3. Переносний рух є поступальним нерівномірним непрямолінійним рухом. Тоді кутова швидкість тіла та його коріолісове прискорення дорівнюють нулю

$$\omega_{\text{ïåð}} = 0,\ \hat{\boldsymbol{O}}_{\text{êîð}} = 0.$$

Тоді рівняння переносного руху набуває вигляду

$$m\boldsymbol{a}_{від} = \sum \boldsymbol{P_i} + \boldsymbol{\varPhi}_{пер}.$$

Модуль переносної сили інерції є векторною сумою нормальної та дотичної складових

$$\boldsymbol{\varPhi}_{пер} = \boldsymbol{\varPhi}_{пер}^{\tau} + \boldsymbol{\varPhi}_{пер}^{n} \Rightarrow m\boldsymbol{a}_{від} = \sum \boldsymbol{P_i} + \boldsymbol{\varPhi}_{пер}^{\tau} + \boldsymbol{\varPhi}_{пер}^{n}.$$

де модулі дотичної і нормальної сил інерції

$$\varPhi_{пер}^{\tau} = m\frac{d\upsilon}{dt} \text{ і } \varPhi_{пер}^{n} = m\frac{\upsilon^2}{\rho}.$$

4. Переносний рух є поступальним рівномірним непрямолінійним рухом. В цьому випадку кутова швидкість тіла і його коріолісове прискорення дорівнюють нулю

$$\omega_{\text{ïåð}} = 0,\ \hat{\boldsymbol{O}}_{\text{êîð}} = 0.$$

Тоді рівняння переносного руху набуває вигляду

$$m\boldsymbol{a}_{від} = \sum \boldsymbol{P_i} + \boldsymbol{\varPhi}_{пер}.$$

Модуль переносної сили інерції є геометричною сумою нормальної та дотичної складових, але в даному випадку дотичне прискорення дорівнює нулю, тому

$$\boldsymbol{a} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Phi}_{пер}^{\tau} = 0; \quad \boldsymbol{\Phi}_{пер} = \boldsymbol{\Phi}_{пер}^{n} \Rightarrow m\boldsymbol{a}_{від} = \sum \boldsymbol{P_i} + \boldsymbol{\Phi}_{пер}^{n}.$$

5. Переносний рух є рівномірним прямолінійним рухом. В цьому випадку переносне і коріолісове прискорення дорівнюють нулю

$$\boldsymbol{a}_{пер} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Phi}_{пер} = 0, \; \boldsymbol{\Phi}_{кор} = 0.$$

Тоді рівняння динаміки відносного руху має вигляд

$$m\boldsymbol{a}_{від} = \sum \boldsymbol{P_i}.$$

При рівномірному і прямолінійному русі відносне прискорення матеріальної точки співпадає з абсолютним прискоренням в основному рівнянні динаміки. Тоді відносний рух матеріальної точки по відношенню до рухомої системи відліку відбувається так само, як і по відношенню до нерухомої.

Принцип відносності класичної механіки (Галілея): жодним механічним експериментом неможливо визначити, знаходиться дана система відліку в стані спокою чи здійснює поступальний, рівномірний і прямолінійний рух.

15.5. Вплив обертання Землі на рух тіл

При розв'язанні більшості задач теоретичної механіки систему координат, пов'язану із Землею, вважають інерційною, не враховуючи добового обертання Землі. При складанні рівнянь динаміки осі даної системи вважають нерухомими, тим самим нехтуючи впливом сили інерції Коріоліса, модуль якої

$$\Phi_{кор} = 2m\omega\upsilon\sin\alpha.$$

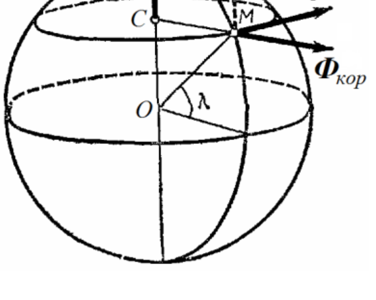
Причиною тому є дуже незначна кутова швидкість обертання Землі

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{t} = \frac{2\cdot 3{,}14}{24\cdot 60\cdot 60} = 0{,}000073 \text{ (рад/с)}. \qquad (15.11)$$

За такої кутової швидкості сила інерції Коріоліса значно менша за силу тяжіння. Так при швидкості υ = 700 м/с (швидкість артилерійського снаряду) і куті α = 90° сила інерції Коріоліса складає 1% сили тяжіння, тому допущення про інерційність системи відліку, пов'язаної із Землею, є справедливим.

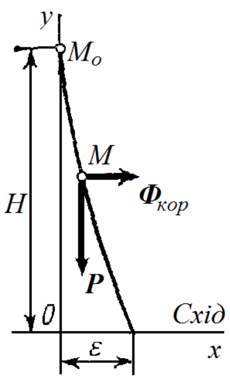
Добове обертання Землі необхідно враховувати у випадку дуже великих швидкостей (політ балістичних ракет) або у випадку рухів, які тривають дуже довгий час (річки, повітряні та морські течії).

Нехай точка *M* рухається по паралелі на схід, тоді прискорення Коріоліса спрямоване по радіусу *CM*, а сила інерції Коріоліса – в протилежний бік. Вертикальна складова цієї сили викличе незначне зменшення ваги точки, а горизонтальна складова, спрямована на південь, викличе відхилення точки вправо. Аналогічний результат матиме місце і при русі точки на захід.



Висновок: у північній півкулі тіло, яке рухається по поверхні в будь-якому напрямку, буде відхилятися вправо під впливом обертання Землі. У південній півкулі тіло буде відхилятися вліво. Цим пояснюється те, що річки північної півкулі сильніше підмивають

правий берег, мають місце відхилення пасатів і морських течій, виникає циркуляційний рух повітряних мас навколо центра циклона.
Рис. 15.4. Рух точки по поверхні Землі.



Обертання Землі також впливає і на вільне падіння тіл. Нехай точка M падає у північній півкулі з висоти H, значно меншої від радіусу Землі. Вважаємо силу тяжіння постійною увесь час падіння і нехтуємо силою опору повітря. Дана точка буде рухатись під дією двох сил: сили тяжіння і сили інерції Коріоліса. Її рух буде криволінійним і точка M відхилиться на схід на відстань ε

$$\varepsilon = \frac{2\omega}{3}\cos\lambda\sqrt{\frac{2H^3}{g}}\,, \qquad (15.12)$$

де λ – географічна широта місця падіння. Отримання формули (15.12) розглянуто у прикладі розв'язання задачі 2.

Рис. 15.5. Відхилення точки при падінні на поверхню Землі.

Питання для самоконтролю

1. Які особливості мають диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки?
2. Коли при русі невільної точки слід враховувати силу тертя?
3. Як записується основне рівняння відносного руху матеріальної точки?
4. Сформулюйте принцип відносності класичної механіки.
5. Як і для чого записуються рівняння Лагранжа першого роду?
6. Який фізичний зміст мають сили інерції, який напрям вони мають?

Завдання № 15. «Невільний і відносний рух матеріальної точки»

Рекомендації до розв'язання задач

А. Рух невільної матеріальної точки.

1. Зобразити точку в даний момент часу, визначити усі діючі активні сили.
2. Застосувати принцип звільнення, замінивши в'язі їх реакціями.
3. Записати початкові умови руху матеріальної точки.
4. Скласти диференціальні рівняння руху точки в формі Лагранжа (15.4) або Ейлера (15.7) в залежності від типу руху, то зінтегрувати їх.
5. З початкових умов руху визначити сталі інтегрування і підставити їх в результат інтегрування, отримавши таким чином закон руху точки.

Б. Відносний рух матеріальної точки.

1. Зобразити точку в даний момент часу разом з активними силами, що діють на неї і скласти початкові умови руху.
2. Застосувати принцип звільнення, замінивши в'язі їх реакціями.
3. Нанести на рисунок переносну і коріолісова сили інерції.
4. Скласти і зінтегрувати диференціальні рівняння точки в її відносному русі.
5. З початкових умов руху визначити сталі інтегрування.
6. Сталі інтегрування підставити в результат інтегрування і отримати закон руху точки.

Приклад розв'язання задачі (невільна матеріальна точка)

Задача 1. Матеріальна точка *M* маси *m* починає рух із точки *A* сферичного куполу радіуса *r*. Нехтуючи тертям визначити, на якій висоті від площини основи зникне контакт між точкою і поверхнею купола.

Розв'язання

Визначимо діючі на точку *M* сили і нанесемо їх на рисунок. Матеріальна точка знаходиться під дією однієї активної сили – сили тяжіння точки ***P***, модуль якої

$$P = mg,$$

і реакції в'язі ***N***, спрямованої по нормалі до в'язі. Дану задачу доречно розв'язувати у проекціях на натуральні осі координат, для чого складаємо диференціальні рівняння плоского руху точки *M* у формі Ейлера

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = mg\sin\varphi, \quad m\frac{\upsilon^2}{r} = mg\cos\varphi - N.$$

Аби виключити із рівнянь час, виконаємо заміну незалежної змінної

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\upsilon}{d\varphi} = \frac{\upsilon}{r}\frac{d\upsilon}{d\varphi},$$

після чого підставимо до першого рівняння

$$\frac{m\upsilon}{r}\frac{d\upsilon}{d\varphi} = mg\sin\varphi \Rightarrow \int_0^{\upsilon}\upsilon d\upsilon = gr\int_0^{\varphi}\sin\varphi d\varphi.$$

$$\frac{\upsilon^2}{2} = -gr(\cos\varphi - \cos 0) \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{r} = 2g(1-\cos\varphi).$$

Дане рівняння визначає залежність швидкості точки від кута повороту лише при русі точки по поверхні купола. Із другого рівняння виразимо нормальну реакцію і підставимо в нього отриману швидкість

$$N == mg\cos\varphi - m\frac{\upsilon^2}{r} = mg\cos\varphi - 2mg(1-\cos\varphi) =$$

$$= mg(\cos\varphi - 2 + 2\cos\varphi) = mg(3\cos\varphi - 2).$$

В момент зникнення контакту між точкою і поверхнею нормальна реакція стане рівною нулю

$$N = mg(3\cos\varphi - 2) = 0 \Rightarrow 3\cos\varphi - 2 = 0; \quad \cos\varphi = \frac{2}{3}.$$

Висоту точки відриву знаходимо по формулі

$$h = r\cos\varphi = \frac{2r}{3}.$$

Задачу розв'язано.

Приклад розв'язання задачі (відносний рух точки)

Задача 2. Знайти відхилення від вертикалі матеріальної точки *M*, яка падає без початкової швидкості з висоти *H* = 100 м (рис. 15.5) на широті Москви (λ = 56°, g = 816 м/с^2). Опір повітря до уваги не брати.

Розв'язання

Складаємо диференціальні рівняння руху точки

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \varPhi_{кор} = 2m\omega\upsilon\sin\alpha \Rightarrow \ddot{x} = 2\omega\upsilon_y\sin(90^\circ-\lambda); \\ m\ddot{y} &= -mg \Rightarrow \ddot{y} = -g. \end{aligned} \tag{15.13}$$

При складанні першого з рівнянь (15.13) нехтували горизонтальною складовою швидкості точки, оскільки сила інерції Коріоліса дуже мала порівняно з силою тяжіння. Тому можна вважати, що точка рухається по вертикалі. Початкові умови руху точки мають вигляд

$$x(0)=0, \quad y(0)=H, \quad \upsilon_x(0)=\upsilon_y(0)=0.$$

Для отримання вертикальної швидкості інтегруємо друге рівняння (15.13)

$$\frac{d\upsilon_y}{dt} = -g \Rightarrow \int_0^{\upsilon_y} d\upsilon_y = -\int_0^t g dt; \quad \upsilon_y = -gt. \tag{15.14}$$

З останнього рівняння інтегруванням визначимо закон руху відносно осі y

$$\frac{dy}{dt} = -gt \Rightarrow \int_H^y dy = -g\int_0^t tdt; \quad y - H = -\frac{gt^2}{2} \Rightarrow y = H - \frac{gt^2}{2}. \tag{15.15}$$

Значення вертикальної швидкості з (15.14) підставляємо у перше рівняння (15.13), після чого двічі інтегруємо його

$$\begin{aligned} &\frac{d\upsilon_x}{dt} = 2\omega gt\sin(90^\circ-\lambda) = 2\omega gt\cos\lambda; \quad \int_0^{\upsilon_x} d\upsilon_x = 2\omega g\cos\lambda\int_0^t dt \Rightarrow \\ &\upsilon_x = \frac{2\omega gt^2\cos\lambda}{2}; \quad \frac{dx}{dt} = \omega gt^2\cos\lambda \Rightarrow \int_0^x dx = \omega g\cos\lambda\int_0^t t^2 dt \Rightarrow x = \frac{\omega gt^3\cos\lambda}{3}. \end{aligned} \tag{15.16}$$

Виразимо час з рівнянь (15.15) і (15.16)

$$\frac{gt^2}{2} = H - y \Rightarrow t^2 = \frac{2}{g}(H-y) \Rightarrow t^6 = \frac{8}{g^3}(H-y)^3;$$

$$x = \frac{\omega gt^3\cos\lambda}{3} \Rightarrow t^3 = \frac{3x}{g\omega\cos\lambda} \Rightarrow t^6 = \frac{9x^2}{g^2\omega^2\cos^2\lambda}.$$

Прирівнюючи праві частини, отримаємо траєкторію точки

$$\frac{8}{g^3}(H-y)^3 = \frac{9x^2}{g^2\omega^2\cos^2\lambda} \Rightarrow x^2 = \frac{8g^2\omega^2\cos^2\lambda}{9g^3}(H-y)^3 = \frac{8\omega^2\cos^2\lambda}{9g}(H-y)^3.$$

Відхилення точки ε на схід при падінні на поверхню Землі можна знайти, поклавши $y = 0$, а кутову швидкість обертання Землі підставляємо з (15.11)

$$x(0) = \varepsilon^2 = \frac{8\omega^2\cos^2\lambda}{9g} = H^3 \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{2\omega\cos\lambda}{3}\sqrt{\frac{2H^3}{g}} = \frac{2\cdot 0{,}000073\cdot\cos 56^\circ}{3}\sqrt{\frac{2\cdot 100^3}{9{,}816}} = 0{,}012\,(\text{м}).$$

Задачу розв’язано.

Завдання №15 до РГР

15.1. Ділянка для розгону лижного трампліну виконана у вигляді дуги кола радіуса r = 50 м. Лижник маси m = 80 кг починає рух із точки A, розташованої на висоті $h = r/2$ над точкою відриву B. В процесі руху на нього діє сила опору середовища

$$R = 0{,}16\upsilon^2$$

і сила тертя ковзання, причому коефіцієнт тертя ковзання лиж об сніг $f = 0{,}1$. Прийнявши лижника за матеріальну точку, визначити його швидкість в кінці ділянки розгону. *Відповідь*: $\upsilon = 17{,}4$ м/с.

15.2. Візок містового крану рухається в горизонтальному напрямку з прискоренням $a = 2{,}5$ м/с^2. Визначити кут φ відхилення тросу від вертикалі в положенні відносної рівноваги вантажу. *Відповідь*: $\varphi = 14{,}3°$.

15.3. Стріла крану повертається навколо власної вертикальної осі з кутовою швидкістю $\omega = 1$ рад/с. Візок вагою $P = 20$ кН рухається вздовж стріли зі швидкістю $\upsilon = 2{,}45$ м/с. Визначити силу бічного тиску візка на рейки.

Відповідь: $N = 10$ кН.

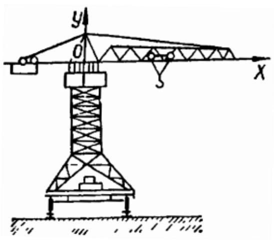


Рис. до задач 15.3.

15.4. Циліндрична посудина радіуса $r = 8$ см і висоти $h = 20$ см, яка наполовину заповнена рідиною, обертається навколо власної горизонтальної осі. Визначити, за якої кутової швидкості рідина підніметься до країв посудини.

Відповідь: $\omega = 24{,}8$ рад/с.

15.5. Вантаж вагою $P = 40$ Н, підвішений на нитці довжини l , відхиляють від положення рівноваги на кут $\alpha = 30°$ без початкової швидкості. Визначити натяг нитки у момент проходження найнижчого положення M_1. *Відповідь*: $T = 50{,}7$ Н.

15.6. Вантаж A рухається вниз по похилій площині з кутом нахилу до горизонту $\alpha = 45°$. При цьому сама похила площина рухається прямолінійно з прискоренням $a = 2$ м/с^2. Визначити прискорення вантажу по відношенню до площини, якщо коефіцієнт тертя між тілами $f = 0{,}25$.

Відповідь: $a_{від} = 3{,}43$ м/с^2.

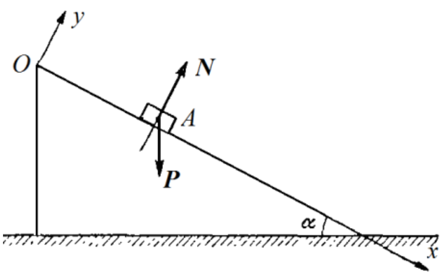


Рис. до задач 15.6 і 15.7.

15.7. Вантаж вагою $P = 60$ Н рухається вниз по похилій площині з кутом нахилу до горизонту $\alpha = 45°$. При цьому сама похила площина рухається прямолінійно з прискоренням $a = 2$ м/с^2. Визначити силу тиску вантажу на бічну поверхню похилої площини.

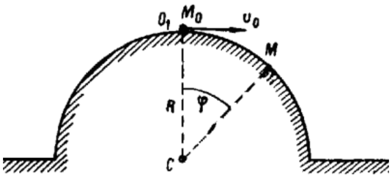
Відповідь: $N = 33{,}8$ Н.

15.8. Потяг вагою 36 000 кН рухається зі швидкістю 145 км/год з півночі на південь. Визначити бічну силу тиску потягу на рейки в той момент, коли він перетинає північну широту $\varphi = 50°$. *Відповідь*: $N = 16{,}7$ кН на праву рейку.

15.9. На шорстку горизонтальну площину, яка обертається навколо власної вертикальної осі з кутовою швидкістю $\omega = 8$ рад/с поклали важку матеріальну точку. Визначити область, в якій може знаходитись дана точка у стані відносного спокою, якщо коефіцієнт тертя між нею і площиною $f = 0{,}4$.

Відповідь: коло радіуса $r = 6{,}1$ см з центром на осі обертання.

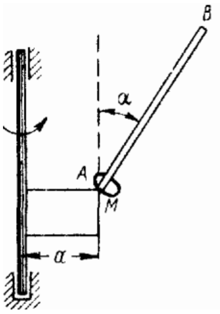
15.10. Матеріальна точка маси M знаходиться на вершині гладкої півкулі радіуса R = 20 см. В початковому положенні M_0 їй надають горизонтальну швидкість υ_0 = 1 м/с. Визначити кут, при якому точка залишить поверхню півкулі і почне рухатись вільно.



Відповідь: φ = 33°.

Рис. до задачі 15.10.

15.11. Гладкий стержень AB рівномірно обертається навколо вертикальної осі, утворюючи з нею незмінний кут α = 30°. Визначити найбільшу величину кутової швидкості стержня ω, за якої кільце M, надіте на стержень, буде знаходитись в стані відносного спокою в нижньому положенні. Відстань до осі обертання a = 10 см.



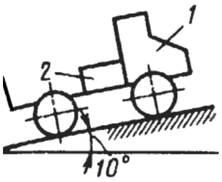
Відповідь: ω = 13 рад/с.

Рис. до задачі 15.11.

15.12. Залізничний потяг маси m = 2 000 т рухається з півночі на південь по меридіану зі швидкістю υ = 15 м/с. Визначити бічний тиск поїзда на рейки.

Відповідь: N = 3 733 Н на праву рейку.

15.13. Вантажний автомобіль 1 рухається на підйом з постійним прискоренням a = - 2 м/с^2. Визначити силу тиску вантажу 2 маси m = 200 кг на передню стінку кузову автомобіля, якщо кут підйому 10°.



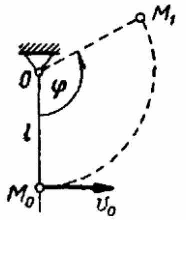
Відповідь: N = 59,3 Н

Рис. до задачі 15.13.

15.14. Артилерійський снаряд рухається по горизонтальній траєкторії зі швидкістю υ = 900 м/с в північній півкулі на широті λ = 60°. Снаряд має влучити в ціль на відстані 18 км. Визначити, наскільки відхилиться від цілі снаряд внаслідок добового обертання Землі.

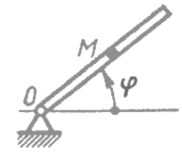
Відповідь: ε = 22,6 м.

15.15. Вантажу, підвішеному на нитці довжини l = 0,5 м, надають початкову швидкість υ_0 = 3 м/с в його нижньому положення. Визначити положення точки M_1, в якому нитка перестане утримувати вантаж і той почне рухатися як вільне тіло.



Відповідь: φ = 87°.

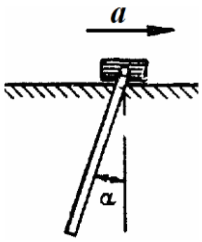
Рис. до задачі 15.15.



15.16. Трубка обертається навколо осі О по закону $\varphi = t^2$, а всередині трубки рухається кулька М маси m = 100 г по закону $OM = 0{,}2t^3$. Визначити модуль сили інерції Коріоліса в момент часу t = 1 с. *Відповідь*: $\Phi_{кор}$ = 0,24 Н.

Рис. до задачі 15.16.

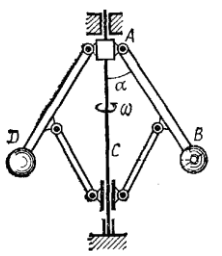
15.17. Під час розгону поїзда на горизонтальній прямолінійній ділянці шляху тягар M вагою P = 20 Н, підвішений на нитці до стелі вагона, відхилився на кут α = 45°. Визначити прискорення вагона під час розгону.
Відповідь: a = 9,81 м/с^2.



15.18. Точка підвісу маятника, який являє собою стержень довжини l = 25 см, рухається поступально рівномірно і прямолінійно з прискоренням a = 4,9 м/с^2. Визначити кут φ відхилення маятника від вертикального положення в стані відносного спокою.
Відповідь: φ = 26,6°.
Рис. до задачі 15.18.

15.19. Вантажу, підвішеному на нитці довжини l = 0,5 м, надають початкову горизонтальну швидкість в його нижньому положення (рис. до задачі 15.15). Визначити мінімальне значення швидкості, за якої вантаж зможе описати повне коло. *Відповідь*: υ = 4,95 м/с.

15.20. Відцентровий регулятор Вата обертається з кутовою швидкістю ω = 10 рад/с, а довжина стержню AB = 25 см. Нехтуючи вагою обертових ланок регулятора у порівнянні з вагою куль B і D, визначити кут α відносної рівноваги стержня AB.



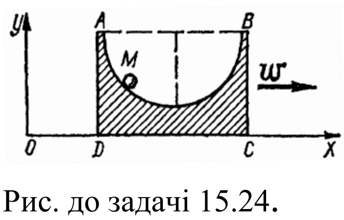
Відповідь: α = 66,7°.
Рис. до задачі 15.20.

15.21. Під час розгону поїзда на горизонтальній прямолінійній ділянці шляху вантаж M вагою P = 20 Н, підвішений на нитці до стелі вагона, відхилився на кут α = 45°. Визначити натяг нитки у вказаному положенні.
Відповідь: T = 2,8 Н.

15.22. Похила площина, що складає кут α = 30° з горизонтом, рухається вправо вздовж осі Ox з постійним прискоренням a = 1,7 м/с^2. По цій площині спускається тіло M вагою P = 20 Н. Нехтуючи тертям, визначити його силу тиску на площину AB. *Відповідь*: N = 1,9 Н.

15.23. В скільки раз мала б збільшитися кутова швидкість обертання Землі навколо власної осі, аби важка матеріальна точка, яка знаходиться на поверхні Землі на екваторі не мала б ваги? Радіус Землі R = 6 370 км.
Відповідь: у 17 разів.

15.24. Точка M маси m = 0,4 кг ковзає вздовж гладкого півкола AMB вертикальної пластини $ABCD$, яка рухається прямолінійно вздовж осі x з прискоренням a = 4 м/с^2. Визначити силу тиску на пластинку точки M коли вона займає найнижче положення, якщо в положенні A відносна швидкість точки M дорівнювала нулю.



Відповідь: N = 8,6 Н.
Рис. до задачі 15.24.

15.25. Похила площина, що складає кут α = 30° з горизонтом, рухається вправо вздовж осі Ox з постійним прискоренням a = 1,7 м/с^2. По цій площині

спускається тіло *M* вагою P = 20 Н. Нехтуючи тертям, визначити відносне прискорення тіла *M*.
Відповідь: $a_{від}$ = 3,4 м/с^2.

Глава 16. «Динаміка механічної системи»

16.1. Загальні визначення про механічну систему

Механічна система – система матеріальних точок (тіл), рух або рівновага якої розглядається. За наявності сил взаємодії рух кожної точки (тіла) системи залежить від руху усіх інших точок (тіл). Усі сили, діючі на систему, можна розділити на два типи:

1. *Зовнішні* F^e – сили, що діють на систему з боку точок чи тіл, які не входять до складу даної системи.
2. *Внутрішні* F^i – сили, з якими тіла або точки даної системи взаємодіють між собою.

Такий розподіл є умовним, оскільки тип сили залежить від того, яка система розглядається. Наприклад, сила тяжіння Землі до Сонця буде внутрішньою силою, якщо розглядається рух Сонячної системи, але ця ж сила буде зовнішньою у випадку системи Земля – Місяць.

Теорема: головний вектор і головний момент відносно довільного центра (осі) внутрішніх сил механічної системи дорівнює нулю за будь-якого стану механічної системи, тобто в стані спокою чи руху

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^i = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{F}_k^i) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_x(\boldsymbol{F}_k^i) = 0. \tag{16.1}$$

З (16.1) проте не витікає, що внутрішні сили взаємно зрівноважуються і ніяким чином не впливають на рух системи. Прикладені до різних матеріальних точок або тіл, вони можуть викликати їх взаємні переміщення. Зрівноваженою уся сукупність сил буде лише для твердого тіла.

Тверде тіло – система матеріальних точок, відстані між якими залишаються незмінними. Рух системи або твердого тіла залежить не лише від прикладених сил, а й від величини маси системи (тіла) та її розподілу.

Маса системи – арифметична сума мас усіх точок або тіл, які утворюють систему

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k. \tag{16.2}$$

16.2. Центр мас і моменти інерції

При розв'язанні задач динаміки необов'язково знати всі маси точок системи та їх координати, достатньо визначити лише їх наступні сумарні характеристики: координати центру мас, осьові то відцентрові моменти інерції.

1. *Центр мас* (*інерції*) – геометрична точка *C*, координати якої визначаються по формулам

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{M}, \; y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{M}, \; z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k z_k}{M}. \qquad (16.3)$$

Положення центра мас характеризує розподіл мас в системі. Часто в механіці застосовується еквівалентне поняття центру ваги. Для твердого тіла в однорідному полі тяжіння положення центрів мас і тяжіння співпадають, проте поняття центру мас значно ширше, оскільки воно зберігає сенс для тіла у будь-якому силовому полі. Крім того, поняття центру мас може бути застосоване для довільної механічної системи, а не тільки для абсолютно твердого тіла, як поняття центра тяжіння.

Положення центра мас можна задати за допомогою радіус-вектора

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{r_k}}{M}. \qquad (16.4)$$

2. *Момент інерції тіла відносно осі Oz* – скалярна величина, що дорівнює сумі добутків мас усіх точок тіла на квадрати їх відстаней до даної осі

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2. \qquad (16.5)$$

Момент інерції тіла відносно осі є мірою інертності тіла при обертальному русі.

Іноді момент інерції тіла відносно осі визначають через *радіус інерції*

$$I_z = M\rho_z^2. \qquad (16.6)$$

Радіус інерції геометрично дорівнює відстані від осі *Oz* до точки, в якій необхідно зосередити масу всього тіла, аби момент інерції даної точки дорівнював моменту інерції усього тіла.

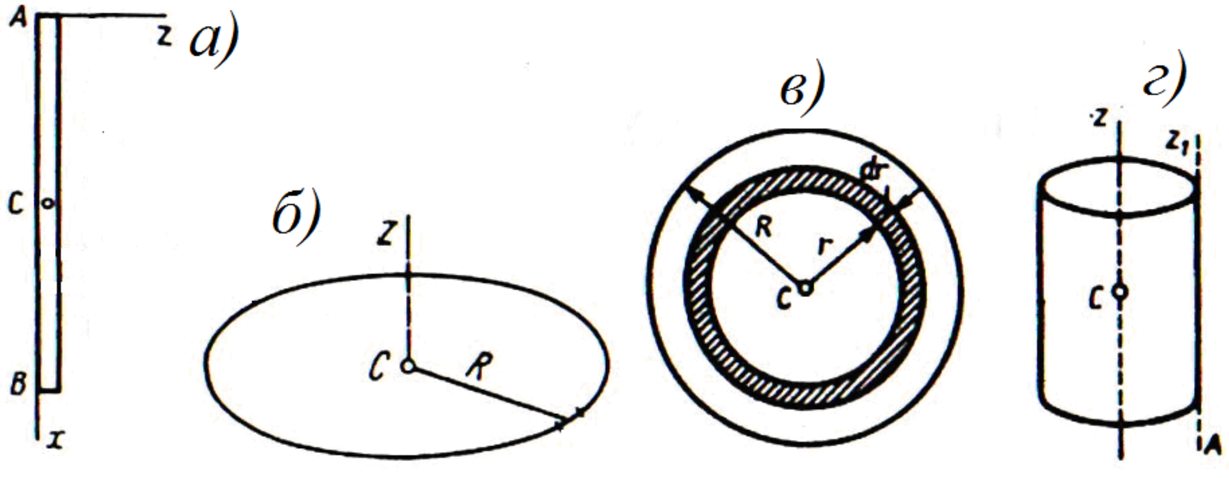


Рис. 16.1. Моменти інерції деяких однорідних тіл.

Нижче без виводу наведено моменти інерції деяких простих тіл. Так, момент інерції *тонкого однорідного стержня* маси *M* і довжини *l* відносно осі z, яка проходить через точку *A* (рис. 16.1, *а*)

$$I_A = \frac{Ml^2}{3}. \qquad (16.7)$$

Якщо вісь проходить через центр мас *C* стержня, то момент інерції

$$I_C = \frac{Ml^2}{12}. \qquad (16.8)$$

Момент інерції *тонкого круглого однорідного кільця* маси M і радіуса R відносно осі z, яка проходить через його центр мас C перпендикулярно до площини кільця (рис. 16.1, *б*)

$$I_C = MR^2. \qquad (16.9)$$

Аналогічний результат також має місце для моментів інерції *матеріальної точки* і *полого циліндра* маси M і радіуса R, відносно осі, яка проходить через його центр.

Момент інерції *круглої однорідної пластини* або *суцільного циліндра* відносно осі z, яка проходить через центр C перпендикулярно площині тіла (рис. 16.1, *в* і *г*)

$$I_C = \frac{MR^2}{2} . \qquad (16.10)$$

Момент інерції *прямокутної пластини* маси M із сторонами a і b (ось x спрямована вздовж сторони a)

$$I_x = \frac{Mb^2}{3} , \ I_y = \frac{Ma^2}{3} . \qquad (16.11)$$

Момент інерції *суцільної кулі* маси M и радіуса R відносно осі, яка проходить через його центр

$$I_z = \frac{2MR^2}{5} . \qquad (16.12)$$

Знаючи момент інерції тіла відносно однієї осі, завжди можна знайти момент інерції даного тіла відносно будь-якої іншої паралельної осі по **теоремі Гюйгенса**: момент інерції тіла відносно даної осі дорівнює моменту інерції відносно паралельної осі, що проходить через центр мас тіла, складеному з добутком маси усього тіла на квадрат відстані між осями (рис. 16.2)

$$I_{Oz} = I_{Cz} + Md^2. \qquad (16.13)$$

З теореми видно, що найменший момент інерції завжди відносно осі, що проходить через центр мас тіла.

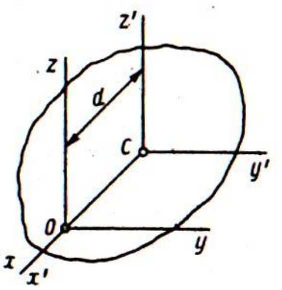


Рис. 16.2. До теореми Гюйгенса.

3. *Полярний момент інерції* – скалярна величина, яка дорівнює сумі добутків маси усіх матеріальних точок на квадрат відстані від даної точки до полюса

$$I_O = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k (x^2 + y^2 + z^2) . \qquad (16.14)$$

Даний момент інерції є сумою додатних величин, тому він не може бути від'ємним або дорівнювати нулю.

4. *Відцентрові моменти інерції* – скалярні величини, які визначаються за формулами

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k\,, \quad I_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k\,, \quad I_{zx} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k\,. \qquad (16.15)$$

Як видно з (16.13), відцентрові моменти інерції можуть бути як додатними, так і від’ємними, або дорівнювати нулю.

Головна вісь інерції відносно точки О – вісь *Oz*, для якої відцентрові моменти інерції I_{xz} і I_{yz} дорівнюють нулю. Головні осі мають наступні властивості:

а) якщо тіло має вісь симетрії, то вона є головною віссю інерції тіла для будь-якої своєї точки;

б) якщо тіло має площину симетрії, то будь-яка вісь, перпендикулярна даній площині, буде головною віссю інерції для точки *О*, в якій вісь перетинає площину.

Головні моменти інерції тіла – моменти інерції тіла відносно головних осей інерції.

Головні центральні осі інерції – головні осі інерції, побудовані для центра мас даного тіла. Якщо тіло має вісь симетрії, то ця вісь буде однією з головних центральних осей, оскільки проходить через центр мас.

Поняття про головні осі інерції відіграє дуже важливу роль в динаміці твердого тіла. Якщо спрямувати по цим осям координатні вісі, то відцентрові моменти обернуться в нуль, суттєво спростивши розрахунки.

16.3. Теорема про рух центра мас механічної системи

У ряді випадків для визначення характеру руху системи необхідно знати закон руху її центра мас. Основне рівняння динаміки для системи матеріальних точок має вигляд

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k^i.$$

Із (16.1) випливає, що другий доданок буде дорівнювати нулю. Виразивши прискорення точок системи через прискорення центра мас

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{a}_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d^2 \boldsymbol{r}_C}{dt^2} = M\boldsymbol{a}_C \Rightarrow M\boldsymbol{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k^e \qquad (16.16)$$

Остаточно отримуємо **теорему про рух центра мас**: добуток маси системи на прискорення її центра мас дорівнює геометричній сумі усіх зовнішніх сил, що діють на систему.

Записавши (16.16) в проекціях на координатні осі

$$M\ddot{x}_c = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e,\; M\ddot{y}_c = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e,\; M\ddot{z}_c = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^e, \qquad (16.17)$$

отримуємо диференціальні рівняння руху центра мас в проекціях на координатні осі.

Висновок: тіло, що рухається поступально, завжди можна розглядати як матеріальну точку з масою, яка дорівнює масі тіла. В інших випадках це можливо лише тоді, коли по умовам завдання можна не брати до уваги обертальну частину руху тіла. Крім того, дана теорема дозволяє при рішенні завдань виключити з розгляду усі невідомі внутрішні сили.

Наслідки з теореми про рух центра мас:

1. Якщо сума усіх зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то центр мас системи знаходиться у спокої або рухається рівномірно і прямолінійно

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k^e = 0 \Rightarrow \boldsymbol{a}_c = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon}_c = const. \qquad (16.18)$$

2. Якщо сума проекцій на яку-небудь вісь усіх зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то проекція швидкості центра мас системи на цю вісь є величина постійна

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e = 0 \Rightarrow a_{cx} = 0 \Rightarrow \upsilon_{cx} = const. \qquad (16.19)$$

З початкових умов визначається, буде центр мас знаходитись в стані спокою чи рухатись рівномірно і прямолінійно. Ці слідства мають назву **закону збереження руху центра мас системи**.

Питання для самоконтролю

1. Що називається центром мас і за якими формулами він обчислюється?
2. Які існують методи визначення центра мас?
3. В яких випадках застосовують експериментальні методи визначення центра мас?
4. Що називається моментом інерції тіла і який фізичний зміст цього визначення?
5. В яких випадках застосовують теорему Гюйгенса, як вона формулюється?

Завдання № 16. «Динаміка механічної системи»

Рекомендації до розв’язання задач

1. Визначити тіла, які входять до системи, рух якої розглядається.
2. Нанести на рисунок усі зовнішні сили системи і обрати систему координат.
3. Записати теорему про рух центра мас системи у вигляді (16.17).
4. Знайти суму проекцій зовнішніх сил на координатні осі.
5. З’ясувати початкові умови руху центра мас.
6. Розв’язати складені диференціальні рівняння, визначивши зовнішні сили при прямій задачі або шуканий закон руху центра мас при оберненій задачі.
7. Якщо в задачі центр мас рухається з постійною швидкістю або перебуває у стані спокою, то розв’язання знаходиться без складання диференціальних рівнянь за допомогою слідств з теореми про рух центра мас.

Приклад розв’язання задачі

Задача 1. При гальмуванні ведуче колесо автомобіля котиться з ковзанням по горизонтальному шосе за інерцією. Знайти закон руху центра мас C колеса, якщо коефіцієнт тертя f = 0,35. В початковий момент колесо рухалось зі швидкістю υ_0 = 20 м/с.

Розв'язання

В даній задачі розглядається система матеріальних точок, яка утворює колесо. Дана система знаходиться під дією крутного моменту *m*, сили тяжіння $\boldsymbol{P}$, реакції шосе $\boldsymbol{N}$ і сили тертя ковзання $\boldsymbol{F}_{тр}$. Початок системи координат оберемо в точці положення центра мас колеса в початковий момент часу (рис. 16.3). Тоді початкові умови руху для колеса мають вигляд

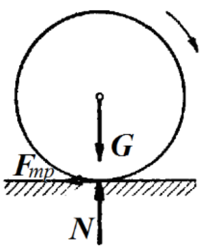


Рис. 16.3. До задачі 1.

$$x(0) = 0 \text{ м}, \quad \upsilon(0) = 20 \text{ м/с}.$$

Вертикальні сили являють собою зрівноважену систему, яка не впливає на характер руху. Рух тіла відбувається по осі *x*, тому записуємо теорему про рух центра мас в проекції на цю вісь

$$M\,\ddot{x}_C = fMg \Rightarrow \frac{d\upsilon_C}{dt} = -fg = -0{,}35 \cdot 9{,}81 = -3{,}43.$$

$$\int_{20}^{\upsilon_C} d\upsilon_C = -3{,}43\int_0^t dt \Rightarrow \upsilon_C - 20 = -3{,}43t.$$

Для знаходження закону руху центра колеса необхідно ще раз зінтегрувати отримане рівняння

$$\int_0^{x_C} dx_C = \int_0^t (20 - 3{,}43t)dt \Rightarrow x_C = 20t - \frac{3{,}43t^2}{2} = 20t - 1{,}715t^2.$$

Задачу розв'язано.

Завдання №16 до РГР

16.1. Вага тіла *A*, яке знаходиться на гладкій горизонтальній площині, P_A = 60 Н, а тіла *B*, яке може рухатись по вертикалі – P_B = 25 Н. Визначити прискорення центра мас системи, якщо тіло *A* рухається з прискоренням a_A = 1,2 м/с^2 і має кут нахилу до горизонту α = 30°.

Відповідь: a_C = 0,87 м/с^2.

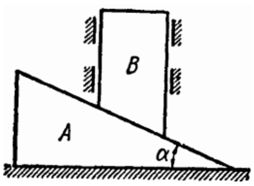


Рис. до задачі 16.1.

16.2. Визначити момент інерції суцільного циліндра маси *M* = 3 кг і радіуса *R* = 20 см відносно осі *z*, яка проходить через його твірну.

Відповідь: I_z = 0,18 кг·м^2.

16.3. Визначити переміщення *s* плавучого крану, який піднімає вантаж вагою P_1 = 20 кН при повороті стріли крана на 30° до вертикального положення. Вага крану P_2 = 200 кН, довжина стріли *OA* = 8 м. Опором води руху крана знехтувати, початок системи координат вибрати, як показано на рисунку.

Відповідь: *s* = – 0,36 м.

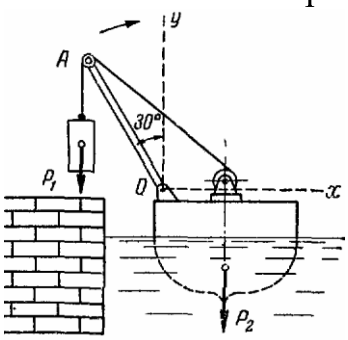
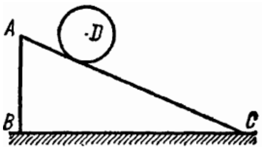


Рис. до задачі 16.3.

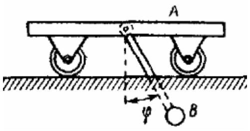
16.4. В човні маси M = 120 кг, який знаходився на спокійній воді, від лавки до корми перейшли два чоловіки масами m_1 = 70 кг і m_2 = 80 кг. Нехтуючи опором води, визначити переміщення човна, якщо відстані, на які перейшли чоловіки, дорівнюють l_1 = 3 м і l_2 = 2 м відповідно.
Відповідь: s = 1,37 м.
16.5. Циліндр D вагою G = 8 Н і радіусом r = 6,5 см котячись без ковзання по похилій площині ABC ваги P = 16 Н здійснив два оберти навколо власної осі. Визначити, в який бік і на яку відстань зміститься за цей час площина, якщо AB = 50 см, BC = 120 см. Тертям при русі площини і циліндру знехтувати.



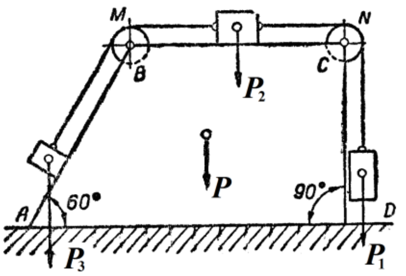
Відповідь: вліво на Δx = 25 см.
Рис. до задачі 16.5.
16.6. До візка A масою M = 70 кг, підвішений маятник B маси m = 8 кг, який коливається згідно закону

$$\varphi = \frac{\pi}{12}\sin 6t \text{ (рад)}.$$

Визначити рівняння руху центра мас візка, якщо довжина маятника l = 0,8 м. Тертям і опором повітря знехтувати, візок у початковий момент часу знаходився в стані спокою.



Відповідь: $x = 0{,}144t - 0{,}09\sin\left(\frac{\pi}{12}\sin 6t\right)$.
Рис. до задачі 16.6.
16.7. Три вантажі вагою P_1 = 20 кг, P_2 = 15 кг і P_3 = 10 кг з'єднані невагомою нерозтяжною ниткою, перекинутою через нерухомі блоки M і N. Вантажі знаходяться на чотирикутній піраміді $ABCD$ вагою P = 100 кг. Нехтуючи тертям між підлогою і пірамідою, визначити переміщення x останньої відносно підлоги при опусканні вантажу P_1.



Відповідь: x = 14 см.
Рис. до задачі 16.7.
16.8. Однорідний стержень OA масою m = 10 кг обертається рівномірно з кутовою швидкістю ω = 10 рад/с. Визначити модуль головного вектора зовнішніх сил, які діють на стержень, якщо його довжина OA = 1 м. *Відповідь*: R^e = 500 Н.

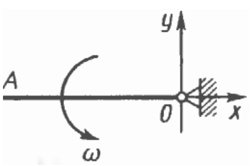
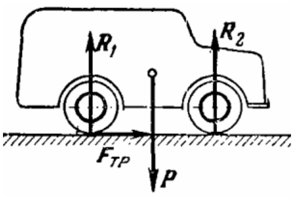


Рис. до задачі 16.10.

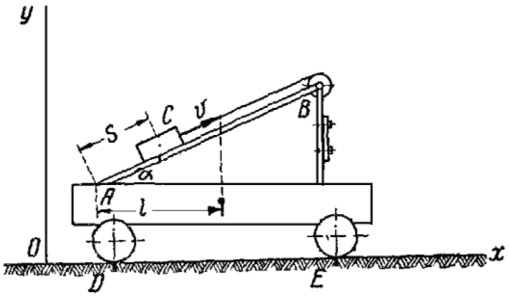
16.9. В човні вагою Q = 900 Н, який стояв на спокійній воді, від лавки до корми перейшли два чоловіки вагою P_1 = 800 Н і P_2 = 600 Н. Нехтуючи опором води, визначити, на яку відстань змістився човен, якщо відстані, на які перейшли чоловіки, дорівнюють l_1 = 1 м і l_2 = 1,5 м відповідно.
Відповідь: Δx = 0,71 м.



16.10. Визначити силу, що приводить до руху центр мас автомобілю, який рухається по горизонтальній шорсткій ділянці дороги.

Рис. до задачі 16.10.

16.11. На горизонтальній платформі маси M = 400 кг знаходиться похила площина AB з кутом нахилу до горизонту α = 45°. По похилій площині підіймається вантаж вагою m = 80 кг таким чином, що відстань AC змінюється по закону



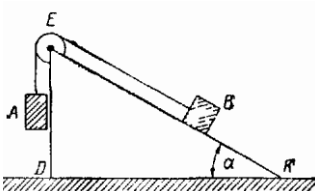
$$s = 0{,}5t^2.$$

Визначити швидкість руху платформи, якщо в початковий момент часу вся система знаходилась в стані спокою.

Відповідь: υ = - 0,12t м/с.

Рис. до задачі 16.11.

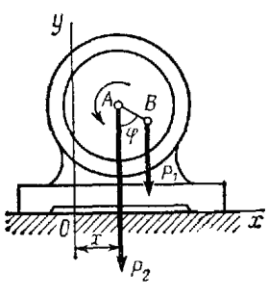
16.12. Вантаж A вагою P_A = 30 Н і вантаж B вагою P_B = 20 Н з'єднані між собою нерозтяжною ниткою, перекинутою через блок E. Вантаж B ковзає по бічній поверхні клину ваги P = 100 Н, який основою DK знаходиться на гладкій горизонтальній площині. Знайти переміщення x клину по горизонтальній площині при опусканні вантажу A на висоту h = 30 см, якщо кут α = 30°. В початковий момент часу система знаходилась в стані спокою.



Відповідь: x = 3,46 см.

Рис. до задачі 16.12.

16.13. Центр мас валу двигуна зміщений на відстань AB = 20 см. Маса валу m_1 = 5 кг, маси інших деталей двигуна m_2 = 45 кг. Визначити закон руху двигуна, який вільно встановлений на гладкій горизонтальній площині, якщо вал обертається з кутовою швидкістю ω = 40 рад/с.



Відповідь: $x = -2\sin 40t$ см.

Рис. до задачі 16.13.

16.14. На гладкій горизонтальній площині лежить диск маси M = 50 кг і радіуса R = 3 м. По краю диска рухається хлопчик маси m = 25 кг. Визначити траєкторію руху центра мас диску.

Відповідь: $x^2 + y^2 = 1$ м.

16.15. Тіло 1 маси m_1 = 5 кг має паз O_1A = 0,8 м під кутом α = 45° до горизонту, по якому рухається точка 2 маси m_1 = 0,5 кг. Визначити швидкість тіла 1 в момент, коли точка 2 дійде до кінця пазу, якщо в початковий момент часу вона знаходилась у верхньому положенні у стані спокою. Тертям між тілом 1 і горизонтальною площиною знехтувати. *Відповідь*: υ = 0,22 м/с.

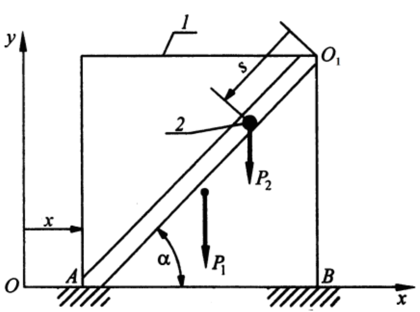


Рис. до задачі 16.15.

16.16. На гладкій площині знаходиться плита 1 маси m_1 = 4 кг, на якій закріплений механізм, що складається з трьох стержнів 2, 3 і 4. Стержні 2 і 3 мають однакову довжину $l_2 = l_3$ = 30 см і масу $m_2 = m_3$ = 0,2 кг; довжина стержня 4 l_4 = 40 см, а його маса m_4 = 0,4 кг. Стержні 2 і 3 відхилені від вертикалі на кут α = 15°. Визначити переміщення плити 1 в момент, коли стержні 2 і 3 займуть вертикальне положення, якщо в початковий момент часу система знаходилась в стані спокою.

Відповідь: υ = 0,22 м/с.

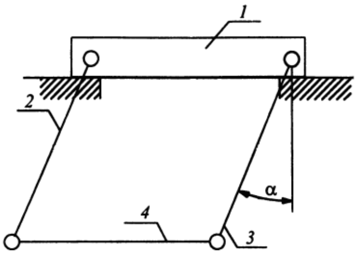


Рис. до задачі 16.16.

16.17. На однорідній призмі *A*, яка лежить на гладкій горизонтальній площині, знаходиться однорідна призма *B* втричі меншої ваги, причому поперечні перерізи призм є прямокутними трикутниками. Визначити відстань *x*, на яку переміститься призма А в момент, коли верхня призма дійде до горизонтальної площини. Висота призми *A a* = 80 см, призми *B b* = 20 см.

Відповідь: *x* = 15 см.

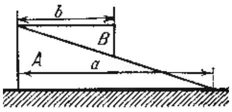


Рис. до задачі 16.17.

16.18. Колесо ваги *P* котиться з ковзанням по горизонтальній прямій під дією горизонтальної сили *F* = *P*, прикладеної до центра колеса. Визначити закон руху центра мас, якщо коефіцієнт тертя між колесом і горизонтальною поверхнею дорівнює *f* = 0,2.

Відповідь: $x = 3{,}92t^2$ м.

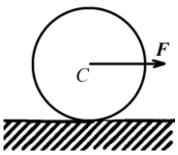


Рис. до задачі 16.18.

16.19. Тіло 1 маси m_1 = 5 кг має паз O_1A = 0,8 м під кутом α = 45° до горизонту, по якому рухається точка 2 маси m_2 = 0,5 кг (рис. до задачі 16.15). Визначити силу, з якою тіло 1 діє на горизонтальну площину в момент, коли точка 2 дійде до кінця пазу, якщо в початковий момент часу вона знаходилась у верхньому положенні у стані спокою. Тертям між тілом 1 і горизонтальною площиною знехтувати. *Відповідь*: *N* = 51,4 Н.

16.20. Центр мас валу двигуна зміщений на відстань *AB* = 20 см. Маса валу m_1 = 5 кг, маси інших деталей двигуна m_2 = 45 кг. Визначити максимальну силу, яка діє на болт *D*, якщо вал обертається з кутовою швидкістю ω = 40 рад/с.

Відповідь: F_{max} = 1 600 Н.

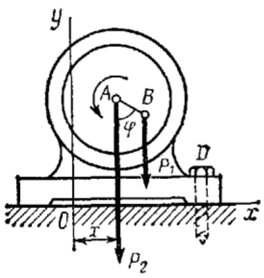
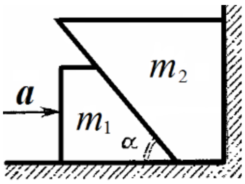


Рис. до задачі 16.20.

16.21. Центр мас валу двигуна зміщений на відстань *AB* = 20 см. Маса валу m_1 = 5 кг, маси інших деталей двигуна m_2 = 45 кг (рис. до задачі 16.20). Визначити мінімальну силу затяжки болта *D*, за якої буде неможливим удар двигуна по болту, якщо вал обертається з кутовою швидкістю ω = 40 рад/с. Коефіцієнт тертя між двигуном і площиною *f* = 0,5. *Відповідь*: $F_{зат}$ = 800 Н.

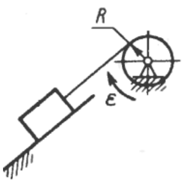
16.22. Механічна система складається з двох призм масами m_1 = 3 кг і m_2 = 4 кг, які спираються на гладкі перпендикулярні площини. Знайти прискорення центра мас системи, якщо нижня призма рухається з прискоренням a_1 = 0,21 м/с^2, а кут α = 45°.



Відповідь: a = 0,15 м/с^2.

Рис. до задачі 16.22.

16.23. Тіло масою m = 20 кг підіймається по похилій площині за допомогою троса, що намотується на барабан радіуса R = 0,2 м. Визначити модуль головного вектора зовнішніх сил, що діють на дане тіло, якщо кутове прискорення барабану ε = 5 рад/с^2.

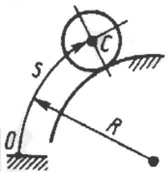


Відповідь: F = 20 Н.

Рис. до задачі 16.23.

16.24. Центр мас колеса С масою m = 15 кг рухається по колу радіуса R = 1,3 м згідно рівняння

$$s = 4t, \text{ м.}$$



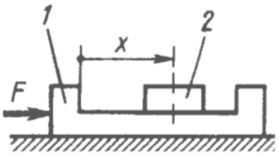
Визначити модуль головного вектора зовнішніх сил, прикладених до даного колеса.

Відповідь: F = 185 Н.

Рис. до задачі 16.24.

16.25. На тіло 1 маси m_1 = 4 кг діє постійна сила F = 10 Н. Визначити прискорення даного тіла в момент часу t = 0,5 с, якщо відносно нього під дією внутрішніх сил системи рухається тіло 2 маси m_2 = 1 кг згідно рівняння

$$x = \cos \pi t \,.$$



Обидва тіла рухаються поступально.

Відповідь: a = 2 м/с^2.

Рис. до задачі 16.25.

16.26. Однорідний тонкий прямий стержень вагою P = 40 Н і довжиною l = 0,4 м рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω = 5 рад/с в горизонтальній площині навколо свого нерухомого кінця A. Знайти зусилля F, яке виникає через обертання стержня в його поперечному перерізі, який знаходиться на відстані x = 0,2 м від осі обертання. *Відповідь*: F = 15,3 Н.

Глава 17. «Кількість руху матеріальної точки і системи»

<u>17.1. Кількість руху точки та імпульс сили</u>

Кількість руху матеріальної точки – векторна величина, яка дорівнює добутку маси точки на швидкість її руху

$$\boldsymbol{q} = m\boldsymbol{v}. \qquad (17.1)$$

Кількість руху є однією з двох мір механічного руху (інша – кінетична енергія). Вектор $\boldsymbol{q}$ спрямований за вектором швидкості, тобто по дотичній до траєкторії. Розмірність кількості руху – кг·м/с або Н·с.

Наряду з кількістю руху в механіці вводиться поняття імпульсу сили. *Елементарний імпульс сили* – векторна величина, яка дорівнює добутку сили на час її дії

$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}dt. \tag{17.2}$$

Тоді повний імпульс постійної сили дорівнює добутку модуля сили на час її дії

$$\boldsymbol{S} = \int_0^S d\boldsymbol{S} = \int_0^t \boldsymbol{F}dt = \boldsymbol{F}t. \tag{17.3}$$

Одиниця виміру імпульсу сили та ж, що і у кількості руху. Проекції імпульсу сили на координатні осі визначаються за формулами

$$S_x = \int_0^t F_x dt = F_x t,\ S_y = \int_0^t F_y dt = F_y t,\ S_z = \int_0^t F_z dt = F_z t. \tag{17.4}$$

Знаючи проекції вектора імпульсу сили на осі декартової системи координат, завжди можна визначити його модуль і напрямок

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \tag{17.5}$$

$$\cos(\boldsymbol{S}\wedge\boldsymbol{i}) = \frac{S_x}{S},\ \cos(\boldsymbol{S}\wedge\boldsymbol{j}) = \frac{S_y}{S},\ \cos(\boldsymbol{S}\wedge\boldsymbol{k}) = \frac{S_z}{S}. \tag{17.6}$$

17.2. Теореми про зміну кількості руху матеріальної точки

В основному рівнянні динаміки представимо прискорення як похідну від швидкості і розділимо змінні

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} \Rightarrow md\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{F}dt \Rightarrow d(m\boldsymbol{\upsilon}) = \boldsymbol{F}dt. \tag{17.7}$$

Вираз (17.7) є ***теоремою про зміну кількості руху матеріальної точки в диференціальній формі***: диференціал від кількості руху матеріальної точки дорівнює елементарному імпульсу сили, що діє на дану точку.

Інтегруємо (17.7)

$$\int_{m\boldsymbol{\upsilon}_0}^{m\boldsymbol{\upsilon}} d(m\boldsymbol{\upsilon}) = \int_0^t \boldsymbol{F}dt \Rightarrow m(\boldsymbol{\upsilon} - \boldsymbol{\upsilon}_0) = \boldsymbol{F}t = \boldsymbol{S}. \tag{17.8}$$

Вираз (17.8) є ***теоремою про зміну кількості руху матеріальної точки в інтегральній формі***: зміна кількості руху матеріальної точки за час t дорівнює повному імпульсу сили за той же проміжок часу.

В проекції на координатні осі теорема (17.8) має вигляд

$$m(\upsilon_x - \upsilon_{0x}) = \mathrm{S}_x,\ m(\upsilon_y - \upsilon_{0y}) = \mathrm{S}_y,\ m(\upsilon_z - \upsilon_{0z}) = S_z. \tag{17.9}$$

17.3. Теореми про зміну кількості руху механічної системи

Кількість руху механічної системи – векторна величина, яка дорівнює геометричній сумі кількостей руху матеріальних точок, що становлять систему

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{q}_k = \sum_{k=1}^{n} m_k\boldsymbol{\upsilon_k} = M\boldsymbol{\upsilon}_c\,, \tag{17.10}$$

де M – повна маса системи, $\boldsymbol{\upsilon}_C$ - швидкість руху центру мас даної системи.

Проекції кількості руху системи на координатні осі

$$Q_x = Mv_{cx}, \quad Q_y = Mv_{cy}, \quad Q_z = Mv_{cz}. \tag{17.11}$$

Знаючи проекції вектора кількості руху механічної системи на осі декартової системи координат, завжди можна визначити його модуль і напрямок

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2} \qquad \cos(\boldsymbol{Q}\wedge\boldsymbol{i}) = \frac{Q_x}{Q},\ \cos(\boldsymbol{Q}\wedge\boldsymbol{j}) = \frac{Q_y}{Q},\ \cos(\boldsymbol{Q}\wedge\boldsymbol{k}) = \frac{Q_z}{Q}.$$

Запишемо загальне рівняння динаміки для механічної системи

$$\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{a}_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\boldsymbol{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{F}_k^e + \boldsymbol{F}_k^i).$$

Однак відомо, що головний вектор внутрішніх сил дорівнює нулю, тому

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{d(m_k \boldsymbol{v}_k)}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_k^e = \boldsymbol{R}^e \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R}^e. \tag{17.12}$$

Вираз (17.12) є **теоремою про зміну кількості руху механічної системи в диференціальній формі**: похідна за часом від кількості руху системи дорівнює головному вектору усіх зовнішніх сил, що діють на дану систему. У (17.12) розділяємо змінні і інтегруємо отримане диференціальне рівняння

$$d\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}^e dt = \sum_{k=1}^{n} d\boldsymbol{S}_k^e \Rightarrow \int_{\boldsymbol{Q}_0}^{\boldsymbol{Q}} d\boldsymbol{Q} = \sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\boldsymbol{S}_k^e} d\boldsymbol{S}_k^e \Rightarrow \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}_0 = \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{S}_k^e = \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{e}}. \tag{17.13}$$

Вираз (17.13) є **теоремою про зміну кількості руху механічної системи в інтегральній формі**: зміна кількості руху системи матеріальних точок за певний проміжок часу t дорівнює повному імпульсу головного вектора усіх зовнішніх сил, діючих на точки системи за той самий час.

В проекціях на координатні осі остання теорема має вигляд

$$Q_x - Q_{0x} = S_x^e,\ \ Q_y - Q_{0y} = S_y^e,\ \ Q_z - Q_{0z} = S_z^e. \tag{17.14}$$

Наслідки теореми про зміну кількості руху механічної системи:

1. Одними внутрішніми силами неможливо змінити кількість руху системи.
2. Якщо головний вектор зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то кількість руху системи залишається незмінною:

$$\boldsymbol{R}^e = 0 \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{Q} = const. \tag{17.15}$$

3. Якщо проекція головного вектора зовнішніх сил на яку-небудь нерухому вісь інерціальної системи координат дорівнює нулю, то проекція кількість руху системи на цю вісь залишається незмінною:

$$\mathrm{R}_x^e = 0 \Rightarrow \frac{dQ_x}{dt} = 0 \Rightarrow Q_x = const. \tag{17.16}$$

Розглянуті наслідки називаються ***законами збереження кількості руху механічної системи***.

17.4. Рух тіла змінної маси. Рівняння Мещерського.

В деяких випадках склад матеріальних точок, які утворюють механічну систему або тіло, може змінюватися, тому формули (17.10) – (17.16) не можуть описувати рух такої системи, оскільки вони були отримані для систем постійної маси. При розв'язанні подібних задач вводиться поняття тіла змінної маси.

Тіло змінної маси – будь-яке тіло, маса якого змінюється з часом. Якщо розмірами тіла можна знехтувати в порівнянні з пройденою відстанню, то в цьому випадку говорять про точку змінної маси

$$m = f(t). \tag{17.17}$$

Якщо вважати, що маса точки або тіла змінюється безперервно при від'єднанні або приєднанні часток малої маси dm, то можна вважати функцію (17.17) безперервною і диференційованою.

Нехай в деякий момент t_0 точка маси m рухається з абсолютною швидкістю υ, а точка маси dm – з абсолютною швидкістю u. Тоді кількість руху системи в початковий момент

$$\boldsymbol{Q}_0 = m\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{u}dm.$$

В момент часу t утворюється спільна точка маси $m + dm$, абсолютна швидкість якої $\boldsymbol{\upsilon} + d\boldsymbol{\upsilon}$. У випадку приєднання точки $dm > 0$, а при її від'єднанні $dm < 0$. Кількість руху спільної точки

$$\boldsymbol{Q} = (m + dm)(\boldsymbol{\upsilon} + d\boldsymbol{\upsilon}).$$

Зміна кількості руху за час dt

$$d\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}_0 = (m + dm)(\boldsymbol{\upsilon} + d\boldsymbol{\upsilon}) - (m\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{u}dm) = md\boldsymbol{\upsilon} + dm(\boldsymbol{\upsilon} - \boldsymbol{u}) + dm\cdot d\boldsymbol{\upsilon}.$$

Нехтуємо величиною більш високого порядку $dm\cdot d\boldsymbol{\upsilon} \to 0$, тоді

$$d\boldsymbol{Q} = md\boldsymbol{\upsilon} + dm(\boldsymbol{\upsilon} - \boldsymbol{u}). \tag{17.18}$$

Запишемо теорему про зміну кількості руху механічної системи в диференціальній формі і підставимо в неї (17.18)

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R}^e \;\Rightarrow m\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} + (\boldsymbol{\upsilon} - \boldsymbol{u})\frac{dm}{dt} = \boldsymbol{R}^e,$$

Далі введемо поняття відносної швидкості $u_{від}$, тоді теорема набуває вигляду

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{u}_{від} \;\Rightarrow m\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \boldsymbol{R}^e + \boldsymbol{u}_{від}\frac{dm}{dt}.$$

Введемо поняття реактивної сили $\boldsymbol{R}$, яка дорівнює добутку відносної швидкості приєднаної маси на секундну зміну маси основної точки. Тепер теорема остаточно матиме вигляд

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{u}_{від}\frac{dm}{dt} \;\Rightarrow\; m\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \boldsymbol{R}^e + \boldsymbol{R}. \tag{17.19}$$

Вираз (17.19) є **рівнянням Мещерського**: рівняння руху точки змінної маси має вигляд основного рівняння динаміки точки постійної маси, яка знаходиться під дією зовнішніх сил і реактивної сили.

17.5. Рух суцільного середовища. Теорема Ейлера.

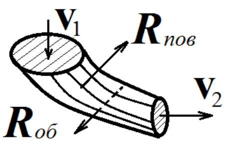
Теорема про зміну кількості руху механічної системи може бути використана при розгляді сталого руху суцільного середовища (рідини, газу).

Сталий рух – рух, при якому в будь-якому об'ємі швидкість, тиск і густина часток рідини (газу) не змінюються з часом. При вивченні сталого руху суцільного середовища замість маси використовують поняття секундної маси.

Секундна маса m_c – кількість маси рідини (газу), яка проходить через деякий переріз за одиницю часу. Одиниця виміру секундної маси – *кг/с*.

При сталому русі середовища через кожен переріз за одиницю часу проходить однакова кількість рідини (рис. 17.1), тобто секундна маса залишається сталою

$$m_c = \rho_1 s_1 \upsilon_1 = \rho_2 s_2 \upsilon_2, \tag{17.20}$$



де ρ_1 і ρ_2 – густина рідини в початковому і кінцевому перерізах, s_1 і s_2 – площі перерізів, υ_1 і υ_2 – швидкості рідини в початковому і кінцевому перерізах.

Рис. 17.1. Теорема Ейлера.

Зміна кількості руху маси середовища за час dt

$$d\boldsymbol{Q} = m_c dt \boldsymbol{\upsilon}_2 - m_c dt \boldsymbol{\upsilon}_1 \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = m_c \boldsymbol{\upsilon}_2 - m_c \boldsymbol{\upsilon}_1 = m_c(\boldsymbol{\upsilon}_2 - \boldsymbol{\upsilon}_1).$$

З іншого боку, згідно теореми про зміну кількості руху механічної системи, зміна кількості руху дорівнює головному вектору зовнішніх сил

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k^e = \boldsymbol{R}^e \Rightarrow m_c(\boldsymbol{\upsilon}_2 - \boldsymbol{\upsilon}_1) = \boldsymbol{R}^e. \tag{17.21}$$

На суцільне середовище діють дві групи сил: об'ємні і поверхневі.

Об'ємні (масові) – сили, що діють на всі частинки всередині виділеного об'єму незалежно від їх положення (сили тяжіння, інерції).

Поверхневі – сили, що діють лише на частинки на зовнішній поверхні об'єму (сили тертя середовища і стінок). Розписавши зовнішні сили, остаточно отримуємо

$$m_c(\boldsymbol{\upsilon}_2 - \boldsymbol{\upsilon}_1) = \boldsymbol{R}_{об} + \boldsymbol{R}_{пов} \Rightarrow m_c \boldsymbol{\upsilon}_1 - m_c \boldsymbol{\upsilon}_2 + \boldsymbol{R}_{об} + \boldsymbol{R}_{пов} = 0 \tag{17.22}$$

теорему Ейлера: сума головних векторів об'ємних, поверхневих сил і напрямлених всередину певного об'єму секундних кількостей рухів рідини, що протікає через два поперечні перерізи труби, дорівнює нулю.

В проекції на координатні осі

$$m_c \upsilon_{1x} - m_c \upsilon_{2x} + R_{об\,x} + R_{пов\,x} = 0,\ m_c \upsilon_{1y} - m_c \upsilon_{2y} + R_{об\,y} + R_{пов\,y} = 0,$$
$$m_c \upsilon_{1z} - m_c \upsilon_{2z} + R_{об\,z} + R_{пов\,z} = 0. \tag{17.23}$$

Питання для самоконтролю

1. Що називається кількістю руху матеріальної точки?
2. Що називається елементарним імпульсом сили?
3. В якому випадку застосовується теорема про зміну кількості руху точки або системи в диференціальній формі?
4. В яких випадках застосовують теорему Ейлера?

Завдання № 17. «Кількість руху матеріальної точки і системи»

<u>Рекомендації до розв'язання задач</u>

А. Кількість руху матеріальної точки.

1. Зобразити матеріальну точку в даний момент, показати на рисунку всі сили, що діють на неї.

2. Якщо точка невільна, звільнити її від в’язей, замінивши їх дію реакціями.
3. Обрати систему координат і скласти в ній рівняння теореми про зміну кількості руху матеріальної точки.
4. Визначити із складених рівнянь шукані величини.

Б. Кількість руху механічної системи.
1. Визначити систему в даний момент часу і зобразити на рисунку всі активні сили.
2. Обрати нерухому систему координат, скласти початкові умови задачі.
3. Скласти рівняння теореми про зміну кількості руху в проекціях на осі координат.
4. Зінтегрувати отримані диференціальні рівняння.
5. Визначити сталі інтегрування з початкових умов.
6. Підставивши сталі інтегрування в отримані рівняння, визначити необхідні величини.

В. Рух суцільного середовища. Теорема Ейлера .
1. Показати на рисунку об’ємні та поверхневі сили.
2. Показати на рисунку вектори секундних кількостей руху рідини або газу, що проходять через два перерізи, які обмежують досліджуваний об’єм речовини. При цьому вектори секундних кількостей руху слід напрямляти всередину об’єму.
3. Обрати систему координат і записати теорему Ейлера в проекціях на координатні осі.
4. Визначити із складених рівнянь шукані величини.

Приклад розв’язання задачі (кількість руху матеріальної точки)

Задача 1. Вантаж спускається вниз по шорсткій похилій площині з кутом нахилу до горизонту α = 30°, причому коефіцієнт тертя між тілами f = 0,25. За який проміжок часу швидкість вантажу збільшиться вдвічі, якщо в початковий момент вантаж мав швидкість υ_0 = 0,5 м/с.

Розв’язання

Даний вантаж буде знаходитись під дією сили тяжіння $\boldsymbol{P}$, спрямованої вертикально вниз, нормальної реакції $\boldsymbol{N}$, яка перпендикулярна до похилої площини, і сили тертя ковзання $\boldsymbol{F}_{ков}$, спрямованої вздовж лінії контакту тіл у бік, протилежний напрямку руху (рис. 17.2).

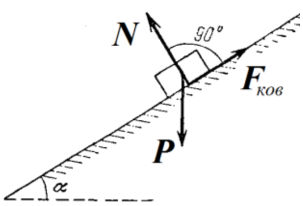


Рис. 17.2 . До задачі 1.

Направимо ось x вздовж похилої площини вниз і запишемо теорему про зміну кількості руху матеріальної точки в інтегральній формі в проекції на дану вісь:

$$m\upsilon_{1x} - m\upsilon_{0x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} t.$$

Запишемо проекції усіх активних сил на вісь x

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = P\sin\alpha - F_{ков} = mg\sin\alpha - fN = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

З умов задачі відомо, що кінцева швидкість вдвічі більша за початкову

$$\upsilon_{1x} = 2\upsilon_{0x} \Rightarrow m\upsilon_{1x} - m\upsilon_{0x} = 2m\upsilon_{0x} - m\upsilon_{0x} = m\upsilon_{0x}.$$

Для знаходження часу підставимо два останні вирази в теорему про зміну кількості руху матеріальної точки в інтегральній формі

$$m\upsilon_{0x} = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)t \Rightarrow t = \frac{\upsilon_{0x}}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)} =$$

$$= \frac{2}{9{,}81(\sin 30° - 0{,}25\cos 30°)} = 0{,}72(c).$$

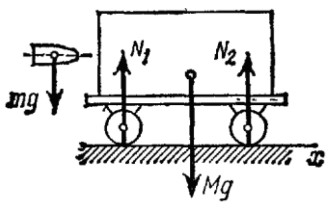
Задачу розв’язано.

<u>Приклад розв’язання задачі (кількість руху механічної системи)</u>

Задача 2. Снаряд маси m = 15 кг, який летів горизонтально зі швидкістю υ = 400 м/с, влучив у ящик з піском на платформі. З якою швидкістю u почне рухатись платформа після зіткнення, якщо її вага разом з ящиком M = 450 кг, а платформа до удару була нерухомою?

<u>Розв’язання</u>

Розглядаємо платформу з ящиком і снаряд як одну механічну систему. Це дозволяє не розглядати сили при ударі, оскільки вони є внутрішніми. Оскільки рух відбувається тільки вздовж осі x, саме в проекціях на неї і запишемо теорему про зміну кількості руху механічної системи



$$Q_x - Q_{0x} = \sum_{k=1}^{n} S_{kx}^{e} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} t.$$

Рис. 17.3. До задачі 2.

Як видно з рис. 17.3, сума прикладених до системи горизонтальних сил дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0 \Rightarrow Q_x - Q_{0x} = 0 \Rightarrow Q_x = Q_{0x},$$

тому кількість руху системи до зіткнення дорівнює кількості руху системи після зіткнення.

До зіткнення рухався тільки снаряд, тому кількість руху системи

$$Q_{0x} = m\upsilon = 15 \cdot 400 = 6000 \text{ (Н·с)}.$$

Після зіткнення система рухається як одне ціле, а її кількість руху

$$Q_x = (M + m)u = (15 + 450)u = 465u.$$

Підставивши в закон збереження кількості руху, визначаємо шукану швидкість після зіткнення

$$465u = 6000 \Rightarrow u = \frac{6000}{465} = 12{,}9 \text{ (м/с)}.$$

Задачу розв’язано.

Приклад розв'язання задачі (теорема Ейлера)

Задача 3. Визначити величину горизонтальної складової $\boldsymbol{N}$ сили динамічного тиску води на коліно труби (рис. 17.4) діаметром d = 0,5 м, якщо швидкість руху води по трубі постійна і дорівнює υ = 1,2 м/с. Густину води прийняти рівною ρ = 1 000 кг/м^3.

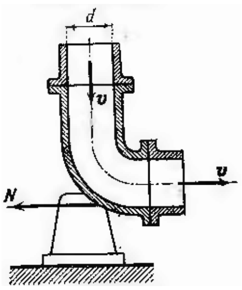


Рис. 17.4. До задачі 3.

Розв'язання

Оскільки в задачі визначається горизонтальна складова динамічної реакції, то запишемо теорему Ейлера у формі (17.21) в проекції на вісь x

$$m_c(\upsilon_{2x} - \upsilon_{1x}) = N.$$

Проекція початкової швидкості на дану вісь дорівнює нулю, тому теорема Ейлера набуває вигляду

$$N = m_c \upsilon_{2x} = m_c \upsilon.$$

Підставивши значення секундної маси з (17.20), остаточно отримуємо

$$N = m_c \upsilon = \rho S \upsilon \cdot \upsilon = \rho S \upsilon^2 = 1000 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 0{,}5^2}{4} \cdot 1{,}2^2 = 282{,}6\,(\text{Н}).$$

Задачу розв'язано.

Завдання №17 до РГР

17.1. Машиніст тепловоза вимикає двигун і починає гальмування в момент, коли тепловоз має швидкість υ_0 = 90 км/год. Вважаючи, що рух тепловоза відбувається по прямолінійній і горизонтальній ділянці, визначити через який час він зупиниться і яку відстань пройде, якщо сила гальмування постійна і складає 12% від ваги тепловозу.

Відповідь: t = 21,2 с, s = 265 м.

17.2. Визначити головний вектор кількості руху колеса вагою P = 52 Н, яке котиться по прямолінійній рейці, якщо центр мас колеса рухається по закону

$$x_C = 2{,}5t \text{ (м)}.$$

Відповідь: Q = 13,25 Н.

17.3. Визначити горизонтальну складову додаткової динамічної реакції стінок дифузора, якщо за 1 с витікає 0,5 м^3 води. Діаметр вхідного отвору D_1 = 250 мм, а вихідного – D_2 = 500 мм.

Відповідь: R = 3 825 Н.

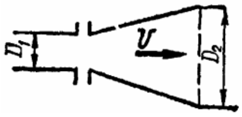


Рис. до задачі 17.3.

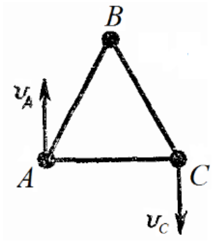
17.4. Снаряд протитанкової гармати, який має масу 6 кг, влучає в лобову броню танка масою M = 30 т під кутом 30° і рикошетить від нього. Найти, на скільки зміниться швидкість танку, якщо швидкість снаряда υ_1 = 500 м/с.

Відповідь: $\Delta\upsilon$ = 0,05 м/с.

17.5. Зрушивши з місця, автомобіль за 10 с розігнався до швидкості υ = 36 км/ч. Визначити силу тяги двигуна $F_{тяг}$, якщо маса автомобілю m = 1 500 кг, а всі його колеса ведучі. Опор руху автомобіля до уваги не брати.

Відповідь: $F_{тяг}$ = 1500 Н.

17.6. Незмінна механічна система складається з трьох матеріальних точок A, B і C однакової маси m = 1,5 кг, розташованих в вершинах рівнобічного трикутника і з'єднаних невагомими стержнями. Визначити модуль вектора кількості руху даної системи в положенні, вказаному на рисунку, якщо швидкості точок A і C дорівнюють $\upsilon_A = \upsilon_C$ = 1,5 м/с.



Відповідь: Q = 3,90 Н·с.

Рис. до задачі 17.6.

17.7. Два вагони масами m_1 = 20 т і m_2 = 30 т рухались зі швидкостями υ_1 = 3 м/с і υ_2 = 2,5 м/с назустріч один одному. Після зіткнення вагони зчіплюються і рухаються разом. Визначити швидкість вагонів після зчеплення.
Відповідь: u = 0,3 м/с.

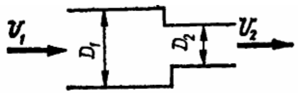
17.8. Матеріальна точка маси m = 2,5 кг, отримавши початкову швидкість υ_0 = 24,5 м/с, почала рух угору по шорсткій горизонтальній площині, кут нахилу якої до горизонту дорівнює 30°. Визначити час підйому точки, якщо коефіцієнт тертя між нею і похилою площиною дорівнює f = 0,58. *ідповідь*: t = 2,5 с.

17.9. Точка маси m = 2 кг рухається в площині xOy згідно рівнянь

$$x = 3\cos 5t \quad y = 4\sin 5t,$$

де x і y виражені в метрах. Визначити імпульс сили S за час, поки точка знаходиться в додатному квадранті. *Відповідь*: S = 50 Н·с.

17.10. Визначити додаткову динамічну реакцію трубопроводу на ділянці раптового звуження діаметру з D_1 = 300 мм до D_2 = 200 мм, якщо швидкість води на першій ділянці υ_1 = 4 м/с.



Відповідь: R = 1 413 Н.

Рис. до задачі 17.10.

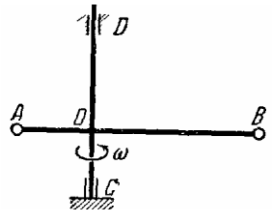
17.11. На вільну матеріальну точку маси m = 2 кг, яка рухається вздовж осі x, діє сила F = 10 Н в напрямку руху точки. Визначити швидкість точки через t = 6 с після з моменту початку дії сили, якщо початкова швидкість точки дорівнювала υ_0 = 2 м/с. *Відповідь*: υ = 32 м/с.

17.12. Мисливець маси M = 70 кг стріляє з нерухомого човна масою m = 30 кг у горизонтальному напрямку. Нехтуючи опором води, визначити швидкість човна після вистрілу, якщо маса заряду m_1 = 40 г, а його початкова швидкість υ_1 = 300 м/с. *Відповідь*: υ = 0,12 м/с.

17.13. Ствол гармати утворює кут α = 30° з горизонтом і має масу М = 11 000 кг, а маса снаряда m = 54 кг. Визначити швидкість вільного руху ствола гармати, якщо швидкість снаряда на виході з гармати υ_0 = 900 м/с.
Відповідь: υ = 3,82 м/с.

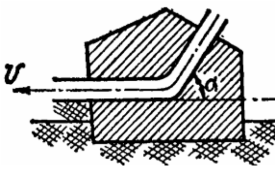
17.14. По похилій площині з кутом нахилу α = 30° до горизонту опускається без початкової швидкості вантаж. Визначити його швидкість через 3 с після початку спуску, якщо коефіцієнт тертя між вантажем і площиною f = 0,25.
Відповідь: υ = 7,36 м/с.

17.15. Автомобіль зупинився через 6 с після початку гальмування. Визначити його початкову швидкість υ_0, якщо коефіцієнт тертя ковзання між колесами і поверхнею дороги дорівнює f = 0,34.
Відповідь: υ_0 = 20 м/с.
17.16. Точка масою m = 2 кг рухається по колу з постійною швидкістю υ = 4 м/с. Визначити імпульс сили, яка діє на точку, за час, поки точка проходить чверть кола.
Відповідь: S = 11,3 Н·с.
17.17. Дві кулі A і B масами m_A = 5 кг і m_B = 3 кг відповідно, з'єднані з вертикальною віссю CD за допомогою стержня AB довжини 20 см і маси 10 кг.



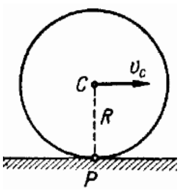
Точка O з'єднання стержня з віссю відстоїть на 5 см від кулі A. Вся система обертається навколо осі CD, роблячи 10 обертів за хвилину. Визначити кількість руху Q системи.
Відповідь: Q = 0,734 Н·с.
Рис. до задачі 17.17.

17.18. На нерухомому човні маси M = 80 кг знаходиться людина масою m = 60 кг. З якою швидкістю υ почне рухатись човен, якщо людина рушить по ній з відносною швидкістю u = 2 м/с?
Відповідь: υ = - 0,86 м/с.
17.19. З похилої площини, кут підйому якої α = 30°, рушило без початкової швидкості важке тіло. Визначити, яку швидкість буде мати тіло в момент, коли пройде 2 м, якщо коефіцієнт тертя між тілом і площиною f = 0,2.
Відповідь: υ = 3,58 м/с.
17.20. Визначити додаткову динамічну реакцію анкерної опори трубопроводу



діаметром D = 2,5 м, якщо швидкість течії води в ньому υ = 8 м/с і кут α = 60°.
Відповідь: R = 314 159 Н.
Рис. до задачі 17.20.

17.21. Колесо вагою P = 40 Н і радіусом R = 0,5 м котиться без ковзання по

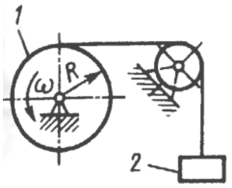


рейці, роблячи при цьому 20 обертів за хвилину. Визначити кількість руху колеса Q.
Відповідь: Q = 4,28 Н·с.
Рис. до задачі 17.21.

17.22. По горизонтальній платформі A, яка рухається за інерцією зі швидкістю υ_0 = 2 м/с, переміщується візок B з постійною відносною швидкістю u_0 = 1,2 м/с. В деякий момент часу візок був зупинений. Визначити швидкість платформи

після зупинки візка, якщо маса платформи M = 500 кг, а маса візка m = 60 кг.
Відповідь: υ = 2,11 м/с.
Рис. до задачі 17.22.

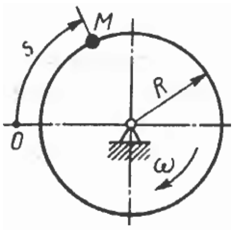
17.23. Шків 1 радіуса R = 0,4 м обертається рівномірно з кутовою швидкістю ω = 2,5 м/с і підіймає вантаж маси m = 10 кг. Визначити модуль кількості руху вантажу.



Відповідь: Q = 10 Н·с.

Рис. до задачі 17.23.

17.24. Диск радіуса R = 0,4 м обертається з кутовою швидкістю ω = 25 рад/с. По ободу диска рухається точка M маси m = 1 кг згідно закону



$$s = 2t^2 + 1.$$

Визначити модуль кількості руху цієї точки в момент часу t = 2 с.

Відповідь: Q = 18 Н·с.

Рис. до задачі 17.24.

Глава 18. «Момент кількості руху матеріальної точки і системи»

18.1. Момент кількості руху матеріальної точки

Якщо кількість руху є характеристикою поступального руху тіла, то при обертанні необхідно введення іншої міри механічного руху – моменту кількості руху матеріальної точки і системи.

Момент кількості руху матеріальної точки відносно центру O – векторна величина, яка дорівнює векторному добутку радіус-вектора точки на її кількість руху

$$\boldsymbol{k}_o = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} \qquad (18.1)$$

Вектор $\boldsymbol{k}_o$ спрямований перпендикулярно площині, яка проходить через вектор $m\boldsymbol{v}$ і центр O, в ту сторону, звідки вектор $m\boldsymbol{v}$ видно таким, що обертає площину відносно центра O проти годинникової стрілки (рис. 18.1, а). Модуль вектора $\boldsymbol{k}_o$ дорівнює добутку кількості руху на плече відносно центра O

$$k_o = mvh. \qquad (18.2)$$

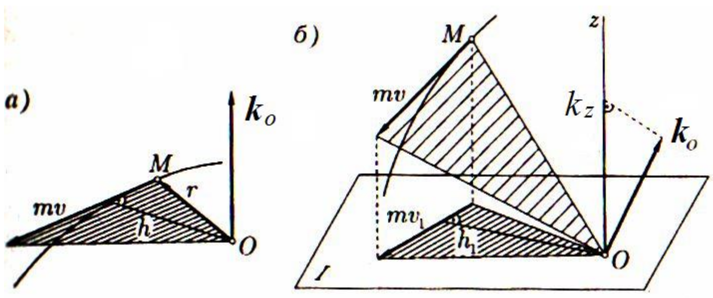


Рис. 18.1. Момент кількості руху відносно точки і осі.

Момент кількості руху матеріальної точки відносно осі z – скалярна величина, яка дорівнює узятому з відповідним знаком добутку проекції кількості руху на площину, перпендикулярну цій осі, на плече цієї проекції (рис. 18.1, б)

$$k_z = \pm\, mv_1\, h_1. \qquad (18.3)$$

Якщо дивлячись назустріч осі z, можна бачити проекцію $m\boldsymbol{v}$ такою, що обертає площину відносно центра O проти годинникової стрілки, то $k_z > 0$, інакше $k_z < 0$.

Проекції моментів кількості руху точки на координатні осі можна знайти із (18.1) наступним чином

$$\boldsymbol{k}_0 = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} y & z \\ m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} x & z \\ m\dot{x} & m\dot{z} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} x & y \\ m\dot{x} & m\dot{y} \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{i}\, m(y\dot{z} - z\dot{y}) - \boldsymbol{j}\, m(x\dot{z} - z\dot{x}) + \boldsymbol{k}\, m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

З іншого боку, момент кількості руху відносно центра можна виразити через проекції на осі декартової системи координат

$$\boldsymbol{k}_0 = \boldsymbol{i}\, k_x - \boldsymbol{j}\, k_y + \boldsymbol{k}\, k_z .$$

Прирівнюючи праві частини, отримуємо формули для визначення моментів кількостей руху відносно координатних осей

$$k_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}); \quad k_y = m(x\dot{z} - z\dot{x}); \quad k_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \tag{18.4}$$

Розмірність моменту кількостей руху відносно центру і осі – кг·м^2/с або Н·м·с.

18.2. Теорема моментів відносно центра

Знаходимо похідні від обох частин (18.1)

$$\frac{d\boldsymbol{k}_0}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times m\frac{d(\boldsymbol{v})}{dt}.$$

$$\frac{d\boldsymbol{k}_0}{dt} = \boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{a}.$$

Перший доданок дорівнює нулю за властивостями векторного добутку, тому

$$\frac{d\boldsymbol{k}_0}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{F}). \tag{18.5}$$

Теорема моментів відносно центру: похідна за часом від моменту кількості руху точки відносно будь-якого нерухомого центру дорівнює моменту діючої на точку сили відносно того ж центру.

В проекціях на координатні осі дана теорема має вигляд

$$\frac{dk_x}{dt} = M_x(\boldsymbol{F}), \; \frac{dk_y}{dt} = M_y(\boldsymbol{F}), \; \frac{dk_z}{dt} = M_z(\boldsymbol{F}). \tag{18.6}$$

Наслідки з теореми:

1. Якщо лінія дії сили $\boldsymbol{F}$ проходить через центр O, то її момент відносно цього центру дорівнює нулю і момент кількості руху залишається постійним

$$\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{F}) = 0 \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{k_o}}{dt} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{k_o} = const. \tag{18.7}$$

2. Якщо момент сили $\boldsymbol{F}$ відносно якої-небудь осі дорівнює нулю, то момент кількості руху відносно цієї осі залишається постійним

$$M_x(\boldsymbol{F}) = 0 \Rightarrow \frac{dk_{\boldsymbol{x}}}{dt} = 0 \Rightarrow k_{\boldsymbol{x}} = const. \tag{18.8}$$

Наслідок (18.7) зручно використовувати у випадку, коли лінія дії сили завжди проходить через нерухомий центр, що має місце при русі точки під дією центральної сили. В такому випадку момент даної сили відносно нерухомого центра буде дорівнювати нулю і момент кількості руху залишатиметься сталим.

Центральна – сила, лінія дії якої весь час проходить через нерухомий центр O. Прикладом є сили, з якими планети притягуються до Сонця.

Нехай матеріальна точка маси m рухається під дією центральної сили $\boldsymbol{F}$. Оскільки момент такої сили відносно нерухомого центру О дорівнює нулю, то згідно (18.7)

$$k_O = const \Rightarrow r \times m\upsilon = const. \tag{18.9}$$

Введемо поняття секторної швидкості

$$\boldsymbol{\upsilon_s} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\upsilon}).$$

Тоді з (18.9) отримуємо

$$2m\boldsymbol{\upsilon}_s = const \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon}_s = const. \tag{18.10}$$

Формула (18.10) зветься інтегралом площ, який широко застосовується при дослідженні руху планет навколо Сонця і штучних супутників навколо Землі. Секторна швидкість по визначенню

$$\upsilon_s = \frac{dS}{dt} = C \Rightarrow S = \int_0^t C dt = Ct + C_1. \tag{18.11}$$

Останній вираз носить назву **теореми площ**: при русі матеріальної точки під дією центральної сили її радіус-вектор $\boldsymbol{r}$ описує площу, яка змінюється пропорційно часу.

З даної теореми витікає, що планети рухаються по своїй еліптичній орбіті нерівномірно. Чим ближче вони знаходяться до Сонця, тим швидше рухаються по орбітах. Проте площі, які описує радіус-вектор планети за однакові проміжки часу (рис. 18.2), залишаються однаковими, незалежно від того, знаходиться планета в перигелії P_1 (найближча до Сонця точка) чи в афелії P_2 (найвіддаленіша точка). Закон площ справедливий не тільки для руху планет, а й у інших випадках руху під дією центральної сили.

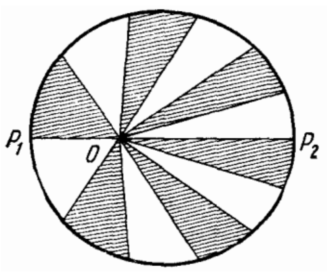


Рис. 18.2. Теорема площ.

18.3. Кінетичний (головний) момент механічної системи

Кінетичний момент механічної системи відносно центру О – векторна величина, яка дорівнює геометричній сумі моментів кількостей руху відносно даного центру усіх матеріальних точок системи

$$\boldsymbol{K}_o = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{k}_{ko} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k \times m_k \boldsymbol{\upsilon}_k . \tag{18.12}$$

Проектуючи (18.12) на координатні осі і враховуючи (18.4), отримуємо

$$K_x = \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k), \; K_y = \sum_{k=1}^{n} m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k), \; K_z = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k).$$

Кінетичний момент тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, можна представити у вигляду добутку моменту інерції тіла відносно цієї осі на кутову швидкість обертання тіла

$$K_z = I_z\,\omega. \qquad (18.13)$$

Якщо система складається з декількох тіл, що обертаються навколо однієї осі, то

$$K_z = I_{1z}\omega_1 + I_{2z}\omega_2 + \ldots + I_{nz}\omega_n\,.$$

Тому кінетичний момент являється характеристикою обертового руху системи.

18.4 Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи.

Зміна моменту кількості руху для k-ої точки механічної системи

$$\frac{d(\boldsymbol{r}_k \times m\boldsymbol{v}_k)}{dt} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{F}_k^e) + \boldsymbol{M}(\boldsymbol{F}_k^i).$$

Склавши такі рівняння для усіх точок і склавши їх, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d(\boldsymbol{r}_k \times m\boldsymbol{v}_k)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_o(\boldsymbol{F}_k^e) + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_o(\boldsymbol{F}_k^i).$$

Проте з властивостей внутрішніх сил виходить, що друга сума в правій частині дорівнюватиме нулю, тому остаточно отримаємо

$$\frac{d\boldsymbol{K}_o}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{F}_k^e) = \boldsymbol{M}_o^e \qquad (18.14)$$

теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи: похідна за часом від кінетичного моменту системи відносно нерухомого центру O дорівнює головному моменту зовнішніх сил відносно того ж центру.

У проекціях на координатні осі дана теорема має вигляд

$$\frac{dK_{ox}}{dt} = M_{ox}^e\,,\ \frac{dK_{oy}}{dt} = M_{oy}^e\,,\ \frac{dK_{oz}}{dt} = M_{oz}^e. \qquad (18.15)$$

Наслідки з теореми:

1. Одними внутрішніми силами неможливо змінити кінетичний момент системи.
2. Якщо головний момент зовнішніх сил відносно деякої нерухомої точки дорівнює нулю, то кінетичний момент системи відносно того ж центру залишиться сталим за величиною і напрямом:

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_o^e = 0 \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{K}_o}{dt} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{K}_o = const. \qquad (18.16)$$

3. Якщо сума моментів усіх прикладених до системи зовнішніх сил відносно якої-небудь осі дорівнює нулю, то кінетичний момент кількостей руху системи відносно цієї осі буде величиною постійною:

$$\sum_{k=1}^{n} M_{oz}^e = 0 \Rightarrow \frac{dK_{oz}}{dt} = 0 \Rightarrow K_{oz} = const. \qquad (18.17)$$

Наслідки 2 і 3 називаються **законами збереження кінетичного моменту механічної системи**. Ними пояснюється здатність кішки при падінні з висоти перевертатися в повітрі та приземлятися на лапи. В цьому випадку зовнішня сила ваги кішки не створює моменту відносно її центра мас. Швидко обертаючи хвостом, кішка повертає своє тіло в протилежний бік, а кінетичний момент відносно центра ваги залишається таким, як і на початку падіння.

Підставимо в (18.15) значення кінетичного моменту системи відносно нерухомої осі у формі (18.13) і отримаємо

$$\frac{d(I_z\omega)}{dt} = M_{oz}^e \Rightarrow I_z\varepsilon = I_z\frac{d\omega}{dt} = I_z\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_{oz}^e. \qquad (18.18)$$

Рівняння (18.16) має назву **диференціального рівняння обертального руху твердого тіла** навколо нерухомої осі.

Якщо тіло рухається плоскопаралельно, то його рух можна представити як поступальний разом із полюсом і відносний обертальний навколо осі, що проходить через даний полюс перпендикулярно площині руху. При відносному русі необхідно враховувати коріолісові сили, проте якщо за полюс прийняти центр мас, момент цих сил дорівнюватиме нулю, а диференціальні рівняння плоского руху матимуть вигляд

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{xk}^e,\ M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{yk}^e,\ J_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} M_{zk}^e. \qquad (18.19)$$

Питання для самоконтролю

1. Що називається моментом кількості руху матеріальної точки?
2. Сформулюйте теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки?
3. Запишіть теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи?
4. Яка сила називається центральною?
5. В якому випадку секторна швидкість є сталою величиною?

Завдання № 18. «Момент кількості руху матеріальної точки і системи»

Рекомендації до розв'язання задач

А) Момент кількості руху матеріальної точки відносно центра або осі

1. Вибрати систему умовно нерухомих осей.
2. Скласти схему сил, які діють на матеріальну точку.
3. Обчислити моменти сил відносно осей (або центру) і визначити, чи має місце якийсь із закони збереження моменту кількості руху точки.
4. Скласти необхідні рівняння та визначити шукані величини.

Б) Кінетичний момент механічної системи відносно центра чи осі

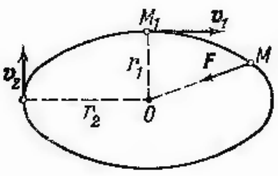
1. Визначити тіла чи точки, які утворюють систему.
2. Прикласти до системи зовнішні сили і показати реакції в'язей.
3. Вибрати систему координат або нерухомий центр.
4. Знайти головний момент зовнішніх сил відносно відповідної осі або центра.
5. Визначити кінетичний момент відносно осі або центра.
6. Проінтегрувати складене рівняння.
7. Якщо головний момент зовнішніх сил дорівнює нулю, застосувати відповідний закон збереження кінетичного моменту.

Приклад розв'язання задачі (момент кількості руху точки)

Задача 1. Точка M рухається навколо нерухомого центра під дією сили тяжіння до нього. Знайти її швидкість υ_1 в найбільш близькій до центра точці траєкторії, якщо в найбільш віддаленому від центра положенні точка мала швидкість υ_2 = 4 м/с. Відстань до найдальшого від центра положення r_2 вчетверо більша за відстань r_1.

Розв'язання

Дана точка рухається лише під дією центральної сили $\boldsymbol{F}$ (рис. 18.3). Оскільки ця сила завжди проходить через нерухомий центр O, то момент кількості руху точки M відносно даного центра залишається сталим. Як результат, при розв'язанні задачі слід застосовувати закон про збереження моменту кількості руху матеріальної точки (18.7)



$$\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{F})=0 \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{k}_o}{dt}=0 \Rightarrow \boldsymbol{k}_o=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{\upsilon}=const.$$

Рис. 18.3. До задачі 1.

Швидкість в кожній точці траєкторії перпендикулярна до радіус-вектора, тому закон збереження можна записати в наступному вигляді

$$m\upsilon_1 r_1 = m\upsilon_2 r_2 \Rightarrow \upsilon_1 r_1 = \upsilon_2 r_2 .$$

Виразивши з останнього рівняння υ_1 і підставивши числові значення, отримаємо шукану величину

$$\upsilon_1=\frac{\upsilon_2 r_2}{r_1}=\frac{4\cdot 4r_1}{r_1}=16\,(\text{м/с}).$$

Задачу розв'язано.

Приклад розв'язання задачі (кінетичний момент механічної системи)

Задача 2. Тверде тіло приводиться до обертання із стану спокою постійним за величиною моментом M = 20 Н·м. При цьому виникає момент сил опору, який визначається по формулі

$$M_{on}=4\omega(\text{Н·м}).$$

Визначити закон зміни кутової швидкості твердого тіла, якщо його момент інерції відносно осі обертання I_z = 0,5 кг·м^2.

Розв'язання

Оскільки в даній задачі розглядається тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої осі, то для її розв'язання застосуємо рівняння (18.18)

$$I_z\frac{d\omega}{dt}=\sum_{k=1}^{n}M_{kz}^{e}.$$

На тіло діють два моменти – постійний за величиною момент рушійних сил M і момент сил опору M_{on}, який залежить від кутової швидкості тіла. Підставивши в основне рівняння, отримуємо

$$I_z\frac{d\omega}{dt}=M-M_{on}=20-4\omega \Rightarrow \frac{d\omega}{dt}=\frac{20-4\omega}{I_z}=40-8\omega.$$

Отримане диференціальне рівняння є рівнянням зі змінними, що розділяються. Знайдемо його розв'язання, взявши до уваги нульові початкові умови

$$\frac{d\omega}{dt}=40-8\omega \Rightarrow \int_0^{\omega}\frac{d\omega}{40-8\omega}=\int_0^{t}dt.$$

$$t=-\frac{1}{8}\int_0^{\omega}\frac{d(40-8\omega)}{40-8\omega}=-\frac{1}{8}\ln|40-8\omega|\Big|_0^{\omega}=\frac{1}{8}\left(\ln 40-\ln|40-8\omega|\right).$$

Оскільки в задачі необхідно визначити закон зміни кутової швидкості, то спростимо праву частину, пропотенціюємо рівняння і виразимо з нього ω

$$t==\frac{1}{8}\ln\left|\frac{40}{40-8\omega}\right| \Rightarrow \ln\left|\frac{40}{40-8\omega}\right|=8t;\;\; \frac{40}{40-8\omega}=e^{8t}.$$

$$\frac{40-8\omega}{40}=e^{-8t} \Rightarrow 1-0{,}2\omega=e^{-8t};\; 0{,}2\omega=1-e^{-8t}.$$

$$\omega=\frac{1-e^{-8t}}{0{,}2}=5\left(1-e^{-8t}\right).$$

Задачу розв’язано.

Завдання №18 до РГР

18.1. Шків радіуса R = 20 см і маси m = 3,2 кг приводиться до обертання за допомогою пасової передачі, причому сила натягу ведучого пасу вдвічі більша за силу натягу веденого, тобто $T_1 = 2T_2$. Визначити сили натягу пасів, якщо шків, маса якого зосереджена на ободі, обертається з кутовим прискоренням ε = 1,5 рад/с^2 і знаходиться під дією моменту опору M_{on} = 10 Н·м.

Відповідь: T_1 = 102 Н, T_2 = 51 Н.

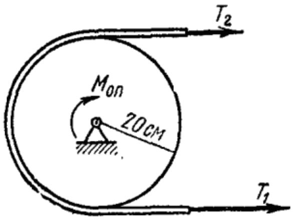


Рис. до задачі 18.1.

18.2. Гальмівний шків масою m = 2 кг і діаметром d = 80 см має форму диска і обертається з кутовою швидкістю ω_0 = 31,4 рад/с. Для зупинки вала до нього притискають гальмівну колодку з силою Q = 5 Н. Визначити час до зупинки вала, якщо коефіцієнт тертя між ним і колодкою f = 0,4. Тертям в підшипниках і масою вала знехтувати.

Відповідь: t = 0,628 с.

18.3. Вантаж M_1 прив’язаний до кінця довгої нерозтяжної нитки M_1OA, частина якої вставлена у вертикальну трубку, і обертається навколо осі трубки по колу радіуса $M_1C_1 = R$ з частотою n_1 = 100 об/хв. Нитку повільно втягують всередину трубки до довжини зовнішньої частини $OM_2 = R/2$. Знайти кутову швидкість обертання вантажу в новому положенні.

Відповідь: ω_2 = 42 рад/с.

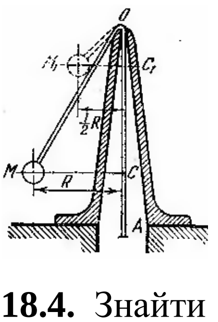


Рис. до задачі 18.3.

18.4. Знайти кінетичний момент диска маси m = 6 кг і радіуса R = 40 см відносно миттєвої осі обертання, перпендикулярної до його площини. Диск котиться без ковзання по прямолінійній рейці з кутовою швидкістю ω = 20 рад/с.

Відповідь: K = 28,8 кг·м^2/с.

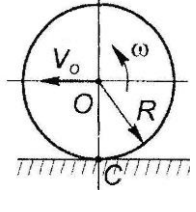


Рис. до задачі 18.4.

18.5. Штучний супутник Землі M рухається по еліптичній орбіті під дією центральної сили тяжіння з боку Землі, яка знаходиться в одному з фокусів еліпса. Визначити швидкість υ_2 точки в афелії, якщо його швидкість в перигелії дорівнювала υ_1 = 8 км/с, а відстані відповідно OP_1 = 6 500 км, OP_2 = 6 600 км.

Відповідь: υ_2 = 7,88 км/с.

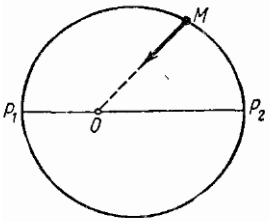


Рис. до задачі 18.5.

18.6. Два однорідні диски радіуса R = 20 см і маси m = 500 г кожен, розташовані у вертикальних площинах на кінцях стержня O_1O_2 довжини 80 см. Дана система обертається навколо вертикальної осі z під дією крутного моменту M = 2 Н·м. Визначити кутове прискорення дисків.

Відповідь: ε = 11,8 рад/с^2.

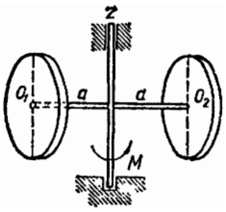


Рис. до задачі 18.6.

18.7. Однорідний стержень довжини l = 1 м і маси m = 6 кг обертається з кутовою швидкістю ω = 10 рад/с. Визначити кінетичний момент стержня відносно центра O.

Відповідь: K = 20 кг·м^2/с.

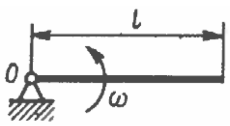


Рис. до задачі 18.7.

18.8. Гвинт човна має момент інерції I_0 = 600 кг·м^2 і приводиться до обертання із стану спокою обертальним моментом M = 1 600 Н·м. На гвинт з боку води діє момент сил опору, пропорційний другому ступеню кутової швидкості

$$M_{on} = 4\omega^2 \,(\text{Н·м}).$$

Визначити проміжок часу, через який кутова швидкість гвинта буде дорівнювати ω = 15 рад/с.

Відповідь: t = 7,1 с.

18.9. Два твердих тіла обертаються незалежно одне від одного відносно однієї й тієї ж нерухомої осі з кутовими швидкостями ω_1 = 5 рад/с і ω_2 = 10 рад/с. Моменти інерції тіл відносно даної осі дорівнюють відповідно I_1 = 20 кг·м^2 і I_2 = 15 кг·м^2. З якою кутовою швидкістю будуть обертатися обидва тіла, якщо їх з'єднати в процесі руху?

Відповідь: ω = 7,14 рад/с.

18.10. Стержень довжиною l = 1 м і масою m = 3 кг має на кінцях кульки діаметром d = 10 см і масою m_1 = 2 кг кожна. Який крутний момент M необхідно прикласти до стержня, аби привести його до обертання з кутовим прискоренням ε = 2 рад/с^2 відносно осі, що проходить через центр тяжіння системи перпендикулярно до стержня?

Відповідь: M = 2,9 Н·м.

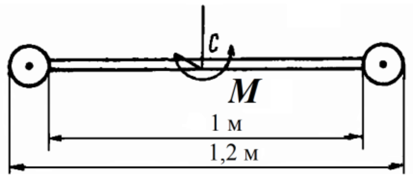


Рис. до задачі 18.10.

18.11. Астероїд обертається навколо Сонця по еліптичній орбіті, причому його швидкість в найближчій до Сонця точці дорівнює υ_1 = 24 км/с. Визначити швидкість υ_2 астероїда в найбільш віддаленій від Сонця точці, якщо дані відстані відносяться як 1:3.

Відповідь: υ_2 = 8 км/с.

18.12. Ротор гіроскопа маси 30 кг в момент вимкнення обертався з частотою n_0 = 12 000 об/хв. Визначити момент сил опору, прикладений до ротора, відносно осі обертання, якщо він зупинився через 30 хвилин. Осьовий радіус інерції ротора ρ = 10 см, момент сил опору вважати постійним.

Відповідь: $M_{оп}$ = 0,21 Н·м.

18.13. Циліндр 1 масою m = 80 кг і діаметром d = 25 см вільно обертається навколо горизонтальної осі. На циліндр намотана гнучка нитка, яка несе на кінці вантаж маси m_1 = 10 кг, який під дією власної ваги обертає барабан. Визначити кутове прискорення циліндра.

Відповідь: ε = 19,5 рад/с^2.

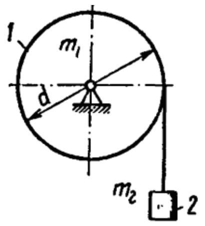


Рис. до задачі 18.13.

18.14. Для швидкого гальмування великих маховиків застосовують електричне гальмо. Струми Фуко в масі маховика при його русі біля електричних обмоток створюють гальмівний момент

$$M_1 = 12\omega \, (\text{Н·м}).$$

Момент опору руху від тертя в підшипниках можна прийняти постійним і рівним M_2 = 25 Н·м. Визначити, за який час зупиниться маховик, що обертався з кутовою швидкістю ω = 5 рад/с, якщо його радіус R = 0,5 м і маса m = 100 кг.

Відповідь: t = 0,91 с.

18.15. Вантажі P_1 = 50 Н і P_2 = 80 Н дією власної ваги приводять до обертання подвійний блок, який складається з двох однорідних дисків радіусів r_1 = 20 см і r_2 = 30 см. Нехтуючи вагою ниток і силами тертя, визначити кутове прискорення системи, якщо вага кожного з дисків відповідно Q_1 = 60 Н і Q_2 = 90 Н.

Відповідь: ε = 63,0 рад/с^2.

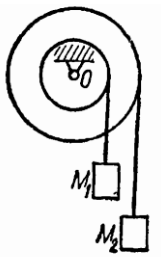


Рис. до задачі 18.15.

18.16. Однорідний диск радіуса R = 40 см і маси m = 2,5 кг рівномірно обертається навколо вертикальної осі Az, яка проходить через точку A на ободі диска. Визначити кінетичний момент диска, якщо кутова швидкість його обертання ω = 20 рад/с.

Відповідь: K = 12 кг·м^2/с.

18.17. Махове колесо з моментом інерції I_0 = 20 кг·м^2 в момент початку гальмування мав кутову швидкість ω_0 = 4 рад/с. Визначити час, за який його кутова швидкість зменшиться вдвічі, якщо момент сил опору пропорційний квадрату кутової швидкості і дорівнює

$$M_{оп} = 2\omega^2 \text{ Н·м}.$$

Відповідь: t = 2,5 с.

18.18. Гальмівний шків маси m = 2 кг і діаметра d = 0,8 м обертається за інерцією з кутовою швидкістю ω_0 = 10 рад/с. Для зупинки шківа до нього притискають гальмівну колодку із силою Q = 5 Н. За скільки секунд вал зупиниться, якщо коефіцієнт тертя між шківом і колодками f = 0,4? Тертям в підшипниках вала знехтувати, а шків вважати однорідним диском.

Відповідь: t = 6,28 с.

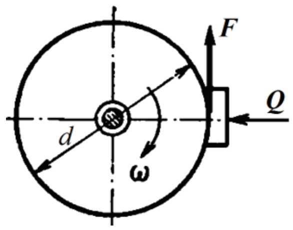


Рис. до задачі 18.18.

18.19. Махове колесо з моментом інерції відносно нерухомої осі обертання I = 15 кг·м^2 розганяється із стану спокою під дією постійного обертального моменту M = 75 Н·м. Нехтуючи опорами руху, визначити, через який час махове колесо отримає задану частоту обертання n = 150 об/хв.

Відповідь: t = 3,14 с.

18.20. Визначити, з якою швидкістю υ необхідно було б пустити по екватору з заходу на схід потяг маси m = 2 000 тон, аби збільшити тривалість доби на одну секунду. Землю вважати однорідною кулею радіуса R = 6 000 км і маси M = $5\cdot10^{24}$ кг.

Відповідь: $\upsilon = 5{,}05\cdot10^{15}$ м/с.

18.21. Кругла горизонтальна платформа маси M = 120 кг і радіуса R = 1,5 м може обертатися без тертя навколо вертикальної осі z, яка проходить через центр O платформи. По платформі за годинниковою стрілкою рухається за законом

$$s = t^2 \text{ (м)}$$

чоловік маси m = 70 кг, залишаючись на незмінній відстані r = 0,8 м від осі обертання. Визначити кутову швидкість платформи в момент часу t = 4 с, якщо в початковий момент вона знаходилась в стані спокою.

Відповідь: ω = 3,32 рад/с.

18.22. Гальмівний шків масою m = 2 кг і діаметром d = 80 см має форму диска і обертається з кутовою швидкістю ω_0 = 31,4 рад/с. Для зупинки вала до нього притискають гальмівну колодку з силою Q = 5 Н. Визначити, скільки обертів до зупинки зробить вал, якщо коефіцієнт тертя між ним і колодкою f = 0,4. Тертям в підшипниках і масою вала знехтувати.

Відповідь: N = 15,7 обертів.

18.23. До кінця стержня AB довжиною l = 20 см прикріплена кулька A маси m = 80 г. Вся система обертається навколо нерухомої осі OO_1 всередині посудини з рідиною з початковою кутовою швидкістю ω_0 = 20 рад/с, причому сила опору пропорційна кутовій швидкості і визначається по формулі

$$R_{on} = 0{,}004\omega \text{ Н.}$$

Нехтуючи масою стержня, визначити, за який час кутова швидкість системи зменшиться вдвічі.

Відповідь: t = 2,77 с.

18.24. Кругла горизонтальна платформа маси M = 100 кг і радіуса R = 1 м може обертатися без тертя навколо вертикальної осі z, яка проходить через центр O платформи. По платформі за годинниковою стрілкою рухається за законом

$$s = t$$

чоловік маси m = 60 кг, залишаючись на незмінній відстані r = 0,8 м від осі обертання. Визначити кутове прискорення платформи, якщо в початковий момент вона знаходилась в стані спокою.

Відповідь: ω = 0,77 рад/с.

Глава 19. «Робота і енергія»

19.1. Робота сили

Як зазначалося раніше, кількість руху є мірою лише при переході механічного руху тіла в механічний. Мірою дії сили в цьому випадку є вектор імпульсу сили $\boldsymbol{S}$. При перетворенні механічного руху в іншу форму руху матерії в якості такої міри виступає ***енергія*** – характеристика руху матерії в усіх її видах. В такому випадку мірою дії сили є ***робота*** – фізична величина, яка характеризує перетворення механічного руху і енергії між тілами.

Елементарна робота сили – фізична величина, яка дорівнює скалярному добутку сили на диференціал радіус-вектора точки її прикладення

$$dA = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r} \tag{19.1}$$

Повна робота сили – фізична величина, яка дорівнює скалярному добутку сили, що діє на тіло, на переміщення тіла, викликане даною силою

$$A = \int_{M_0}^{M} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}. \tag{19.2}$$

Теорема про роботу рівнодійної: робота рівнодійної системи сил на будь-якому переміщенні точки її прикладення дорівнює алгебричній сумі робот складових сил на цьому ж переміщенні

$$A = \int_{M_0}^{M} \boldsymbol{R}d\boldsymbol{r} = \int_{M_0}^{M} \left(\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k \right) d\boldsymbol{r} = \sum_{k=1}^{n} \int_{M_0}^{M} \boldsymbol{F}_k d\boldsymbol{r} = \sum_{k=1}^{n} A_k. \tag{19.3}$$

Повну роботу сили (19.2) можна записати в прямокутній декартовій системі координат наступним чином

$$A = \int_{M_0}^{M} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right). \tag{19.4}$$

Слід зазначити, що інтеграли в формулах (19.1) – (19.3) є криволінійними, але від них можна перейти до визначного інтеграла

$$A = \int_{t_0}^{t} \left(F_x \upsilon_x + F_y \upsilon_y + F_z \upsilon_z \right) dt. \tag{19.5}$$

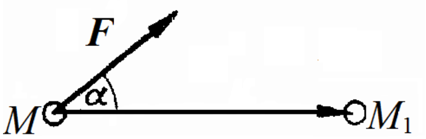
У випадку постійної сили формула (19.1) набуває вигляду

$$A = (\boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r}) = Fr\cos\alpha. \tag{19.6}$$

Теорема про роботу постійної сили на криволінійному переміщенні: робота постійної сили залежить лише від найкоротшої відстані між початковою і кінцевою точками і дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення

$$A = (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{MM}_1) = F \cdot MM_1 \cos\alpha. \tag{19.7}$$

Якщо тіло рухається прямолінійно (рис. 19.1), то модуль вектора переміщення дорівнює пройденому шляху ($MM_1 = s$), тому



$$A = Fs\cos\alpha \tag{19.8}$$

Рис. 19.1. Робота сили на прямолінійному шляху.

Окремі випадки знаходження роботи постійної сили:

1. Напрям дії сили співпадає з напрямом переміщення ($\alpha = 0^\circ$). Тоді робота

$$A = Fs\cos 0^\circ = Fs,$$

тобто вона завжди додатна і максимальна.

2. Напрям дії сили протилежний до напряму переміщення ($\alpha = 180^\circ$). Робота в такому випадку

$$A = Fs\cos 180^\circ = -Fs$$

завжди від'ємна, а подібні сили звуться силами опору.

3. Напрям дії сили перпендикулярний напряму переміщення ($\alpha = 90^\circ$)

$$A = Fs\cos 90^\circ = 0.$$

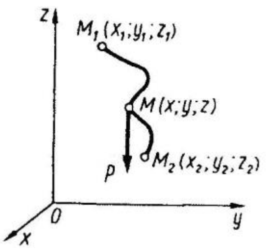
В цьому випадку сила роботи не здійснює.

19.2. Визначення роботи в окремих випадках руху

А) *Робота сили ваги*

Якщо матеріальна точка ваги $\boldsymbol{P}$ рухається з положення M_1 у положення M_2 (рис. 19.2), то проекції діючих сил на координатні осі мають вигляд

$$F_x = 0,\ F_y = 0,\ F_z = -P \Rightarrow A = \int_{M_2}^{M_1}(-P)dz = -P(z_2 - z_1) = \pm mgh. \tag{19.9}$$



З (19.9) видно, що робота, виконувана силою ваги $\boldsymbol{P}$, не залежить від форми траєкторії, а залежить лише від крайніх її положень. Додатна робота має місце, коли точка M рухається вниз.

Рис. 19.2. Робота сили ваги.

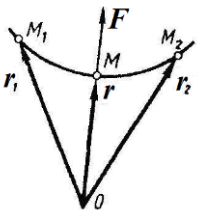
Б) *Робота центральної сили*

Якщо матеріальна точка рухається з положення M_1 у положення M_2 під дією центральної сили, величина якої залежить лише від відстані до нерухомого центру (рис. 19.3), то проекція сили на напрямок радіус вектора $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{F} = F_r(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

Користуючись формулою (19.1) знаходимо роботу

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F_r(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}d\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} F_r(r)dr, \tag{19.10}$$



яка в разі центральної сили не залежить від форми траєкторії точки, а залежить лише від її початкового і кінцевого положень. По формулі (19.10) можна знайти роботу сили всесвітнього тяжіння, кулонівської взаємодії, тощо.

Рис. 19.3. Робота центральної сили.

В) *Робота сили пружності*

Якщо початкове положення точки *M* відповідає недеформованій пружині, то робота сили пружності при деформації пружини на $\Delta \boldsymbol{r}$ (рис. 19.4)

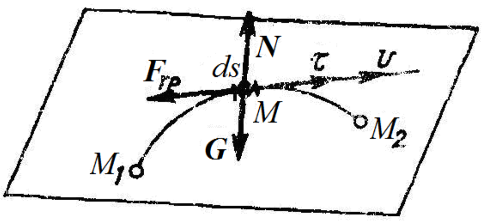
$$A=-c\int_{r_1}^{r_2}(r-r_0)dr=\frac{-c(r-r_0)^2}{2}\Bigg|_{r_1}^{r_2}=\frac{-c\left[(r_2-r_0)^2-(r_1-r_0)^2\right]}{2}. \qquad (19.11)$$

В (19.11) входять радіус-вектори початкового і кінцевого положень вільного кінця пружини, тому і робота сили пружності не залежить від форми траєкторії.

Г) *Робота сили тертя ковзання*

Якщо важка точка *M* рухається по шорсткій горизонтальній площині (рис. 19.4), то на неї будуть діяти сила тяжіння $\boldsymbol{G}$, нормальна реакція поверхні $\boldsymbol{N}$ і сила тертя ковзання $\boldsymbol{F}_{тр}$, спрямована по дотичній до траєкторії у бік, протилежний швидкості. Робота сили тертя

$$A=\int_{M_1}^{M_2}F_\tau ds=-\int_{M_2}^{M_1}fNds=-fNs=-fmgs. \qquad (19.12)$$

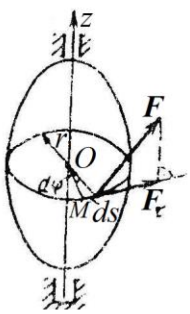


З (19.12) видно, що робота сили тертя завжди від'ємна і залежить від довжини переміщення, тому інтеграл в формулі криволінійний.

Рис. 19.4. Робота сили тертя ковзання.

Д) *Робота моменту сили, прикладеного до твердого тіла, що обертається*

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі z під дією сили $\boldsymbol{F}$, прикладеної в точці *M* (рис. 19.5), то робота буде визначатись по формулі



$$A=\int_{M_1}^{M_2}F_\tau ds.$$

Виразивши переміщення через кут повороту, знайдемо роботу

$$ds=rd\varphi \Rightarrow A=\int_{M_1}^{M_2}F_\tau rd\varphi=\int_{M_1}^{M_2}M_z d\varphi. \qquad (19.13)$$

Рис. 19.5. Робота моменту сили.

Якщо момент сили відносно осі z є постійним, то (19.13) набуває вигляду

$$A=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}M_z d\varphi=M_z(\varphi_1-\varphi_0). \qquad (19.14)$$

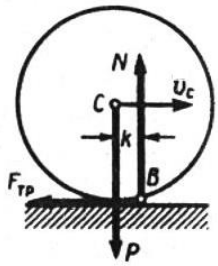
Є) *Робота сили тертя кочення*

Опір коченню здійснює пара сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{N}$, що виникає при деформації опорної поверхні тіла (рис. 19.6). Як відомо з (19.14), робота в такому випадку

$$dA_{коч}= - M\,d\varphi= -kN\,d\varphi,$$

де k – коефіцієнт тертя кочення. За умови постійної сили реакції $N = const$ повна робота матиме вигляд

$$A_{кач} = -kN(\varphi_1 - \varphi_0). \quad (19.15)$$



Оскільки величина сили тертя кочення дуже мала, то за наявності інших видів опору, нею можна знехтувати.

Рис. 19.6. Робота сили тертя при коченні.

Ж) *Робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла*

Якщо до точок твердого тіла прикладена сукупність зовнішніх сил $\boldsymbol{F}^e_k$ у точках M_i ($i = 1\dots k$) системи, то елементарна робота цих сил

$$dA = \boldsymbol{F}^e d\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{M}^e_0 d\varphi \quad (19.16)$$

дорівнює сумі роботи головного вектора зовнішніх сил, яка здійснюється на елементарному переміщенні полюса O, і роботи головного моменту цих сил, обчисленій відносно центра O при елементарному обертанні тіла навколо осі, що проходить через даний центр.

19.3. Потужність і ККД

Одну й ту ж саму роботу можна виконати за різний час, тому в динаміці вводиться поняття потужності. *Потужність* – фізична величина, що характеризує швидкість виконання роботи силою, яка прикладена до матеріальної точки. Потужність можна представити

$$N = \frac{\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{F}\,\boldsymbol{\upsilon}, \quad (19.17)$$

як скалярний добуток сили на швидкість точки її прикладення. З (19.17) витікає, що при їзді по рівній якісній дорозі, де нема значних опорів руху і необхідно отримати велику швидкість, вмикають вищі передачі. Нижчі передачі вмикають при русі на підйом або на поганій дорозі, де необхідно отримати якнайбільшу силу тяги, нехай і за рахунок втрати швидкості.

В проекціях на осі декартової системи координат (19.17) матиме вигляд

$$N = F_x\upsilon_x + F_y\upsilon_y + F_z\upsilon_z. \quad (19.18)$$

Потужність не можна розглядати як похідну від роботи, оскільки остання не є повним диференціалом від деякої функції координат. Тому визначення потужності можливе за допомогою часткового диференціала

$$N = \frac{\delta A}{dt}. \quad (19.19)$$

У випадку твердого тіла потужність зовнішніх сил, прикладених до нього, дорівнює сумі скалярного добутку головного вектора на швидкість полюса O і скалярного добутку головного моменту цих сил відносно даного полюса на кутову швидкість обертання тіла

$$N = \boldsymbol{F}^e \upsilon_0 + \boldsymbol{M}^e_0 \omega. \quad (19.20)$$

В окремому випадку, коли тіло здійснює обертання навколо нерухомої осі, причому момент залишається незмінним, потужність буде визначатись по формулі

$$N = M_z \omega_z .$$

У деяких випадках використовують *середню потужність* – роботу, виконану за скінчений проміжок часу Δt

$$N_{сер} = \frac{\Delta A}{\Delta t} . \tag{19.21}$$

Одиниця виміру потужності – ват (Вт): 1 Вт = 1 Дж/1с.

Усі сили, що мають місце при роботі будь-якої машини чи механізму, можна розділити на рушійні (робота яких додатна) і сили опору (робота яких від'ємна). Сили опору, в свою чергу, поділяються на корисні і шкідливі. Робота проти корисних сил опору є корисною роботою, для виконання якої і призначена дана машина. Робота проти шкідливих сил опору (тертя деталей, подолання опору середовища) називається роботою втрат. Таким чином повна робота, яку здійснює сила, складається з корисної роботи і роботи втрат:

$$A = A_1 + A_2,$$

де A – повна робота; A_1 – корисна робота; A_2 – робота втрат. Відношення корисної роботи до повної роботи називається *коефіцієнтом корисної дії* η:

$$\eta = \frac{корисна\ робота}{повна\ робота} = \frac{A_1}{A} . \tag{19.22}$$

Коефіцієнт корисної дії (ККД) менше одиниці, оскільки повна робота A завжди більше корисної роботи A_1.

19.4. Кінетична енергія матеріальної точки

В механіці існують дві міри механічного руху – векторна (кількість руху) і скалярна (кінетична енергія), які є основою для встановлення загальних теорем динаміки. В релятивістській механіці користуються складною мірою руху – тензором енергії-імпульсу, який об'єднує обидві вищеназвані міри механічного руху, проте в рамках класичної механіки їх розглядають як самостійні міри із власною сферою застосування.

Енергія – міра механічного руху матерії, яка характеризує перехід однієї форми руху в іншу, наприклад механічної в електричну або теплову. В цьому полягає відміна енергії від кількості руху, яка описує перетворення руху без зміни самої форми, тобто перехід механічного руху в механічний.

Кінетична енергія матеріальної точки – скалярна величина T, що дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} . \tag{19.23}$$

Одиниця виміру кінетичної енергії – Джоуль (Дж). Формули кінетичної енергії можуть мати різний вигляд залежно від способу задання руху. Так при **векторному способі** задання кінетична енергія знаходиться по формулі

$$T = \frac{m}{2}\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{19.24}$$

При **координатному способі** задання руху кінетична енергія

$$T = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]. \tag{19.25}$$

При **натуральному способі** задання кінетична енергія має вигляд

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{19.26}$$

19.5. Кінетична енергія твердого тіла

Кінетична енергія твердого тіла – скалярна величина *T*, що дорівнює сумі кінетичних енергій усіх точок тіла

$$T = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \upsilon_k^2}{2}. \tag{19.27}$$

Кінетична енергія твердого тіла (як і матеріальної точки) є додатною величиною, яка обертається в нуль лише у випадку спокою системи.

В загальному випадку руху кінетична енергія твердого тіла визначається **теоремою Кеніга**: кінетична енергія механічної системи дорівнює сумі кінетичної енергії усієї маси системи, яка зосереджена в довільному полюсі p і рухається з його швидкістю, і кінетичної енергії відносного руху системи при її обертанні відносно даного полюса

$$T = \frac{M\upsilon_p^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\upsilon_k^{від}\right)^2 + M\upsilon_p \upsilon_C^{від}, \tag{19.28}$$

де $\upsilon_C^{від}$ – швидкість відносного руху центра мас системи по відношенню до рухомої системи координат із центром у полюсі. У ряді випадків доцільно за початок рухомої системи координат (полюс) вибирати центр мас системи. В такому випадку кінетична енергія системи

$$T = \frac{M\upsilon_C^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\upsilon_k^{від}\right)^2 \tag{19.29}$$

складатиметься із кінетичної енергії руху усієї системи зі швидкістю центра мас і кінетичної енергії відносного руху системи при її обертанні навколо центра мас.

З формул (19.28) і (19.29) можна отримати вирази кінетичної енергії для окремих випадків руху. Так, при **поступальному русі** твердого тіла всі його точки рухаються зі швидкістю центра мас, тому другий доданок в (19.29) буде дорівняти нулю, а кінетична енергія

$$T = \frac{M\upsilon^2}{2} \tag{19.30}$$

дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат його швидкості.

При **обертальному русі** твердого тіла навколо нерухомої осі швидкість поступального руху центра мас дорівнює нулю $\upsilon_C = 0$, крім того дорівнюють нулю кутові швидкості обертання навколо двох інших осей декартової системи координат. В такому випадку кінетична енергія тіла

$$T = T_z^{об} = \frac{I_z \omega_z^2}{2}. \qquad (19.31)$$

дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно даної осі на квадрат його кутової швидкості.

При **плоскопаралельному русі** кінетична енергія тіла дорівнює сумі енергії поступального руху із швидкістю центру мас і енергії обертального руху тіла навколо центру мас

$$T_{плоск} = \frac{M\upsilon_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2}. \qquad (19.32)$$

Дана формула справедлива у випадку, коли за полюс береться центр мас тіла. В будь-якому іншому випадку дана формула набуває вигляду (19.28).

При **сферичному русі** твердого тіла швидкість його поступального руху теж дорівнюватиме нулю $\upsilon_C = 0$. Тоді кінетична енергія тіла

$$T = T_O^{об} = \frac{I_x \omega_x^2}{2} + \frac{I_y \omega_y^2}{2} + \frac{I_z \omega_z^2}{2}. \qquad (19.33)$$

В даній формулі система координат *Oxyz* незмінно пов’язана з тілом, причому координатні осі є головними осями інерції. З іншого боку, сферичний рух можна представити як обертання навколо миттєвої осі, тоді формула кінетичної енергії матиме вигляд

$$T = T_O^{об} = \frac{I_\omega \omega^2}{2}. \qquad (19.34)$$

При **русі вільного тіла в просторі**, коли полюс не є центром мас, необхідно користуватися формулою (19.28) у розгорнутому вигляді

$$T = \frac{m}{2}\left(\upsilon_{Ox}^2 + \upsilon_{Oy}^2 + \upsilon_{Oz}^2\right) + m\begin{vmatrix} \upsilon_{Ox} & \upsilon_{Oy} & \upsilon_{Oz} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} + \frac{I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2}{2} - \qquad (19.35)$$
$$- I_{xy}\omega_x\omega_y - I_{xz}\omega_x\omega_z - I_{yz}\omega_y\omega_z .$$

19.6. Теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Запишемо основне рівняння динаміки для точки, що знаходиться під дією системи сил

$$m\boldsymbol{a} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k .$$

Далі проведемо заміну змінної, виключивши час і виразивши прискорення точки через її швидкість і переміщення

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{d\boldsymbol{r}}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\upsilon}\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{d\boldsymbol{r}},$$

після чого підставимо в початкове рівняння

$$m\boldsymbol{\upsilon}\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{d\boldsymbol{r}} = \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_k \Rightarrow d\left(\frac{m\boldsymbol{\upsilon}^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_k d\boldsymbol{r}. \qquad (19.36)$$

В (19.1) було введене поняття елементарної роботи – фізичної величини, яка дорівнює скалярному добутку сили або системи сил на елементарне переміщення, викликане дією даної сили (системи)

$$dA = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k d\boldsymbol{r}.$$

Підставивши елементарну роботу в (19.36), остаточно отримаємо

$$d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} dA \qquad (19.37)$$

теорему про зміну кінетичної енергії точки в диференціальній формі: диференціал кінетичної енергії матеріальної точки при деякому її переміщенні дорівнює алгебричній сумі елементарних робіт усіх сил, що діють на точку під час її переміщення**.**

Після інтегрування (19.37) отримаємо

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} A \qquad (19.38)$$

теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в інтегральній формі: зміна кінетичної енергії точки при деякому її переміщенні дорівнює алгебричній сумі робіт усіх діючих на точку сил на тому ж переміщенні.

19.7. Теорема про зміну кінетичної енергії системи

Нехай механічна система складається з *n* матеріальних точок. Тоді для *k*-ої точки зміна кінетичної енергії

$$d\left(\frac{m_k \upsilon_k^2}{2}\right) = dA_k^e + dA_k^i.$$

Зміна кінетичної енергії усієї механічної системи

$$dT = d\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \upsilon_k^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} dA_k^e + \sum_{k=1}^{n} dA_k^i. \qquad (19.39)$$

Формула (19.39) є **теоремою про зміну кінетичної енергії механічної системи в диференціальній формі**: диференціал кінетичної енергії механічної системи дорівнює алгебричній сумі елементарних робіт зовнішніх і внутрішніх сил, що прикладені до системи.

Інтегруючи (19.39), отримуємо **теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи в інтегральній формі**:

$$T_1 - T_0 = A_k^e + A_k^i \qquad (19.40)$$

зміна кінетичної енергії механічної системи на скінчених відрізках шляху, пройдених точками системи, дорівнює роботі зовнішніх і внутрішніх сил, що прикладені до точок системи на цих же відрізках шляху.

Незмінна – механічна система, в якій відстань між будь-якими її точками в процесі руху залишається сталою. Приміром такої системи є ***тверде тіло***. У разі незмінної системи сума робіт внутрішніх сил дорівнює нулю, тому теорема (19.40) набуває вигляду

$$T_1 - T_0 = A_k^e. \tag{19.41}$$
Згідно (19.41), зміна кінетичної енергії твердого тіла на скінчених відрізках шляху, пройдених його точками, дорівнює роботі зовнішніх сил, що прикладені до точок тіла на цих же відрізках шляху.

19.8. Кінетична енергія невільної механічної системи

Нехай на механічну систему накладені стаціонарні (незмінні в часі) в'язі. Всі сили, що діють на систему, поділяються на активні і реакції в'язей. Тоді теорема про зміну кінетичної енергії невільної механічної системи матиме вигляд
$$dT = dA^a + dA^r$$
Припустимо, що всі в'язі, накладені на систему, є ідеальними. *Ідеальні в'язі* – в'язі, наявність яких не впливає на зміну кінетичної енергії системи. Для них сума робіт усіх реакцій на будь-яких елементарних переміщеннях дорівнює нулю
$$dA^r = \sum_{k=1}^{n} dA_k^r = 0.$$
До ідеальних в'язей можна віднести підшипники кочення, абсолютно гнучкі і нерозтяжні канати і троси, абсолютно тверді стержні, циліндричні та сферичні шарніри.

Ідеальна система – механічна система, в якій діють лише ідеальні в'язі. Для таких систем зміна кінетичної енергії на будь-якому її переміщенні дорівнює сумі робіт зовнішніх і внутрішніх активних сил
$$dT = \sum_{k=1}^{n} dA_k^a \Rightarrow T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^a. \tag{19.42}$$
У випадку ідеальних в'язей дана теорема дозволяє виключити з рівнянь руху всі наперед невідомі реакції в'язей.

19.9. Силове поле і силова функція

В природі часто зустрічаються сили, що залежать лише від координат точки. Такі сили називаються позиційними, до них належать сили пружності, електричної, магнітної та гравітаційної взаємодії. Область, в кожній точці якої на рухому матеріальну точку діють позиційні сили, зветься *силовим полем*. Таке поле може бути стаціонарним і нестаціонарним.

Стаціонарне силове поле – частина простору, в якій на рухому точку діє сила, що залежить лише від координат і не залежить від часу
$$F = F(x, y, z).$$

Нестаціонарне силове поле – частина простору, в якій на рухому точку діє сила, що залежить не тільки від координат, а й від часу
$$F = F(t, x, y, z).$$

В свою чергу стаціонарне силове поле може бути потенціальним і непотенціальним. *Потенціальне силове поле* – частина простору, де робота сил поля, які діють на рухому матеріальну точку, не залежить від форми траєкторії, а визначається лише початковим і кінцевим положенням точки. Потенціальне силове поле має силову функцію, яка є його однозначною характеристикою.

Силова функція U – робота, яка виконується силою поля при переході матеріальної точки із початкового положення 0 задане положення M

$$U(x, y, z) = A_{0M}.$$

В потенціальному силовому полі частинні похідні від силової функції за координатами дорівнюють проекціям сили поля на відповідні координатні осі

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (19.43)$$

Тоді повна сила, що діє на матеріальну точку в силовому полі, визначається за формулою

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial U}{\partial z} = \mathbf{grad}\, U = \nabla U, \qquad (19.44)$$

тобто є градієнтом силової функції. *Градієнт* – вектор, проекції якого на осі координат виражаються частинними похідними від скалярної функції за координатами.

З (19.43) можна визначити критерії існування силової функції

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}; \; \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}; \; \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}. \qquad (19.45)$$

Елементарна робота сили поля, враховуючи (19.43) і (19.44), може бути виражена по формулі

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU. \qquad (19.46)$$

Для отримання виразу для роботи сили поля на кінцевому шляху точки її прикладення необхідно знайти інтеграл від (19.46)

$$A = \int_{M_0}^{M_1} dU = U_1 - U_0. \qquad (19.47)$$

Теорема: робота сили, що діє на матеріальну точку під час її руху в потенціальному полі, дорівнює різниці силових функцій в її кінцевому і початковому положеннях

Наслідки з теореми:

1. Лише в потенціальному силовому полі елементарна робота є повним диференціалом силової функції.
2. Під час руху матеріальної точки по замкненій траєкторії у потенціальному силовому полі робота сил на цій траєкторії дорівнює нулю.

З другого наслідку видно, що робота сил потенціального поля на будь-якому переміщенні точки визначається лише початковими і кінцевими координатами.

19.10. Потенціальна енергія

Еквіпотенціальні поверхні (поверхні рівня) – геометричне місце точок, на якому силова функція залишається сталою

$$U(x, y, z) = \text{const}.$$

Дане рівняння описує сімейство еквіпотенціальних поверхонь. Якщо силова функція даної поверхні дорівнює нулю, то таку поверхню називають поверхнею нульового рівня. Для характеристики властивостей механічного руху в потенціальному силовому полі вводять поняття потенціальної енергії.

Потенціальною енергією матеріальної точки або механічної системи в даному положенні називається скалярна величина *П*, що дорівнює роботі сил поля під час руху точки або системи із заданого положення *М* в її нульове положення.

$$П(x, y, z) = A_{(M0)} = -U(x, y, z). \tag{19.48}$$

З (19.48) видно, що потенціальна енергія в будь-якій точці поля дорівнює значенню силової функції в цій точці, взятому з протилежним знаком. При цьому повна робота сили в потенціальному полі дорівнює різниці потенціальної енергії в початковому і кінцевому положенні точки або системи

$$A = П_1 - П_2.$$

Поєднавши співвідношення (19.43) і (19.48), можна виразити проекції сили через потенціальну енергію точки

$$F_x = -\frac{\partial П}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial П}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial П}{\partial z}. \tag{19.49}$$

На практиці найчастіше доводиться стикатись з полями сили тяжіння і сили пружності. Нижче наведені приклади визначення потенціальної енергії:

1. Для поля ***сили тяжіння*** за поверхню нульового рівня приймається горизонтальна площина на рівні моря. Тоді потенціальна енергія точки або тіла на висоті *h* над рівнем моря

$$П = \int_0^h F dz = mg\int_0^h dz = mgh. \tag{19.50}$$

2. Для поля ***сили пружності*** нульовим рівнем буде недеформований стан тіла, тоді потенціальна енергія при деформації уздовж однієї осі на величину *x*

$$П = \int_0^x F dx = \int_0^x cx dx = \frac{cx^2}{2}. \tag{19.51}$$

19.11. Закон збереження механічної енергії

Кінетична енергія *Т* і потенціальна енергія *П* є окремими складовими повної механічної енергії тіла або точки *Е*

$$E = T + П. \tag{19.52}$$

В теоретичній механіці також часто застосовується різниця між кінетичною та потенціальною енергіями

$$L = T - П, \tag{19.53}$$

яка називається *функцією Лагранжа*.

Закон збереження механічної енергії: під час руху матеріальної точки або системи в потенціальному силовому полі механічна енергія залишається незмінною

$$T + \Pi = \text{const}. \tag{19.54}$$

Сили, що мають потенціал, називають *консервативними*; сили ж, що не мають потенціалу, звуться *дисипативними*, або розсіювальними. Для дисипативних сил закон збереження механічної роботи не виконується, оскільки частина механічної енергії переходить в інші форми (теплову, електричну). До дисипативних сил відносяться сили тертя і сили опору середовища.

Закон (19.54) є окремим випадком загального **закону збереження і перетворення енергії**: в замкненій системі енергія нікуди не зникає і ні звідки не з'являється, вона лише переходить з одного виду до іншого.

Питання для самоконтролю

1. Яка величина називається кінетичною енергією матеріальної точки?
2. Скільки складових у виразі для кінетичної енергії системи?
3. Що таке робота сили і як її визначити?
4. В якому випадку робота сили при русі тіла дорівнює нулю?
5. Що називається силовою функцією?
6. Запишіть критерій потенціальності силового поля.

Завдання № 19. «Кінетична енергія матеріальної точки і системи»

Рекомендації до розв'язання задач

А) Кінетична енергія матеріальної точки

1. Обрати систему координатних осей і скласти схему сил, що діють на матеріальну точку в процесі її руху.
2. У випадку постійних сил задачу розв'язувати за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в інтегральній формі, у випадку сил, що залежать від відстані, швидкості або часу використати теорему в диференціальній формі.
3. Визначити швидкість матеріальної точки на початку і в кінці переміщення.
4. Визначити роботу усіх сил під час руху точки, вважаючи при цьому роботу сил опору руху від'ємною.
5. Скласти рівняння зміни кінетичної енергії системи у відповідній формі і визначити з нього невідому величину.

Б) Кінетична енергія механічної системи (твердого тіла)

1. Визначити склад механічної системи, що розглядається, обрати систему координат і зобразити дану систему в поточному положенні.
2. Показати на рисунку усі силові фактори (сили і моменти), що діють на дану систему.
3. Визначити кінетичну енергію на початку і в кінці переміщення.
4. Визначити роботу усіх зовнішніх і внутрішніх сил і моментів на вказаному переміщенні.
5. Скласти рівняння зміни кінетичної енергії системи у відповідній формі, після чого визначити шукану величину.

Приклад розв'язання задачі (робота сили)

Задача 1. На матеріальну точку діє сила, проекції якої на осі декартової системи координат мають вигляд

$$F_x = xy^2, \quad F_y = x^2 y, \quad F_z = z^2.$$

Визначити роботу даної сили при переміщенні точки з положення M_0 (0, 2, 3) в положення M_1 (1, 2, 3). Положення точки задані в метрах, а проекції сил в ньютонах.

Розв'язання

По-перше з'ясуємо, чи існує у даному випадку силова функція. Для цього знайдемо частинні похідні і перевіримо умову (19.43)

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial\left(x^2 y\right)}{\partial x} = 2xy; \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial\left(xy^2\right)}{\partial y} = 2xy.$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial\left(x^2 y\right)}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial\left(z^2\right)}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial\left(x^2 y\right)}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial\left(z^2\right)}{\partial y} = 0.$$

Умови виконуються і силова функція існує.

Елементарну роботу знаходимо по формулі (19.46), підставивши в неї умови задачі

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \left(xy^2\right)dx + \left(x^2 y\right)dy + \left(z^2\right)dz;$$

$$dA = d\left(\frac{x^2 y^2}{2}\right) + d\left(\frac{x^2 y^2}{2}\right) + d\left(\frac{z^3}{3}\right) = d\left(\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{z^3}{3}\right) = d\left(x^2 y^2 + \frac{z^3}{3}\right).$$

Знаходимо силову функцію, скориставшись формулою (19.46)

$$dA = dU \Rightarrow dU = d\left(x^2 y^2 + \frac{z^3}{3}\right) \Rightarrow U = x^2 y^2 + \frac{z^3}{3} + C.$$

Значення силової функції в початковій і кінцевій точках

$$U_0 = 0 + \frac{3^3}{3} = 9 + C; \quad U_1 = 1 \cdot 2^2 + \frac{3^3}{3} = 13 + C.$$

Згідно (19.47), робота дорівнює

$$A = U_1 - U_0 = 13 + C - 9 - C = 4\,(\text{Дж}).$$

Задачу розв'язано.

Приклад розв'язання задачі (кінетична енергія точки)

Задача 2. Ударний маятник копра для динамічних досліджень матеріалів починає рух без початкової швидкості з положення M, в якому стержень OM довжини l = 1,1 м утворює кут φ = 15° з вертикаллю. Нехтуючи силами тертя та масою стержня, визначити швидкість ударної частини маятника в момент її удару по зразку в точці B.

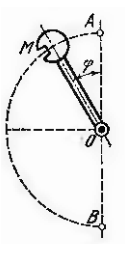


Рис. 19.7. До задачі 2.

Розв’язання

Оскільки за умовами задачі масою стержня можна знехтувати, то ударну частину маятника представимо як матеріальну точку. Оскільки досліджувана точка М знаходиться лише під дією постійної за величиною сили тяжіння, то згідно рекомендацій, слід застосувати теорему про зміну кінетичної енергії точки в інтегральній формі. Дана теорема має вигляд

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} A = mgh.$$

Поле сили тяжіння є потенціальним, тому робота сили буде визначатись лише початковою і кінцевою висотами і не буде залежати від форми траєкторії. Знаходимо висоту падіння маятника

$$h = OM\cos\varphi + OB = l\cos 15^\circ + l = 1{,}1(0{,}966 + 1) = 2{,}16\,(\text{м}).$$

Знаходимо кінцеву швидкість маятника, зауваживши, що його початкова швидкість дорівнювала нулю

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} = mgh \Rightarrow \frac{\upsilon_1^2}{2} = gh \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 2{,}16} = 6{,}5\,(\text{м/с}).$$

Задачу розв’язано.

Приклад розв’язання задачі (кінетична енергія системи)

Задача 3. Планетарний механізм приводиться до руху в горизонтальний площині за допомогою кривошипа OA довжини l = 60 см, який з’єднує осі трьох однакових коліс 1, 2 і 3 (рис. 19.8). Колесо 1 нерухоме, а кутова швидкість кривошипа ω = 2 рад/с. Вага кожного колеса M_1 = 20 Н, а вага кривошипа M_2 = 4 Н. Визначити кінетичну енергію системи, вважаючи колеса однорідними дисками, а кривошип – однорідним стержнем.

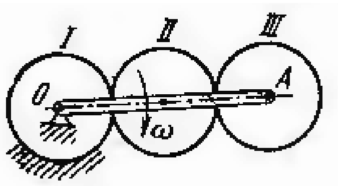


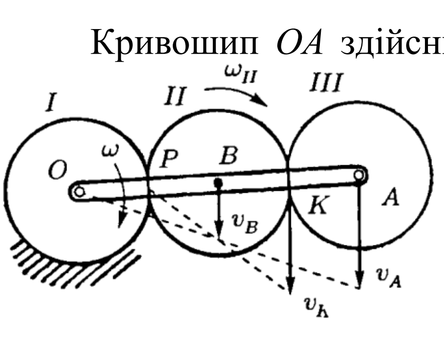
Рис. 19.8. До задачі 3.

Розв’язання

Оскільки колесо I нерухоме, то кінетична енергія системи буде сумою кінетичних енергій коліс II і III та кривошипа OA

$$T = T_{II} + T_{III} + T_{OA}.$$

Кривошип OA здійснює обертальний рух, тому його кінетичну енергію знайдемо по формулі



$$T_{OA} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{M_2 l^2}{3}\cdot\frac{\omega^2}{2} = \frac{4\cdot 0{,}6^2\cdot 2^2}{6} = 1 \quad (\text{Дж}).$$

Спочатку знайдемо швидкість точки A на кінці кривошипу

$$\upsilon_A = \omega\cdot OA = \omega l = 2\cdot 0{,}6 = 1{,}2\,(\text{м/с}).$$

Далі розглянемо рух колес II і III. Швидкість точки на B осі колеса II

$$\upsilon_B = \omega\cdot OB = \frac{\omega l}{2} = \frac{2\cdot 0{,}6}{2} = 0{,}6\,(\text{м/с}).$$

Оскільки колесо I нерухоме, а між колесами нема ковзання, то кутова швидкість другого колеса

$$\omega_{II} = \frac{\upsilon_B}{r} = \frac{\upsilon_B}{l/4} = \frac{4 \cdot 0{,}6}{0{,}6} = 4\,(\text{рад/с}).$$

Кінетична енергія другого колеса

$$T_{II} = \frac{M_1 \upsilon_B^2}{2} + \frac{I_B \omega_{II}^2}{2} = \frac{M_1 \upsilon_B^2}{2} + \frac{M_1 r^2}{2} \cdot \frac{\omega_{II}^2}{2} = \frac{20 \cdot 0{,}6^2}{2} + \frac{20 \cdot 0{,}15^2 \cdot 4^2}{4} = 5{,}4\,(\text{Дж}).$$

Швидкість точки К зачеплення коліс II і III

$$\upsilon_K = \omega_{II} \cdot 2r = \frac{\omega_{II} l}{2} = \frac{4 \cdot 0{,}6}{2} = 1{,}2\,(\text{м/с}).$$

Швидкості точок K і A однакові, тому колесо III рухається поступально (ω_{III} = 0), а його кінетична енергія

$$T_{III} = \frac{M_1 \upsilon_A^2}{2} = \frac{20 \cdot 1{,}2^2}{2} = 14{,}4\,(\text{Дж}).$$

Шукана кінетична енергія системи

$$T = 5{,}4 + 14{,}4 + 1 = 20{,}8\ (\text{Дж}).$$

Задачу розв’язано.

Завдання №19 до РГР

19.1. На матеріальну точку діє сила, проекції якої на осі декартової системи координат мають вигляд

$$F_x = 2x + y, \quad F_y = x + z^2, \quad F_z = 2yz + 1.$$

Визначити роботу даної сили при переміщенні точки з положення M_0 (1, 2, 3) в положення M_1 (2, 3, 4). Положення точки задані в сантиметрах, а проекції сил в ньютонах.

Відповідь: A = 0,38 Дж.

19.2. Планетарний механізм приводиться до руху в горизонтальний площині за допомогою водила OB = 80 см, яке з’єднує осі трьох однакових коліс 1, 2 і 3. Колесо 1 нерухоме, а кутова швидкість водила ω = 5 рад/с. Вага кожного колеса P = 20 Н, вага водила Q = 4 Н. Визначити кінетичну енергію системи, вважаючи колеса однорідними дисками, а водило – однорідним стержнем.

Відповідь: T = 23,5 Дж.

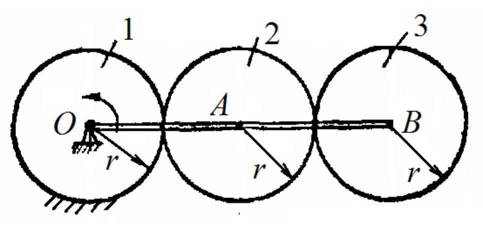


Рис. до задачі 19.2.

19.3. Потяг масою m = 200 т з виключеним двигуном гальмується силами опору, величина яких залежить від швидкості і визначається по формулі

$$R_{on} = 5000 + 200\upsilon\,(\text{Н}).$$

Визначити відстань, яку пройде потяг до зупинки, якщо на момент вимкнення двигуна його швидкість дорівнювала υ_0 = 20 м/с.

Відповідь: υ = 5 305 м.

19.4. Визначити потужність машини, яка підіймає 80 разів за хвилину молот вагою P = 5 000 Н на висоту h = 1 м, якщо її коефіцієнт корисної дії η = 0,75.
Відповідь: N = 8 888,9 Вт.

19.5. Циліндр 1 маси m_1 = 78 кг і діаметра d = 24 см може вільно обертатися навколо горизонтальної осі. На циліндр намотана гнучка нитка з вантажем 2 маси m_2 = 10 кг. Визначити кінетичну енергію системи через t = 4 с після початку руху.
Відповідь: T = 1 559 Дж.

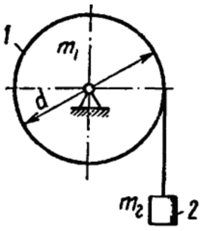


Рис. до задачі 19.5.

19.6. Тілу A, яке знаходилось на шорсткій горизонтальній площині, надали швидкість υ_0 = 5 м/с. Визначити шлях, пройдений тілом до зупинки, якщо коефіцієнт тертя між тілом і площиною дорівнює f = 0,35.
Відповідь: s = 3,64 м.

19.7. Циліндричний вал діаметром d = 10 см і масою m = 50 кг, на який насаджене махове колесо діаметром d_1 = 2 м і масою m_1 = 3 000 кг, обертається за інерцією. Визначити, скільки обертів зробить вал до зупинки, якщо в момент вимкнення двигуна він мав частоту n = 60 об/хв. Коефіцієнт тертя в підшипниках f = 0,05.
Відповідь: k = 63 оберти.

19.8. Хокеїст, знаходячись на відстані 10 м від воріт, надає шайбі швидкість υ_0 = 8 м/с. Шайба, ковзаючи по поверхні льоду, потрапляє у ворота зі швидкістю υ_1 = 7,7 м/с. Визначити коефіцієнт тертя ковзання між шайбою і льодом.
Відповідь: f = 0,024.

19.9. Тонкостінний циліндр радіуса R = 0,5 м котиться без ковзання по горизонтальній площині. Визначити шлях, пройдений ним до зупинки, якщо в початковий момент часу кутова швидкість циліндра ω_0 = 4 рад/с, а коефіцієнт тертя кочення k = 0,01 м.
Відповідь: s = 20,4 м.

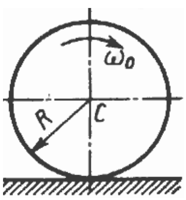


Рис. до задачі 19.9.

19.10. Тонкий диск масою m = 2 кг котиться по горизонтальній площині так, що швидкість його центра дорівнює υ_C = 2,5 м/с. Визначити кінетичну енергію даного диска.
Відповідь: T = 9,38 Дж.

19.11. Маховик вагою P = 7,5 кН обертається з частотою n = 900 об/хв. Визначити потужність, яку отримує маховик від двигуна, якщо діаметр вала d = 20 см, а коефіцієнт тертя в підшипнику f = 0,02.
Відповідь: N = 1 414 Вт.

19.12. Однорідний диск маси m = 30 кг і радіуса R = 1 м починає обертатися із стану спокою навколо власної осі з кутовим прискоренням ε = 2 рад/с^2. Визначити кінетичну енергію диска через t = 2 с після початку його руху.
Відповідь: T = 120 Дж.

19.13. Трос довжини l = 3 м і маси m_1 = 2 кг, намотаний на барабан маси m_2 = 1 кг, несе на кінці вантаж маси m_3 = 5 кг. Вважаючи масу барабана рівномірно розподіленою по ободу і нехтуючи товщиною троса, визначити швидкість вантажу в момент, коли довжина частини троса, що звішується, дорівнюватиме x = 2 м.
Відповідь: υ = 5,27 м/с.

19.14. Тіло маси m = 1 400 кг має початкову швидкість υ_0 = 12 м/с і рухається за інерцією. Через 100 м його швидкість зменшується до величини υ = 3,3 м/с. Визначити величину сили опору, яку долає тіло.
Відповідь: $R_{оп}$ = 932 Н.

19.15. Вантаж маси m = 4 кг дією власної ваги приводить до обертання циліндр радіуса R = 0,4 м, момент інерції якого відносно осі обертання I = 0,2 кг·м^2. Визначити кінетичну енергію системи в момент часу, коли швидкість вантажу дорівнює υ = 2 м/с.
Відповідь: T = 10,5 Дж.

19.16. Визначити необхідну потужність електродвигуна лебідки, яка має підіймати кліть з будівельними матеріалами загальною масою m = 1 500 кг на висоту h = 15 м за час t = 25 с. Коефіцієнт корисної дії лебідки η = 0,75.
Відповідь: N = 11 772 Вт.

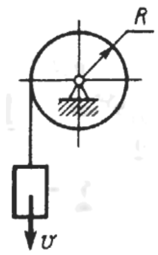


Рис. до задачі 19.16.

19.17. Силова функція потенціального силового поля має вигляд

$$U = 8x + 2y^2 + 3z^2 \text{ (Дж)}.$$

Визначити модуль сили F, що діє на матеріальну точку в положенні, яке визначається координатами (0, 0, 1).
Відповідь: F = 10 Н.

19.18. В тролейбусі з інерційним двигуном на кожній проміжній зупинці маховик за три хвилини розганяється з 1500 до 3000 об/хв. Після цього, обертаючись за інерцією, він приводить до руху тролейбус. Маса маховика m = 1,5 т, його діаметр d = 1,6 м. Вважаючи маховик однорідним диском, знайти середню потужність двигуна, що розганяє маховик.
Відповідь: N = 98,7 кВт.

19.19. Тілу A, яке знаходилось на шорсткій похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 30°$, надали швидкість $\upsilon_0 = 5$ м/с, спрямовану вздовж похилої площини угору. Визначити шлях, пройдений тілом до зупинки, якщо коефіцієнт тертя між тілом і площиною дорівнює $f = 0{,}35$.
Відповідь: $s = 1{,}50$ м.

19.20. Визначити роботу, яку здійснює працівник, переміщуючи по горизонтальній підлозі вантаж маси $m = 40$ кг на відстань $s = 6$ м, якщо коефіцієнт тертя між вантажем і підлогою $f = 0{,}25$.
Відповідь: $A = 588{,}6$ Дж.

19.21. Епіциклічний механізм приводиться до руху в горизонтальній площині із стану спокою постійним обертовим моментом $M = 6$ Н·м, прикладеним до кривошипа O_1O_2. Визначити кутову швидкість кривошипа як функцію від кута повороту, якщо радіус нерухомого колеса $r_1 = 20$ см, радіус рухомого колеса $r_2 = 10$ см і вага $P = 20$ Н, вага кривошипа $Q = 10$ Н.
Відповідь: $\omega = 6{,}26\varphi^{1/2}$ рад/с.

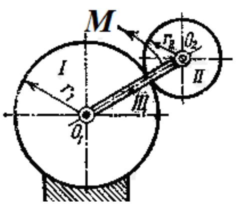


Рис. до задачі 19.21.

19.22. Тілу, що знаходиться на похилій площині з кутом нахилу до горизонту $\alpha = 45°$, надали початкову швидкість $\upsilon_0 = 8$ м/с, напрямлену вздовж площини угору. Визначити, з якою швидкістю тіло повернеться у початкове положення, якщо коефіцієнт тертя між ним і площиною $f = 0{,}25$.
Відповідь: $\upsilon = 5{,}53$ м/с.

19.23. Кривошип 1 обертається з кутовою швидкістю $\omega = 10$ рад/с і приводить до руху колесо 2 маси $m = 1$ кг, яке можна вважати однорідним диском. Момент інерції кривошипа відносно осі обертання $I = 0{,}1$ кг·м^2, радіус $R = 3r = 0{,}6$ м. Визначить кінетичну енергію механізму.
Відповідь: $T = 13{,}4$ Дж.

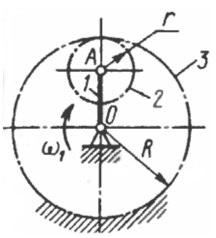


Рис. до задачі 19.23.

19.24. Нитка довжиною $l = 2$ м відхилена від положення рівноваги на кут $\alpha_0 = 40°$, після чого прив'язаному до неї вантажу надано швидкість $\upsilon_0 = 3{,}2$ м/с. Нехтуючи опором руху вантажу, визначити максимальний кут відхилення від горизонталі нитки в інший бік.
Відповідь: $\alpha_{max} = 60°$.

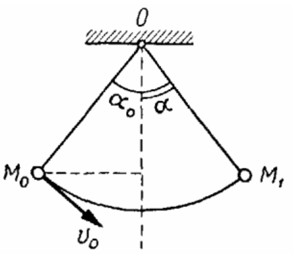
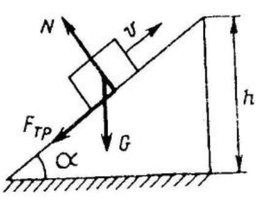


Рис. до задачі 19.24.

19.25. По похилій площині, яка утворює кут $\alpha = 45°$ з горизонтом, на висоту h з постійною швидкістю підіймається вантаж вагою G.



Визначити коефіцієнт корисної дії похилої площини, якщо коефіцієнт тертя між вантажем і площиною f = 0,3.
Відповідь: η = 0,77.
Рис. до задачі 19.25.

19.26. Шків *A* радіуса R = 40 см отримує рух від шківа *B* радіуса r = 15 см, який обертається з кутовою швидкістю ω_1 = 6 рад/с. Натяг верхньої ведучої гілки паса T_1 = 50 Н вдвічі більший за натяг веденої гілки T_2. Визначити потужність на шківі *A*, нехтуючи ковзанням паса на шківах.
Відповідь: N = 22,5 Вт.

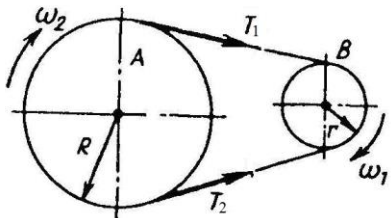


Рис. до задачі 19.26.

Глава 20. «Динаміка сферичного руху твердого тіла»

20.1. Кінетичні моменти твердого тіла при сферичному русі

Кінетичний момент твердого тіла, що здійснює сферичний рух, відносно довільного центра *O* визначається по формулі

$$\boldsymbol{K}_o = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k \times m_k \boldsymbol{v}_k \,. \tag{20.1}$$

Зв'язок лінійної і кутової швидкостей виражається співвідношенням

$$\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_k \,,$$

де $\boldsymbol{\omega}$ – вектор кутової швидкості тіла, $\boldsymbol{r}_k$ – радіус-вектор, проведений з центра *O* до k-ої точки. Підставивши в початкову формулу, отримаємо

$$\boldsymbol{K}_o = \sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}_k \cdot \boldsymbol{r}_k) - \sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{r}_k (\omega \cdot \boldsymbol{r}_k) = \boldsymbol{\omega} \sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{r}_k^2 - \sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{r}_k (\omega \cdot \boldsymbol{r}_k).$$

Враховуючи, що відстань від точки до початку координат

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

а скалярний добуток векторів

$$\boldsymbol{\omega}_k \boldsymbol{r}_k = \omega_x x_k + \omega_y y_k + \omega_z z_k,$$

після підстановки остаточно отримаємо формулу для визначення кінетичного моменту твердого тіла при його сферичному русі відносно центра *O*

$$\boldsymbol{K}_o = \boldsymbol{\omega} \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) - \sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{r}_k (\omega_x x_k + \omega_y y_k + \omega_z z_k). \tag{20.2}$$

Із (20.2) можна отримати формулу для кінетичного моменту твердого тіла відносно осі x, що проходить через точку *O*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_x &= \omega_x \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) - \sum_{k=1}^{n} m_k x_k (\omega_x x_k + \omega_y y_k + \omega_z z_k) = \\ &= \omega_x \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k^2 + z_k^2) - \omega_y \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k - \omega_z \sum_{k=1}^{n} m_k z_k x_k . \end{aligned} \tag{20.3}$$

Враховуючи, що $J_x = \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k^2 + z_k^2)$ – момент інерції тіла відносно осі *x*,

$J_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k$ – відцентровий момент інерції тіла відносно осей *x* і *y*, а

$J_{zx} = \sum_{k=1}^{n} m_k z_k x_k$ – відцентровий момент інерції тіла відносно осей *z* і *x*,

отримуємо формули для обчислення кінетичних моментів тіла відносно координатних осей

$$K_x = J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{zx}\omega_z, \quad K_y = -J_{xy}\omega_x + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z, \quad K_z = -J_{zx}\omega_x - J_{yz}\omega_y + J_z\omega_z. \tag{20.4}$$

Якщо за осі координат прийняті головні центральні осі інерції, то відцентрові моменти відносно цих осей дорівнюють нулю, і кінетичні моменти в такому випадку набувають вигляду

$$K_x = J_x\omega_x, \quad K_y = J_y\omega_y, \quad K_z = J_z\omega_z. \tag{20.5}$$

20.2. Диференціальні рівняння сферичного руху твердого тіла

Теорема про зміну кінетичного моменту системи згідно (18.14) має вигляд

$$\frac{d\boldsymbol{K}_0}{dt} = \boldsymbol{M}_0^e. \tag{20.6}$$

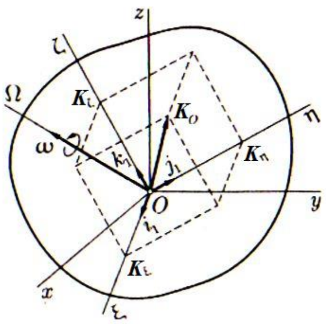


Рис. 20.1. До виводу динамічних рівнянь.

Пов'яжемо з рухомим тілом рухому систему координат з осями ξ, η, і ζ, які мають орти $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{j}_1$, $\boldsymbol{k}_1$ відповідно (рис. 20.1), та запишемо кінетичний момент в проекціях на рухомі осі

$$\boldsymbol{K}_0 = \boldsymbol{i}_1 K_\xi + \boldsymbol{j}_1 K_\eta + \boldsymbol{k}_1 K_\zeta,$$

після чого підставимо в рівняння (20.6)

$$\frac{d\boldsymbol{K}_0}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{i}_1}{dt}K_\xi + \frac{d\boldsymbol{j}_1}{dt}K_\eta + \frac{d\boldsymbol{k}_1}{dt}K_\zeta\right) + \left(\boldsymbol{i}_1\frac{dK_\xi}{dt} + \boldsymbol{j}_1\frac{d_1K_\eta}{dt} + \boldsymbol{k}_1\frac{dK_\zeta}{dt}\right).$$

Розкриваючи дужки і перетворюючи вираз в правій частині, отримуємо

$$\boldsymbol{i}_1\left(\frac{dK_\xi}{dt} + \omega_\eta K_\zeta - \omega_\zeta K_\eta\right) + \boldsymbol{j}_1\left(\frac{dK_\eta}{dt} + \omega_\zeta K_\xi - \omega_\xi K_\zeta\right) + \boldsymbol{k}_1\left(\frac{dK_\zeta}{dt} + \omega_\xi K_\eta - \omega_\eta K_\xi\right) = \boldsymbol{M}_o^e.$$

Враховуючи, що момент кількості руху *К* = *Iω*, та проектуючи на вісі рухомої системи координат, остаточно отримуємо

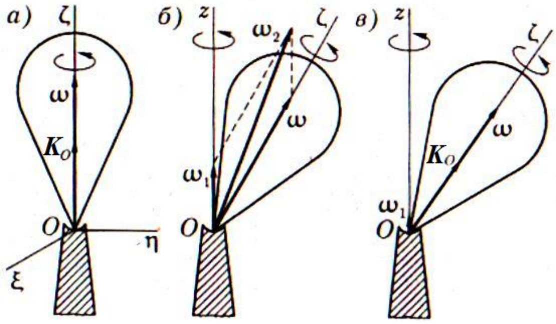
$$I_\xi\frac{d\omega_\xi}{dt} + \omega_\eta\omega_\zeta(I_\zeta - I_\eta) = M_\xi^e, \; I_\eta\frac{d\omega_\eta}{dt} + \omega_\xi\omega_\zeta(I_\xi - I_\zeta) = M_\eta^e, \quad I_\zeta\frac{d\omega_\zeta}{dt} + \omega_\eta\omega_\xi(I_\eta - I_\xi) = M_\zeta^e \tag{20.7}$$

динамічні рівняння Ейлера для сферичного руху твердого тіла.

20.3. Кінетичний момент гіроскопа

Гіроскоп – тіло обертання, яке має вісь симетрії і обертається навколо неї з кутовою швидкістю, що значно перевищує швидкість обертання самої осі симетрії.

Найпростішим випадком є обертання гіроскопа з кутовою швидкістю ω навколо нерухомої осі $O\zeta$ (рис. 20.2, *а*). Проекції кутової швидкості на рухливі осі координат



$$\omega_\xi = 0,\ \omega_\eta = 0,\ \omega_\zeta = \omega.$$

Оскільки вісь $O\zeta$ є головною віссю інерції гіроскопа, то проекції кінетичного моменту на рухомі осі і кінетичний момент тіла відносно нерухомої точки *O* мають вигляд

$$K_\xi = 0,\quad K_\eta = 0,\quad K_\zeta = I_\zeta\omega \ \rightarrow\ K_o = K_\zeta = I_\zeta\omega.$$

Рис. 20.2. Кінетичний момент гіроскопа.

Більш складним є випадок руху (рис. 20.2, *б*), коли гіроскоп обертається навколо осі симетрії $O\zeta$ з кутовою швидкістю **ω** і разом з нею обертається навколо нерухомої осі Oz з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_1$. Тоді вектор абсолютної кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}_2$ визначається за правилом паралелограма

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_1.$$

Як відзначалось раніше, швидкість обертання гіроскопа навколо власної осі симетрії $\boldsymbol{\omega}$ набагато більше швидкості обертання $\boldsymbol{\omega}_1$ навколо нерухомої осі, тому прийнято вважати кінетичний момент гіроскопа відносно нерухомої осі *O* спрямованим уздовж осі симетрії гіроскопа (рис. 20.2, *в*) і рівним

$$K_o = K_\zeta = I_\zeta\omega. \qquad (20.8)$$

20.4. Гіроскоп с трьома степенями вільності

Гіроскоп з трьома ступенями вільності – тіло, рух якого обмежений наявністю тільки однієї нерухомої точки *O*, причому кутова швидкість його обертання навколо однієї з осей значно перевищує кутові швидкості обертання навколо інших осей. З назви витікає, що для опису руху даного гіроскопу необхідні три незалежні параметри. Найбільш поширеними гіроскопами такого типу є гіроскопи з кардановим підвісом (рис. 20.3, *а* і *б*).

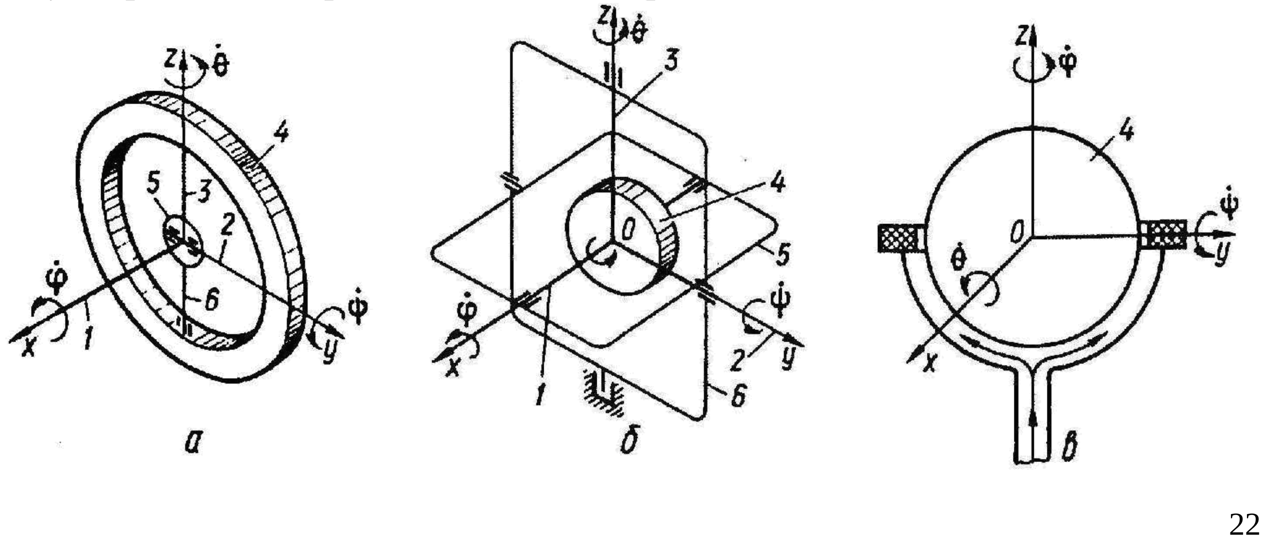


Рис. 20.3. Гіроскопи з трьома степенями вільності.

В карданових підвісах гіроскопа кільця або рамки 5 і 6 призначені для надання гіроскопу можливості обертатися одночасно навколо трьох осей 1, 2 і 3, що перетинаються в точці O, що еквівалентно тілу з однією нерухомою точкою (рис. 20.3, *в*).

При конструюванні гіроскопа намагаються звести до нуля моменти усіх зовнішніх сил (сил тертя, статичної незрівноваженості) відносно центра O, такі гіроскопи називають *вільними*.

Основні властивості гіроскопа:

1. Оскільки вісь обертання гіроскопа проходить через центр мас, то вектор кінетичного моменту зберігає свій напрямок незмінним в інерційній системі координат

$$\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{R}) = 0 \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{K_o}}{dt} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{K_o} = const. \qquad (20.9)$$

Наприклад, якщо вектор кінетичного моменту гіроскопа спрямувати на нерухому зірку (Сонце, Полярну зірку), то під час руху він зберігатиме цей напрям. В наближеній теорії гіроскопа вектор кінетичного моменту вважається таким, що напрямлений по головній осі обертання гіроскопа

$$K_0 = \sqrt{I_x^2\omega_x^2 + I_y^2\omega_y^2 + I_z^2\omega_z^2} \approx I_z\omega_z ,$$

оскільки $\omega_z >> \omega_x$; $\omega_z >> \omega_y$.

2. Якщо до гіроскопа прикласти момент відносно його головної осі обертання z, (рис. 20.4), то ця вісь почне прецесіювати навколо іншої осі обертання гіроскопа z_1 з кутовою швидкістю прецесії ω .

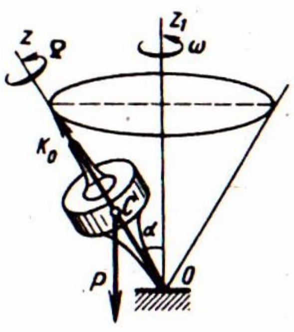


Рис. 20.4. Прецесія гіроскопа.

Дана властивість витікає з теореми Резаля, згідно з якої швидкість кінця вектора кінетичного моменту спрямована по дотичній до годографа кінетичного моменту і дорівнює головному моменту зовнішніх сил

$$\frac{d\boldsymbol{K_o}}{dt} = \boldsymbol{u} = \boldsymbol{M}_0^e. \qquad (20.10)$$

Тому, якщо на вісь гіроскопа, що обертається, подіє сила, то вісь почне відхилятися не у бік її дії, а по напряму моменту цієї сили відносно центру O, тобто перпендикулярно силі. Як тільки дія сили припиниться, вісь гіроскопа зупиняється: гіроскоп не зберігає руху, повідомленого йому силою. Це властивість гіроскопа називають *стійкістю осі*.

Визначимо кутову швидкість прецесії (переносного руху гіроскопа)

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K}_0 = \boldsymbol{M}_0^e \Rightarrow \omega_{пер} K_0 \sin\theta = M_0 \Rightarrow \omega_{пер} = \frac{M_0}{K_0 \sin\theta} = \frac{M_0}{J_z \Omega \sin\theta}. \qquad (20.11)$$

З (20.11) видно, що чим більше момент інерції гіроскопа і його швидкість обертання навколо головної осі, тим менша кутова швидкість прецесії під дією одного й того ж самого моменту зовнішніх сил.

Також відомо, що прецесія завжди супроводжується нутацією – коливаннями осі Oz відносно її середнього положення з дуже великою частотою і малою амплітудою. В елементарній теорії нутацію не враховують.

20.5. Гіроскоп з двома степенями вільності

Якщо в гіроскопах с трьома степенями вільності, показаних на рис. 20.3, зафіксувати одне з кілець, то отримаємо гіроскоп з двома ступенями вільності. Конструкція такого гіроскопа показана на рис. 20.5: ротор 3 закріплено в кільці 2, яке може обертатися по відношенню до основи 1 навколо осі Ox. Гіроскоп може обертатися навколо власної осі Oz і разом з кільцем навколо осі Ox.

Нехай в деякий момент основа 1 починає обертатися навколо осі Oz_1 з кутовою швидкістю ω. Тоді гіроскоп почне здійснювати вимушену прецесію відносно даної осі, а на ротор з боку підшипників діятиме момент

$$\boldsymbol{M_0} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K_0} .$$

Згідно з третім законом Ньютона, на підшипники з боку осі має діяти гіроскопічний момент, протилежний до моменту зовнішніх сил $\boldsymbol{M_0}$

$$\boldsymbol{M_{гір}} = \boldsymbol{K_0} \times \boldsymbol{\omega},$$

модуль якого визначається за **правилом Жуковського**: якщо гіроскопу, що обертається, повідомити переносний прецесійний рух, то на підшипники, в яких закріплена вісь ротора гіроскопа, почне діяти гіроскопічний момент $M_{гір}$

$$M_{гір} = K_0 \times \omega = K_0\omega \sin\theta = J_z\omega\Omega \sin\theta, \qquad (20.12)$$

який прагне встановити вісь ротора паралельно осі прецесії так, щоб напрями векторів $\boldsymbol{\Omega}$ і $\boldsymbol{\omega}$ співпадали.

Гіроскоп з двома ступенями свободи не має здатності протидіяти зміні напряму осі обертання.

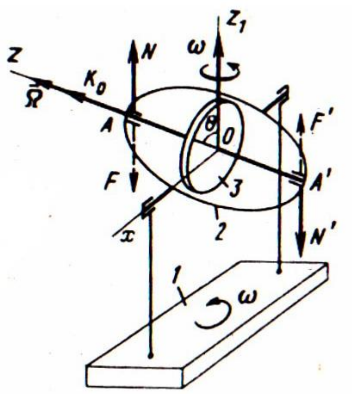


Рис. 20.5. Гіроскоп з двома степенями вільності.

20.6. Використання гіроскопів

Гіроскопи у техніці використовуються завдяки їх властивості зберігати заданий напрямок головної осі в інерційному просторі навіть за умови дії значних збурень. Основні типи гіроскопічних приладів наведені нижче.

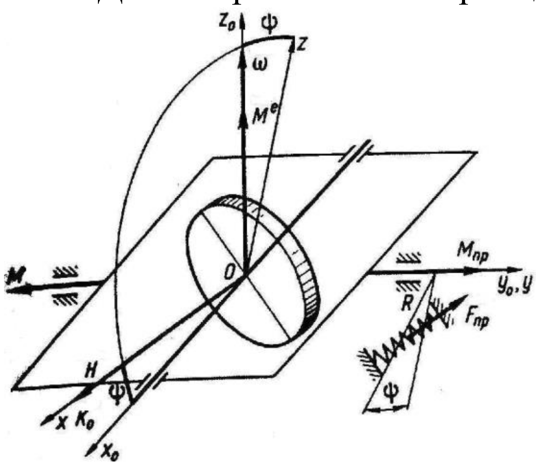
1. *Гіроскопи напрямку*.

Триступеневі гіроскопи в кардановому підвісі, призначені для керування рухом об’єкта в заданому напрямку. Нехай ракета має рухатись в напрямку на нерухому зірку, тоді на початку руху головну вісь гіроскопа орієнтують саме на неї. Якщо в процесі руху ракета відхилилась від заданого напряму на кут α, то цей кут можна виміряти як кут відхилення зовнішньої рамки карданового підвісу відносно ракети, оскільки головна вісь зберігає свій напрям у просторі. Відхилення за допомогою спеціальних датчиків перетворюється в електричний сигнал, що подається на виконавчі органи ракети, які повертають її на початковий курс.

Цей же гіроскоп можна використати для здійснення запрограмованого розвороту ракети на заданий кут. Для цього до осі обертання внутрішньої рамки прикладають момент, який змусить головну вісь гіроскопа разом із зовнішньою рамкою повернутись в заданому напрямку, а під дією цих сил на той же кут повернеться і сама ракета.

2. *Гіротахометри*.

Дані гіроскопічні прилади призначені для вимірювання кутових швидкостей. За конструкцією поділяються на два типи – роторні та вібраційні.



Роторний вимірник – двоступеневий гіроскоп з однією рамкою карданового підвісу, кут повороту якої обмежений пружиною (рис. 20.6).

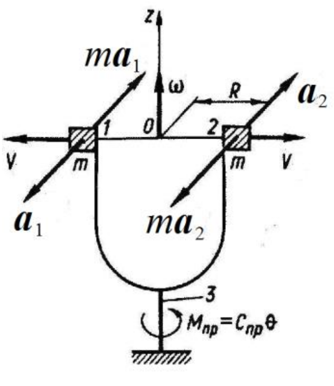
Рис. 20.6. Роторний гіротахометр.

Під час обертання основи з вимірюваною швидкістю ω через опори рамки до гіроскопа буде прикладений певний момент зовнішніх сил, який викликає прецесію гіроскопа відносно осі обертання рамки. У відповідь пружина створить момент протидії, який перешкоджатиме подальшому повороту рамки і визначатиметься жорсткістю пружини *c*. Тоді сумарний кут повороту рамки

$$\psi = H\omega / cR^2$$

буде пропорційним вимірюваній кутовій швидкості основи.

Вібраційний вимірник – двоступеневий гіроскоп, також побудований на використанні моменту сил інерції Коріоліса (рис. 20.7). Дві однакові маси 1 і 2, закріплені на пружних ніжках, коливаються з однаковими за величиною і протилежними за напрямком швидкостями υ. Внаслідок обертання основи з вимірюваною кутовою швидкістю ω виникають прискорення Коріоліса a_1 і a_2, що утворюють гіроскопічний момент сил інерції, який зрівноважується моментом сил пружності, що виникає при закручуванні пружного торсіона 3 і залежить від його жорсткості на скручування *c*. Тоді сумарний кут закручування торсіона



$$\theta = 4mR\upsilon\omega / c$$

буде пропорційним кутовій швидкості основи.

Рис. 20.7. Вібраційний гіротахометр.

3. *Гіроскопічний вимірник швидкості балістичної ракети*.

Ракета стартує вертикально, потім у польоті вона розвертається за допомогою гіроскопа і двигунів на заданий кут α, після досягнення розрахункової швидкості її двигуни вимикаються. Для вимірювання швидкості використовується триступеневий гіроскоп зі зміщеним центром мас ротора 2 і внутрішньої рамки 1, виконаної у формі циліндра (рис. 20.8).

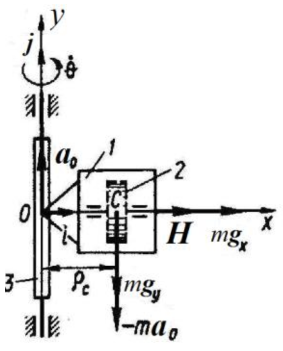


Рис. 20.8. Конструкція гіроскопічного вимірника швидкості.

4. *Гіромаятник*.

Також є триступеневим гіроскопом із зміщеним центром мас, розміщеним таким чином, що його головна вісь (вектор ***H***) була напрямлена вертикально. За відсутності обертання ротора даний прилад є звичайним сферичним маятником, застосовується він для вимірювання відхилення об’єкта від площини горизонту.

Зміщення центра мас маятника (ρ_C = 1,5 мм) обирається таким чином, щоб період його власних коливань дорівнював періоду коливань незбурюваного математичного маятника, довжина якого дорівнює радіусу Землі. Отже, параметри гіромаятника підбираються таким чином, щоб під час руху об’єкта з прискоренням він не відхилявся від вертикалі, як звичайний фізичний маятник. Така властивість дозволяє за будь-яких режимів руху мати точний напрямок на центр Землі.

Питання для самоконтролю

1. Як визначається кінетичний момент тіла при його сферичному русі.
2. Як записуються динамічні рівняння сферичного руху тіла?
3. Яке тверде тіло називають гіроскопом?
4. Які параметри руху літака можна виміряти за допомогою гіроскопа?

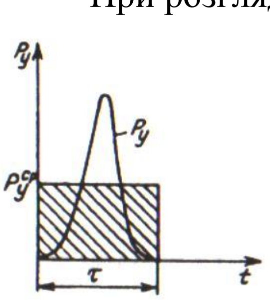
Глава 21. «Елементарна теорія удару»

21.1. Загальні визначення про удар

Удар – явище, при якому тіло або матеріальна точка знаходяться під дією сил значної величини протягом дуже малого проміжку часу. Прикладами є удари м'яча о поверхню, молота о деталь, кулі о перешкоду.

При ударі точки тіла не встигають зміститися, тому будь-якими переміщенням нехтують. При ударі має місце стрибок швидкості – швидкості точок тіла за нескінченно малий проміжок часу змінюють свою величину і напрям. До ударних відносять сили, час дії яких не перевищують $\tau = 10^{-2}$ с.

При розгляді ударних явищ вводяться наступні припущення:



а) Дії інших за природою сил не враховуються;

б) Переміщення точок тіла за час удару дорівнюють нулю;

в) Швидкості точок миттєво змінюють своє значення на кінцеву величину.

Рис. 21.1. Зміна сили в процесі удару.

Оскільки ударні сили дуже великі і за час удару змінюються в широких межах (рис. 21.1), то в механіці при описі удару використовують ударні імпульси.

21.2. Основні теореми теорії удару матеріальної точки

Нехай матеріальна точка маси m рухається під дією сили $\boldsymbol{P}$, а за час τ піддається ще й дії ударної сили $P_{уд}$. При цьому, по теоремі про зміну кількості руху матеріальної точки:

$$d(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}dt \Rightarrow m\boldsymbol{u} - m\boldsymbol{v} = \int_0^{\tau}(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}_{уд})dt,$$

де $\boldsymbol{v}$ – швидкість точки до удару; $\boldsymbol{u}$ – швидкість точки після удару.

Оскільки час τ малий, то по теоремі про середнє маємо

$$\int_0^{\tau}(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}_{уд})dt = (\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}_{уд})\tau = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}_{уд}.$$

Але імпульс зовнішньої сили $\boldsymbol{S}$ за час τ дуже малий в порівнянні з імпульсом ударної сили $\boldsymbol{S}^{уд}$, тому їм нехтують.

Основне рівняння теорії удару: зміна кількості руху матеріальної точки за час удару дорівнює ударному імпульсу, прикладеному до цієї точки

$$m\boldsymbol{u} - m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{P}_{уд}\tau = \boldsymbol{S}_{уд}. \qquad (21.1)$$

Рівняння (20.1) в проекціях на координатні осі має вигляд

$$mu_x - m\upsilon_x = S_x, \qquad mu_y - m\upsilon_y = S_y, \qquad mu_z - m\upsilon_z = S_z. \qquad (21.2)$$

Помножимо обидві частини рівняння (21.1) на радіус-вектор r, проведений із довільного центра O до даної матеріальної точки

$$\boldsymbol{r} \times (m\boldsymbol{u} - m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times S_{уд} = \boldsymbol{r} \times \int_0^{\tau}\boldsymbol{P}_{уд}dt = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{P}_{уд})dt. \qquad (21.3)$$

Отримане рівняння (21.3) має назву **теореми про зміну моменту кількості руху точки при ударі:** зміна моменту кількості руху точки відносно центра O при ударі дорівнює моменту ударного імпульсу відносно того ж центра.

21.3. Основні теореми теорії удару механічної системи

Всі ударні сили, що діють на точки механічної системи, можна розділити на зовнішні і внутрішні. Тоді згідно теореми про зміну кількості руху механічної системи

$$\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}_0 = \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{S}_k^e + \boldsymbol{S}_k^i,$$

де $\boldsymbol{S}_k^e = \int_0^{\tau}\boldsymbol{P}_k^e dt$ і $\boldsymbol{S}_k^i = \int_0^{\tau}\boldsymbol{P}_k^i dt$ – ударний імпульс результуючої зовнішніх і внутрішніх сил відповідно. Оскільки сумарний імпульс внутрішніх сил дорівнює нулю, то

$$\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}_0 = \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{S}_k^e = \boldsymbol{S}_{уд}^e. \qquad (21.4)$$

Рівняння (21.4) має назву **теореми про зміну кількості руху механічної системи при ударі:** зміна кількості руху системи при ударі дорівнює векторній сумі зовнішніх ударних імпульсів, прикладених до точок системи.

Якщо геометрична сума усіх зовнішніх ударних імпульсів протягом певного проміжку часу дорівнює нулю, то згідно (21.4) кількість руху системи за цей час не зміниться. А це значить, що внутрішні ударні імпульси не зможуть змінити кількості руху всієї системи.

У проекціях на координатні осі рівняння (21.4) має вигляд

$$Q_x - Q_{0x} = S_x^e, \qquad Q_y - Q_{0y} = S_y^e, \qquad Q_z - Q_{0z} = S_z^e. \qquad (21.5)$$

Теорема про зміну кінетичного моменту системи: зміна за час удару кінетичного моменту механічної системи відносно деякого центру O дорівнює сумі моментів зовнішніх ударних імпульсів відносно того ж центру

$$\boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}_0 = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{S}_k^e). \qquad (21.6)$$

У проекціях на координатні осі отримаємо

$$K - K_{0x} = \sum_{k=1}^{n} M_x(S_k^e); \quad K - K_{0y} = \sum_{k=1}^{n} M_y(S_k^e); \quad K - K_{0z} = \sum_{k=1}^{n} M_z(S_k^e). \qquad (21.7)$$

З (21.6) і (21.7) видно, що коли сума моментів зовнішніх ударних імпульсів відносно довільного центра або осі дорівнюватиме нулю, то кінетичний момент кількості руху системи відносно даного центра або осі за час удару не зміниться. Це означає, що внутрішні ударні імпульси не можуть змінити кінетичний момент кількості руху механічної системи.

21.4. Удар кулі об нерухому поверхню. Коефіцієнт відновлення

Прямій – удар, при якому швидкість рухомого тіла до зіткнення була спрямована по нормалі до нерухомої поверхні. При цьому розрізняють дві фази удару:

а) *Деформація* – від моменту зіткнення тіл до моменту, коли швидкість кулі дорівнюватиме нулю. Частина кінетичної енергії кулі у момент удару переходить в потенційну енергію деформації, а частина перетворюється на теплоту і розсіюється;

б) *Відновлення* – з моменту зупинки кулі до моменту її відділення від поверхні. Відбувається повне або часткове відновлення форми кулі за рахунок дії пружних сил.

Як відомо, швидкості тіл, що стикаються, до удару більші, ніж після удару. Тому Ньютон ввів поняття про *коефіцієнт відновлення* – відношення швидкості в кінці удару до швидкості на початку удару

$$k = \frac{u}{\upsilon}. \qquad (21.8)$$

Він довів, що дана величина є фізичною сталою, яка залежить від природи стичних тіл і не залежить від швидкостей в момент зіткнення. Коефіцієнт відновлення є головною характеристикою удару. Для його визначення кулю із досліджуваного матеріалу кидають з висоти h_1 на нерухому горизонтальну поверхню з того ж матеріалу і фіксують висоту відскоку h_2 (рис. 21.2).

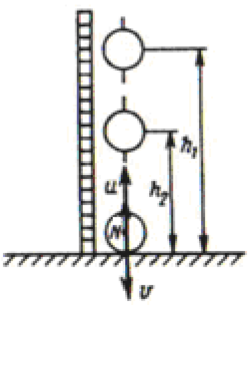


Рис. 21.2. Визначення коефіцієнту відновлення.

Значення швидкостей до і після удару відповідно

$$\upsilon = \sqrt{2gh_1}, \qquad u = \sqrt{2gh_2}.$$

Тоді коефіцієнт відновлення можна знайти через відношення висот

$$k = \frac{u}{\upsilon} = \sqrt{\frac{2gh_2}{2gh_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \qquad (21.9)$$

Оскільки частина енергії витрачається на нагрів кулі, то швидкість в кінці удару менша, ніж на його початку. Залежно від коефіцієнта відновлення розрізняють наступні типи ударів:

– абсолютно непружний удар $k = 0$ ($u = 0$). В такому випадку процес удару відбувається в першій фазі, а форма тіл після удару не відновлюється;

– абсолютно пружний удар $k = 1$ ($u = \upsilon$). Втрати кінетичної енергії не відбувається, а тіла повністю відновлюють свою форму;

– частково пружний удар $0 < k < 1$ ($0 < u < \upsilon$).

Коефіцієнт відновлення для деяких матеріалів має наступні значення: дерево – 0,5; сталь – 0,56; слонова кістка – 0,89; скло – 0,94.

Повний ударний імпульс дорівнює сумі ударних імпульсів за обидві фази удару

$$S = S' + S'' = m\upsilon + mu = m\upsilon(1+k).$$

При абсолютно непружному ударі $S = m\upsilon$, при абсолютно пружному $S = 2m\upsilon$.

21.5. Робота і кінетична енергія при ударі

Для того, аби отримати формулу роботи ударних сил, помножимо скалярно обидві частини рівняння (21.1) спочатку на $\boldsymbol{u}$, а потім на $\boldsymbol{\upsilon}$

$$m\boldsymbol{uu} - m\boldsymbol{u\upsilon} = \boldsymbol{S}_{уд}\boldsymbol{u}, \qquad m\boldsymbol{u\upsilon} - m\boldsymbol{\upsilon\upsilon} = \boldsymbol{S}_{уд}\boldsymbol{\upsilon} \Rightarrow$$

$$mu^2 - m\boldsymbol{u\upsilon} = \boldsymbol{S}_{уд}\boldsymbol{u}, \qquad m\boldsymbol{u\upsilon} - m\upsilon^2 = \boldsymbol{S}_{уд}\boldsymbol{\upsilon}.$$

Склавши отримані рівняння і розділивши їх на два, отримаємо згідно теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

$$A = \frac{mu^2}{2} - \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{\boldsymbol{S}_{уд}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{S}_{уд}\boldsymbol{\upsilon}}{2} = \frac{\boldsymbol{S}_{уд}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\upsilon})}{2}. \qquad (21.10)$$

Рівняння (21.10) має назву **теореми Кельвіна:** робота імпульсу ударної сили дорівнює половині скалярного добутку ударного імпульсу на векторну суму початкової і кінцевої швидкостей точки, до якої цей імпульс прикладений.

Розглянемо механічну систему, що складається з n матеріальних точок. Запишемо теорему Кельвіна для k-ої матеріальної точки

$$\frac{mu_k^2}{2} - \frac{m\upsilon_k^2}{2} = \frac{\boldsymbol{S}_k(\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{\upsilon}_k)}{2},$$

де S_k – сумарний імпульс зовнішніх і внутрішніх ударних сил. Провівши додавання по всім точкам механічної системи, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{mu_k^2}{2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{m\upsilon_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\boldsymbol{S}_k^i + \boldsymbol{S}_k^e\right)(\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{\upsilon}_k)}{2}. \qquad (21.11)$$

Оскільки величини в лівій частині є кінетичною енергією системи до і після удару, то остаточно отримуємо **теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи при ударі**: зміна кінетичної енергії механічної системи при ударі дорівнює сумі робіт зовнішніх і внутрішніх ударних сил

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\boldsymbol{S}_k^i(\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{\upsilon}_k)}{2} + \frac{\boldsymbol{S}_k^e(\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{\upsilon}_k)}{2}\right] = \sum_{k=1}^{n} A_k. \qquad (21.12)$$

В теоремі (21.12) присутні невідомі ударні імпульси, тому аби дану теорему можна було застосувати до розв'язання практичних задач, цих імпульсів необхідно позбутися. В такому випадку застосовують **теорему Карно**, яка для абсолютно непружного удару двох тіл має вигляд: кінетична енергія, втрачена системою тіл при абсолютно непружному ударі, дорівнює тій кінетичній енергії, яку мала б система, якби її тіла рухалися з втраченими швидкостями.

$$T - T_0 = M_1\frac{(\upsilon_1 - u)^2}{2} + M_2\frac{(\upsilon_2 - u)^2}{2}, \qquad (21.13)$$

де $T_0 = \dfrac{M_1\upsilon_1^2 + M_2\upsilon_2^2}{2}$ і $T_1 = \dfrac{(M_1 + M_2)u^2}{2}$ – кінетична енергія системи тіл до і після удару відповідно. Якщо удар є частково пружним, то в цьому випадку втрачена кінетична енергія знаходиться по формулі

$$T_0 - T_1 = \frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{M_1(\upsilon_1 - u)^2 + M_2(\upsilon_2 - u)^2}{2}. \qquad (21.14)$$

У випадку частково пружного удару коефіцієнт відновлення можна визначити по формулі

$$k = \frac{u_2 - u_1}{\upsilon_1 - \upsilon_2} \qquad (21.15)$$

21.6. Прямий центральний удар двох куль

Прямий центральний удар – удар, при якому спільна нормаль до поверхонь тіл в точці дотику проходить через їх центри мас, а швидкості центрів мас до удару спрямовані саме по цій нормалі.

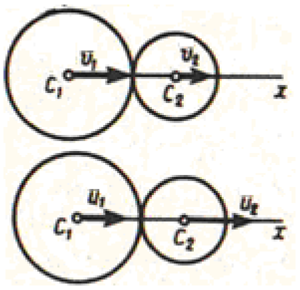


Рис. 21.3. Прямий центральний удар.

Нехай два тіла масами m_1 і m_2, швидкості центрів мас яких на початку удару $\boldsymbol{\upsilon}_1$ і $\boldsymbol{\upsilon}_2$, а в кінці удару u_1 і u_2, рухаються уздовж осі *Ox* (рис. 21.3). В цьому випадку ударні сили, що діють між тілами, будуть внутрішніми. По теоремі про зміну кількості руху механічної системи

$$m_1\boldsymbol{\upsilon}_1 + m_2\boldsymbol{\upsilon}_2 = m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2 .$$

1. *При абсолютно непружному ударі* швидкості після зіткнення однакові:

$$u_1 = u_2 = \frac{M_1\upsilon_1 + M_2\upsilon_2}{M_1 + M_2}. \qquad (21.16)$$

Діючий при цьому на тіло ударний імпульс

$$S_2 = -S_1 = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}(\upsilon_1 - \upsilon_2).$$

2. *При абсолютно пружному ударі*

$$u_1 = \upsilon_1 - \frac{2M_2}{M_1 + M_2}(\upsilon_1 - \upsilon_2); \qquad u_2 = \upsilon_2 + \frac{2M_1}{M_1 + M_2}(\upsilon_1 - \upsilon_2);$$

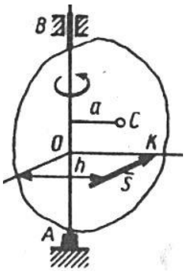
$$S_2 = -S_1 = \frac{2M_1 M_2}{M_1 + M_2}(\upsilon_1 - \upsilon_2). \qquad (21.17)$$

21.7. Центр удару

При ударі по тілу, що обертається навколо нерухомої осі, в місцях закріплення тіла з'являються імпульсні реакції, які можуть привести до прискорення зносу і навіть руйнування деталі. Проте можливо нанести удар таким чином, щоб імпульсні реакції не виникли. Відстань h від осі до місця удару визначається по формулі

$$h = \frac{I_z}{Ma}, \qquad (21.18)$$

де I_z – момент інерції тіла відносно осі обертання, M – маса тіла, a – відстань від осі обертання до центру мас тіла.



Удар має бути спрямований перпендикулярно площині, що проходить через вісь обертання і центр мас тіла з того боку, де знаходиться центр мас. Якщо центр мас системи знаходиться на осі обертання, то в такому випадку центр удару відсутній.

Рис. 21.4. Знаходження центру удару.

Питання для самоконтролю

1. Яке фізичне явище називається ударом?
2. В чому полягає фізичний зміст коефіцієнта відновлення?
3. Як експериментально можна визначити коефіцієнт відновлення?
4. Які типи ударів існують?
5. Чи можуть внутрішні ударні імпульси змінити кількість руху механічної системи?
6. Як формулюється теорема Карно?

Завдання № 21. «Елементарна теорія удару»

Рекомендації до розв'язання задач

1. Визначити швидкості тіл υ_1 і υ_2 в момент перед ударом.
2. Скласти рівняння теорії удару, які дозволять знайти швидкості u_1 і u_2 після удару.
3. При розв'язанні задач на косий удар необхідно розкласти на складові по напряму спільної нормалі в точці дотику і на складові, що знаходяться в

спільній дотичній площині, вивчити характер їх зміни в процесі удару, визначити їх величини після удару.
4. Визначити рух тіл після удару за допомогою загальних теорем динаміки.

Приклад розв'язання задачі (падіння кулі на нерухому поверхню)

Задача 1. Кулька падає з висоти h = 1 м на нерухому горизонтальну площину, виготовлену з такого ж матеріалу. Після другого удару об площину кілька підскакує на висоту h_2 = 50 см. Визначити коефіцієнт відновлення.

Розв'язання

Висота h_1, на яку підніметься куля після першого удару о нерухому поверхню, визначається по формулі (21.9)

$$k = \sqrt{\frac{h_1}{h}} \Rightarrow k^2 = \frac{h_1}{h} \Rightarrow h_1 = k^2 h.$$

Після другого удару кулька підіймається на висоту h_2, яку можна визначити із залежності

$$k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{k^2 h}} \Rightarrow k^2 = \sqrt{\frac{h_2}{h}} \Rightarrow k = \sqrt[4]{\frac{h_2}{h}} = \sqrt[4]{\frac{0{,}5}{1}} = 0{,}84.$$

Задачу розв'язано.

Приклад розв'язання задачі (центральний удар куль)

Задача 2. Куля A доганяє кулю B, маючи при цьому втричі більшу швидкість. Визначити, яким має бути співвідношення мас куль, аби куля A після удару зупинилась. Удар вважати прямим центральним з коефіцієнтом відновлення k = 0,8.

Розв'язання

Оскільки сили взаємодії між кулями є внутрішніми, то слід застосувати закон збереження кількості руху системи, який у даному випадку має вигляд

$$m_A\upsilon_A + m_B\upsilon_B = m_A \cdot 0 + m_B u_B; \qquad 3m_A\upsilon_B + m_B\upsilon_B = m_B u_B.$$

Коефіцієнт відновлення згідно (21.15)

$$k = \frac{u_B - u_A}{\upsilon_A - \upsilon_B} = \frac{u_B}{3\upsilon_B - \upsilon_B} \Rightarrow u_B = 2k\upsilon_B = 1{,}6\upsilon_B.$$

Підставимо значення кінцевої швидкості кулі B в перше рівняння

$$3m_A\upsilon_B + m_B\upsilon_B = 1{,}6m_B\upsilon_B; \qquad 3m_A + m_B = 1{,}6m_B \Rightarrow 3m_A = 0{,}6m_B;$$

$$\frac{m_B}{m_A} = \frac{3}{0{,}6} = 5.$$

Задачу розв'язано.

Приклад розв'язання задачі (центр удару)

Задача 3. Визначити положення центра удару прямокутної мішені для стрільби, якщо її висота дорівнює h = 80 см.

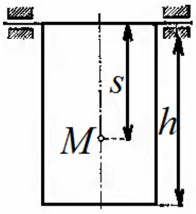


Рис. до задачі 21.8.

Розв’язання

Згідно (21.18) відстань s від осі до центра удару визначається по формулі

$$s = \frac{I_z}{ma},$$

де I_z – момент інерції тіла відносно осі обертання, m – маса тіла, a – відстань від осі обертання до центру мас тіла.

Центр мас однорідного прямокутника знаходиться в точці перетину його діагоналей, тобто на відстані

$$a = \frac{h}{2}$$

від осі обертання.

Момент інерції прямокутника відносно осі, що проходить через його сторону, знаходимо по Додатку Ж

$$I_z = \frac{mh^2}{3}.$$

Підставляємо отримані вирази в початкову формулу

$$s = \frac{I_z}{ma} = \frac{mh^2}{3} \cdot \frac{1}{mh/2} = \frac{2h}{3} = \frac{2 \cdot 80}{3} = 53{,}3\,(\text{см}).$$

Задачу розв’язано.

Завдання №21 до РГР

21.1. Паля масою m_1 = 50 кг забивається копром маси m_2 = 450 кг, який падає з висоти h = 2 м без початкової швидкості. За десять ударів паля заглибилась в землю на δ = 5 см. Визначити силу опору ґрунту, якщо коефіцієнт відновлення при ударі k = 0.

Відповідь: F = 24,5 кН.

21.2. Куля маси m = 50 г рухається на висоті h = 40 см зі швидкістю υ = 10 м/с і влучає в стіну, нахилену під кутом α = 45° до горизонту. Вважаючи удар абсолютно пружним, знайти повну механічну енергію кулі в її найвищій точці. Сили опору повітря до уваги не брати.

Відповідь: E = 2,7 Дж.

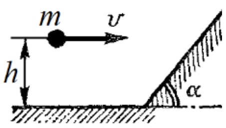


Рис. до задачі 21.2.

21.3. Два вагони масами m_1 = 270 т і m_2 = 310 т рухаються зі швидкостями υ_1 = 25 км/год і υ_2 = 40 км/год. Визначити енергію, втрачену при їх абсолютно непружному ударі.

Відповідь: E = 1,51 МДж.

21.4. При автоматичному завантаженні шахтної кліті вагонетка з вантажем масою m_1 = 1 600 кг, що рухається зі швидкістю υ_1 = 1,9 м/с, набігає на порожню вагонетку маси m_2 = 1 200 кг. Визначити швидкості руху вагонеток після удару, якщо коефіцієнт відновлення k = 0,5.

Відповідь: u_1 = 0,68 м/с, u_2 = 1,63 м/с.

21.5. Дві кулі масами m_1 = 4 кг і m_2 = 2 кг рухались одна на зустріч одній з однаковими по модулю швидкостями. Після частково пружного удару перша куля зупинила, а друга почала рухатись в протилежний бік. Визначити коефіцієнт відновлення куль при ударі.
Відповідь: k = 0,5.

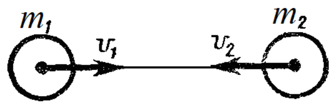
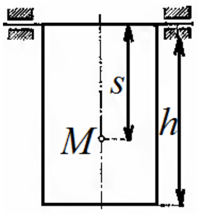


Рис. до задачі 21.5.

21.6. На яку висоту підскочить тіло, що вільно падає з висоти h = 10 м, якщо коефіцієнт відновлення при ударі дорівнює k = 0,5?
Відповідь: h = 2,5 м.

21.7. Молот падає з висоти H = 0,8 м на поковку, причому середня сила ударної взаємодії молота на поковку в 41 раз перевищує його силу тяжіння. Визначити тривалість удару t.
Відповідь: t = 0,01 с.



21.8. Визначити положення центра удару прямокутної мішені для стрільби, якщо її висота дорівнює h = 60 см.
Відповідь: s = 40 см.
Рис. до задачі 21.8.

21.9. Тіло маси m_1 = 20 кг рухається зі швидкістю υ_1 = 8 м/с. З якою швидкістю υ_2 має рухатись йому назустріч тіло маси m_2 = 36 кг, щоб обидва тіла зупинились, зазнавши непружного удару?
Відповідь: υ_1 = 4,44 м/с.

21.10. В нерухому горизонтальну поверхню під кутом α_1 = 45° до її нормалі влучає кулька маси m = 20 г, що рухалась зі швидкістю υ_1 = 5 м/с. Знайти швидкість υ_2 і кут α_2 відскоку, якщо коефіцієнт відновлення k = 0,5.
Відповідь: υ_1 = 0,79 м/с, α_2 = 27°.

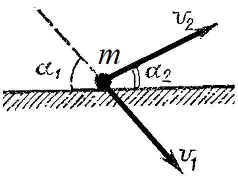
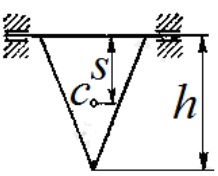


Рис. до задачі 21.10.

21.11. Молот маси m_1 = 10 т падає зі швидкістю υ = 5 м/с на наковальню, маса якої разом з поковкою m_2 = 240 т. Визначити коефіцієнт корисної дії молота, якщо коефіцієнт відновлення при ударі k = 0,3.
Відповідь: η = 0,874.



21.12. Визначити положення центра удару C трикутної мішені для стрільби, якщо її висота дорівнює h = 80 см.
Відповідь: s = 40 см.
Рис. до задачі 21.12.

21.13. Кулька падає з висоти h = 1 м на нерухому горизонтальну площину, виготовлену з того ж матеріалу. Після четвертого удару об площину кулька підскакує на висоту h_4 = 5 см. Визначити коефіцієнт відновлення.
Відповідь: k = 0,69.

21.14. Визначити відношення мас кульок при прямому центральному ударі, якщо до удару перша кулька знаходилась в стані спокою, а після удару залишилась нерухомою друга кулька. Коефіцієнт відновлення прийняти рівним k = 0,75.
Відповідь: m_1/m_2 = 1,33.

21.15. Швидкості центрів мас двох куль, що рухались назустріч одна одній дорівнювали відповідно υ_1 = 6 м/с і υ_2 = 10 м/с, а маса першої кулі – m_1 = 10 кг. Визначити масу другої кулі, якщо після непружного удару обидві кулі зупинились.
Відповідь: m_2 = 6 кг.

21.16. Стержень AB довжиною l = 0,5 м і масою m = 2,5 кг має шарнірне кріплення в точці A, а його повороту перешкоджає спіральна пружина з жорсткістю c = 200 Н/рад, яка не напружена при вертикальному положенні стержня. В певний момент часу по стержню в точці B завдається удар, імпульс якого перпендикулярний до осі стержня. Визначити величину цього імпульсу, якщо відомо, що під його дією стержень відхилився на кут α = 45°.
Відповідь: S = 10,3 Н·м.

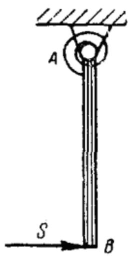


Рис. до задачі 21.16.

21.17. При зіткненні матеріальної точки M з перешкодою кут падіння α = 30°, а кут відбиття β = 36°. Швидкість точки після удару υ_2 = 5,1 м/с. Нехтуючи силами тертя в момент удару, визначити початкову швидкість точки υ_1.
Відповідь: υ_1 = 6 м/с.

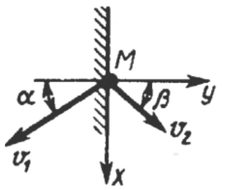


Рис. до задачі 21.17.

21.18. Центр мас неоднорідного стержня маси m = 2,4 кг і довжини l = 0,8 м знаходиться на відстані x_C = 0,37 м, а центр удару – на відстані a = 0,5 м. Визначити момент інерції стержня відносно осі обертання Oz.
Відповідь: I = 0,444 кг·м^2.

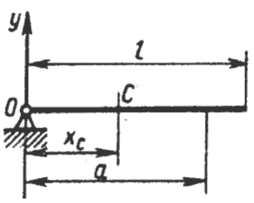


Рис. до задачі 21.18.

21.19. Куля 1, підвішена на нитці 2, б’є зі швидкістю υ_1 = 0,5 м/с по нерухомій кулі 4, підвішеній на нитці 3. Визначити швидкість після удару кулі 4, якщо коефіцієнт відновлення k = 0,8, а маси куль однакові.
Відповідь: υ_2 = 0,45 м/с.

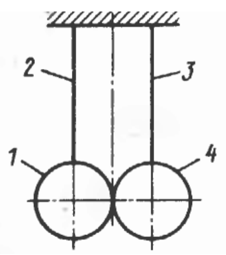
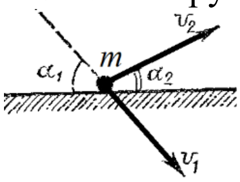


Рис. до задачі 21.19.

21.20. В нерухому горизонтальну поверхню під кутом α_1 = 45° до неї влучає кулька маси m = 20 г, що рухалась зі швидкістю υ_1 = 5 м/с. Знайти ударний імпульс S, якщо коефіцієнт відновлення k = 0,5.



Відповідь: S = 0,02 Н·с.

Рис. до задачі 21.20.

21.21. Дві кулі 1 і 2 ударяються з протилежними за напрямком, але рівними за модулем швидкостями υ = 6 м/с. Визначити швидкість тіла 2 після зіткнення, якщо маси куль m_1 = 2 кг і m_2 = 1 кг, а коефіцієнт відновлення при ударі k = 0,5.

Відповідь: υ_2 = 6 м/с.

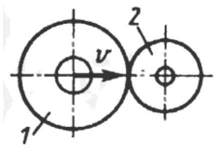


Рис. до задачі 21.21.

21.22. Знайти відстань a від центра удару до осі обертання O однорідного стержня довжини l = 0,6 м і маси m = 0,8 кг і матеріальної точки маси m_1 = 0,2 кг. Відстань від центра мас до осі обертання y_C = 0,36 м, а момент інерції I_0 = 0,168 кг·м^2.

Відповідь: a = 0,467 м.

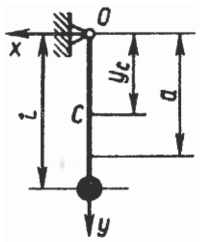


Рис. до задачі 21.22.

21.23. Тіло маси m_1 = 1кг влучає зі швидкістю 2 м/с в нерухоме тіло маси m_2 = 3 кг. Вважаючи удар абсолютно непружним, визначити втрати кінетичної енергії.

Відповідь: ΔT = 1,5 Дж.

Глава 22. «Принцип кінетостатики»

22.1. Принцип кінетостатики точки (Германа – Ейлера – Д'Аламбера)

Для розв'язання першої задачі динаміки невільної матеріальної точки зручно використовувати формальний *метод кінетостатики* – спосіб вирішення задач, при якому диференціальним рівнянням руху надають вигляд рівнянь статики. Даний метод еквівалентний другому закону Ньютона та аксіомі про звільнення від в'язей, його найбільш раціонально застосовувати при розв'язанні задач, в яких необхідно визначити реакції в'язей.

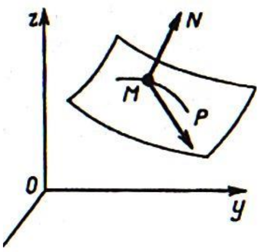


Рис. 22.1. До виводу принципу кінетостатики точки.

Нехай матеріальна точка M маси m рухається по ідеально гладкій поверхні під дією активної сили $\boldsymbol{P}$ (рис. 22.1). У відповідь на дію активної сили з боку поверхні виникає сила нормальної реакції $\boldsymbol{N}$. Другий закон Ньютона у цьому випадку

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N}.$$

Переносимо усі доданки в один бік

$$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} - m\boldsymbol{a} = 0, \qquad (22.1)$$

після чого вводимо поняття *даламберової сили інерції*

$$\boldsymbol{\Phi} = -m\boldsymbol{a}. \qquad (22.2)$$

Сила інерції завжди напрямлена в бік, протилежний прискоренню, тобто вона протилежна напрямку прискореного руху і збігається за напрямком із сповільненим рухом. Підставивши (22.2) до (22.1), отримаємо закон руху невільної матеріальної точки

$$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{\Phi} = 0. \qquad (22.3)$$

Рівняння (22.2) є **принципом кінетостатики для матеріальної точки**: для невільної матеріальної точки в кожен момент часу сума активних сил, що прикладені до неї, реакцій в'язей і сил інерції дорівнює нулю.

Слід зазначити, що рівняння (22.3) не є умовою рівноваги сил, оскільки сила інерції є формальною і не пов'язана з реальними силами, якими є активна сила $\boldsymbol{P}$ і реакція в'язі $\boldsymbol{N}$.

У випадку руху *вільної матеріальної точки* відсутня реакція в'язі, тому принцип кінетостатики має вигляд

$$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{\Phi} = 0. \qquad (22.4)$$

В проекціях на координатні осі рівняння (22.4) записується наступним чином

$$P_x - m\ddot{x} = 0, \quad P_y - m\ddot{y} = 0, \quad P_z - m\ddot{z} = 0.$$

Слід зазначити, що сили інерції вводяться лише тоді, коли для вивчення руху застосовується принцип Даламбера, причому рух точки або тіла розглядається виключно по відношенню до інерціальних систем відліку.

22.2. Складові сили інерції

В різних задачах динаміки доводиться проектувати сили інерції на різні осі координат і розкладати по різним напрямам, проте найчастіше по напрямам дотичної і головної нормалі.

У випадку криволінійного руху точки її прискорення можна розкласти на дві складові – нормальну і дотичну

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_\tau. \qquad (22.5)$$

На ті ж складові розкладається і сила інерції

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}_n + \boldsymbol{\Phi}_\tau = -m\boldsymbol{a}_n - m\boldsymbol{a}_\tau.$$

Дотична сила інерції спрямована у бік, протилежний дотичному прискоренню, а її модуль визначається формулою

$$\Phi_\tau = m\left|\frac{d\upsilon}{dt}\right|. \qquad (22.6)$$

Нормальну силу інерції часто називають відцентровою силою. Вона спрямована у бік випуклості траєкторії, а її модуль визначається формулою

$$\Phi_n = m\frac{\upsilon^2}{R} = m\omega R. \qquad (22.7)$$

22.3. Принцип кінетостатики для механічної системи

Нехай маємо система з n матеріальних точок. У такому разі для усіх точок згідно з принципом Даламбера отримуємо

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{P}_k + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{N}_k + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\Phi}_k^{ін} = 0. \qquad (22.8)$$

де $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{P}_k$ – рівнодійна усіх активних сил; $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{N}_k$ – рівнодійна усіх реакцій в’язей; $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\Phi}_k^{ін}$ – рівнодійна сил інерції усі точок системи.

Помножимо обидві частини рівняння (22.8) на радіус-вектор кожної з точок, проведений з деякого довільного центру O

$$\sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{P}_k) + \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{N}_k) + \sum_{k=1}^{n} \left(\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{\Phi}_k^{ін}\right) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_{ok}(\boldsymbol{P}_k) + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_{ok}(\boldsymbol{N}_k) + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_{ok}\left(\boldsymbol{\Phi}_k^{ін}\right) = 0; \qquad \boldsymbol{M}^a + \boldsymbol{M}^p + \boldsymbol{M}^{ін} = 0 \qquad (22.9)$$

Рівняння (22.8) і (22.9) утворюють **принцип кінетостатики для механічної системи:** для невільної механічної системи геометрична сума головних векторів активних сил, реакцій в'язів і сил інерції дорівнює нулю. Крім того, векторна сума головних моментів активних сил, реакцій в’язей і сил інерції рухомої системи дорівнює нулю.

Векторному рівнянню (22.9) відповідають шість рівнянь у координатній формі:

$$F_x + N_x + \Phi_x^{ін} = 0, F_y + N_y + \Phi_y^{ін} = 0, F_z + N_z + \Phi_z^{ін} = 0;$$
$$M_x^a + M_x^p + M_x^{ін} = 0, \quad M_y^a + M_y^p + M_y^{ін} = 0, \quad M_z^a + M_z^p + M_z^{ін} = 0. \qquad (22.10)$$

Рівняннями (22.10) особливо зручно користуватись при вивченні руху твердого тіла або системи твердих тіл, оскільки вони не містять внутрішніх сил. Для вивчення руху змінної системи цих рівнянь вже недостатньо.

22.4. Головний вектор і головний момент сил інерції

Головний вектор сил інерції механічної системи дорівнює добутку маси тіла на прискорення центру мас і спрямований в протилежний від прискорення бік

$$\boldsymbol{\Phi}^{ін} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\Phi}_k^{ін} = -M\boldsymbol{a}_c. \qquad (22.11)$$

Якщо прискорення центру мас розкласти згідно (20.5) на дотичну і нормальну складові

$$\boldsymbol{\Phi}^{ін} = \boldsymbol{\Phi}_\tau^{ін} + \boldsymbol{\Phi}_n^{ін} = -M\boldsymbol{a}_\tau^{ін} - M\boldsymbol{a}_n^{ін}.$$

Головний момент сил інерції механічної системи (твердого тіла) відносно довільного центра O або осі z дорівнює взятій із знаком мінус похідній за часом від кінетичного моменту системи (тіла) відносно того ж центру або осі

$$\boldsymbol{M}_O^{ін} = -\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt} = -\boldsymbol{J}_O\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{M}_z^{ін} = -\frac{d\boldsymbol{K}_z}{dt} = -\boldsymbol{J}_z\boldsymbol{\varepsilon}. \qquad (22.12)$$

Згідно основної теореми статики, систему сил інерції твердого тіла можна замінити однією силою $\boldsymbol{\Phi}^{ін}$, прикладеною в довільно вибраному центрі O, і парою з моментом $\boldsymbol{M}^{ін}$. Можливі наступні випадки приведення сил інерції твердого тіла:

1. При поступальному русі сили інерції твердого тіла приводяться до рівнодійної, що дорівнює $\boldsymbol{\Phi}^{ін}$ і проходить через центр мас тіла

$$\boldsymbol{\Phi}^{ін} = -M\boldsymbol{a}_C.$$

2. При обертальному русі навколо осі z система сил інерції зводиться до рівнодійної $\boldsymbol{\Phi}^{ін}$, що прикладена в довільному центрі зведення O, і до пари сил з моментом $\boldsymbol{M}^{ін}$

$$\boldsymbol{\Phi}^{ін} = -\boldsymbol{M}\boldsymbol{a}_C, \quad \boldsymbol{M}_z^{ін} = -\boldsymbol{J}_z\boldsymbol{\varepsilon}.$$

3. Якщо вісь обертання проходить через центр мас тіла, то головний вектор сил інерції $\boldsymbol{\Phi}^{ін} = 0$, оскільки прискорення центра мас $\boldsymbol{a}_C = 0$, і система приводиться до пари з моментом, який визначається по другій формулі (22.12).

4. При плоскопаралельному русі система сил інерції зводиться до рівнодійної $\boldsymbol{\Phi}^{ін}$, що лежить в площині симетрії і прикладена в центрі мас тіла, і пари з моментом

$$\boldsymbol{M}_{Cz}^{ін} = \boldsymbol{J}_{Cz}\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Питання для самоконтролю

1. В чому полягає суть принципу Даламбера?
2. В якому випадку вводять до розгляду сили інерції?
3. До чого зводяться сили інерції твердого тіла при поступальному русі?
4. До чого зводяться сили інерції твердого тіла при обертальному русі?
5. До чого зводяться сили інерції твердого тіла при плоскопаралельному русі?
6. В яких системах відліку розглядається рух тіла при застосуванні принципу Даламбера?

Завдання № 22. «Принцип кінетостатики»

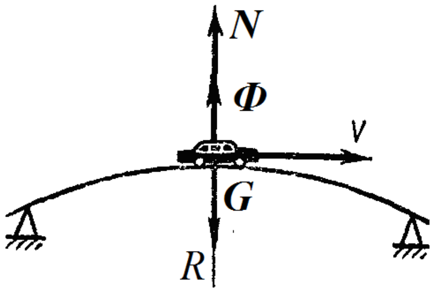
Рекомендації до розв'язання задач

1. Визначити точку, рух якої розглядається, і показати її на рисунку.
2. Вказати на рисунку всі активні сили, що діють на матеріальну точку.
3. Вивільнити точку від в'язей, замінивши їх реакціями, реакції також нанести на рисунок.
4. Додати сили інерції до отриманої системи сил, показавши їх на рисунку.
5. Використавши принцип Даламбера, скласти рівняння (22.3) принципу кінетостатики і знайти шукану величину.

Приклад розв'язання задачі

Задача 1. Автомобіль маси m = 1 000 кг рухається по випуклому мосту зі швидкістю υ = 10 м/с. Визначити силу тиску автомобіля на міст в момент проходження його середини, якщо радіус кривини в середині моста R = 50 м.

Розв'язання



Розглянемо автомобіль в момент проходження середини моста. На нього діє доцентрова сила тяжіння і протилежна їй сила реакції моста, причому ці сили не зрівноважують одно одну, оскільки автомобіль рухається.

Рис. 22.2. До задачі 1.

Перед тим, як прикласти до системи силу інерції, визначимо величину і напрям прискорення автомобіля. Оскільки автомобіль рухається з постійною швидкістю, то дотична складова прискорення відсутня і прискорення автомобіля дорівнює його нормальній складовій

$$a = a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{10^2}{50} = 2\,(\text{м/с}^2).$$

Сила інерції по модулю дорівнює

$$\Phi = ma_n = 1000 \cdot 2 = 2000\,(\text{Н})$$

і направлена у бік випуклості траєкторії (рис. 22.2).

Приклавши силу інерції, можна записати рівняння статики для даної системи в проекції на нормальну вісь

$$\sum_{k=1}^{n} Y_k = 0.\ \ N + \Phi - G = 0 \Rightarrow N = mg - \Phi = 1000 \cdot 9{,}81 - 2000 = 7810\,(\text{Н}).$$

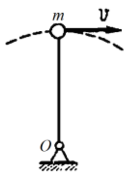
Задачу розв'язано.

Завдання №22 до РГР

22.1. Прискорення швидкісного ліфту висотної будівлі при підйомі змінюється від a_1 = 2 м/с^2 до a_2 = - 2 м/с^2. Визначити натяг троса в момент максимального і мінімального прискорення, якщо вага кабіни з пасажирами G = 1 200 Н.

Відповідь: T_1 = 1 445 Н, T_2 = 955 Н.

22.2. Кулька масою m = 0,5 кг, прив'язана до нитки довжиною l = 0,7 м, обертається з постійною швидкістю в вертикальній площині, роблячи 1 оберт за секунду. Визначити силу натягу нитки в найвищому положенні кульки.



Відповідь: T = 8,9 Н.

Рис. до задачі 22.2.

22.3. З якою швидкістю має їхати мотоцикліст по арочному мосту радіуса R = 20 м, аби під час проходження верхньої точки не створювати тиску на міст?

Відповідь: υ = 14 м/с.

22.4. На невагомому нерозтяжному тросі підвішений вантаж маси m = 2 кг. Визначити натяг тросу, якщо за його допомогою вантаж підіймається угору з прискоренням a = 3 м/с^2.

Відповідь: T = 25,6 Н.

22.5. Вантажі A і B вагою P = 60 Н кожен ковзають без тертя по бічним граням нерухомого клина. Нехтуючи масами нитки і блока, знайти сили натягу нитки, якщо кути в основі клина α = 60° і β = 45°.

Відповідь: T = 47,2 Н.

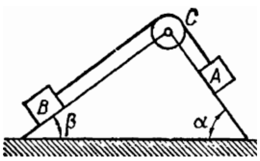


Рис. до задачі 22.5.

22.6. Електричний двигун маси M = 40 кг встановлено на горизонтальному фундаменті. Центр тяжіння ротора C зміщений від осі обертання O на відстань r = 5 см. Визначити максимальну силу тиску на фундамент з боку двигуна, якщо маса ротора m = 4 кг, а його кутова швидкість ω = 5 рад/с.

Відповідь: F_{max} = 397,4 Н.

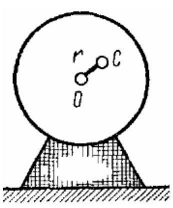


Рис. до задачі 22.6.

22.7. Вантаж B вагою Q = 50 Н опускається під дією власної ваги, приводячи до руху вантаж A вагою P = 40 Н, який знаходиться на похилій площині з кутом нахилу до горизонту α = 30°. Визначити горизонтальну складову сили тиску на виступ C з боку похилої площини, якщо коефіцієнт тертя ковзання між тілом A і площиною дорівнює f = 0,25.

Відповідь: F_{max} = 23,6 Н.

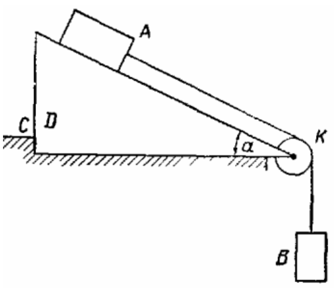


Рис. до задачі 22.7.

22.8. Вантаж A вагою P_A = 150 Н за допомогою нерозтяжної нитки, перекинутої через блок В вагою P_B = 5 Н, приєднаний до вантажу С вагою P_C = 95 Н, який вільно ковзає по горизонтальній площині. Визначити силу, з якою блок діє на вісь, якщо його маса рівномірно розподілена по ободу.

Відповідь: N = 86,5 Н.

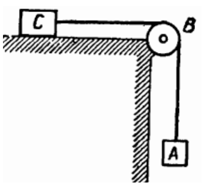


Рис. до задачі 22.8.

22.9. Математичний маятник довжиною l = 0,5 м і вагою P = 10 Н відвели на кут φ_0 = 15° від положення рівноваги і надали йому початкову швидкість υ_0 = 5 м/с, спрямовану угору перпендикулярно до нитки. Знайти натяг нитки маятника в момент, коли вона утворює з вертикаллю кут φ = 60°.

Відповідь: T = 46,6 Н.

22.10. Залізничний вагон здійснює вертикальні коливання по закону

$$y = 0{,}4\sin 10\pi t.$$

Коливання відбуваються на ресорах, розташованих між кузовом вагона масою M = 2 т і його візком масою m = 200 кг. Визначити мінімальну і максимальну силу тиску вагона на рейки.

Відповідь: T_{max} = 30 кН, T_{min} = 14 кН.

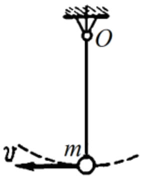
22.11. На невагомому нерозтяжному тросі підвішений вантаж маси m = 2 кг. Визначити натяг тросу, якщо за його допомогою вантаж опускається донизу з прискоренням a = 4,5 м/с^2.
Відповідь: T = 10,6 Н.
22.12. Кулька масою m = 0,5 кг, прив'язана до нитки довжиною l = 0,7 м, обертається з постійною швидкістю в вертикальній площині, роблячи 1 оберт за секунду. Визначити силу натягу нитки в найнижчому положенні кульки.
Відповідь: T = 18,7 Н.


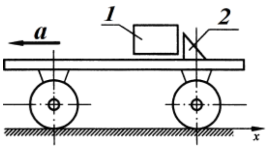
Рис. до задачі 22.12.
22.13. Підйомник вагою P = 5 000 Н підіймається рівноприскорено і за перші 5 с проходить відстань s = 40 м. Визначити натяг тросу підйомника.
Відповідь: T = 6 631 Н.
22.14. Визначити силу, з якою вантаж 1 маси m = 5 кг діє на упор візка 2, який рухається поступально з прискоренням a = 4 м/с^2.
Відповідь: F = 20 Н.


Рис. до задачі 21.14.

22.15. Два тіла рухаються з однаковими кутовими швидкостями ω по колах радіуса R_1 = 20 см і R_2 = 40 см відповідно. Визначити відношення мас m_1 і m_2 даних тіл, якщо їх відцентрові сили інерції однакові.
Відповідь: m_1/m_2 = 2.

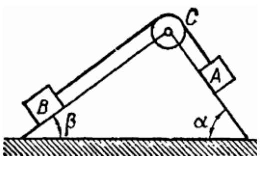
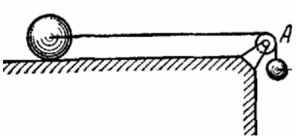
22.16. Точка маси m = 2 кг рухається по шорсткій горизонтальній площині під дією сили F = 10 Н, спрямованої під кутом α = 30° до горизонту. Визначити прискорення точки, якщо коефіцієнт тертя ковзання f = 0,1.
Відповідь: a = 3,6 м/с^2.
22.17. Залізний прут довжини l = 6 м і діаметра d = 0,03 м обертається в горизонтальній площині навколо осі, що проходить через його кінець. До другого кінця прикріплена куля масою m = 200 кг. Визначити найбільшу кутову швидкість стержня, яка не призведе до його руйнування, якщо межа міцності матеріалу дорівнює $\sigma_{міц}$ = 140 МПа.
Відповідь: ω = 18 рад/с.
22.18. Підйомник вагою P = 5 000 Н опускається рівноприскорено і за перші 5 с проходить відстань s = 40 м. Визначити натяг тросу підйомника.
Відповідь: T = 3 369 Н.
22.19. Вантажі A і B однакової ваги ковзають по без тертя по бічним граням нерухомого клина. Нехтуючи масами нитки і блока C, знайти прискорення вантажів, якщо кути в основі клина α = 60° і β = 45°.
Відповідь: a = 0,8 м/с^2.


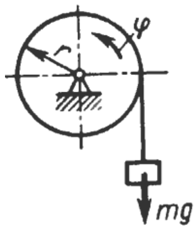
Рис. до задачі 22.19.

22.20. Дві кулі масами m_1 = 9 кг і m_2 = 2 кг з’єднані за допомогою мотузки довжини l = 5 м, перекинутої через блок. Перша куля може ковзати без тертя по горизонтальній дошці, а друга куля рухається донизу, тягнучи за собою першу.



Визначити швидкість руху системи в момент, коли друга куля опуститься на 4 метри.
Відповідь: v = 3,6 м/с.
Рис. до задачі 22.20.

22.21. Вантаж маси m = 60 кг підвішений на канаті, намотаному на барабан



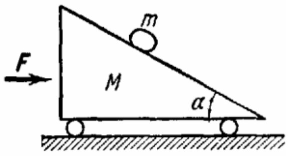
радіуса r = 0,4 м, який обертається згідно рівняння

$$\varphi = 0{,}6t^2 \text{, рад.}$$

Визначити натяг канату при підйомі вантажу.
Відповідь: T = 617 Н.
Рис. до задачі 22.21.

22.22. Дві кулі масами m_1 = 9 кг і m_2 = 2 кг з’єднані за допомогою мотузки довжини l = 5 м, перекинутої через блок (рис. до задачі 21.20). Перша куля може ковзати без тертя по горизонтальній дошці, а друга рухається донизу, тягнучи за собою першу. Визначити час, за який друга куля опуститься на 4 м.
Відповідь: t = 2 с.

22.23. Яку горизонтальну силу F необхідно прикласти до похилої площини



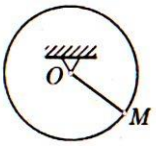
маси M = 20 кг, аби тіло маси m = 2 кг, що знаходиться на ній, залишалось в стані спокою відносно похилої площини. Кут нахилу площини до горизонту α = 30°.
Відповідь: F = 124,6 Н.
Рис. до задачі 22.23.

Глава 23. «Принцип можливих переміщень»

23.1. Класифікація в’язей

Наведена раніше класифікація в’язей не є повною. Оскільки в аналітичній механіці в’язі відіграють важливу роль, то їх класифікація потребує розширення. Так з геометричної точки зору можна запропонувати наступну класифікацію в'язей:

1. *Одностороння* (така, що не утримує) – перешкоджає переміщенню точки лише в одному напрямі. Обмеження, що накладаються такими в'язями, записуються у вигляді нерівностей. Так кулька M на нитці OM (рис. 23.1) може



знаходитися всередині сфери або на її поверхні. Рівняння в'язі в такому випадку

$$x^2 + y^2 + z^2 \le l^2. \tag{23.1}$$

Рис. 23.1. Одностороння в’язь.

2. *Двостороння* (така, що утримує) – перешкоджає переміщенню точки в двох протилежних напрямах. Обмеження, що накладаються такою в'яззю, записуються у вигляді рівнянь. Так кулька M на жорсткому стержні OM може знаходитися тільки на поверхні сфери. Рівняння в'язі в такому випадку

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2. \tag{23.2}$$

З іншого боку, в залежності від виду рівняння в’язі, всі їх поділяють на:
1. *Голономні* – в’язі, які накладають обмеження тільки на координати точки. Їх рівняння не містять похідних від координат, або можуть бути зведені до такого виду. Голономними рівняннями є вирази (23.1) і (23.2).
2. *Неголономні* – в’язі, які крім координат накладають обмеження на швидкості або прискорення точки. Їх не можна виразити рівняннями без похідних від координат або диференціальними рівняннями, які інтегруються. Бувають першого (входять перші похідні від координат) і другого порядків.

Голономні в'язі, в свою чергу, бувають двох типів:
1. *Стаціонарні* – в’язі, рівняння яких в явному вигляді не містить час. Усі наведені вище рівняння в'язів є стаціонарними.
2. *Нестаціонарні* – в’язі, рівняння яких містить час в явному виді. Наприклад, точка здійснює коливання на нитці, довжина якої змінюється по закону

$$l = l_0 - ut$$

де l_0 – початкова довжина нитки.

Як витікає з (19.8), перпендикулярна сила не здійснює роботи, тому робота ідеальної реакції на віртуальному переміщенні дорівнює нулю. *Ідеальні* – в'язі, для яких сума елементарних робіт їх реакцій на будь-якому переміщенні системи дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^p = 0. \tag{23.3}$$

Оскільки кожна з точок системи знаходиться в рівновазі, то сума робіт усіх активних сил (зовнішніх і внутрішніх) і реакцій в'язів при будь-якому переміщенні кожної з точок має дорівнювати нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^p = 0. \tag{23.4}$$

23.2. Поняття про можливі переміщення

В попередніх главах теоретичної механіки часто використовувалось поняття **диференціала функції** – елементарної зміни функції за рахунок зміни величини її аргументу

$$dy = y_2 - y_1 = f(x + \Delta x) - f(x).$$

В аналітичній механіці наряду з диференціалом використовується поняття **варіації функції** – елементарної зміни виду функції при сталому значенні її аргументу

$$\delta y = y_2 - y_1 = f_2(x) - f_1(x).$$

Дійсним переміщенням матеріальної точки називають дозволене накладеними в’язями елементарне переміщення $\boldsymbol{dr}$, яке точка здійснює за нескінченно малий проміжок часу dt

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}dx + \boldsymbol{j}dy + \boldsymbol{k}dz.$$

Характер даного переміщення залежить від прикладених сил, вигляду накладених в'язей і початкових умов руху.

Дійсним переміщенням механічної системи називають сукупність дійсних переміщень точок системи.

Можливим переміщенням матеріальної точки називають уявне елементарне переміщення $\delta\boldsymbol{r}$, дозволене накладеними в'язями

$$\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\delta x + \boldsymbol{j}\delta y + \boldsymbol{k}\delta z.$$

Можливе переміщення визначається лише накладеними в'язями і не залежить від прикладених сил.

Можливим переміщенням механічної системи вважають будь-яку сукупність елементарних переміщень точок даної системи із займаного положення, які допускаються накладеними на систему в'язями.

У випадку стаціонарних в'язей дійсне переміщення точки є одним з числа її можливих переміщень, для нестаціонарних в'язей дійсне переміщення розглядається при миттєво зупинених в'язях у фіксований момент часу, тому не є частковим випадком можливих переміщень.

У загальному випадку система може мати безліч можливих переміщень, але для будь-якої системи можна вказати деяке число незалежних між собою переміщень, через які можуть бути виражені усі інші. Таке число незалежних можливих переміщень називається числом *степеней вільності* даної системи. Вільна точка має три степені вільності – δx, δy і δz; точка на площині матиме дві степені – δx і δy; а та, що рухається по кривій – одну δs.

23.3. Принцип можливих переміщень

В рівняння руху або рівноваги тіл наряду з активними силами входять і реакції в'язей, які часто є невідомими, що ускладнює розв'язання задач. Однак якщо у в'язях відсутнє тертя (ідеальні в'язі), то на базі принципу можливих переміщень можна отримати рівняння, в які не входять сили реакції в'язей.

Принцип можливих переміщень: для рівноваги механічної системи з ідеальними в'язями необхідно і достатньо, аби сума елементарних робіт усіх діючих на неї активних сил при будь-якому можливому переміщенні системи дорівнювала нулю

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A_k^a = 0 \to \sum_{k=1}^{n}(F_{kx}^a\delta x_k + F_{ky}^a\delta y_k + F_{kz}^a\delta z_k) = 0. \qquad (23.5)$$

За допомогою принципу можливих переміщень достатньо просто розв'язувати задачі рівноваги твердого тіла або системи твердих тіл, а також визначати залежності між величинами заданих сил. Найбільш ефективним даний метод є в задачах про рівновагу систем твердих тіл. Виходячи з даного принципу, можливо вивести рівняння рівноваги твердого тіла під дією як плоскої, так і просторової системи сил.

Якщо не всі в'язі, накладені на систему, є ідеальними, то до заданих сил необхідно додати сили тертя, після чого прирівняти до нуля сумарну роботу активних сил і сил тертя на можливих переміщеннях системи.

Принцип можливих переміщень може бути використаний і до розрахунку невідомих реакцій в'язей. Для визначення такої реакції відкидають відповідну в'язь, внаслідок чого система отримує додаткову степінь вільності, і надають системі переміщення, що відповідає даній степені вільності. У такому випадку до рівняння робот реакція в'язі входить як невідома активна сила.

Завдання № 23. «Принцип можливих переміщень»

Рекомендації до розв'язання задач

Система з одним степенем вільності

1. Нанести на рисунок задані сили.
2. За наявності неідеальних в'язей додати відповідні сили реакцій.
3. За необхідності визначити величину сили реакції в'язі та застосувати принцип звільнення від в'язей.
4. Надати можливе переміщення одній з точок системи і виразити через нього можливі переміщення точок прикладення усіх сил, що діють на систему.
5. Знайти суму робіт усіх сил на відповідних можливих переміщеннях їх точок прикладення і прирівняти дану суму нулю.
6. Розв'язати отримане рівняння рівноваги і визначити шукану величину.

Система з кількома степенями вільності

1. Нанести на рисунок задані сили.
2. За наявності неідеальних в'язей додати відповідні сили реакцій.
3. За необхідності визначити величину сили реакції в'язі та застосувати принцип звільнення від в'язей.
4. Обрати незалежні можливі переміщення точок системи в кількості, рівній числу її степеней вільності.
5. Надати можливе переміщення, що відповідає одній степені вільності, вважаючи переміщення, що відповідають іншим степеням вільності, рівними нулю.
6. Виразити через надане переміщення можливі переміщення точок прикладення усіх сил, що діють на систему.
7. Знайти суму робіт усіх сил на відповідних можливих переміщеннях їх точок прикладення і прирівняти дану суму нулю.
8. Послідовно виконати пункти 5 – 7 для усіх незалежних можливих переміщень системи.
9. Розв'язати отриману систему рівнянь рівноваги і визначити шукані величини.

Приклад розв'язання задачі

Задача 1. Симетрична балка AOB навантажена силами P = 5 кН і Q = 1 кН (рис. 23.2). Знайти горизонтальну складову реакції шарніра B, якщо розміри балки: a = 0,5 м, b = 2,5 м, h = 4 м.

Розв'язання

Подумки замінимо шарнірно нерухому опору в точці B шарнірно рухомою, аби дана точка могла переміщуватись в горизонтальному напрямку. Після цього нанесемо на рисунок можливе переміщення опори δs_B.

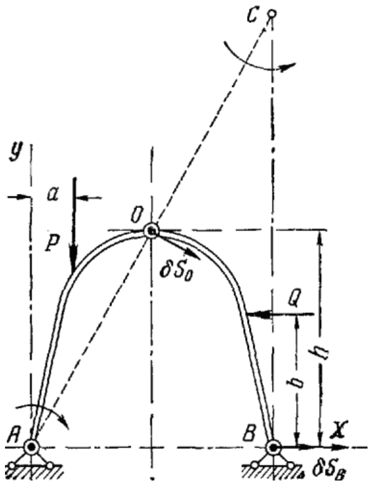


Рис. 23.2. До задачі 1.

Переміщення опори B призведе до повороту половини арки OA навколо нерухомої точки A на деякий кут $\delta\varphi_A$. При цьому точка O отримає можливе переміщення δs_O, спрямоване по дотичній по дузі кола, що описує точка O, тобто перпендикулярно AO.

Знайдемо миттєвий центр обертання половини арки OA на перетині перпендикулярів до можливих переміщень δs_O і δs_B. Тепер переміщення половини арки OB можна представити як поворот на елементарний кут $\delta\varphi_A$ навколо точки C.

Згідно принципу можливих переміщень

$$\sum \delta A = \delta A_X + \delta A_Q + \delta A_P = 0.$$

Визначимо роботу кожної з сил на елементарних переміщеннях

$$\delta A_X = M_C(\boldsymbol{X})\delta\varphi_C = X \cdot 2h\delta\varphi_C; \qquad \delta A_Q = M_C(\boldsymbol{Q})\delta\varphi_C = -Q(2h-b)\delta\varphi_C;$$

$$\delta A_P = M_A(\boldsymbol{P})\delta\varphi_A = Pa\delta\varphi_A.$$

Виразимо елементарний поворот $\delta\varphi_A$ навколо точки A через елементарний поворот $\delta\varphi_C$ навколо точки C. Оскільки точка O належить одночасно обом половинам арки, то її переміщення можна записати як поворот навколо опори A і навколо опори C

$$\delta s_O = OA\delta\varphi_A = OC\delta\varphi_C.$$

За умовами задачі арка симетрична, тому

$$OA = OC \Rightarrow \delta\varphi_A = \delta\varphi_C.$$

Підставляємо отримані результати в перше рівняння

$$X \cdot 2h\delta\varphi_C - Q(2h-b)\delta\varphi_C + Pa\delta\varphi_C = 0. \qquad X \cdot 2h = Q(2h-b) - Pa;$$

$$X = \frac{Q(2h-b)-Pa}{2h} = \frac{1\cdot(2\cdot 4 - 2{,}5) - 5\cdot 0{,}5}{2\cdot 4} = 0{,}375(кН).$$

Задачу розв'язано.

<u>Завдання №23 до РГР</u>

23.1. До повзуна кривошипно-шатунного механізму прикладена горизонтальна сила Q = 200 Н. Визначити силу P, яку слід прикласти в точці A перпендикулярно кривошипу OA, аби механізм в даному положенні знаходився в стані рівноваги. Розміри ланок: OA = 30 см і AB = 113 см, кут AOB = 30°.

Відповідь: F = 123,2 Н.

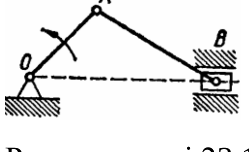


Рис. до задачі 23.1.

23.2. Для двохколодкового гальма визначити силу тиску гальмівних колодок на колесо, якщо до важеля *BC* прикладена вертикальна сила Q = 2 кН. Геометричні розміри ланок механізму: $BC = BD$ = 0,1 м; $KL = OA$ = 0,35 м; $LE = OD$ = 0,7 м. Власну вагу ланок механізму до уваги не брати.

Відповідь: N_A = 3,4 кН, N_K = 4 кН.

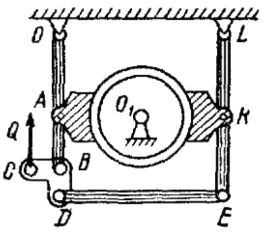


Рис. до задачі 23.2.

23.3. Визначити реакцію в опорі *C* складної невагомої балки *ABCD*, навантаженої парою сил з моментом M = 400 Н·м, якщо довжина a = 2 м.

Відповідь: R_C = 100 Н.

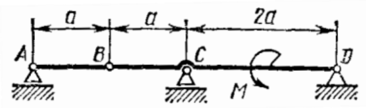


Рис. до задачі 23.3.

23.4. В шарнірному паралелограмі *OABC*, розташованому в вертикальній площині, довжина кривошипа *OA* = 20 см, причому вага шатуна *AB* дорівнює G = 40 Н. Нехтуючи власною вагою кривошипів визначити величину моменту *M*, прикладеного до кривошипа *OA*, за умови, що механізм знаходиться в стані рівноваги в даному положенні.

Відповідь: M = 4 Н·м.

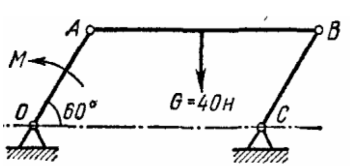


Рис. до задачі 23.4.

23.5. До кривошипа *OA* дезаксіального кривошипно-шатунного механізму прикладений момент M = 2,4 кН·м. Визначити горизонтальну силу *P*, яку слід прикласти до повзуна *B*, аби даний механізм знаходився в стані рівноваги у вказаному положенні. Розміри ланок механізму: *OA* = 60 см, *AB* = 120 см, ексцентриситет OB_1 = 30 см, кут $\alpha = 30°$.

Відповідь: P = 4 кН.

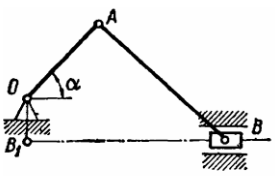


Рис. до задачі 23.5.

23.6. Визначити момент пари сил *M*, який необхідно прикласти до барабана 2 радіуса r = 20 см для рівномірного підняття вантажу 1 ваги 200 Н.

Відповідь: M = 20 Н·м.

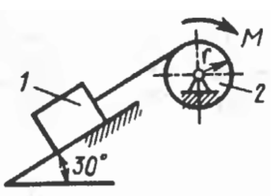


Рис. до задачі 23.6.

23.7. Два однакові однорідні стержні *AB* і *BC* вагою P = 5 Н кожен, шарнірно з'єднані між собою. Стержень *AB* шарнірно закріплений в точці *A*, а до його середини підвішений вантаж *M* вагою Q = 10 Н. Стержень *BC* спирається на ідеально гладку підлогу. Яку горизонтальну силу *F* необхідно прикласти в точці *C*, аби система знаходилась в стані рівноваги, якщо кути $OAB = OCB = 60°$? *Відповідь:* F = 8,7 Н.

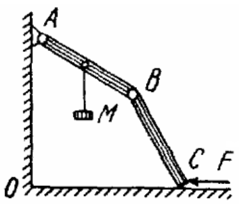


Рис. до задачі 23.7.

23.8. В кулісному механізмі при обертанні кривошипа *OC* навколо осі *O* повзун *A*, що рухається вздовж кривошипа, приводить до руху в вертикальних напрямних *K* стержень *AB*. Яку силу *Q* необхідно прикласти перпендикулярно кривошипу *OC* в точці *C* для того, аби зрівноважити силу *P* = 50 Н, спрямовану догори уздовж стержня, якщо *OC* = 0,6 м і *OK* = 0,25 м, φ = 30°.

Відповідь: *F* = 27,8 Н.

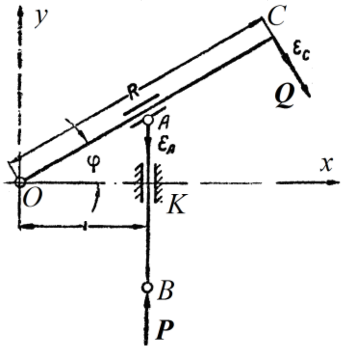


Рис. до задачі 23.8.

23.9. До кривошипа *OA* кривошипно-шатунного механізму, розташованого у вертикальній площині, прикладена пара сил із моментом *M* = 5 Н·м. Визначити кут φ, за якого увесь механізм залишиться в стані рівноваги, якщо *OA* = *AB* = 20 см, вага кожного із стержнів *P* = 10 Н, вага повзуна *Q* = 5 Н.

Відповідь: φ = 60°.

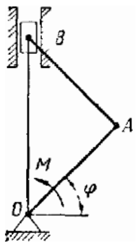


Рис. до задачі 23.9.

23.10. До ланки *OA* шарнірного чотириланкового механізму прикладена сила *P* = 50 Н. Визначити момент пари сил *M*, який необхідно прикласти до ланки O_1B довжиною *r* = 0,4 м, аби механізм в даному положенні знаходився в стані рівноваги.

Відповідь: *M* = 10 Н·м.

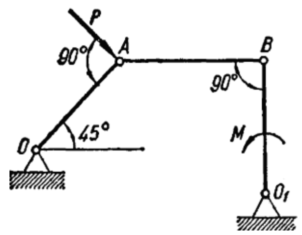


Рис. до задачі 23.10.

23.11. Колесо радіуса *R* = 0,7 м рівномірно котиться без ковзання по горизонтальній рейці під дією пари сил з моментом *M* = 140 Н·м. До центра колеса шарнірно приєднаний стержень, другий кінець якого ковзає по напрямним, паралельним рейці. Нехтуючи силами опору коченню, визначити силу тертя в напрямних.

Відповідь: *F* = 433 Н.

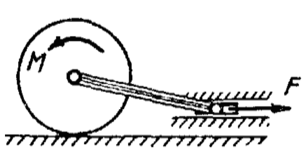


Рис. до задачі 23.11.

23.12. Прямокутна тришарнірна арка знаходиться в рівновазі під дією пари сил з моментом *M* = 2 кН·м. Нехтуючи власною вагою арки, визначити реакцію в опорі *E*, якщо довжини елементів арки *AB* = *BC* = *CD* = *DE* = 2 м.

Відповідь: R_E = 0,71 кН.

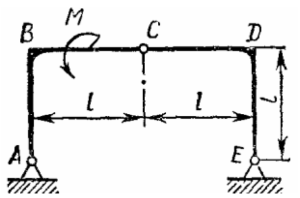


Рис. до задачі 23.12.

23.13. К шатуну *AB* шарнірного паралелограма *OABC* прикладена горизонтальна сила *F* = 50 Н. Визначити величину моменту пари сил *M*, яку необхідно прикласти до кривошипа *OA* довжиною *l* = 10 см, для того, аби зрівноважити даний механізм.

Відповідь: *M* = 4,3 Н·м.

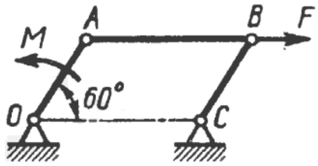
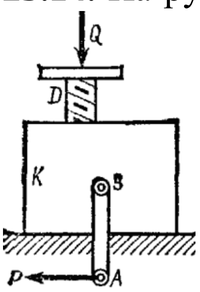


Рис. до задачі 23.13.

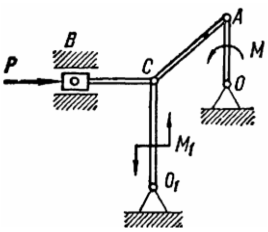
23.14. На рукоятку підйомного механізму AB довжиною l = 10 см діє сила P = 40 Н. Визначити зусилля Q на виході механізму, якщо при кожному оберті рукоятки гвинт D переміщується на величину h = 5 мм.



Відповідь: Q = 5,02 кН.

Рис. до задачі 23.14.

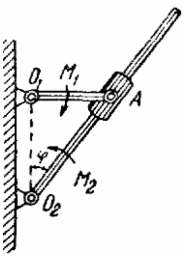
23.15. На поршень B механізму діє сила P = 100 Н, а до куліси O_1C прикладений момент M_1 = 30 Н·м. Нехтуючи тертям, визначити момент M, який необхідно прикласти до кривошипа OA, аби механізм залишався в стані рівноваги в положенні, в якому ланки OA = 20 см і O_1C = 60 см вертикальні.



Відповідь: M = 10 Н·м.

Рис. до задачі 23.15.

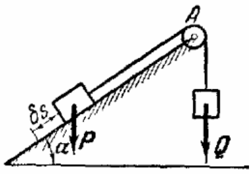
23.16. На кривошип O_1A кулісного механізму діє обертовий момент M_1 = 20 Н·м. Визначити величину моменту M_2, який необхідно прикласти до куліси O_2A, аби зрівноважити механізм в положенні, коли кут O_1O_2A = 30°, а кривошип займає горизонтальне положення.



Відповідь: M_2 = 80 Н·м.

Рис. до задачі 23.16.

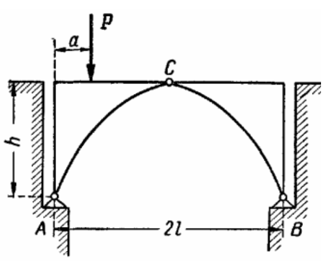
23.17. На гладкій горизонтальній похилій площині лежить вантаж вагою P = 50 Н, який утримується перекинутою через блок ниткою, яка несе на іншому кінці вантаж Q = 30 Н. Визначити кут α, за якого дана система буде знаходитись в стані рівноваги.



Відповідь: α = 36,9°.

Рис. до задачі 23.17.

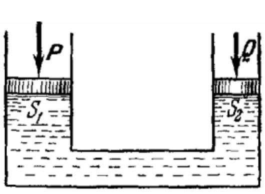
23.18. На ліву частину тришарнірної арки діє вертикальна сила P = 2 кН, лінія дії якої знаходиться на відстані a = 0,5 м від осі лівого шарніра A. Визначити горизонтальну складову реакції в шарнірі B, якщо розміри арки l = 5 м і h = 3 м.



Відповідь: X_B = 10 Н.

Рис. до задачі 23.18.

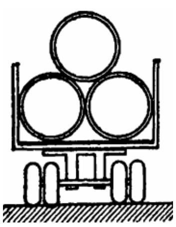
23.19. До поршня лівого коліна гідравлічного пресу прикладена сила P = 100 Н. Визначити силу Q, яку необхідно прикласти до поршня правого коліна, аби прес залишався у стані рівноваги, якщо площі поперечних перерізів поршнів S_1 = 0,1 м^2 і S_2 = 0,01 м^2.



Відповідь: Q = 10 Н.

Рис. до задачі 23.19.

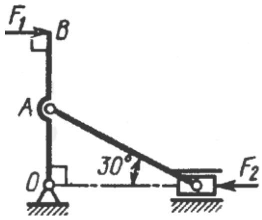
23.20. Автомобіль з причепом перевозить три труби вагою P = 1 500 Н кожна. За допомогою принципу можливих переміщень визначити силу тиску труб на борти автомобілю.



Відповідь: F = 433 Н.

Рис. до задачі 23.20.

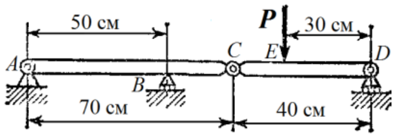
23.21. Визначити модуль сили F_2, яку необхідно прикласти до повзуна, аби зрівноважити механізм в заданому положенні, якщо F_1 = 100 Н, а довжина $OA = AB$.



Відповідь: F = 200 Н.

Рис. до задачі 23.21.

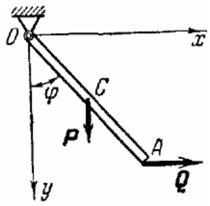
23.22. На балку, що складається з двох брусів, з'єднаних шарніром C, діє сила P = 500 Н. Визначити реакцію в опорі B балки, розміри і розташування опор якої показано на рисунку.



Відповідь: R_B = 525 Н.

Рис. до задачі 23.22.

23.23. Однорідний стержень вагою P = 20 Н підвішений вертикально за один кінець. Яку горизонтальну силу Q необхідно прикласти до другого кінця, аби стержень відхилився від вертикалі на кут φ = 45°.



Відповідь: Q = 10 Н.

Рис. до задачі 23.23.

Глава 24. «Загальне рівняння динаміки»

24.1. Загальне рівняння динаміки

Розглянутий в главі 22 принцип Даламбера дозволяє розв'язувати задачі динаміки методами статики за рахунок введення сил інерції до числа активних сил, що діють на дану систему. Принцип можливих переміщень, розглянутий в главі 23, широко використовується при розв'язанні задач статики для системи, на яку накладені голономні стаціонарні двосторонні та ідеальні в'язі. Поєднання цих двох принципів утворює новий принцип Даламбера-Лагранжа, суть якого полягає у введенні сил інерції при розгляді руху системи і подальшому застосуванні принципу можливих переміщень. Таке поєднання дозволяє отримати достатньо потужний метод розв'язання широкого кола задач динаміки механічних систем.

Нехай до системи із n матеріальних точок прикладена рівнодійна активних сил $\boldsymbol{P}$ і рівнодійна сил реакції в'язів $\boldsymbol{R}$. Введемо для кожної точки системи силу інерції

$$\boldsymbol{\Phi}_k = -m\boldsymbol{a}_k .$$

Тоді згідно принципу Даламбера в будь-який момент часу виконується умова

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{P}_k + \boldsymbol{R}_k + \boldsymbol{\Phi}_k\right) = 0.$$

Подумки зафіксуємо час і надамо усім точкам системи відповідне можливе переміщення, тоді

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{P}_k\delta\boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{R}_k\delta\boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{\Phi}_k\delta\boldsymbol{r}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\delta A_k^a + \delta A_k^p + \delta A_k^{ін}\right) = 0. \tag{24.1}$$

Вираз (24.1) є **загальним рівнянням динаміки**: при русі механічної системи з неідеальними в'язями в кожен момент часу сума елементарних робіт усіх прикладених активних сил, сил реакції в’язей і сил інерції на будь-якому можливому переміщенні дорівнює нулю.

Якщо ж на систему накладені ідеальні в’язі, то їх сума робіт дорівнюватиме нулю, а загальне рівняння динаміки матиме вигляд:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{P}_k\delta\boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{\Phi}_k\delta\boldsymbol{r}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\delta A_k^a + \delta A_k^{ін}\right) = 0, \tag{24.2}$$

тобто при русі механічної системи з двосторонніми ідеальними в'язями в кожен момент часу сума елементарних робіт усіх прикладених активних сил і сил інерції на будь-якому можливому переміщенні дорівнює нулю.

В аналітичній формі рівняння (24.2) має вигляд

$$\sum_{k=1}^{n}[(P_{kx} + \Phi_{kx}^{ін})\delta x_k + (P_{ky} + \Phi_{ky}^{ін})\delta y_k + (P_{kz} + \Phi_{kz}^{ін})\delta z_k] = 0. \tag{24.3}$$

Розписавши сили інерції

$$\sum_{k=1}^{n}[(P_{kx} - m_k\ddot{x}_k)\delta x_k + (P_{ky} - m_k\ddot{y}_k)\delta y_k + (P_{kz} - m_k\ddot{z}_k)\delta z_k] = 0. \tag{24.4}$$

отримаємо **загальне рівняння динаміки в декартовій системі координат**.

Рівняння (24.1) – (24.4) перш за все призначені для отримання диференціальних рівнянь руху конкретних механічних систем. Для систем, що складаються з окремих твердих тіл, сили інерції кожного тіла слід привести до головного вектора і головного моменту відносно деякого центра, причому за такий центр найчастіше доцільно обирати центр мас тіла.

24.2. Випадки визначення роботи сил інерції

При *поступальному русі* твердого тіла робота сил інерції твердого тіла на можливих переміщеннях точок системи визначається по формулі

$$\delta A = \boldsymbol{\Phi}^{ін}\delta\boldsymbol{r} = -m\boldsymbol{a}\delta\boldsymbol{r}, \tag{24.5}$$

де $\boldsymbol{\Phi}^{ін}$ – рівнодійна сил інерції, $\delta\boldsymbol{r}$ – можливе переміщення довільної точки твердого тіла.

При *обертальному русі* твердого тіла навколо нерухомої осі z робота сил інерції твердого тіла на можливих переміщеннях точок системи визначається по формулі

$$\delta A = M_z^{ін}\delta\varphi = -I_z\varepsilon_z\delta\varphi, \tag{24.6}$$

де $M^{ін}{}_z$ – головний момент сил інерції відносно осі обертання z, $\delta\varphi$ – можливе кутове переміщення твердого тіла.

При *плоскопаралельному русі* твердого тіла робота сил інерції твердого тіла на можливих переміщеннях точок системи визначається по формулі

$$\delta A = \boldsymbol{\Phi}_C^{ін}\delta\mathbf{r} + \boldsymbol{M}_C^{ін}\delta\varphi = -m\boldsymbol{a}_C\delta\mathbf{r} - I_C\boldsymbol{\varepsilon}_z\delta\varphi, \tag{24.7}$$

де $\boldsymbol{\Phi}^{ін}{}_C$ – головний вектор сил інерції, $\boldsymbol{M}^{ін}{}_C$ – головний момент сил інерції відносно осі, що проходить через центр мас тіла перпендикулярно площині його симетрії, $\delta\mathbf{r}_C$ – можливе переміщення центра мас твердого тіла, $\delta\boldsymbol{\varphi}$ – можливе кутове переміщення твердого тіла.

24.3. Узагальнені координати і сили

Використання декартової системи координат не завжди виправдане з точки зору раціональності описання руху механічних систем, оскільки частина використовуваних координат є надлишковою через їх входження до рівнянь в'язей. Тому для описання руху часто використовують узагальнені координати.

Узагальнені координати – незалежні параметри будь-якої розмірності, які однозначно визначають положення системи, а їх число дорівнює числу степенів вільності системи.

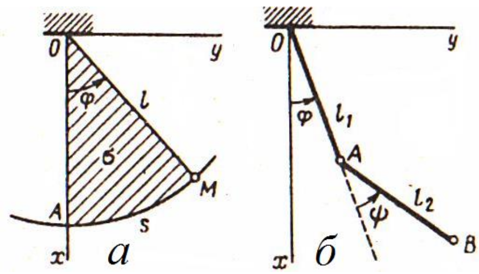


Рис. 24.1. Узагальнені координати.

Математичний маятник (рис. 24.1, *а*) має одну степінь вільності, тому за узагальнену координату можна обрати або кут φ, довжину дуги s, або площу сектора σ, вказавши при цьому позитивний і негативний напрям відповідної координати. В декартових координатах для задання положення маятника необхідно задати дві координати – x_A і y_A, які зв'язані між собою рівнянням траєкторії точки M.

Для задання положення подвійного математичного маятника (рис. 24.1, *б*), який має дві степені вільності, в декартовій системі необхідно чотири координати – x_A і y_A, x_B і y_B. Проте ці чотири координати зв'язані між собою двома рівняннями в'язей – траєкторіями точок A і B. Тому при відомих довжинах ланок l_1 і l_2 достатньо задати два незалежні параметри, наприклад кути φ і ψ, яких достатньо для однозначного описання положення маятника.

Кількість узагальнених координат завжди дорівнює кількості степеней вільності даної механічної системи, а різниця між кількістю декартових і узагальнених координат дорівнює кількості в'язей, накладених на дану систему. Введення узагальнених координат звільняє від необхідності вводити рівняння в'язей.

Розглянемо механічну систему із n матеріальних точок, на кожну з яких діє активна сила $\boldsymbol{P}_k$. Надамо системі можливе переміщення і визначимо суму елементарних робіт на ньому

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{P}_k \delta \boldsymbol{r}_k , \tag{24.8}$$

де $\delta \boldsymbol{r}_k$ – можливе переміщення k-ої точки системи. Вважаємо, що переміщення системи отримане шляхом надання узагальненим координатам можливих переміщень, тоді

$$\delta \boldsymbol{r}_k = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 + ... + \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_N}\delta q_N = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i ,$$

де s – кількість степеней вільності системи. Підставимо отримане можливе переміщення в (24.8)

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{P}_k \left(\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i \right) = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{P}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i \right). \tag{24.9}$$

Введемо поняття узагальненої сили

$$Q_i = \sum_{k=1}^{s} \boldsymbol{P}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}. \tag{24.10}$$

Аби знайти узагальнену силу, яка відповідає даній узагальненій координаті, необхідно надати можливе переміщення лише цій координаті, залишаючи величини усіх інших узагальнених координат незмінними, після чого знайти суму робіт активних сил

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{P}_k \delta \boldsymbol{r}_k = Q_i \delta q_i . \tag{24.11}$$

Згідно (24.11) можна дати визначення *узагальнених сил* Q_1, Q_2, …, Q_n як величин, що дорівнюють відношенню суми елементарних робіт активних сил до зміни відповідної узагальненої координати

$$Q_i = \frac{\delta A_i}{\delta q_i}.$$

Розмірність узагальненої сили залежить від типу узагальненої координати

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]},$$

так, якщо узагальнена координата – лінійна величина, то Q має розмірність сили, якщо q – кут, то розмірність моменту (Н·м).

Якщо усі сили, що діють на систему, потенційні, то узагальнені сили дорівнюють узятим зі знаком мінус частковим похідним від потенційної енергії по відповідним узагальненим координатам

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1},\ Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}, ...,\ Q_n = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_n}.$$

24.4. Загальне рівняння динаміки в узагальнених силах

Згідно (24.2), в будь-який момент часу сума елементарних робіт активних сил і сил інерції дорівнює нулю, якщо на систему накладені ідеальні в'язі. Запишемо суму елементарних робіт сил інерції через узагальнені сили і координати

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{ін} = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k \delta r_k = \sum_{i=1}^{s} Q_i^{ін} \delta q_i \,, \tag{24.12}$$

де узагальнена сила інерції

$$Q_i^{ін} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\Phi}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}. \tag{24.13}$$

Тоді, враховуючи (24.12) і (24.13), загальне рівняння динаміки набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^{s} \left(Q_i + Q_i^{ін} \right) \delta q_i = 0. \tag{24.14}$$

Оскільки всі узагальнені координати незалежні, а їх варіації довільні, то виконання (24.14) можливо лише за умови, що

$$Q_i + Q_i^{ін} = 0. \tag{24.15}$$

Рівняння (24.15) є *загальним рівнянням динаміки в узагальнених координатах*.

Із (24.15) може бути отримане рівняння рівноваги механічної системи. Якщо система знаходиться в стані рівноваги, то узагальнені сили інерції також дорівнюють нулю, тому умова рівноваги

$$Q_i = 0. \tag{24.16}$$

Узагальнені сили інерції знаходять аналогічно узагальненим активним силам. Вираховують головний вектор і головний момент сил інерції, прикладають їх до тіл, після чого надають системі можливі переміщення. Визначивши суму елементарних робіт на цих переміщеннях, узагальнені сили інерції знаходять по формулі

$$Q_i^{ін} = \frac{\sum_{i=1}^{s} \delta A_i^{ін}}{\delta q_i}. \tag{24.17}$$

Завдання № 24. «Загальне рівняння динаміки»

Рекомендації до розв'язання задач

Система з одним степенем вільності

1. Нанести на рисунок задані сили і за наявності неідеальних в'язей додати їх сили реакцій.
2. Визначити головні вектори і головні моменти сил інерції мас системи.
3. Надати можливе переміщення одній з точок системи і виразити через нього можливі переміщення точок прикладення усіх активних сил і сил інерції, що діють на систему.
4. Знайти суму робіт усіх активних сил і сил інерції на відповідних можливих переміщеннях їх точок прикладення і прирівняти дану суму до нуля.

5. Після скорочення можливого переміщення визначити шукану величину або проінтегрувати диференціальне рівняння руху.

Система з кількома степенями вільності

1. Нанести на рисунок задані сили і за наявності неідеальних в'язей додати їх сили реакцій.
2. Визначити головні вектори і головні моменти сил інерції мас системи.
3. Надати незалежні можливі переміщення точкам системи в кількості її степеней вільності і виразити через них можливі переміщення точок прикладення усіх активних сил і сил інерції, що діють на систему.
4. Знайти суму робіт усіх активних сил і сил інерції на відповідних можливих переміщеннях їх точок прикладення і прирівняти дану суму до нуля.
5. Після скорочення всіх можливих переміщень отримати систему рівнянь, кількість яких дорівнює кількості степенів вільності даної системи.
6. Розв'язати отриману систему рівнянь руху механічної системи і визначити шукані величини.

Приклад розв'язання задачі

Задача 1. Барабани радіусами r_1 = 20 см і r_2 = 30 см жорстко з'єднані між собою і обертаються навколо горизонтальної осі. На барабани намотані нерозтяжні нитки, до кінців яких прикріплені вантаж *A* вагою m_1 = 5 кг і вантаж *B* вагою m_2 = 20 Н, а система рухається під дією їх ваги. Нехтуючи масами барабанів і ниток, визначити кутове прискорення барабанів.

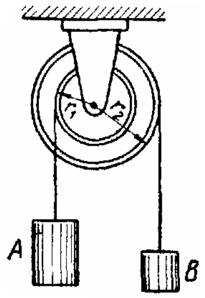


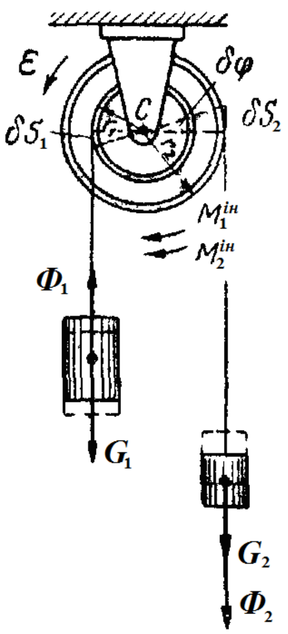
Рис. 24.4. До задачі 1.

Розв'язання

Дана система має одну степінь вільності. Оскільки вантаж *A* важчий, то барабани будуть обертатись з кутовим прискоренням, спрямованим проти годинникової стрілки. Тоді прискорення першого вантажу буде спрямоване вниз, а другого – угору.

Прикладемо сили інерції, спрямувавши їх у бік, протилежний напрямам прискорень (рис. 24.4) і визначимо їх модулі

$$\Phi_1 = m_1 a_1 = m_1 r_1 \varepsilon; \ \Phi_2 = m_2 a_2 = m_2 r_2 \varepsilon.$$



Надамо системі можливе переміщення, повернувши барабан на кут $\delta\varphi$ в напрямку дійсного руху системи, а кутові переміщення вантажів виразимо через поворот барабана

$$\delta s_1 = r_1 \delta\varphi, \quad \delta s_2 = r_2 \delta\varphi.$$

Складаємо загальне рівняння динаміки у вигляді (24.3)

$$m_1 g \delta s_1 - \Phi_1 \delta s_1 - m_2 g \delta s_2 - \Phi_2 \delta s_2 = 0,$$

після чого підставимо в отримане рівняння значення сил інерції і можливих переміщень

$$m_1 g r_1 \delta\varphi - m_1 \varepsilon r_1 r_1 \delta\varphi - m_2 g r_2 \delta\varphi - m_2 \varepsilon r_2 r_2 \delta\varphi = 0,$$

$$m_1 g r_1 - m_1 \varepsilon r_1^2 - m_2 g r_2 - m_2 \varepsilon r_2^2 = 0.$$

Рис. 24.3. Застосування загального рівняння динаміки.

Перетворюємо останнє рівняння і визначаємо шукану величину

$$m_1gr_1 - m_2gr_2 = m_1\varepsilon r_1^2 + m_2\varepsilon r_2^2 \Rightarrow (m_1r_1 - m_2r_2)g = (m_1r_1^2 + m_2r_2^2)\varepsilon;$$

$$\varepsilon = \frac{(m_1r_1 - m_2r_2)g}{(m_1r_1^2 + m_2r_2^2)} = \frac{(5\cdot 0{,}2 - 2\cdot 0{,}3)\cdot 9{,}81}{(5\cdot 0{,}2^2 + 2\cdot 0{,}3^2)} = 10{,}3\left(\frac{рад}{c^2}\right).$$

Задачу розв’язано.

Завдання №24 до РГР

24.1. Два зубчасті колеса радіусами r_1 = 30 см і r_2 = 60 см мають нерухомі осі і знаходяться у зовнішньому зачепленні, причому моменти інерції коліс відносно осей обертання I_1 = 3 кг·м^2 і I_2 = 5 кг·м^2. Нехтуючи силами опору, визначити кутове прискорення колеса, якщо на нього діє пара сил з моментом M = 15 Н·м.
Відповідь: ε = 3,5 рад/с^2.

24.2. Вантаж A вагою P = 50 Н за допомогою нитки ABC приводить до руху однорідний циліндр вагою Q = 40 Н. Нехтуючи вагою нитки і блока B, визначити прискорення вантажа, вважаючи, що циліндр котиться по площині без ковзання.
Відповідь: a = 4,5 м/с^2.

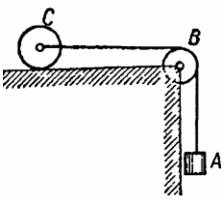


Рис. до задачі 24.2.

24.3. Важкий полий циліндр із зовнішнім радіусом R = 40 см і внутрішнім радіусом r = 25 см котиться без ковзання по похилій площині, яка утворює з горизонтом кут α = 30°. Визначити кутове прискорення циліндра.
Відповідь: ε = 7,2 рад/с^2.

24.4. До шківа 1 пасової передачі прикладений обертовий момент M = 3 Н·м. Маси шківів дорівнюють m_1 = 1 кг і m_2 = 2 кг, причому їх можна вважати рівномірно розподіленими по ободу. Нехтуючи тертям, визначити кутове прискорення шківа 1, якщо його радіус r = 0,1 м.
Відповідь: ε = 100 рад/с^2.

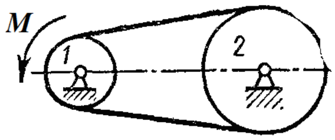


Рис. до задачі 24.4.

24.5. Два вантажі з масами M_1 = 2 кг і M_2 = 3,5 кг підвішені на нерозтяжних нитках, що накинуті на жорстко з’єднані барабани радіусами r_1 = 5 см і r_2 = 10 см. Маса меншого барабану m_1 = 400 г, більший барабан вдвічі важчий. Вважаючи барабани однорідними дисками, визначити їх кутове прискорення.
Відповідь: ε = 49 рад/с^2.

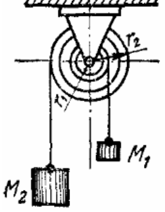
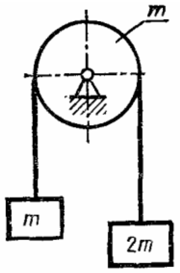


Рис. до задачі 24.5.

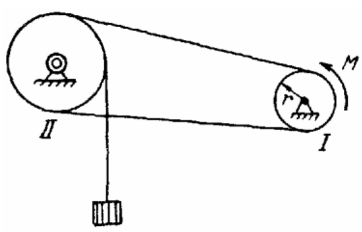
24.6. Через блок маси m = 3 кг перекинута невагома нитка, на кінцях якої знаходяться вантажі масами m_1 = 5 кг і m_2 = 10 кг. Визначити прискорення вантажів, нехтуючи тертям і вважаючи масу блока рівномірно розподіленою по ободу.



Відповідь: a = 2,45 м/с^2.

Рис. до задачі 24.6.

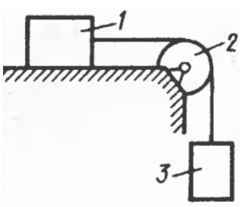
24.7. Два суцільні однорідні вали I і II масами m_1 = 1,5 кг і m_2 = 2 кг, обертаються без тертя навколо паралельних осей, з'єднані нескінченим пасом. До першого валу прикладений обертовий момент M = 5 Н·м, на другий намотується трос з вантажем маси m = 4 кг на кінці. Нехтуючи власною вагою паса і троса, визначити прискорення вантажу, якщо радіус першого валу r = 50 мм.



Відповідь: a = 10,6 м/с^2.

Рис. до задачі 24.7.

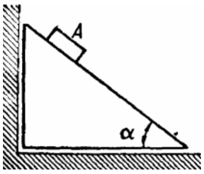
24.8. Два вантажі 1 і 2 масами m_1 = m_3 = 2 кг з'єднані між собою нерозтяжною ниткою, перекинутою через невагомий блок 2. Визначити прискорення вантажів, якщо коефіцієнт тертя між вантажем 1 і горизонтальною площиною f = 0,1.



Відповідь: a = 4,4 м/с^2.

Рис. до задачі 24.8.

24.9. Однорідний циліндр маси m = 10 кг котиться без ковзання по бічній грані призми, що спирається на гладку підлогу і стіну. Визначити силу тиску призми на стіну, якщо кут її нахилу до горизонту α = 30°.



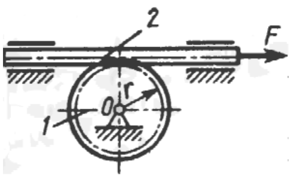
Відповідь: N = 282,9 Н.

Рис. до задачі 24.9.

24.10. В рейковій передачі до зубчастої рейки 1 прикладена змінна сила

$$F = 9t^2 \text{ Н.}$$

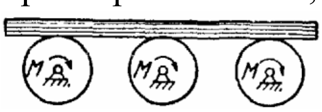
Визначити кутове прискорення шестерні 1 радіуса r = 0,4 м через 1 с після початку дії сили, якщо її момент інерції відносно осі обертання I = 2 кг·м^2.



Відповідь: ε = 10 рад/с^2.

Рис. до задачі 24.10.

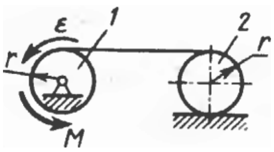
24.11. На трьох однорідних валах, до кожного з яких прикладений обертовий момент M = 50 Н·м, знаходиться балка масою m_2 = 20 кг. Визначити прискорення балки, якщо маса кожного вала m_1 = 2 кг, а радіус r = 20 см. Тертя в осях валів і ковзання між балкою і валами відсутнє.



Відповідь: a = 4,5 м/с^2.

Рис. до задачі 24.11.

24.12. Визначити модуль M сталого моменту пари сил, під дією якого барабан 1 обертається з кутовим прискоренням ε = 1 рад/с^2. За допомогою нитки даний барабан з'єднаний з катком 2 радіуса r = 0,2 м. Маси катка і барабана однакові і дорівнюють m = 2 кг, їх можна вважати однорідними циліндрами.



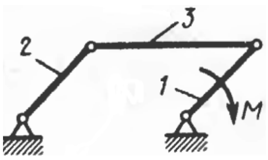
Відповідь: M = 0,07 Н·м.

Рис. до задачі 24.12.

24.13. Два вантажі з масами M_1 = 2 кг і M_2 = 3,5 кг відповідно підвішені на нерозтяжних нитках, що накинуті на жорстко з'єднані барабани радіусами r_1 = 5 см і r_2 = 10 см (рис. до задачі 24.5). Маса меншого барабану m_1 = 400 г, більший барабан вдвічі важчій. Вважаючи барабани однорідними дисками, сили натягу ниток T_1 і T_2.

Відповідь: T_1 = 25 Н, T_2 = 17 Н.

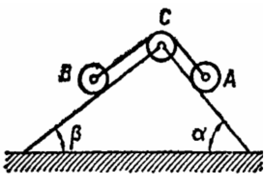
24.14. Пара сил з моментом M = 0,8 Н·м приводить до руху механізм, розташований в горизонтальній площині. Кривошипи 1 і 2 мають довжину l = 0,2 м і однакові маси m_1 = m_2 = 1 кг, а маса шатуна m_3 = 2 кг. Визначити кутове прискорення кривошипа 1.



Відповідь: ε = 7,5 рад/с^2.

Рис. до задачі 24.14.

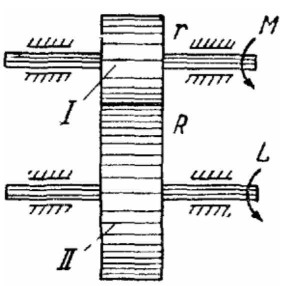
24.15. Однорідний диск A вагою P = 40 Н котиться без ковзання по одній з граней нерухомої призми і при цьому підіймає по іншій грані такий самий диск B за допомогою нерозтяжної невагомої нитки, перекинутої через ідеальний блок C. Знайти натяг нитки, якщо кути в основі призми α = 45° і β = 30°.



Відповідь: T = 24,1 Н.

Рис. до задачі 24.15.

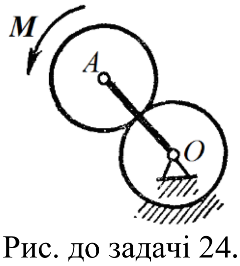
24.16. Циліндричний зубчастий редуктор складається з коліс I і II, радіуси яких r = 50 мм і R = 600 мм, а маси m_1 = 5 кг і m_2 = 80 кг відповідно. На перше колесо діє рушійний момент M = 40 Н·м, на друге – гальмівний момент L = 150 Н·м. Нехтуючи тертям в підшипниках, визначити кутове прискорення першого колеса, вважаючи його однорідним диском.



Відповідь: ε = 353 рад/с^2.

Рис. до задачі 24.16.

24.17. Обертовий момент M = 0,11 Н·м прикладений до рухомого колеса планетарного механізму, розташованого в горизонтальній площині. Радіуси обох коліс механізму однакові і дорівнюють r = 0,1 м. Маси кривошипа OA і рухомого колеса також однакові і дорівнюють m = 1 кг. Визначити кутове прискорення ε кривошипа, вважаючи його однорідним стержнем, а рухоме колесо – однорідним диском.



Відповідь: ε = 3 рад/с^2.

Рис. до задачі 24.17.

24.18. Відцентровий регулятор Вата обертається навколо вертикальної осі з постійною кутовою швидкістю ω = 10 рад/с. Визначити кут α відхилення від вертикалі стержнів OA і OB, якщо вага кожної з куль P = 10 Н, а вага муфти P_1 = 5 Н. Всі стержні вважати невагомими і такими, що мають однакову довжину l = 40 см.

Відповідь: α = 68°.

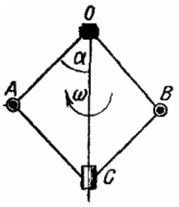


Рис. до задачі 24.18.

24.19. Визначити модуль сили F, під дією якої тіло маси m = 10 кг підіймається з прискоренням a = 1 м/с^2.

Відповідь: F = 108 Н.

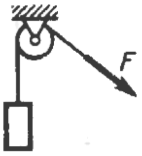


Рис. до задачі 24.19.

24.20. Клин вагою Q = 60 Н приводить до руху вертикальний стержень BC вагою P = 10 Н. Нехтуючи тертям, витзначити прискорення стержня, якщо на клин діє горизонтальна сила F = 20 Н, а його кут нахилу до горизонта α = 45°.

Відповідь: a = 1,4 м/с^2.

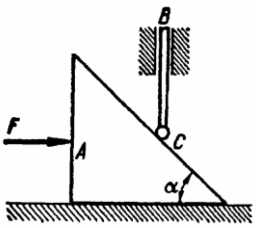


Рис. до задачі 24.20.

24.21. Циліндричний зубчастий редуктор складається з коліс I і II, радіуси яких r = 50 мм і R = 600 мм, а маси m_1 = 5 кг і m_2 = 80 кг відповідно. На перше колесо діє рушійний момент M = 40 Н·м, на друге – гальмівний момент L = 150 Н·м. Нехтуючи тертям в підшипниках, визначити кутове прискорення другого колеса, вважаючи його однорідним диском.

Відповідь: ε = 29,4 рад/с^2.

Глава 25. «Рівняння Лагранжа II роду»

25.1. Вивід рівняння Лагранжа II роду

Загальне рівняння динаміки в узагальнених силах у вигляді (24.15) використовують для складання рівнянь руху механічних систем лише у відносно простих випадках. Однак для систем з багатьма степенями вільності використання даного рівняння вимагає досить складних перетворень. Цих труднощів можливо уникнути, якщо узагальнені сили інерції виразити через кінетичну енергію механічної системи.

Розглянемо в інерційній системі відліку рух механічної системи із n матеріальних точок, на яку накладені двосторонні голономні ідеальні в'язі. У випадку, коли не всі в'язі є ідеальними, необхідно знайти реакції таких в'язей і додати їх до активних сил. Загальне рівняння динаміки такої системи матиме вигляд

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{P}_k - m_k\ddot{\boldsymbol{r}}_k\right)\delta\boldsymbol{r}_k = 0. \qquad (25.1)$$

Нехай дана система має s ступенів вільності, її положення визначається s узагальненими координатами, а можливе переміщення k-ої точки знаходиться по формулі

$$\delta \boldsymbol{r}_k = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i , \tag{25.2}$$

Підставивши (25.2) в (25.1) і змінивши порядок додавання, отримуємо

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{s} P_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{s} m_k \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_k}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \right) \right] \delta q_i = 0. \tag{25.3}$$

У (25.3) перший доданок у квадратних дужках є узагальненою силою Q_i, що відповідає i-ій узагальненій координаті. Виконаємо перетворення другого доданку у квадратних дужках

$$\frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_k}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\dot{\boldsymbol{r}}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \right) - \dot{\boldsymbol{r}}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \right). \tag{25.4}$$

З аналітичної механіки відома *перша тотожність Лагранжа*

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} .$$

Підставивши тотожність у перший доданок (25.4), отримуємо

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\boldsymbol{r}}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \right) = \dot{\boldsymbol{r}}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}_k^2}{2} \right) \right].$$

Отримане співвідношення тепер підставляємо у другий доданок (25.3)

$$\sum_{i=1}^{s} m_k \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_k}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{i=1}^{s} \frac{m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k^2}{2} \right) \right] = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right). \tag{25.5}$$

Далі скористаємось *другою тотожністю Лагранжа*, відомим з аналітичної механіки

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\partial q_i} .$$

Підставимо дану тотожність у другий доданок (25.4)

$$\dot{\boldsymbol{r}}_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \right) = \dot{\boldsymbol{r}}_k \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\partial q_i},$$

після чого даний вираз підставляємо до другого доданку (25.3)

$$\sum_{i=1}^{s} m_k \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_k}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \right) = \sum_{i=1}^{s} m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{i=1}^{s} \frac{m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k^2}{2} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_i}. \tag{25.6}$$

Далі підставляємо в (25.3) отримані вирази (25.5) і (25.6)

$$\sum_{i=1}^{s} \left[Q_i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0. \tag{25.7}$$

Варіації узагальнених координат δq_i між собою незалежні, тому умова (25.7) виконується, коли дорівнює нулю множник у дужках, тобто

$$\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right]=\sum_{i=1}^{s} Q_i\,. \qquad (25.8)$$

Рівняння (25.8) мають назву **рівнянь Лагранжа II роду**. Їх кількість дорівнює кількості степеней вільності механічної системи, причому в рівняння не входять невідомі наперед реакції ідеальних в’язей.

25.2. Випадок потенціальних сил

У випадку, коли усі сили, що діють на систему, є потенціальними, узагальнені сили можна представити у вигляді

$$Q_i=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \qquad (25.9)$$

і рівняння Лагранжа II роду набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right]=-\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial P}{\partial q_i}. \qquad (25.10)$$

Скористаємось поняттям ***функції Лагранжа*** – величини, яка дорівнює різниці кінетичної і потенціальної енергій механічної системи

$$L=T-P. \qquad (25.11)$$

Оскільки потенціальна енергія системи є лише функцією від узагальнених координат, то

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

а рівняння Лагранжа остаточно набуває вигляду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0.$$

Завдання № 25. «Рівняння Лагранжа II роду»

Рекомендації до розв’язання задач

1. Встановити число степеней вільності і обрати узагальнені координати.
2. Зобразити систему в довільному положенні і показати на рисунку усі сили, що діють на неї.
3. Обчислити узагальнені сили Q_s за формулами (25.3) або (25.9).
4. Визначити кінетичну енергію при абсолютному русі системи і виразити цю енергію через узагальнені координати і узагальнені швидкості.
5. Знайти усі частинні похідні і підставити їх в рівняння Лагранжа.
6. Відповідно до конкретних умов задачі проаналізувати знайдений розв’язок.

Приклад розв’язання задачі

Задача 1. Вали *I* і *II* разом з насадженими на них зубчастими колесами мають моменти інерції I_1 = 5 кг·м^2 і I_2 = 4 кг·м^2, а передаточне число передачі u = 0,5. Система приводиться до обертання із стану спокою крутним моментом M_1 = 30 Н·м, прикладеним до валу *I*. Нехтуючи тертям визначити, через який час кутова швидкість валу *II* дорівнюватиме $\omega_2 = 4\pi$.

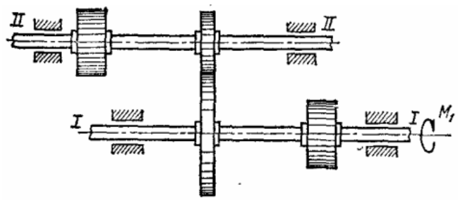


Рис. 25.1. До задачі 1.

Розв'язання

Система на рис. 25.1 має одну степінь вільності, в якості узагальненої координати оберемо кут повороту першого валу φ_1. В токому випадку узагальненою швидкістю буде кутова швидкість

$$\dot{q} = \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 \text{ (рад/с).}$$

Кутова швидкість другого валу

$$q_2 = \dot{\omega}_2 = \frac{\omega_1}{u} = \frac{\omega_1}{0{,}5} = 2\omega_1.$$

Задачу розв'язано.

Завдання №25 до РГР

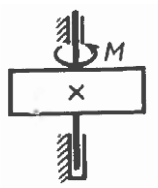
25.1. Потенційна енергія механічної системи визначається за формулою

$$\Pi = 20\varphi^2,$$

де φ – узагальнена координата, виражена в радіанах. Визначити узагальнену силу Q, що відповідає даній координаті в момент часу, коли $\varphi = 45°$.

Відповідь: Q = - 31,4 Н.

25.2. Кінетична енергія диска, на який діє пара сил з моментом M = 6 Н·м, виражена через узагальнену координату і має вигляд



$$T = 12\dot{\varphi}^2$$

Визначити кутове прискорення диска.

Відповідь: ε = 0,25 рад/с^2.

Рис. до задачі 25.2.

25.3. Кінетична енергія системи має вигляд

$$T = 1{,}5\dot{s}^2 \text{(Дж),}$$

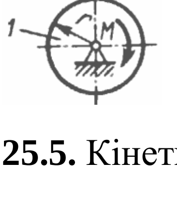
а потенціальна енергія

$$\Pi = 60s \text{(Дж).}$$

Визначити прискорення системи.

Відповідь: a = - 20 м/с^2.

25.4. Визначити кутове прискорення диска 1 радіуса r = 0,2 м, якщо на нього діє пара сил з моментом M = 0,4 Н·м. Маси обох дисків однакові і дорівнюють $m_1 = m_2$ = 10 кг.



Відповідь: ε = 1 рад/с^2.

Рис. до задачі 25.4.

25.5. Кінетична енергія системи має вигляд

$$T = 4\dot{\varphi}^2 \text{ (Дж),}$$

а узагальнена сила

$$Q_\varphi = 4 - \varphi \,(\text{Н·м}).$$

Визначити кутове прискорення системи в момент, коли φ = 2 рад.
Відповідь: ε = 0,25 рад/с^2.

25.6. Однорідний стержень довжини l = 3 м і маси m = 3 кг обертається в вертикальній площині. Визначити узагальнену силу, що відповідає узагальненій координаті в момент часу, коли φ = 45°.
Відповідь: Q = - 312 Н.

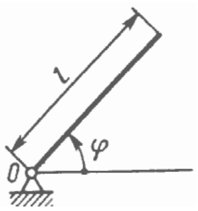


Рис. до задачі 25.6.

25.7. Кінетична енергія системи має вигляд

$$T = 4\dot{\varphi}^2 \,(\text{Дж}),$$

а потенціальна енергія

$$П = -80\varphi \,(\text{Дж}).$$

Визначити узагальнену швидкість системи в момент часу t = 2 с, якщо кутова швидкість в початковий момент ω (0) = 1 рад/с.
Відповідь: υ = 19 м/с.

25.8. Вантаж M маси m = 5 кг падає вертикально і при цьому розмотує нитку, яка приводить до обертання блоки I і II масами m_1 = 2 кг і m_2 = 4 кг відповідно. Визначити прискорення вантажу M, вважаючи, що ковзання між ниткою і блоками відсутнє, а блоки є однорідними суцільними циліндрами.
Відповідь: a = 6,1 м/с^2.

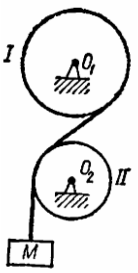


Рис. до задачі 25.8.

25.9. Кінетична і потенціальна енергія системи мають вигляд

$$T = 2\dot{s}^2 \,(\text{Дж}),\ П = -20s \,(\text{Дж}).$$

Визначити узагальнену швидкість системи в момент часу t = 1 с, якщо в початковий момент υ (0) = 1 м/с.
Відповідь: υ = 8 м/с.

25.10. Три зубчастих колеса масами m_1 = 3 кг, m_2 = 2 кг і m_3 = 1 кг, які є однорідними дисками з радіусами r_1 = 30 см, r_2 = 25 см і r_3 = 20 см, знаходяться у зовнішньому зачепленні. До першого колеса прикладений обертовий момент M_1 = 5 Н·м, до коліс 2 і 3 – моменти опору M_2 = 1 Н·м і M_3 = 2 Н·м. Визначити кутове прискорення першого колеса 1.
Відповідь: ε = 1,5 рад/с^2.

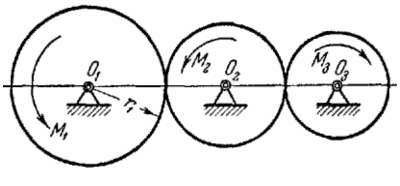


Рис. до задачі 25.10.

25.11. До циліндра радіуса R = 40 см, що обертається під дією пари сил з моментом M = 20 Н·м, притискається гальмівна колодка з силою F = 100 Н. Визначити узагальнену силу, яка відповідає узагальненій координаті φ, якщо коефіцієнт тертя між циліндром і колодками f = 0,4.

Відповідь: Q = 4 Н.

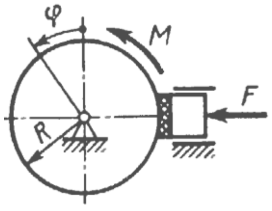


Рис. до задачі 25.11.

25.12. Визначити кутове прискорення системи, якщо її кінетична енергія має вигляд

$$T = 5\dot{\varphi}^2 \,(\text{Дж}),$$

а узагальнена сила постійна і дорівнює

$$Q_\varphi = 20\,(\text{Н·м}).$$

Відповідь: ε = 2 рад/с^2.

25.13. Визначити кутове прискорення катка 2 маси m = 4 кг і радіуса r = 0,5 м, який котиться без ковзання по горизонтальній площині, якщо на невагомий блок 1, з'єднаний за допомогою нерозтяжної нитки з центром катка 2, діє пара сил з моментом M = 0,6 Н·м. Каток 2 вважати однорідним диском.

Відповідь: ε = 0,4 рад/с^2.

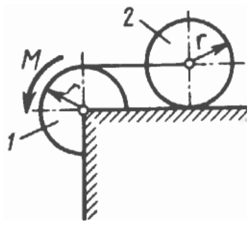


Рис. до задачі 25.13.

25.14. Функція Лагранжа для механічної системи має вигляд

$$L = 6\dot{x}^2 + 2x\,.$$

Визначити значення узагальненої координати x в момент часу t = 3 с, якщо в початковий момент часу система мала нульову координату, а її початкова швидкість υ (0) = 2 м/с.

Відповідь: x = 7,5 м.

25.15. Функція Лагранжа для механічної системи має вигляд

$$L = 5\dot{\varphi}^2 + \varphi\,.$$

Визначити значення узагальненої координати φ в момент часу t = 2 с, якщо в початковий момент часу система мала нульові початкові умови.

Відповідь: φ = 0,4 рад.

25.16. Вагонетка A підіймається по похилій площині з кутом α = 45° нахилу до горизонту за допомогою барабана B радіуса R = 20 см, до якого прикладений обертовий момент M = 160 Н·м. Визначити прискорення барабана, якщо маса вагонетки m = 100 кг, момент інерції барабана відносно осі обертання I = 0,5 кг·м^2, коефіцієнт тертя між вагонеткою і похилою площиною f = 0,1.

Відповідь: a = 0,34 м/с^2.

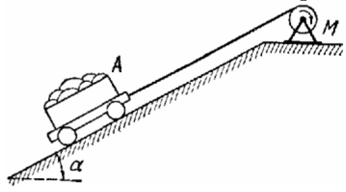


Рис. до задачі 25.16.

25.17. Однорідний циліндр із відношенням внутрішнього і зовнішнього радіусів r/R = 0,8 котиться вниз по похилій площині з кутом нахилу до горизонту α = 30°. Визначити прискорення осі циліндра.
Відповідь: a = 2,7 м/с^2.

25.18. В планетарному механізмі, розташованому в горизонтальній площині, до кривошипа O_1O_3 прикладений обертовий момент M = 3 Н·м. Визначити кутове прискорення кривошипа, вважаючи колеса однорідними дисками маси m = 1 кг і радіуса r = 25 см і нехтуючи тертям і масою кривошипа.
Відповідь: a = 0,34 м/с^2.

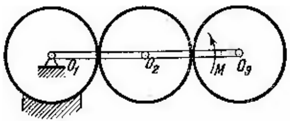


Рис. до задачі 25.18.

25.19. Функція Лагранжа для механічної системи має вигляд

$$L = 6\dot{x}^2 + 2x\,.$$

Визначити узагальнену швидкість системи в момент часу t = 3 с, якщо в початковий момент часу її швидкість дорівнювала υ (0) = 2 м/с.
Відповідь: υ = 2,5 м/с.

25.20. Функція Лагранжа для механічної системи має вигляд

$$L = 5\dot{\varphi}^2 + \varphi\,.$$

Визначити значення узагальненої швидкості ω в момент часу t = 10 с, якщо в початковий момент часу система знаходилась в стані спокою.
Відповідь: ω = 2 рад/с.

Список літератури

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов/С.М. Тарг. – 17-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2007. – 416 с.
3. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: Учебник для вузов. – изд. 13-е, испр. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. – 608 с.
4. Цасюк В.В. Теоретична механіка: Навчальний посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2004. – 402 с.
5. Лачуга Ю.Ф., Ксендзов В.А. Теоретическая механика. – 2-е изд., перераб. И доп. – М.: КолосС, 2005. – 576 с.
6. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 2: Динамика : учеб. пособие для вузов. – 9-е изд., испр. – 2006. – 447 с.
7. Бражниченко Н.А и др. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Высш. шк., 1987. – 529 с.
8. Березова О.А., Друшляк Г.Е., Солодовников Р.В. Теоретическая механика. Сборник задач: Учеб. пособие для втузов. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1980. – 400 с.
9. Будник Ф.Г., Зингерман Ю.М., Селенский Е.И. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие для втузов. – М: Высш. шк., 1987. – 176 с.
10. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие. – 36-е изд., исправл./ Под. Ред. Н.В. Бутенина, А.И. Лурье, Д.Р. Меркина. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1986. – 448 с.
11. Стрелков С.П. Механика. 4-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2005 – 560 с.
12. Яблонский Б.М. Детлаф А.А., Лебедев А.К. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. – 8-е изд., перераб. И испр. – М.: ООО «Издательство Оникс», 2006. – 1056 с.
13. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 991 с.
14. Бушок Г.Ф., Венгер Є.Ф. Курс фізики: У 3 кн. Кн. 1. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка: Навч. Посіб. – К: Вища шк., 2002. – 375 с.
15. Гернет М.М. Курс теоретической механики. Изд. 3-е, перераб. И доп. Учебник для вузов. – М: Высш. шк., 1973. – 464 с.
16. Кабальський М.М. и др. Типовые задачи по теоретической механике и методы их решения. – Киев: Гос. Изд-во тех. Лит-ры УССР, 1956. – 511 с.
17. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2 (динамика). – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1967. – 512 с.
18. Мисюрев М.А. Методика решения задач по теоретической механике. – М: Высш. шк., 1963. – 307 с.
19. Сборник коротких задач по теоретической механике: Учеб. пособие для втузов/ Под ред. О.Э. Кепе. – М.: Высш. шк., 1989. – 368 с.

Додатки

Додаток А

Грецький алфавіт

Α, α – альфа	Ι, ι – йота	Ρ, ρ – ро
Β, β – бета	Κ, κ – каппа	Σ, σ – сігма
Γ, γ – гамма	Λ, λ – лямбда	Τ, τ – тау
Δ, δ – дельта	Μ, μ – мю	Υ, υ – іпсилон
Ε, ε – епсилон	Ν, ν – ню	Φ, φ – фі
Ζ, ζ – дзета	Ξ, ξ – ксі	Χ, χ – хі
Η, η – ета	Ο, ο – омікрон	Ψ, ψ – псі
Θ, θ – тета	Π, π – пі	Ω, ω – омега

Додаток Б

Кратні та часткові одиниці

Множник	Назва	Позначення	Множник	Назва	Позначення
10^{18}	екса	Е	10^{-1}	деци	д
10^{15}	пета	П	10^{-2}	санті	с
10^{12}	тера	Т	10^{-3}	мілі	м
10^{9}	гіга	Г	10^{-6}	мікро	мк
10^{6}	мега	М	10^{-9}	нано	н
10^{3}	кіло	к	10^{-12}	піко	п
10^{2}	гекто	г	10^{-15}	фемто	ф
10	дека	да	10^{-18}	атто	а

Додаток В

Одиниці вимірювання основних величин в системі СІ

Величина	Одиниця виміру	Позначення
Довжина	Метр	м
Маса	Кілограм	кг
Час	Секунда	с
Кут	Радіан	рад
Площа	Квадратний метр	м^2
Об’єм	Кубічний метр	м^3
Швидкість	Метр за секунду	м/с
Кутова швидкість	Радіан за секунду	рад/с
Прискорення	Метр за секунду в квадраті	м/с^2
Кутове прискорення	Радіан за секунду в квадраті	рад/с^2
Сила	Ньютон	Н
Тиск (напруження)	Паскаль	Па = Н/м^2
Робота і енергія	Джоуль	Дж = Н·м
Момент сили	Ньютон на метр	Н·м
Момент інерції	Кілограм на метр в квадраті	кг·м^2
Кількість руху	Ньютон на секунду	Н·с = кг·м/с

Додаток Г

Спеціальні значення тригонометричних функцій

Кут	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**270°**
sin α	0	0,5	0,707	0,866	1	0	-1
cos α	1	0,866	0,707	0,5	0	-1	0
tg α	0	0,577	1	1,732	±∞	0	±∞
ctg α	±∞	1,732	1	0,577	0	±∞	0

Додаток Д

Похідні елементарних функцій

1. $(a)' = 0$, де a = const	2. $(x)' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$	4. $(e^x)' = e^x$
5. $(e^{nx})' = ne^{nx}$	6. $(\ln x)' = 1/x$
7. $(\lg x)' = 0{,}4343/x$	8. $(\log_a x)' = \log_a e/x$
9. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	10. $(\sin x)' = \cos x$
11. $(\cos x)' = -\sin x$,	12. $(\mathrm{tg}\, x)' = 1/\cos^2 x$
13. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -1/\sin^2 x$	14. $(\arcsin x)' = 1/(1-x^2)^{1/2}$
15. $(\arccos x)' = -1/(1-x^2)^{1/2}$	16. $(\mathrm{arctg}\, x)' = 1/(1+x^2)$
17. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -1/(1+x^2)$	18. $(\sec x)' = \mathrm{tg}\, x \cdot \sec x$
19. $(\mathrm{cosec}\, x)' = -\mathrm{ctg}\, x \cdot \mathrm{cosec}\, x$	20. $(\mathrm{arcsec}\, x)' = -1/[x \cdot (x^2-1)^{1/2}]$

Додаток Є

Інтеграли елементарних функцій

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1);$

2. $\int e^x dx = e^x + C;$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C;$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C;$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + C;$

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C;$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

14. $\int tg\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C;$

15. $\int ctg\, x\, dx = \ln|\sin x| + C;$

16. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C;$

17. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

18. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

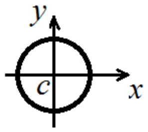
Додаток Ж

Моменти інерції однорідних тіл

1. Момент інерції ***матеріальної точки*** маси m, яка знаходиться на відстані R від осі обертання

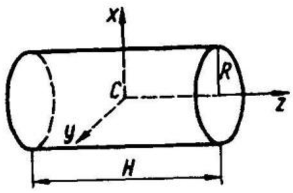
$$I = mR^2$$

2. Момент інерції колової тонкої ***пластинки*** радіуса R і маси m



$$I_x = \frac{mR^2}{4}, \quad I_y = \frac{mR^2}{4}, \quad I_{Cz} = \frac{mR^2}{2}.$$

3. Момент інерції ***прямого колового циліндра*** радіуса R і маси m

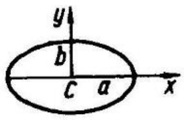


$$I_x = I_y = \frac{m}{4}\left(\frac{H^2}{3} + R^2\right), \quad I_z = \frac{mR^2}{2}.$$

4. Момент інерції ***кулі*** радіуса R і маси m

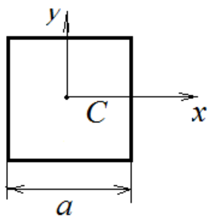
$$I_x = I_y = I_z = \frac{2mR^2}{5}$$

5. Моменти інерції ***еліпса***



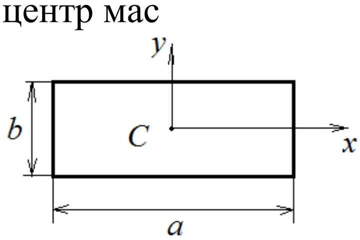
$$I_x = \frac{mb^2}{4}, \quad I_y = \frac{ma^2}{4}, \quad I_{Cz} = \frac{m\left(a^2 + b^2\right)}{4}.$$

6. Моменти інерції ***квадрата*** маси m зі стороною a



$$I_x = I_y = \frac{ma^2}{12}, \qquad I_z = \frac{ma^2}{6}.$$

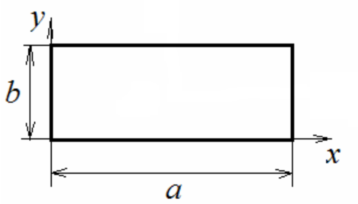
7. Моменти інерції ***прямокутника*** відносно осей, що проходять через його центр мас



$$I_x = \frac{mb^2}{12}, \qquad I_y = \frac{ma^2}{12},$$

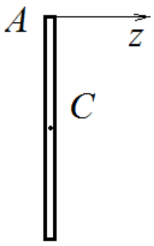
$$I_z = \frac{m\left(a^2 + b^2\right)}{12}.$$

Моменти інерції ***прямокутника*** відносно осей, що проходять через його сторони



$$I_x = \frac{mb^2}{3}, \qquad I_y = \frac{ma^2}{3}.$$

8. Момент інерції ***стержня*** маси m і довжини l



а) відносно осі, що проходить через його твірну

$$I_z = \frac{ml^2}{3};$$

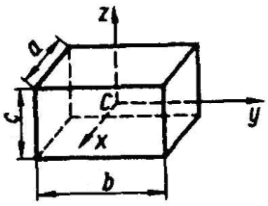
б) відносно осі, що проходить через його центр

$$I_C = \frac{ml^2}{12}.$$

9. Момент інерції ***тонкого кільця*** або ***полого циліндра*** радіуса R і маси m відносно осі, що проходить через його центр перпендикулярно площині кільця

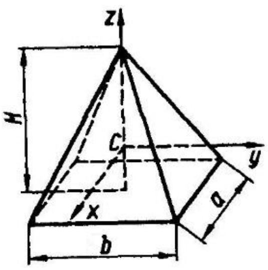
$$I_C = mR^2.$$

10. Момент інерції ***прямокутного паралелепіпеда*** маси m



$$I_x = \frac{m\left(b^2 + c^2\right)}{12}, \quad I_y = \frac{m\left(a^2 + c^2\right)}{4}, \quad I_z = \frac{m\left(a^2 + b^2\right)}{4}.$$

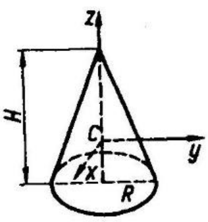
11. Момент інерції прямокутної піраміди маси m



$$I_x = \frac{m}{20}\left(\frac{3H^2}{4} + b^2\right), \qquad I_y = \frac{m}{20}\left(\frac{3H^2}{4} + a^2\right),$$

$$I_z = \frac{m\left(a^2 + b^2\right)}{20}.$$

12. Момент інерції прямого колового конуса маси m



$$I_x = I_y = \frac{3m}{20}\left(\frac{H^2}{4} + R^2\right), \qquad I_z = \frac{3mR^2}{30}.$$

Зміст